УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-50-57

Я.А. ВОЙНОВА*, Н.Г. КРЫЛОВА, Е.М. ОВСИЮК*****

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 И АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

* *Институт физики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь*
** *Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь*
*** *Мозырский государственный педагогический университет, г. Мозырь, Беларусь*

voinovayanina@mail.ru
nina-kr@tut.by
e.ovsiyuk@mail.ru

Аннотация

Исследуется векторная частица с аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле. После разделения переменных найдены две радиальные системы из 4 и 6 уравнений, соответственно для состояний с четностями $P = (-1)^{j+1}$ и $P = (-1)^j$. Обусловленные аномальным магнитным моментом слагаемые присутствуют только в системе из 6 уравнений, она и исследуется. Чтобы упростить задачу, выполнен переход к нерелятивистскому приближению. Для состояний с $j = 0$ выведено уравнение из класса дважды вырожденного уравнения Гойна. Для состояний с $j = 1, 2, ...$ радиальная система приводится к двум связанным уравнениям 2-го порядка, откуда следует уравнение 4-го порядка. Построены решения Фробениуса этого уравнения, исследована сходимость возникающих степенных рядов. Условие трансцендентности решений дает простую формулу для энергий $E = -\text{const}/n^2$, она едва ли корректно описывает реальный спектр, поскольку не зависит от параметра аномального магнитного момента.

Ключевые слова:
частица со спином 1, аномальный магнитный момент, кулоновское поле, решения Фробениуса, квантование энергии

YA.A. VOYNOVA*, N.G. KRYLOVA, E.M. OVSIYUK*****

SPIN 1 PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT IN THE COULOMB FIELD. NONRELATIVISTIC THEORY

**Institute of Physics, NAS of Belarus, Minsk, Belarus*
** *Belarus State University, Minsk, Belarus*
*** *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

Abstract

After separating the variables in the Duffin–Kemmer equations for a vector particle with anomalous magnetic moment in presence of Coulomb field, there are found two radial systems of 4 and 6 equations respectively for states with parities $P = (-1)^{j+1}$ and $P = (-1)^j$. Depending on the anomalous magnetic moment, the terms are present only in the system of 6 equations, and it is investigated. To simplify the problem, transition to the nonrelativistic approximation is performed. For states with $j = 0$, we have derived a 2-nd order equation belonging to the double confluent of Heun type. For states with $j = 1, 2, ...$, the radial system is reduced to two 2-nd order linked equations, whence the 4-th order equation follows. Frobenius solutions of this equation are constructed. Imposing the known transcendency condition, we derive the formula for the energies $E = -\text{const}/n^2$, which does not depend on the quantum number j and the parameter of anomalous magnetic moment, and therefore cannot correctly describe the physical spectrum.

Keywords:
spin 1 particle, anomalous magnetic moment, Coulomb field, Frobenius solutions, energy quantization

Введение

Известно, что в рамках теории релятивистских волновых уравнений можно предложить так называемые неминимальные уравнения, которые описывают частицы с дополнительными электромагнитными характеристиками, со спектрами спиновых или массовых состояний. В частности, интенсивно исследовались [1–11] уравнения для частиц со спином 1, обладающих помимо электрического заряда аномальным магнитным моментом. Уравнение для векторной частицы в случае внешнего кулоновского поля оказывается очень сложным даже в случае обычной частицы без аномального момента. Эта задача все еще

не исследована полностью [12]. Однако в нерелятивистском пределе уравнение для обычной векторной частицы в кулоновском поле может быть решено точно. В настоящей работе мы исследуем аналогичную нерелятивистскую задачу для частицы с аномальным магнитным моментом.

Кратко содержание работы сводится к следующему. Исследуется квантово-механическая частица со спином 1 и аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле. Исходным является релятивистское уравнение Даффина–Кеммера, в котором введен дополнительный член взаимодействия, обусловленного аномальным магнитным моментом. На основе диагонализации операторов энергии, квадрата и третьей проекции полного момента выполнено разделение переменных. Выведена система уравнений для десяти радиальных функций. Используя диагонализацию оператора пространственного отражения, разбиваем систему на две подсистемы из четырех и шести уравнений, для четностей $P = (-1)^{j+1}$ и $P = (-1)^{j}$, соответственно.

Дополнительные слагаемые, обусловленные аномальным магнитным моментом, присутствуют только в подсистеме из шести уравнений. Эта система уравнений и исследуется. Сначала отдельно рассмотрена относящаяся к классу четности $P = (-1)^{j}$ релятивистская система при $j = 0$. В этом случае задача приводится к дифференциальному уравнению второго порядка. Оно найдено в явном виде и характеризуется очень сложной структурой особых точек.

