УДК 515.1,514.74
DOI 10.19110/1994-5655-2019-3-8-12

А.В. ЖУБР

ПОЛУСПИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

avzhubr@gmail.com

A.V. ZHUBR

TWISTED SPIN STRUCTURES

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

Аннотация

Рассматривается некоторое обобщение понятия спинорной структуры на векторном расслоении, позволяющее вводить подобные структуры на произвольных ориентированных расслоениях (а не только имеющих тривиальный двумерный класс Штифеля-Уитни). Устанавливаются некоторые общие свойства таких «квазиспинорных» структур.

Ключевые слова:
гомотопия, векторное расслоение, спинорная структура, различающий класс

Abstract

The purpose of this paper is to consider in greater detail one generalization of the notion of spin structure on an oriented vector bundle with zero w_2 class to the case of all oriented vector bundles (with whatever w_2); this generalization was introduced somewhat briefly in one of the author's previous articles [1] . Detailed definitions for these generalized (or "twisted") spin structures are given, and some general properties are proved, analogous to the case of "regular" spin structures. In particular, a difference class for two "twisted" spin structures is constructed, which allows one to consider the set of all such structures as an "affine space" over the one-dimensional mod-2 cohomology group of the base (quite similar again to the"regular" case).

Keywords:
homotopy, vector bundle, spin structure, difference class

Данная статья носит, условно говоря, «методологический» характер: цель ее — рассмотреть более подробно понятие спинорной структуры на ориентированном (вообще говоря неспинорном) векторном расслоении, введенное в одной старой работе автора [1]. В указанной работе данное понятие носило вспомогательный характер и поэтому рассматривалось довольно бегло; здесь мы даем некоторые детали, там опущенные.

1. Терминология, обозначения и предварительные сведения

Гомотопии отображений и «гомотопии гомотопий»

«Отображение» всюду в данной статье означает «непрерывное отображение». Гомотопией между отображениями $f, g : X \to Y$ называется, как известно, отображение $H : X \times [0, 1] \to Y$ с $H(x, 0) = f(x)$ и $H(x, 1) = g(x)$ (мы говорим, что H — гомотопия «из f в g»). Если H, K — две гомотопии из f в g, то гомотопией между ними (или гомотопией «из H в K») называется отображение $W : X \times [0, 1]^2 \to Y$ с $W(x, t, 0) = H(x, t)$ и $W(x, t, 1) = K(x, t)$, а также с $W(x, 0, s) = f(x)$ и $W(x, 1, s) = g(x)$ (иначе говоря, в процессе «деформации» первой гомотопии во вторую отображения f и g должны оставаться фиксированными; можно, таким образом, сказать, что «гомотопия между гомотопиями» — это специальный случай гомотопии путей с фиксированными началом и концом). Вместо $H(x, t)$ и $W(x, t, s)$ мы можем, как обычно, писать $H_t(x)$ и $W_{t,s}(x)$ и т.д. Если требуется подчеркнуть, что некоторый символ (например H) обозначает именно гомотопию, то мы будем записывать это как $\{H_t\}$.

Отношение гомотопности двух отображений, или двух гомотопий, будем записывать как $f \sim g$, или $H \sim K$, или, наконец, $\{H_t\} \sim \{K_t\}$.

Векторные расслоения

Мы рассматриваем *ориентированные действительные* векторные расслоения, опуская в дальнейшем слова «действительное» и «ориентированное». Таким образом, векторное расслоение размерности k – это тройка $\xi = (E, B, p)$, где $p : E \to B$ — расслоение с базой B и тотальным пространством E, с заданной на каждом слое структурой k-мерного действительного векторного пространства и ориентацией, локально (т.е. в достаточно малой окрестности U каждой точки базы B) изоморфное расслоению $\mathrm{pr}_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$. В соответствии со сказанным, все «координатные преобразования» расслоения ξ принадлежат группе $GL^+(k, \mathbb{R})$ — группе квадратных матриц порядка k с положительным определителем. Мы будем предполагать, что базы всех рассматриваемых нами расслоений — паракомпактные хаусдорфовы пространства, в некоторых специально оговоренных случаях сужая этот класс пространств до класса CW-комплексов.

