УДК 539.3
DOI 10.19110/1994-5655-2019-4-20-25

В.Ю. АНДРЮКОВА, В.Н. ТАРАСОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ И КОНСТРУКТИВНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

veran@list.ru, vntarasov@dm.komisc.ru

V.YU. ANDRYUKOVA, V.N. TARASOV

NONLINEAR AND STRUCTURALLY NONLINEAR PROBLEMS IN THE THEORY OF PLATES

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS

Аннотация

В работе рассматривается контактная задача двух параллельных прямоугольных пластин, расположенных на некотором расстоянии друг над другом. На верхнюю пластину действует нормальная нагрузка. Прогибу верхней пластины препятствует нижняя, так что возникает некоторая зона контакта. Задачи такого рода относятся к задачам теории упругости с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции. Подобные задачи являются конструктивно-нелинейными, так как при их математической интерпретации используются неравенства или недифференцируемые функции. Задача сводится к некоторой вариационной проблеме с ограничениями на прогиб в виде неравенств.

Ключевые слова:
устойчивость, сила реакции, двойственная задача, контактная задача, односторонние ограничения, множители Лагранжа

Abstract

The contact problem of two parallel rectangular plates located at some distance one above the other is considered. The upper plate is under normal load. The deflection of the upper plate is prevented by the lower one, so that some contact zone appears. Problems of this kind refer to the problems of the theory of elasticity with an unknown region of active interaction of structural elements. Such problems are constructively nonlinear, since their mathematical interpretation uses inequalities or undifferentiable functions. The problem is reduced to a certain variational problem with deflection constraints in the form of inequalities. For finite-dimensional approximation, the finite-difference method is used, as a result of which the convex quadratic programming problem is obtained. In the study of convex programming problems, duality theory can be effectively applied. Using the saddle point theorem of the Lagrange function, a dual problem of mathematical programming is formulated, the solution of which is the desired reaction force of the interaction of two plates. The method used in the work assumes a preliminary inversion of the equilibrium equations operators of the contacting elements. The solution of the equations of mechanics of rods, plates and shells is in itself a rather complicated problem. However, for this you can use all the classical methods. In the proposed paper, the results were obtained using an iterative procedure, which is a gradient projection method applied to the dual problem, the convergence of which was proved in the framework of the linear theory of rods, plates and shells. This method is also implemented in solving the nonlinear Karman problem. The results were compared. The comparison showed that the difference in the values of the contact interaction reaction forces in the linear and nonlinear cases is small, but the deflection values differ by almost one and a half times.

Keywords:
stability, reaction force, dual task, contact problem, unilateral restrictions, Lagrange multipliers

Введение

Интерес к конструктивно-нелинейным задачам механики упругих тел обусловлен необходимостью расчета все более сложных конструкций, встречающихся в инженерной практике. Данные задачи относятся к классу контактных задач с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкций. Исследование подобного рода задач – важная проблема при анализе прочности конструкций, поскольку контактное давление является одним из определяющих видов силовой нагрузки на элементы инженерной конструкции. Достаточно полный обзор алгоритмов решения контактных задач содержится в работе Н.Г. Бураго, В.Н. Кукуджанова [1].

Рассматриваемые проблемы сводятся к исследованию вариационных неравенств. Основы теории вариационных неравенств заложены в работах Ж.- Л. Лионса, Р. Гловински, Р. Тремольера [2], Байоки К., Капело А. [3], а также в работе Е.И. Михайловского и В.Н. Тарасова [4]. Систематическому применению неравенств и негладких функционалов в механике посвящена монография П. Панагиотопулоса [5] и работа Г. Дюво, Ж.Л. Лионс [6]. В монографии Е.И. Михайловского [7] рассматриваются контактные задачи с неизвестной областью активного взаимодействия элементов. В частности, там приводится аналитическое решение контактной задачи системы двух параллельных балок, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. На верхнюю балку действует постоянная нагрузка так, что в процессе деформации балки контактируют в некоторой области. Приближенные методы решения экстремальных задач в полном объеме раскрывают В.Ф. Демьянов и А.М. Рубинов [8].