Чтобы упростить возникающие математические задачи, в радиальных уравнениях выполнен переход к нерелятивистскому приближению. При этом для состояний с $j = 0$ выведено радиальное уравнение, принадлежащее классу дважды вырожденного уравнения Гойна. Строятся его решения фробениусовского типа. В качестве условия квантования использовано ограничение, выделяющее трансцендентные функции Гойна. В результате получен некоторый спектр энергии, который выглядит физически интерпретируемым, однако получаемые таким способом уровни энергии не зависят от параметра аномального момента, в то же время степенные ряды зависят от этого параметра. Для состояний с большими значениями полного углового момента $j = 1, 2, ...$ нерелятивистская радиальная система приводится к двум связанным дифференциальным уравнениям 2-го порядка для двух функций. Методом исключения можно получить уравнения 4-го порядка для каждой из этих функций. Исследованы локальные решения Фробениуса возникающих уравнений, сходимость вовлеченных в них степенных рядов с 8-членными рекуррентными соотношениями, а также возможность использования условия трансцендентности для получения спектра энергий.

1. Разделение переменных в релятивистском уравнении

Исходное уравнение имеет вид (предполагаем использование тетрадного формализма; обозначения в [13])

$$\left\{ i\beta^c \left[i(e^{\beta}_{(c)}\partial_\beta + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abc}(x)) - e' A_c \right] + \right.$$

$$\left. + \lambda \frac{e}{M} F_{\alpha\beta}(x) P j^{\alpha\beta}(x) - M \right\} \Psi = 0, \qquad (1)$$

где свободный параметр λ – безразмерный, P – проективный оператор, выделяющий из 10-компонентной функции векторную составляющую. Ниже используются обозначения

$$P = \begin{vmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad M = \frac{mc}{\hbar}, \quad e' = \frac{e}{c\hbar},$$

$$\Gamma = \lambda \frac{4\alpha}{M}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}. \qquad (2)$$

В сферической тетраде [14] уравнение (1) принимает вид

$$\left[\beta^0 (i\partial_t + \frac{\alpha}{r}) + i(\beta^3 \partial_r + \frac{\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}}{r}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta,\phi} + \frac{\Gamma}{r^2} P j^{03} - M \right] \Phi = 0, \qquad (3)$$

где зависящий от угловых переменных оператор определен равенством

$$\Sigma_{\theta,\phi} = i\, \beta^1 \partial_\theta + \beta^2 \frac{i\partial_\phi + i j^{12} \cos\theta}{\sin\theta}\,.$$

В используемом тетрадном базисе выражения для компонент оператора полного момента имеют шредингеровскую структуру [14]:

$$j_1 = l_1 + \frac{\cos\phi}{\sin\theta} i j^{12}, \quad j_2 = l_2 + \frac{\sin\phi}{\sin\theta} i j^{12},$$

$$j_3 = l_3, \quad j^{12} = \beta^1\beta^2 - \beta^2\beta^1. \qquad (4)$$

Ниже будем использовать волновую функцию и явные выражения для матриц Даффина–Кеммера [14] в циклическом представлении, где оператор третьей проекции спина ij^{12} имеет диагональный вид:

$$i j^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_3 \end{vmatrix}, \quad t_3 = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Выражение для проективного оператора P не меняется при переходе к циклическому базису.

Система радиальных уравнений для обычной векторной частицы в кулоновском поле известна [12]. Чтобы получить обобщенную систему уравнений для векторной частицы с аномальным моментом, достаточно найти явный вид дополнительного слагаемого в уравнении

$$\frac{\Gamma}{r^2} P j^{03} = \frac{\Gamma}{r^2} P(\beta^0\beta^3 - \beta^3\beta^0). \qquad (5)$$

Здесь оператор Pj^{03} представляет собой матрицу размерности 10, у которой отличны от нуля только элементы $(Pj^{03})_{13} = (Pj^{03})_{31} = -1$.

Структура 10-компонентной волновой функции векторной частицы с квантовыми числами ϵ, j, m задается соотношениями

$$\Psi(x) = \{\Phi_0(x), \vec{\Phi}(x), \vec{E}(x), \vec{H}(x)\},$$

$$\Phi_0(x) = e^{-i\epsilon t} f_0(r) D_0,$$

$$\vec{\Phi}(x) = e^{-i\epsilon t} \left| \begin{array}{c} f_1(r) D_{-1} \\ f_2(r) D_0 \\ f_3(r) D_{+1} \end{array} \right|,$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\epsilon t} \left| \begin{array}{c} E_1(r) D_{-1} \\ E_2(r) D_0 \\ E_3(r) D_{+1} \end{array} \right|,$$

$$\vec{H}(x) = e^{-i\epsilon t} \left| \begin{array}{c} H_1(r) D_{-1} \\ H_2(r) D_0 \\ H_3(r) D_{+1} \end{array} \right|,$$