Напомним, что морфизм двух расслоений

$$\xi = (E, B, p) \to \xi' = (E', B', p')$$

— это коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}, \tag{1}$$

где отображение $\widehat{f}$ линейно на слоях (говорят также, что это *морфизм над* f). В случае, когда $B' = B$ и $f = \mathrm{id}$, диаграмма (1) называется *морфизмом над* B. Морфизм над B называется *изоморфизмом*, если отображение $\widehat{f}$ является на каждом слое изоморфизмом ориентированных линейных пространств (в частности, сохраняет ориентацию); изоморфность двух расслоений обозначается $\xi \approx \xi'$.

Если $\xi = (E, B, p)$ — векторное расслоение, то его сужение на подмножество $B_0 \subset B$ обозначается $\xi|_{B_0}$, а расслоение с базой B', индуцированное отображением $f : B' \to B$ — через $f^*\xi$.

Теорема 1. *Для любого векторного расслоения ξ с базой B, паракомпактного пространства B' и гомотопных друг другу отображений $f, g : B' \to B$ индуцированные расслоения $f^*\xi$ и $g^*\xi$ изоморфны между собой. Более того, каждой гомотопии $\{h_t\}$ из f в g соответствует однозначно определенный гомотопический класс изоморфизмов из $f^*\xi$ в $g^*\xi$, зависящий только от гомотопического класса этой гомотопии.*

Первая часть этого утверждения (до слов «более того») — это [3, Гл. 3, теорема 4.7]. Те же самые рассуждения доказывают и вторую часть.

Обозначение

Гомотопический класс изоморфизмов из $f^*\xi$ в $g^*\xi$, индуцированный гомотопией $\{h_t\}$ из f в g, мы обозначаем $\mathcal{I}(\{h_t\}, \xi)$, и для любого изоморфизма $\alpha : \xi \to \eta$ содержащий его гомотопический класс обозначаем $[\alpha]$.

Примечание

В [3, Гл. 3] речь идет, в отличие от данной заметки, о *неориентированных* расслоениях; это не влияет на доказательство.

Пространства Грассмана и Штифеля

Через $\mathbb{R}^\infty$ обозначается прямой (индуктивный) предел пространств $\mathbb{R}^n$, $n \to \infty$, относительно стандартных вложений $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Через $G^+_{n,k}$ обозначается пространство Грассмана *ориентированных* k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$ и через $V_{n,k}$ — пространство Штифеля ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$, где $1 \leqslant k < \infty$ и $k \leqslant n \leqslant \infty$. Мы сокращаем $G^+_{\infty,k}$ и $V_{\infty,k}$ до G^+_k и V_k, соответственно. Через V_∞ будет обозначаться обратный (проективный) предел пространств V_k, где проекции $V_k \leftarrow V_{k+1}$ состоят в отбрасывании последнего вектора. Каждое из пространств V_k (включая $k = \infty$) можно, очевидно, отождествить с пространством изометрических вложений $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\infty$.

Следующее утверждение хорошо известно.

Теорема 2. *Все пространства V_k стягиваемы.*

Примечание

Если вместо множества изометрических вложений $\mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ мы возьмем только изометрии (изометрические автоморфизмы), то, как известно, картина изменится драматическим образом: мы получим бесконечномерную ортогональную группу $O(\infty) = \bigcup_{k=1}^\infty O(k)$, имеющую сложную гомотопическую структуру. С другой стороны, если пополнить пространство $\mathbb{R}^\infty$ вместе с группой $O(\infty)$ в метрике l_2, то получим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и группу его изометрий $O(\mathcal{H})$; последняя группа, удивительным образом, снова оказывается стягиваемой (теорема Кёйпера [4]).

Универсальное расслоение

Мы обозначаем через γ^+_k «тавтологическое» k-мерное расслоение над пространством G^+_k, слой которого над точкой $P \in G^+_k$ (т.е. над ориентированной k-мерной плоскостью $P \subset \mathbb{R}^\infty$) — сама эта плоскость, рассматриваемая как ориентированное векторное пространство. Иначе говоря, тотальное пространство расслоения γ^+_k — это подпространство декартова произведения $G^+_{n,k} \times \mathbb{R}^\infty$, образованное всевозможными парами (P, x) с $x \in P$.