В данной работе численным методом решается контактная задача для двух параллельных пластин, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. На верхнюю пластину действует нормальная нагрузка. Для решения применяется метод обобщенной реакции, разработанный в работе [4]. Он представляет собой метод проекции градиента, примененный к двойственной задаче математического программирования. На каждом шаге предлагаемого алгоритма требуется решать уравнения равновесия пластины, что само по себе представляет достаточно сложную задачу. Преимущество данного алгоритма заключается в том, что для решения уравнений равновесия можно использовать все известные методы решения краевых задач в теории пластин. Учет ограничений в форме неравенств значительно усложняет использование пакетов метода конечных элементов (МКЭ), особенно в случае нелинейной теории равновесия. В случае использования линейной теории пластин двойственная задача выписывается в явной форме, что значительно упрощает вычисления. Однако метод обобщенной реакции успешно применен и в случае нелинейной теории пластин Кармана. Задачи такого рода могут быть успешно решены практически в любом пакете конечно-элементного моделирования, однако круг решаемых ими задач ограничивается, в основном, решением уравнений равновесия, либо уравнений движения элементов конструкций, тогда как в нашем случае требуется решать задачу выпуклой оптимизации. Применение теории двойственности в методах оптимизации всегда является довольно эффективным.

Теория двойственности и ее применение, в том числе и к задачам механики, подробно изложена в монографии И. Экланд, Р. Темам [9]. В работе П.С. Аронова [10] представлено решение контактной задачи теории упругости с односторонними связями методом конечных элементов. В [11] авторы М.А. Осипенко и Ю.Н. Няшин исследовали задачи об одностороннем контакте балок, струн и пластин, предложили метод построения аналитического решения, а также доказательство существования и единственности этого решения. В [12] K.A. Tzaros и E.S. Mistakidis рассмотрели задачу об одностороннем контактном изгибе непрерывных балок при наличии начальных геометрических несовершенств, представили аналитический метод, основанный на теории упругой устойчивости. Математический подход Эйлера, построенный на фундаментальном решении краевой задачи потери устойчивости непрерывных балок, авторы модифицировали с учетом условий одностороннего контакта. Кроме того, чтобы полученные аналитические решения были применимы для практических случаев проектирования, K.A. Tzaros и E.S. Mistakidis учли фактическую прочность поперечного сечения балки при комбинированном сжатии и изгибе. Реализация предлагаемого способа демонстрируется в статье на характерном примере. В статье А.В. Ермоленко [13] приведены уточненные уравнения теории пластин для решения контактных задач. В работе [14] особое внимание уделяется случаю, когда контактные ограничения налагаются упругим основанием типа Винклера, и основание реагирует только на сжатие, характеризуя контакт как односторонний. Для решения этого класса односторонних контактных задач предлагается подход типа Ритца с подвижными границами, в котором координаты, определяющие границы контактных областей, рассматриваются как дополнительные переменные задачи. Метод иллюстрируется конкретными примерами и результаты сравниваются с доступными результатами, полученными методами конечных элементов и математического программирования. Контактная задача для двух пластин одинаковой формы рассмотрена Е.В. Пяткиной в статье [15]. Там предполагается, что пластины, одинаковые по форме и размерам, расположены параллельно друг другу без зазора, и на боковых границах выполняются условия жесткого закрепления. Для решения использована модель Кирхгофа–Лява, выведены вариационные и дифференциальные постановки, рассмотрены случаи двух упругих пластин и когда одна из пластин является упругой.

Контактная задача для двух параллельных прямоугольных пластин

Рассмотрим систему из двух параллельных прямоугольных пластин, находящихся друг под другом на расстоянии ρ. Обозначим через $w_i(x,y)$, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $i = 1;2$ прогибы пластин. Пусть на верхнюю пластину действует нормальная нагрузка q. Пусть для определенности выполнены граничные условия шарнирного опирания:

$$w_i(0,y) = 0,\ w_i(a,y) = 0,\ w_i(x,0) = 0,\ w_i(x,b) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_i(0,y)}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 w_i(a,y)}{\partial x^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 w_i(x,0)}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 w_i(x,b)}{\partial y^2}=0. \qquad (1)$$

Предположим, что перемещения пластины приводят к их контактному взаимодействию. Тогда решение задачи сводится к вариационной проблеме

$$J(w_1,w_2)=\int_0^a\int_0^b\left[\frac{D_1}{2}(\Delta w_1)^2-qw_1+\right.$$
$$\left.+\frac{D_2}{2}(\Delta w_2)^2\right]dxdy\to\min, \qquad (2)$$

при ограничениях

$$w_1-w_2-\rho\le 0,\ (x,y)\in\Omega,\ \Omega=[0,a]\times[0,b], \quad (3)$$

D_i – цилиндрические жесткости пластин.