где используются D-функции Вигнера $D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi, \theta, 0)$, $\sigma = 0, -1, +1$. После необходимых вычислений находим систему радиальных уравнений

$$-(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})E_2 - \frac{\nu}{r}(E_1 + E_3) - \frac{\Gamma}{r^2} f_2 = m f_0,$$

$$+i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_1 + i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = m f_1,$$

$$i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_2 - i\frac{\nu}{r}(H_1 - H_3) - \frac{\Gamma}{r^2} f_0 = m f_2,$$

$$+i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_3 - i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})H_3 - i\frac{\nu}{r}H_2 = m f_3,$$

$$-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})f_1 + \frac{\nu}{r} f_0 = m E_1,$$

$$-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})f_2 - \frac{d}{dr} f_0 = m E_2,$$

$$-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})f_3 + \frac{\nu}{r} f_0 = m E_3,$$

$$-i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})f_1 - i\frac{\nu}{r} f_2 = m H_1,$$

$$+i\frac{\nu}{r}(f_1 - f_3) = m H_2,$$

$$+i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})f_3 + i\frac{\nu}{r} f_2 = m H_3. \qquad (6)$$

Одновременно с операторами $\vec{j}^{\,2}, j_3$ будем диагонализировать оператор пространственной инверсии $\hat{\Pi}$. В представлении декартовой тетрады и декартова базиса матриц β^a этот оператор имеет вид

$$\hat{\Pi} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +I \end{array} \right| \hat{P},$$

$$\hat{P}\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}). \qquad (7)$$

После перехода к сферической тетраде, а затем к циклическому представлению матриц Даффина–Кеммера получаем другое представление:

$$\hat{\Pi}' = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_3 \end{array} \right| \hat{P},$$

$$\Pi_3 = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right|. \qquad (8)$$

Уравнение на собственные значения $\hat{\Pi}'\Psi = P\Psi$ дает два решения:

$$P = (-1)^{j+1}, \quad f_0 = f_2 = 0, \; f_3 = -f_1,$$
$$E_3 = -E_1, \; E_2 = 0, \; H_3 = H_1$$

и

$$P = (-1)^j, \quad f_3 = f_1,$$
$$E_3 = E_1, \; H_3 = -H_1, \; H_2 = 0.$$

Для состояний с $P = (-1)^{j+1}$ имеем четыре уравнения:

$$+i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_1 + i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = m f_1,$$

$$-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})f_1 = m E_1, \; -i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})f_1 = m H_1,$$

$$2i\frac{\nu}{r} f_1 = m H_2. \qquad (9)$$

Для этого класса решений аномальный магнитный момент никак себя не проявляет в присутствии внешнего кулоновского поля. Система допускает полное решение для основной функции f_1:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + (\epsilon + \frac{\alpha}{r})^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right) f_1 = 0. \qquad (10)$$

Это уравнение возникает в теории скалярной частицы во внешнем кулоновском поле, его точные решения и соответствующий спектр энергии известны.

Для состояний с четностью $P = (-1)^j$ имеем систему из шести уравнений:

$$-(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})E_2 - 2\frac{\nu}{r}E_1 - \frac{\Gamma}{r^2} f_2 = m f_0,$$

$$+i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_1 + i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})H_1 = m f_1,$$

$$+i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 - \frac{\Gamma}{r^2} f_0 = m f_2,$$

$$-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})f_2 - \frac{d}{dr} f_0 = m E_2,$$

$$-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})f_1 + \frac{\nu}{r} f_0 = m E_1,$$

$$i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})f_1 + i\frac{\nu}{r} f_2 = -m H_1. \qquad (11)$$

2. Случай минимального значения момента $j = 0$

Для состояний с минимальным $j = 0$ нужно использовать более простую подстановку:

$$\Phi_0 = e^{-i\epsilon t} f_0(r), \quad \vec{\Phi} = e^{-i\epsilon t} \left| \begin{array}{c} 0 \\ f_2(r) \\ 0 \end{array} \right|,$$

$$\vec{E} = e^{-i\epsilon t} \left| \begin{array}{c} 0 \\ E_2(r) \\ 0 \end{array} \right|, \quad \vec{H} = e^{-i\epsilon t} \left| \begin{array}{c} 0 \\ H_2(r) \\ 0 \end{array} \right|.$$

В этом случае получаем четыре радиальные уравнения:

$$-(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})E_2 - \frac{\Gamma}{r^2} f_2 = m f_0,$$

$$i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_2 - \frac{\Gamma}{r^2} f_0 = m f_2,$$

$$-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r}) f_2 - \frac{d}{dr} f_0 = m E_2, \quad H_2 = 0. \qquad (12)$$