Теорема 3. *Всякое k-мерное векторное расслоение над паракомпактным пространством B изоморфно расслоению $f^*\gamma^+_k$ для некоторого отображения $f : B \to G^+_k$.*

Это [3, Гл. 3, следствие 5.6].

Гауссовы отображения

Пусть $\xi = (E_\xi, B_\xi, p_\xi)$ — k-мерное расслоение. *Гауссовым отображением* расслоения ξ в пространство $\mathbb{R}^\infty$ называется непрерывное отображение $u : E_\xi \to \mathbb{R}^\infty$, сужение которого на любой слой $p_\xi^{-1}(b)$ расслоения ξ является мономорфизмом. Очевидным образом, по всякому гауссову отображению $u : E_\xi \to \mathbb{R}^\infty$ строится отображение

$\mathcal{B}(u) : B_\xi \to G_k^+$ и изоморфизм $\mathcal{F}(u) : \xi \to f^*\gamma_k^+$ и наоборот; таким образом, гауссовы отображения $E_\xi \to \mathbb{R}^\infty$ и пары вида (отображение $f : B\xi \to G_k^+$, изоморфизм $\xi \to f^*\gamma_k^+$) — по существу одно и то же.

Теорема 4. *Для любых отображений $f, g : B \to G_k^+$ и изоморфизма $\alpha : f^*\gamma_k^+ \to g^*\gamma_k^+$ найдется гомотопия из f в g, индуцирующая гомотопический класс $[\alpha]$.*

Это (по существу) [3, Гл. 3, теорема 6.2]. Следует заметить, что в формулировке Хьюзмоллера нет утверждения о том, что найдется гомотопия, индуцирующая именно заданный класс изоморфизмов; тем не менее, это вытекает из приведенного там доказательства.

Данную теорему можно существенно усилить, добавив к ней «относительную» версию. Назовем замкнутое множество $X \subset B$ *окаймляемым*, если у него существует окрестность U, представимая в виде $X \cup \varphi(\dot{X} \times [0, 1))$, где $\dot{X} = X \setminus \operatorname{Int} X$ — граница множества X и φ — гомеоморфное вложение $\dot{X} \times [0, 1) \to B \setminus \operatorname{Int} X$ с $\varphi(x, 0) = x$. Множество $U \setminus \operatorname{Int} X$ мы называем, как обычно, *воротником* множества X; обозначим естественную проекцию воротника на интервал $[0, 1)$ через ε.

Теорема 5. *Пусть $f, g : B \to G_k^+$ — отображения, совпадающие друг с другом на окаймляемом замкнутом множестве $X \subset B$, так что расслоения $f^*\gamma_k^+|_X$ и $g^*\gamma_k^+|_X$ идентичны. Пусть имеется изоморфизм расслоений $\alpha : f^*\gamma_k^+ \to g^*\gamma_k^+$, тождественный над X. Тогда найдется гомотопия из f в g, индуцирующая гомотопический класс $[\alpha]$ и неподвижная на X.*

В том случае, когда $X = \varnothing$ (абсолютный случай), это теорема 4. Для общего случая понадобится довольно серьезная модификация доказательства из [3].

Доказательство теоремы 5. Мы начнем с одного замечания, а именно: ввиду «окаймляемости» множества X можно считать, что отображения f и g совпадают не только на X, но и на большем множестве, например $X_1 = X \cup \varphi(\dot{X} \times [0, 1/2])$. Это довольно очевидно: легко построить такую гомотопию $w_t : B \to B$, постоянную на X и вне некоторого $X_2 = X \cup \varphi(\dot{X} \times [0, 2/3])$, для которой $w_0 = \mathrm{id}$ и $w_1(X_1) = X$. Тогда отображения $f' = f \circ w_1$, $g' = g \circ w_1$ и расслоения $w_1^* f^*\gamma_k^+$, $w_1^* g^*\gamma_k^+$ будут удовлетворять условиям теоремы с заменой множества X на X_1. Если теперь мы докажем утверждение теоремы для отображений f', g' и изоморфизма

$$\alpha' = \gamma \circ \alpha \circ \beta^{-1} : f'^*\gamma_k^+ \to g'^*\gamma_k^+,$$

где $\beta \in \mathcal{I}(\{w_t\}, f^*\gamma_k^+)$ и $\gamma \in \mathcal{I}(\{w_t\}, g^*\gamma_k^+)$, т.е. построим гомотопию $h'_t : B \to G_k^+$ из f' в g', индуцирующую гомотопический класс $[\alpha']$ и неподвижную на X (не на X_1!), то в таком случае требуемая теоремой 5 гомотопия получается по формуле

$$h_t = \begin{cases} w_{3t} & 0 \leqslant t \leqslant 1/3, \\ h'_{3t-1} & 1/3 \leqslant t \leqslant 2/3, \\ w_{2-3t} & 2/3 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Итак, мы приступаем к доказательству теоремы 5 — в ее исходной формулировке, но с учетом сделанного выше замечания.