Решение задачи (2)–(3) существует в $W_2^2(\Omega)$ — в пространстве функций Л.С. Соболева, имеющие обобщенные, суммируемые с квадратом вторые производные. Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L(w_1,w_2,r)=\int\int_\Omega\left[\frac{D_1}{2}(\Delta w_1)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{D_2}{2}(\Delta w_2)^2-qw_1+r(w_1-w_2-\rho)\right]dxdy.$$

Справедливо следующее утверждение [16]: для того, чтобы функции w_1^*, w_2^* были решениями задачи (2)–(3), необходимо и достаточно, чтобы нашелся множитель Лагранжа $r^*x,y\ge 0, (x,y)\in\Omega$, такой, что w_1^*, w_2* и r^* были седловыми точками функции Лагранжа, т.е.

$$L(w_1^*,w_2^*,r)\le L(w_1^*,w_2^*,r^*)\le L(w_1,w_2,r^*), \quad (4)$$

(вообще говоря $r^*(x,y)$ – не обязательно суммируемая с квадратом функция).

Справедлива теорема о минимаксе:

$$\max_{r\ge 0}\min_{(w_1,w_2)}L(w_1,w_2,r)=\min_{(w_1,w_2)}\max_{r\ge 0}L(w_1,w_2,r).$$

Задача минимизации функционала по w_1,w_2 приводит к системе Эйлера

$$\begin{cases} D_1\Delta\Delta w_1=q-r,\\ D_2\Delta\Delta w_2=r.\end{cases} \qquad (5)$$

Проблема $\widetilde{F}(r)\to\max$ и задача (2)–(3) являются парой двойственных задач выпуклой оптимизации. Наряду с уравнениями (5), необходимо рассмотреть условия, которым должны удовлетворять перемещения w_1,w_2,

$$\begin{cases} w_1-w_2-\rho\le 0,\\ r\ge 0,\\ r[w_1-w_2-\rho]=0.\end{cases} \qquad (6)$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\widetilde{F}(r)=\min_{(w_1,w_2)}L(w_1,w_2,r). \qquad (7)$$

Уравнения (6) являются уравнениями равновесия элементов; второе ограничение в (6) – условие односторонности связи; последнее ограничение – условие дополняющей нежесткости, заключающееся в том, что если сила реакции r не обращается в ноль, то $w_1-w_2-\rho=0$, т.е. пластины контактируют в некоторой точке, и наоборот, если $w_1-w_2-\rho<0$, то $r=0$.

Решение уравнений (5) запишем в виде:

$$w_1=G_1(q-r),\ w_2=G_2r, \qquad (8)$$

где G_1,G_2 – ограниченные линейные операторы в $L_2(\Omega)$. (6) будет выполнено, если сила реакции контактного взаимодействия пластин будет удовлетворять уравнению

$$r=[r-\alpha(G_2r-G_1(q-r)+\rho)]_+, \qquad (9)$$

где $f_+=\max_{\alpha>0}\{0,f\}=\frac{1}{2}(|f|+f)$ – срезка функции f. В самом деле, пусть $r=0$, то получим $w_2+\rho<w_1$. Если же $r>0$, тогда $G_2r-G_1(q-r)+\rho=0$, т.е. $w_2+\rho=w_1$.

Обозначим $(f,g)=\int\int_\Omega f(x,y)g(x,y)dxdy$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Подставляя (8) в функционал Лагранжа (4), с учетом граничных условий (1) найдем явное выражение для функционала $\widetilde{F}(r)$.

$$\int\int_\Omega\frac{D_1}{2}(\Delta w_1)^2dxdy=\int\int_\Omega\frac{D_1}{2}\Delta\Delta w_1\cdot w_1dxdy=$$
$$=\int\int_\Omega\frac{1}{2}(G_1(q-r),q-r)dxdy=\frac{1}{2}(G_1(q-r),q-r),$$
$$\int\int_\Omega\frac{D_2}{2}(\Delta w_2)^2dxdy=\frac{1}{2}(G_2r,r),$$
$$\widetilde{F}(r)=-\frac{1}{2}(G_1r,r)-\frac{1}{2}(G_2r,r)+$$
$$+(G_1q,r)+(\rho,r)-\frac{1}{2}(G_1q,q).$$

Для отыскания седловой точки функционала Лагранжа необходимо решить задачу

$$F(r)\to\min_{r\ge 0},$$

где $F(r)=-\widetilde{F}(r)$.