Исключая E_2, находим уравнения для функций f_0, f_2:

$$i\left((\epsilon + \frac{\alpha}{r})\frac{d}{dr} + \frac{2\epsilon}{r} + \frac{\alpha + i\Gamma m}{r^2}\right) f_2 +$$

$$+\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - m^2\right) f_0 = 0,$$

$$f_2 = i\frac{r^2}{P(r)}\left((\epsilon + \frac{\alpha}{r})\frac{d}{dr} - \frac{i\Gamma m}{r^2}\right) f_0,$$

$$P(r) = (\epsilon^2 - m^2)r^2 + 2\epsilon\alpha r + \alpha^2.$$

Исключая далее f_2, получим уравнение 2-го порядка для функции $f \equiv f_0$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \Big(-2xP^{-1} + \Big(2\alpha^2 x + 6E\alpha x^2 + 4E^2 x^3\Big)P^{-2} +$$

$$+\Big((2E^2 - 2E^4)x^5 + (4E\alpha - 6E^3\alpha)x^4 +$$

$$+(2\alpha^2 - 6E^2\alpha^2)x^3 - 2E\alpha^3 x^2\Big)P^{-3}\Big)\frac{df}{dx} +$$

$$+\Big(x^2 P^{-1} + \Big(-2ixE\gamma + \gamma^2 - i\alpha\gamma\Big)P^{-2} +$$

$$+\Big((-2iE\gamma + 2iE^3\gamma)x^3 + (-2i\alpha\gamma + 4iE^2\alpha\gamma)x^2 +$$

$$+2iE\alpha^2\gamma x\Big)P^{-3}\Big) f = 0,$$

где используются безразмерные переменные x, E, γ:

$$x = mr, \quad E = \frac{\epsilon}{m}, \quad \gamma = m\Gamma, \quad \alpha = \frac{1}{137}.$$

Полученное уравнение имеет сложный набор сингулярных точек. В следующем разделе выведем его нерелятивистский аналог, который будет существенно проще.

3. Нерелятивистское приближение, случай $j = 0$

В системе уравнений (12) осуществим переход к нерелятивистскому приближению. Сначала исключим нединамическую переменную $f_0(r)$:

$$i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_2 - \frac{\Gamma}{mr^2}\left(-(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})E_2 - \frac{\Gamma}{r^2} f_2\right) = m f_2,$$

$$-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r}) f_2 - \frac{1}{m}\frac{d}{dr}\left(-(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})E_2 - \frac{\Gamma}{r^2} f_2\right) = m E_2.$$

Затем вводим большие и малые компоненты [14] $f_2 = (B_2 + M_2)$, $iE_2 = (B_2 - M_2)$. Одновременно выделим энергию покоя формальной заменой $\epsilon \Longrightarrow m + E$, где E – нерелятивистская энергия. В результате получаем

$$(E + \frac{\alpha}{r})(B_2 - M_2) - \frac{\Gamma}{mr^2}[i(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})(B_2 - M_2) -$$

$$-\frac{\Gamma}{r^2}(B_2 + M_2)] = 2mM_2,$$

$$(E + \frac{\alpha}{r})(B_2 + M_2) - \frac{1}{m}\frac{d}{dr}[-(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})(B_2 - M_2) -$$

$$-\frac{i\Gamma}{r^2}(B_2 + M_2)] = -2mM_2.$$

Чтобы получить уравнение для большой компоненты B_2, сложим последние два уравнения и после этого малой компонентой M_2 в сравнении с большой B_2 можно пренебречь:

$$2(E + \frac{\alpha}{r})B_2 - \frac{\Gamma}{mr^2}\left(i(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}) - \frac{\Gamma}{r^2}\right) B_2 +$$

$$+\frac{1}{m}\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{i\Gamma}{r^2}\right) B_2 = 0.$$

Отсюда находим (пусть $B_2(r) = R(r)$)

$$\left\{\frac{d}{dr}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{i\Gamma}{r^2}) + 2m(E + \frac{\alpha}{r}) -\right.$$

$$\left.-\frac{i\Gamma}{r^2}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{i\Gamma}{r^2})\right\} R(r) = 0. \qquad (13)$$

Учитывая, что по физическим соображениям параметр Γ чисто мнимый, сделаем замену $i\Gamma \Longrightarrow \Gamma$:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} +$$

$$+\left(2m(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{2}{r^2} - \frac{4\Gamma}{r^3} - \frac{\Gamma^2}{r^4}\right) R = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) имеет две нерегулярные особые точки $r = 0$ и $r = \infty$, обе ранга 2, оно относится к классу дважды вырожденного уравнения Гойна [15]. Локальные решения около точки $r = 0$ строим в виде

$$R = e^{Ar} r^B e^{\frac{C}{r}} f(r). \qquad (15)$$

Для функции $f(r)$ получаем уравнение

$$f'' + \left(2A + \frac{2B + 2}{r} - \frac{2C}{r^2}\right) f' +$$

$$+\left(2mE+A^2+\frac{2AB+2m\alpha+2A}{r}+\right.$$
$$+\frac{B^2+B-2AC-2}{r^2}+\frac{-4\Gamma-2BC}{r^3}+$$
$$\left.+\frac{-\Gamma^2+C^2}{r^4}\right)f=0.$$