Имея в виду некоторые чисто технические преимущества, мы «симметризуем» ситуацию — рассмотрим (так же, как это делается в [3]) какое-нибудь векторное расслоение ξ над пространством B, изоморфное обоим расслоениям $f^*\gamma_k^+$ и $g^*\gamma_k^+$ (очевидно, что таковое найдется — например, годится $\xi = f^*\gamma_k^+$). Пусть $\tilde{u} : \xi \to f^*\gamma_k^+$ и $\tilde{v} : \xi \to g^*\gamma_k^+$ — изоморфизмы расслоений, удовлетворяющие соотношению $\alpha \circ \tilde{u} = \tilde{v}$ (и, следовательно, $\tilde{u} = \tilde{v}$ над X_1).

Пусть $u, v : E \to \mathbb{R}^\infty$ — гауссовы отображения, отвечающие изоморфизмам $\tilde{u}, \tilde{v}$. Согласно предположениям теоремы и сделанному в начале замечанию, мы можем считать

$$u|_{E_1} = v|_{E_1}, \tag{2}$$

где $E_1 = p^{-1}(X_1) \subset E$.

Рассмотрим разложение в ортогональную прямую сумму

$$\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}_a^\infty \oplus \mathbb{R}_b^\infty \tag{3}$$

— например, можно взять в качестве $\mathbb{R}_a^\infty$ и $\mathbb{R}_b^\infty$ множества векторов пространства $\mathbb{R}^\infty$, все четные (нечетные) координаты которых нулевые (хотя точно так же годится и любое другое разложение). Обозначим изометрические вложения $\mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, отвечающие каждому из слагаемых в разложении (3), через a и b. Согласно теореме 2, вложения a, b изотопны (в классе изометрических вложений) тождественному отображению $\mathrm{id} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$. Соответствующие изотопии (определенные, согласно той же теореме, гомотопически однозначно) мы обозначаем a_t и b_t (имея в виду, что $a_0 = b_0 = \mathrm{id}$ и $a_1 = a$, $b_1 = b$).

Нам будет удобно также рассматривать разложение (3) как комплексную структуру на пространстве $\mathbb{R}^\infty$, считая $a(\mathbb{R}^\infty)$ и $b(\mathbb{R}^\infty)$ вещественным и мнимым подпространствами и принимая, что для всех $x \in \mathbb{R}^\infty$ имеет место равенство $ia(x) = b(x)$.

Определим теперь гомотопию $s_t : E \to \mathbb{R}^\infty$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, формулой

$$s_t = e^{-i\varphi(t)}\big((1-t)a \circ u + tb \circ v\big), \tag{4}$$

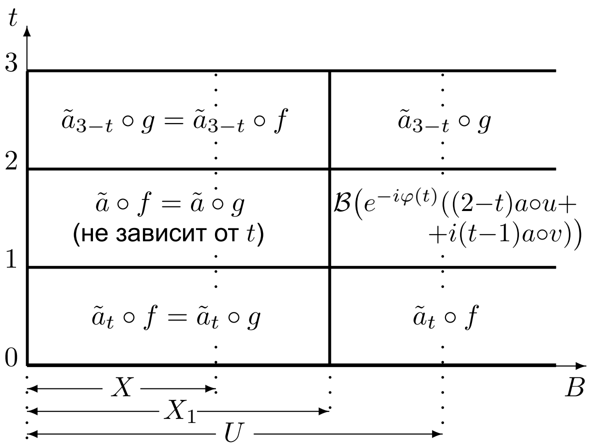
где u и v — определенные выше гауссовы отображения и $\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{t}{1-t}$. Нетрудно видеть, что это семейство состоит из гауссовых отображений (т.е. послойных мономорфизмов), и что $s_0 = a \circ u$ и $s_1 = a \circ v$ (заметим, что $e^{-i\varphi(1)} = -i$ и $-ib = a$). Таким образом, $\{s_t\}$ — «гауссова гомотопия» между $a \circ u$ и $a \circ v$.

Рассмотрим некоторый вектор $x \in E_1$. В этом случае, согласно равенству (2), имеем $u(x) = v(x)$; обозначив это общее значение через y, по формуле (4) получаем:

$$\begin{aligned} s_t(x) &= e^{-i\varphi(t)}\big((1-t)a(y) + tb(y)\big) = \\ &= \frac{1-t-it}{\sqrt{t^2+(t-1)^2}}(1-t+it) \cdot a(y) = \\ &= \sqrt{t^2+(t-1)^2} \cdot a(y). \end{aligned} \tag{5}$$

Мы видим, что векторы x и $s_t(x)$ коллинеарны, откуда, очевидно, следует, что индуцированная гомотопия $\mathcal{B}(s_t) : B \to G_k^+$, соединяющая отображения $\tilde{a} \circ f$ и $\tilde{a} \circ g$, постоянна на X_1 (через $\tilde{a}$ мы обозначаем вложение $G_k^+ \to G_k^+$, индуцированное вложением $a : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$).

Нам остается добавить к построенной гомотопии «два экземпляра» изотопии $\tilde{a}_t : G_k^+ \to G_k^+$ (в начале и в конце), чтобы связать отображения $\tilde{a} \circ f$ и $\tilde{a} \circ g$ с исходными f, g. Полученная таким образом гомотопия, соединяющая f и g и представленная как отображение $S : B \times [0,3] \to G_k^+$, изображена (довольно условно) на нижеследующей схеме, поясняющей ее конструкцию в различных частях множества $B \times [0,3]$. Заметим, что сужение отображения S на множество $X_1 \times [0,3]$ *симметрично* относительно инволюции $t \mapsto 3-t$.



Легко видеть, что построенная нами гомотопия S непостоянна на множестве X и, следовательно, не соответствует утверждению теоремы 5. Однако проблема легко решается посредством некоторой «репараметризации» гомотопии на $X_1 \times [0,3]$ (без изменения ее на $(B \setminus \operatorname{Int} X_1 \times [0,3])$. Именно, рассмотрим следующее отображение r множества $B \times [0,3]$ в себя (напомним, что на множестве $X_1 \setminus X$ имеется функция $\varepsilon : X_1 \to [0, 1/2]$):

$$r(x,t) = \begin{cases} (x,0) & \text{при } x \in X,\ t \leqslant 3/2; \\ (x, 3\varepsilon(x)) & \text{при } x \in X_1 \setminus X \text{ и} \\ & 3\varepsilon(x) \leqslant t \leqslant 3/2; \\ r(x, 3-t) & \text{при } x \in X_1,\ t \geqslant 3/2; \\ (x,t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Не составляет труда проверить, что построенное таким образом отображение непрерывно, и что «исправленная» гомотопия $S \circ r : B \times [0,3] \to G_k^+$ обладает всеми требуемыми свойствами. Теорема 5, таким образом, доказана. $\square$

Прямым следствием теоремы 5 является следующее дополнение к теореме 4.

Теорема 6. *Если две гомотопии между отображениями $f, g : B \to G_k^+$ индуцируют одинаковые (или гомотопные) изоморфизмы $f^*\gamma_k^+ \to g^*\gamma_k^+$, то эти две гомотопии гомотопны между собой.*

Примечание

Объединение теорем 4 и 6 можно переформулировать следующим образом:

Для любых отображений $f, g : B \to G_k^+$ оператор $\mathcal{I}$, сопоставляющий гомотопии h_t из f в g гомотопический класс изоморфизмов $\mathcal{I}(\{h_t\}, \gamma_k^+)$, определяет взаимно-однозначное соответствие между гомотопическими классами гомотопий из f в g и гомотопическими классами изоморфизмов $f^*\gamma_k^+ \to g^*\gamma_k^+$.