Накладываем ограничения

$$2mE+A^2=0,\quad -\Gamma^2+C^2=0,\quad 4\Gamma+2BC=0,$$

это дает

$$A=\pm\sqrt{-2mE}\quad (E<0),$$

$$C=\pm\Gamma,\quad B=-\frac{2\Gamma}{C}=\mp 2.$$

Для описания связанных состояний используем следующие значения:

$$\Gamma>0,\quad A=-\sqrt{-2mE},\quad C=-\Gamma,\quad B=+2;$$

$$\Gamma<0,\ \ A=-\sqrt{-2mE},\ \ C=+\Gamma,\ \ B=-2. \quad (16)$$

С учетом (16) уравнение упрощается

$$f''+\left(2A+\frac{2B+2}{r}-\frac{2C}{r^2}\right)f'+$$
$$+\left(\frac{2AB+2m\alpha+2A}{r}+\frac{B^2+B-2AC-2}{r^2}\right)f=0.$$

Для двух подслучаев оно выглядит по-разному:

$$\Gamma>0,\ \ f''+\left(-2\sqrt{-2mE}+\frac{6}{r}+\frac{2\Gamma}{r^2}\right)f'+$$
$$+\left(\frac{-6\sqrt{-2mE}+2m\alpha}{r}+\right.$$
$$\left.+\frac{4-2\Gamma\sqrt{-2mE}}{r^2}\right)f=0; \quad (17)$$

$$\Gamma<0,\ \ f''+\left(-2\sqrt{-2mE}-\frac{2}{r}-\frac{2\Gamma}{r^2}\right)f'+$$
$$+\left(\frac{+2\sqrt{-2mE}+2m\alpha}{r}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\Gamma\sqrt{-2mE}}{r^2}\right)f=0. \quad (18)$$

Оба эти уравнения можно представить символически так:

$$f''+\left(a+\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r^2}\right)f'+\left(\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}\right)f=0. \quad (19)$$

Решения уравнения (19) строим в виде степенных рядов с трехчленными рекуррентными соотношениями:

$$[a(k-1)+b_1]c_{k-1}+[k(k-1)+a_1k+b_2]c_k+$$
$$+a_2(k+1)c_{k+1}=0 \quad (20)$$

или в краткой форме

$$P_{k-1}c_{k-1}+P_kc_k+P_{k+1}c_{k+1}=0,$$

где

$$P_{k-1}=a(k-1)+b_1,\quad P_k=k(k-1)+a_1k+b_2,$$
$$P_{k+1}=a_2(k+1).$$

Делим соотношение (20) на $c_{k-1}k^2$ и устремляем k к бесконечности: $k\to\infty$

$$\frac{1}{k^2}[a(k-1)+b_1]+\frac{1}{k^2}[k(k-1)+a_1k+b_2]\frac{c_k}{c_{k-1}}+$$
$$+\frac{1}{k^2}a_2(k+1)\frac{c_{k+1}}{c_k}\frac{c_k}{c_{k-1}}=0,\ \lim_{k\to\infty}\frac{c_k}{c_{k-1}}=r.$$

В результате получаем уравнение, определяющее радиус сходимости: значению $r=0$ отвечает радиус $R_{\text{conv}}=\frac{1}{|r|}=\infty$.

Приведем явный вид величин, задающих рекуррентные соотношения (формулы немного различаются для двух подслучаев):

$$\Gamma>0,\qquad P_{k+1}=2\Gamma(k+1),$$
$$P_{k-1}=-2\sqrt{-2mE}\,(k-1)-6\sqrt{-2mE}+2m\alpha,$$
$$P_k=k(k-1)+6k+4-2\sqrt{-2mE}\,\Gamma, \quad (21)$$
$$\Gamma<0,\qquad P_{k+1}=-2\Gamma(k+1),$$
$$P_{k-1}=-2\sqrt{-2mE}(k-1)+2\sqrt{-2mE}+2m\alpha,$$
$$P_k=k(k-1)-2k+2\sqrt{-2mE}\,\Gamma. \quad (22)$$

В качестве условия квантования используем условие трансцендентности функций Гойна [15]

$$\Gamma>0,\quad P_{k-1}=-2\sqrt{-2mE}(k-1)-$$
$$-6\sqrt{-2mE}+2m\alpha=0,$$
$$\Gamma<0,\quad p_{k-1}=-2\sqrt{-2mE}(k-1)+$$
$$+2\sqrt{-2mE}+2m\alpha\ =0.$$

Отсюда находим две разные формулы для энергий в зависимости от знака Γ:

$$\Gamma>0,\ \ E=-\frac{m\alpha^2}{2}\frac{1}{(k+2)^2},\quad k\geq 2,$$

$$\Gamma<0,\ \ E=-\frac{m\alpha^2}{2}\frac{1}{(k-2)^2},\quad k>2. \quad (23)$$

Формулы выглядят физически интерпретируемыми лишь частично, поскольку получаемые таким способом уровни энергии не зависят от параметра аномального момента Γ. В то же время сами радиальные решения $R(r)$ зависят от Γ. Поэтому соотношения (23) едва ли описывают правильные спектры энергии.