2. Спинорные и полуспинорные структуры

Терминология и обозначения

В этом разделе мы обозначаем пространство G_k^+ через $B_{SO(k)}$, расслоение γ_k^+ — через $\gamma_{SO(k)}$, тотальное пространство расслоения $\gamma_{SO(k)}$ — через $E_{SO(k)}$. Предполагается, что размерности всех рассматриваемых далее векторных расслоений не менее трех, и что базы этих расслоений являются CW-комплексами (последнее не относится к классифицирующим пространствам, таким как $B_{SO(k)}$).

Через $K(\mathbb{Z}_2, 2)$ обозначается, как обычно, универсальное пространство Эйленберга-Маклейна типа $(\mathbb{Z}_2, 2)$ и через $\varkappa$ — соответствующий универсальный $(\mathbb{Z}_2, 2)$-когомологический класс. Пусть

$$\pi : B_{SO(k)} \to K(\mathbb{Z}_2, 2) \tag{6}$$

— отображение, индуцирующее изоморфизм $\pi_2 B_{SO(k)} \to \pi_2 K(\mathbb{Z}_2, 2)$ (фактически имеем изоморфизмы $\pi_i B_{SO(k)} \to \pi_i K(\mathbb{Z}_2, 2)$ с $1 \leqslant i \leqslant 3$); очевидно, $\pi^*(\varkappa) = w_2$, где класс $w_2 \in H^2(B_{SO(k)}; \mathbb{Z}_2)$ — универсальный двумерный класс Штифеля-Уитни.

Пользуясь хорошо известной конструкцией, превратим теперь отображение (6) в расслоение Серра, заменив пространство $B_{SO(k)}$ на ему гомотопически эквивалентное (и сохранив при этом те же обозначения); будем считать это расслоение раз навсегда фиксированным. Слой расслоения (6) будет обозначаться далее через $B_{Spin(k)}$, расслоение $i^*\gamma_{SO(k)}$ над пространством $B_{Spin(k)}$, индуцированное вложением $i : B_{Spin(k)} \to B_{SO(k)}$ — через $\gamma_{Spin(k)}$, а соответствующее тотальное пространство — через $E_{Spin(k)}$.

$Spin(f)$-структуры

Пусть $\xi = (E_\xi, B_\xi, p)$ — k-мерное векторное расслоение и $f : B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$ — некоторое отображение. Мы называем $Spin(f)$-*структурой* (вариант — *полуспинорной структурой*) на расслоении ξ гомотопический класс послойных изоморфизмов $E_\xi \to E_{SO(k)}$, индуцирующих коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E_\xi \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & E_{SO(k)} \arrow[d, "p"] \\ B_\xi \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & B_{SO(k)} \arrow[d, "\pi"] \\ & K(\mathbb{Z}_2, 2) \end{tikzcd} \tag{7}$$

или, равносильным образом и несколько удобнее, гомотопический класс коммутативных диаграмм

$$\begin{tikzcd} B_\xi \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & B_{SO(k)} \arrow[dl, "\pi"] \\ & K(\mathbb{Z}_2, 2) & \end{tikzcd} \tag{8}$$

и изоморфизмов $s : \xi \to g^*\gamma_{SO(k)}$ (мы будем говорить «$Spin(f)$-структура $\mathcal{S} = [s, g]$» и т.п.). Ясно, что для существования диаграммы (7) (или (8)) необходимо (и, как мы увидим, достаточно) равенство

$$f^*(\varkappa) = w_2(\xi). \tag{9}$$

Мы называем отображения $f : B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$, удовлетворяющие условию (9), *спинорными* отображениями.

Если $f : B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$ — отображение в точку, то тогда (7) превращается в гомотопический класс послойных изоморфизмов $E_\xi \to E_{Spin(k)}$, т.е. в обычную спинорную структуру на расслоении ξ с $w_2(\xi) = 0$.

Существование $Spin(f)$-структур

Пусть отображение $f : B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$ удовлетворяет условию (9). Выберем некоторое отображение $g : B\xi \to B_{SO(k)}$ с $g^*\gamma_{SO(k)} \approx \xi$ (теорема 3). Тогда мы можем написать

$$f^*(\varkappa) = g^*(w_2) = g^*\pi^*(\varkappa) = (\pi \circ g)^*(\varkappa). \tag{10}$$

Это значит (в силу «универсального» свойства пространства $K(\mathbb{Z}_2, 2)$), что отображения f и $\pi \circ g$ гомотопны. Согласно «принципу накрывающей гомотопии», отображение g гомотопно некоторому отображению $g' : B\xi \to B_{SO(k)}$ с $\pi \circ g' = f$, а согласно теореме 1 мы опять имеем $g'^*\gamma_{SO(k)} \approx \xi$.

Различающий класс для двух $Spin(f)$-структур

Мы будем предполагать с этого момента, что пространство B_ξ линейно связно (общий случай будет получаться как очевидное «покомпонентное» объединение). Пусть имеется пара $Spin(f)$-структур $\mathcal{S} = [s, g]$ и $\mathcal{S}' = [s', g']$ на расслоении ξ, иначе говоря коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} B_\xi \arrow[rr, shift left, "g"] \arrow[rr, shift right, "g'"'] \arrow[dr, "f"'] & & B_{SO(k)} \arrow[dl, "\pi"] \\ & K(\mathbb{Z}_2, 2) & \end{tikzcd} \tag{11}$$

и изоморфизмамы $s : \xi \to g^*\gamma_{SO(k)}$, $s' \to g'^*\gamma_{SO(k)}$. В силу теорем 4 и 6 существует гомотопически однозначно определенная гомотопия $h_t : B_\xi \to B_{SO(k)}$ из g в g', индуцирующая гомотопический класс изоморфизмов $[s' \circ s^{-1}]$. Взяв композицию этой гомотопии с отображением π, мы получаем гомотопию $z_t = \pi \circ h_t : B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$ с $z_0 = z_1 = f$, другими словами отображение $Z : B_\xi \times S^1 \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$, сужение которого на $B_\xi \times \{1\}$ совпадает с f (и определенное, как мы помним, гомотопически однозначно). Рассмотрим класс когомологий $Z^*(\varkappa) \in H^2(B_\xi \times S^1)$. Согласно формуле Кюннета

$$\begin{aligned} H^2(B_\xi \times S^1) &= \\ &= H^2(B_\xi; \mathbb{Z}_2) \oplus H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2) \otimes H^1(S^1) \approx \\ &\approx H^2(B_\xi; \mathbb{Z}_2) \oplus H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2), \end{aligned}$$

так что $Z^*(\varkappa)$ представляется в виде $w + d \otimes s$, где $w \in H^2(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$, $d \in H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$, и s — стандартная образующая группы $H^1(S^1) = \mathbb{Z}$. Класс w — не что иное как $f^*(\varkappa) = w_2(\xi)$; таким образом, класс $Z^*(\varkappa)$ однозначно записывается в виде

$$Z^*(\varkappa) = w_2(\xi) + \delta(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \otimes s,$$

где $\delta(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \in H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$ называется *различающим классом* для $Spin(f)$-структур $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.

Следующие свойства класса $\delta(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ легко проверяются.

Теорема 7. *Для любых $Spin(f)$-структур $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ из $\delta(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = 0$ следует $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.*

Теорема 8. *Для любой $Spin(f)$-структуры $\mathcal{S}$ и любого класса $d \in H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$ найдется такая $Spin(f)$-структура $\mathcal{S}'$, что $\delta(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = d$.*

Теорема 9. *Для любых $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{S}''$ имеет место равенство*

$$\delta(\mathcal{S}, \mathcal{S}') + \delta(\mathcal{S}', \mathcal{S}'') = \delta(\mathcal{S}, \mathcal{S}'').$$

Из этих утверждений, в частности, следует, что, как и для обычных спинорных структур, множество $Spin(f)$-структур является «аффинным пространством» над группой $H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$, и в частности, число таких структур равняется 2^n, где n — одномерное $\mathbb{Z}_2$-число Бетти пространства B_ξ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 18-1-1-7.

Литература

1. *Zhubr A.V.* Closed simply connected 6-manifolds: the proofs of classification theorems // St.Petersburg Math. J. 2001. Vol. 12. No. 4. P. 605–680.
2. *Engelking R.* General topology // Berlin: Heldermann Verlag, 1989. 529 p.
3. *Husemoller D.* Fibre bundles // Springer–Verlag, 1993 (3rd edition). 356 p.
4. *Kuiper N.* The homotopy type of the unitary group of Hilbert space // Topology. 1965. Vol. 3. No. 1. P. 19–30.

Статья поступила в редакцию 18.05.2019.