4. Нерелятивистские уравнения, $j = 1, 2, ...$

Исходим из релятивистских радиальных уравнений:

$$-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 - 2\frac{\nu}{r}E_1 - \frac{\Gamma}{r^2 f_2} = mf_0,$$

$$+i\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 = mf_1,$$

$$i\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 - \frac{\Gamma}{r^2}f_0 = mf_2,$$

$$-i\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{d}{dr}f_0 = mE_2,$$

$$-i\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_1 + \frac{\nu}{r}f_0 = mE_1,$$

$$i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 = -mH_1.$$

Исключим нединамические переменные f_0, H_1. Оставшиеся четыре уравнения примут вид

$$-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{1}{m}\left[i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2\right] +$$

$$+i\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1 = mf_1,$$

$$-\frac{\nu}{r}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1 + \frac{\Gamma}{r^2}f_2\right] -$$

$$-i\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_1 = mE_1,$$

$$+i\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2 + 2i\frac{\nu}{r}\frac{1}{m}\left[i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2\right] +$$

$$+\frac{\Gamma}{r^2}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1 + \frac{\Gamma}{r^2}f_2\right] = mf_2,$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1 + \frac{\Gamma}{r^2}f_2\right] -$$

$$-i\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_2 = mE_2.$$

Большие и малые компоненты вводятся соотношениями

$$f_1 = (\Psi_1 + \psi_1), \quad iE_1 = (\Psi_1 - \psi_1),$$

$$f_2 = (\Psi_2 + \psi_2), \quad iE_2 = (\Psi_2 - \psi_2). \qquad (24)$$

Тогда предыдущие уравнения дают (одновременно выделяем энергию покоя заменой $\epsilon = m + E$)

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)(\Psi_1+\psi_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu}{r}(\Psi_2+\psi_2)\right] + \left(E+\frac{\alpha}{r}\right)(\Psi_1-\psi_1) = 2m\psi_1,$$

$$\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)(\Psi_1+\psi_1) - \frac{\nu}{r}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)(\Psi_2-\psi_2)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\nu}{r}(\Psi_1-\psi_1) + \frac{i\Gamma}{r^2}(\Psi_2+\psi_2)\right] = -2m\psi_1,$$

$$\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)(\Psi_2-\psi_2) - 2\frac{\nu}{r}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)(\Psi_1+\psi_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu}{r}(\Psi_2+\psi_2)\right] + \frac{\Gamma}{r^2}\frac{1}{m}\left[-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)(\Psi_2-\psi_2)-\right.$$

$$\left.-2i\frac{\nu}{r}(\Psi_1-\psi_1) + \frac{\Gamma}{r^2}(\Psi_2+\psi_2)\right] = 2m\psi_2,$$

$$(E+\frac{\alpha}{r})(\Psi_2+\psi_2) + \frac{d}{dr}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)(\Psi_2-\psi_2)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\nu}{r}(\Psi_1-\psi_1) + \frac{i\Gamma}{r^2}(\Psi_2+\psi_2)\right] = -2m\psi_2.$$

Чтобы получить нерелятивистские радиальные уравнения для больших компонент Ψ_1 и Ψ_2, складываем уравнения в каждой паре, и затем пренебрегаем малыми компонентами в сравнении с большими. В результате находим

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\frac{\beta-\lambda r}{r}-\frac{2\nu^2}{r^2}\right)\Psi_1 -$$

$$-\nu\frac{2r+\Gamma}{r^3}\Psi_2 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\frac{\beta-\lambda r}{r}-\frac{2\nu^2}{r^2}-\frac{2}{r^2}-\frac{4\Gamma}{r^3}-\frac{\Gamma^2}{r^4}\right)\Psi_2 -$$

$$-2\nu\frac{2r+\Gamma}{r^3}\Psi_1 = 0. \qquad (25)$$

Поскольку Γ чисто мнимый параметр, то в уравнениях сделана замена $i\Gamma$ на Γ, а также использованы обозначения

$$2mE = -\lambda, \quad \lambda > 0, \quad 2m\alpha = \beta,$$

$$2\nu^2 = j(j+1) \equiv L. \qquad (26)$$

Методом исключения можно получить уравнения 4-го порядка для каждой из функций $\Psi_1(r)$ и $\Psi_2(r)$. В частности, для функции Ψ_1 получаем уравнение

$$\frac{d^4}{dr^4}\Psi_1 + \left(-\frac{4}{2r+\Gamma}+\frac{10}{r}\right)\frac{d^3}{dr^3}\Psi_1 +$$

$$+\left(-2\lambda+\frac{2\Gamma\beta-24}{\Gamma}\frac{1}{r}+\frac{22-2L}{r^2}-\frac{4\Gamma}{r^3}-\frac{\Gamma^2}{r^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{48}{\Gamma(2r+\Gamma)}+\frac{8}{(2r+\Gamma)^2}\right)\frac{d^2}{dr^2}\Psi_1 +$$

$$+\left(\frac{-8L+64-10\Gamma^2\lambda-4\Gamma\beta}{\Gamma^2 r}+\frac{4L-24+8\Gamma\beta}{\Gamma r^2}+\right.$$

$$+\frac{8-6L}{r^3}-\frac{8\Gamma}{r^4}-\frac{2\Gamma^2}{r^5}+$$

$$\left.+\frac{4\Gamma^2\lambda+16L-128+8\Gamma\beta}{\Gamma^2(2r+\Gamma)}-\frac{32}{\Gamma(2r+\Gamma)^2}\right)\frac{d}{dr}\Psi_1 +$$

$$+\left(\lambda^2+\frac{16\Gamma^2\lambda+64L+32\Gamma\beta-2\beta\lambda\Gamma^3}{\Gamma^3 r}+\right.$$
$$+\frac{-10\Gamma^2\lambda-24L-12\Gamma\beta+\beta^2\Gamma^2+2\lambda L\Gamma^2}{\Gamma^2 r^2}+$$
$$+\frac{4\Gamma^2\lambda+4\Gamma\beta+8L-2\Gamma\beta L}{\Gamma r^3}-\frac{\Gamma^2\beta}{r^5}+$$
$$+\frac{-4\Gamma\beta+L^2+\Gamma^2\lambda-4L}{r^4}+\frac{-32\Gamma^2\lambda-128L-64\Gamma\beta}{\Gamma^3(2r+\Gamma)}+$$
$$\left.+\frac{-32L-8\Gamma^2\lambda-16\Gamma\beta}{\Gamma^2(2r+\Gamma)^2}\right)\Psi_1=0.$$

Символически структура уравнения записывается так (пусть $\Psi_1=F$)

$$\frac{d^4}{dr^4}F+\left(-\frac{4}{2r+\Gamma}+\frac{10}{r}\right)\frac{d^3}{dr^3}F+$$
$$+\left(-2\lambda+\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r^2}+\frac{a_3}{r^3}+\frac{a_4}{r^4}+\frac{a_5}{2r+\Gamma}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_6}{(2r+\Gamma)^2}\right)\frac{d^2}{dr^2}F+\left(\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}+\frac{b_3}{r^3}+\frac{b_4}{r^4}+\frac{b_5}{r^5}+\right.$$
$$\left.+\frac{b_6}{2r+\Gamma}+\frac{b_7}{(2r+\Gamma)^2}\right)\frac{d}{dr}F+\left(\lambda^2+\frac{c_1}{r}+\frac{c_2}{r^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{c_3}{r^3}+\frac{c_4}{r^4}+\frac{c_5}{r^5}+\frac{c_6}{2r+\Gamma}+\frac{c_7}{(2r+\Gamma)^2}\right)F=0.$$

В окрестности регулярной особой точки $r=-\Gamma/2$ это уравнение упрощается:

$$\left(\frac{d^4}{dr^4}-\frac{4}{2r+\Gamma}\frac{d^3}{dr^3}+\frac{a_6}{(2r+\Gamma)^2}\frac{d^2}{dr^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{b_7}{(2r+\Gamma)^2}\frac{d}{dr}+\frac{c_7}{(2r+\Gamma)^2}\right)F=0.$$

Ищем его решения в виде $F=(2r+\Gamma)^s$. Для индекса s получаем при этом алгебраическое уравнение четвертой степени с простыми корнями:

$$\Psi_1=(2r+\Gamma)^s,\qquad s=0,\ -1,\ -3,\ -4\ . \tag{27}$$

Только при $s=0$ решения ведут себя в точке $r=-\Gamma/2$ регулярно. Точка $r=0$ является нерегулярной особой точкой и имеет ранг 2. Поэтому решения уравнения 4-го порядка в окрестности точки $r=0$ ищем в виде

$$\Psi_1(r)=e^{Dr}r^A e^{B/r}f(r)\ . \tag{28}$$

Дальнейший анализ технически довольно громоздкий. Параметры D,A,B выбираются так, чтобы упростить вид уравнения для $f(r)$. Приводим только конечный результат.

Существуют четыре различных решения:

$$(I)\quad D=-\sqrt{-2\epsilon},\quad B=0,\quad A=0,$$

$$F_1=e^{Dr}f_1(r); \tag{29}$$

$$(II)\quad D=-\sqrt{-2\epsilon},\quad B=0,\quad A=-1,$$

$$F_2=e^{Dr}\frac{1}{r}f_2(r); \tag{30}$$

$$(III)\quad D=-\sqrt{-2\epsilon},\quad B=+\Gamma,\quad A=-1,$$

$$F_3=e^{Dr}\frac{1}{r}e^{+\Gamma/r}f_3(r); \tag{31}$$

$$(IV)\quad D=-\sqrt{-2\epsilon},\quad B=-\Gamma,\quad A=+3,$$

$$F_4=e^{Dr}r^3e^{-\Gamma/r}f_4(r). \tag{32}$$

Решения для функций $f_1(r),f_2(r)$ строятся в виде степенных рядов с восьмичленными рекуррентными соотношениями. Решения для функций $f_3(r),f_4(r)$ также строятся в виде степенных рядов, но с девятичленными рекуррентными соотношениями. Исследована сходимость этих четырех степенных рядов методом Пуанкаре–Перрона. Возможные радиусы сходимости следующие: $R_{\text{conv}}=|\Gamma|/2,\quad\infty$. Для описания связанных состояний можно использовать решения F_3, $\Gamma<0$ и F_4, $\Gamma>0$.

Условие трансцендентности решений здесь также дает формулу для энергий в виде $E=-\text{const}/n^2$. Уровни энергии не зависят от параметра аномального магнитного момента. Последнее обстоятельство указывает на их непригодность для описания связанных состояний в системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф19М-032 для молодых ученых и гранта БРФФИ Ф20РА-007 в рамках сотрудничества НАН Беларуси и Румынской Академии.

Литература

1. *Плетюхов В.А., Редьков В.М., Стражев В.И.* Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы. Минск: Беларуская навука, 2015. 328 с.
2. Elementary particles with internal structure in external field. I / *V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov* // General Theory. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2018. 404 p.
3. Elementary particles with internal structure in external field. II / *E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, O.V Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov* // Physical Problems. Inc. USA: Nova Science Publishers. 2018. 402 p.
4. *Corben H.C., Schwinger J.* The electromagnetic properties of mesotrons // Phys. Rev. 1940. Vol. 58. P. 953.
5. *Shamaly A., Capri A.Z.* Unified theories for massive spin 1 fields // Canadian J. of Physic. 1973. Vol. 51. P. 1467–1470.
6. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / *E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov.* In S. Griffin (Eds.) Quaternions: Theory and Applications. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2017. P. 47–84.
7. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / *E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov* In S. Griffin

(Eds.) Quaternions: Theory and Applications. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2017. P. 11–46.
8. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field / *V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. Vol. 20. No 1. P. 21–39.
9. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / *V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2018. Vol. 21. No 1. P. 1–20.
10. *Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M.* On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2010. Vol. 13. No 4. P. 352–367.
11. *Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Voynova Ya.A., Red'kov V.M.* Quantum mechanics of spin 1 particle with quadrupole moment in external uniform magetic field // Problems of Physics, Mathemativs, and Thechnics. 2017. Vol. 32(3). P. 18–27.
12. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / *E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Balkan Society of Geometers Proceedings. 2018. Vol. 25. P. 59–78.
13. *Red'kov V.M.* Fields in Riemannian space and the Lorentz group. Minsk: Belarusian Science, 2009. 486 p.
14. *Red'kov V.M.* Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrödinger basis. Minsk: Belarusian Science, 2011. 339 p.
15. *Ronveaux A.* Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.

References

1. *Pletyukhov V.A., Red'kov V.M., Strazhev V.I.* Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom. Minsk: Belarusian Science. 2015. 328 p.
2. Elementary particles with internal structure in external field. I / *V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov* // General Theory. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2018. 404 p.
3. Elementary particles with internal structure in external field. II / *E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, O.V Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov* // Physical Problems. Inc. USA: Nova Science Publishers. 2018. 402 p.
4. *Corben H.C., Schwinger J.* The electromagnetic properties of mesotrons // Phys. Rev. 1940. Vol. 58. P. 953.
5. *Shamaly A., Capri A.Z.* Unified theories for massive spin 1 fields // Canadian Journal of Physic. 1973. Vol. 51. P. 1467–1470.
6. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / *E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov.* In S. Griffin (Eds.) Quaternions: Theory and Applications. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2017. P. 47–84.
7. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / *E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov* In S. Griffin (Eds.) Quaternions: Theory and Applications. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2017. P. 11–46.
8. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field / *V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. Vol. 20. No 1. P. 21–39.
9. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / *V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2018. Vol. 21. No 1. P. 1–20.
10. *Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M.* On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2010. Vol. 13. No. 4. P. 352–367.
11. *Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Voynova Ya.A., Red'kov V.M.* Quantum mechanics of spin 1 particle with quadrupole moment in external uniform magetic field // Problems of Physics, Mathemativs, and Thechnics. 2017. Vol. 32(3). P. 18–27.
12. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / *E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Balkan Society of Geometers Proceedings. 2018. Vol. 25. P. 59–78.
13. *Red'kov V.M.* Fields in Riemannian space and the Lorentz group. Minsk: Belarusian Science, 2009. 486 p.
14. *Red'kov V.M.* Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrödinger basis. Minsk: Belarusian Science, 2011. 339 p.
15. *Ronveaux A.* Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.

Статья поступила в редакцию 21.07.2020.