Сформулируем несколько теорем из теории экстремальных задач [8]. Пусть $M\in L_2$ – выпуклое, замкнутое, непустое множество, $f(r)$ – непрерывно дифференцируемый функционал, $f'(r)$ – производная функционала $f(r)$. Пусть $r\in L_2$ – некоторая точка, $\nu(r)=P_M(r)$ – проекция точки r на множество M, т.е. решение экстремальной задачи

$$\frac{1}{2}||\nu(r)-r||^2=\min_{\nu\in M}\frac{1}{2}||\nu-r||^2$$

есть ближайшая точка множества M к точке r. Такая точка существует и единственная. Пусть $\alpha>0$, $\omega(r)$ – проекция точки $r-\alpha f'(r)$ на множество M, т.е. $\omega(r)=\nu(r-\alpha f'(r))$.

Теорема 1. Для того чтобы r_* была решением задачи

$$f(r)\to\min_{r\in\Omega} \qquad (10)$$

необходимо, а в случае выпуклости $f(r)$, и достаточно, чтобы r_* была неподвижной точкой отображения $\omega(r)$:

$$r_* = \omega(r_*) = \nu(r_* - \alpha f'(r_*)). \tag{11}$$

Производная от функционала $F(r)$ имеет вид

$$F'(r) = G_1 r + G_2 r + \rho - G_1 q,$$

а M – это множество неотрицательных функций в L_2 из Ω. Проекция некоторой точки на множество M в данном случае имеет вид

$$\nu(r) = \frac{1}{2}(|r| + r) = \max\{0, r\}.$$

Необходимое условие (11) для задачи (10) в форме проекции градиента имеет вид

$$r_* = (r_* - \alpha(G_1(r_* - q) + G_2 r_* + \rho)_+, \tag{12}$$

последнее уравнение совпадает с уравнением (9). Для решения уравнения (12) можно применить метод последовательных приближений. Пусть r_0 – некоторая неотрицательная функция

$$r_{k+1} = (r_k - \alpha(G_1(r_k - q) + G_2 r_k + \rho)_+. \tag{13}$$

Можно показать [4], что существует $\alpha_0 > 0$ такое, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ последовательность (13) является минимизирующей для функционала $F(r)$ на M, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} F(r_k) = \inf_{r\in M} F(r),$$

и последовательность перемещений

$$w_{1k} = G_1(q - r_k),\ w_{2k} = G_2 r_k \tag{14}$$

сходится к решению задачи (1) – (3). Для реализации алгоритма (11) необходимо решать уравнение равновесия пластин (5).

Рассмотрим бигармоническое уравнение

$$D\Delta\Delta w = q$$

при выполнении граничных условий (1).

Для конечномерной аппроксимации применим метод сеток. Сеточный бигармонический оператор имеет вид:

$$\widetilde{\Delta}\widetilde{\Delta} w_{ij} = \widetilde{\Delta}\widetilde{\Delta} w(x_i, y_j) = \frac{1}{h^4}(20 w_{ij} -$$

$$-8(w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1}) +$$

$$+2(w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) +$$

$$+(w_{i,j+2} + w_{i+2,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j-2})).$$

Граничные условия дают равенства:

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0,\ w_{2,j} = 2w_{1,j},$$

$$w_{m-2,j} = 2w_{m-1,j} = 0,\ 0 \le j \le n,$$

$$w_{i,0} = w_{i,n} = 0,\ w_{i,2} = 2w_{i,1},$$

$$w_{i,n-2} = 2w_{i,n-1} = 0,\ 0 \le i \le m.$$

При конечномерной аппроксимации уравнение (5) превращается в уравнение

$$\begin{cases} A_1 W_1 = q - r, \\ A_2 W_2 = r, \end{cases}$$

где A_1, A_2 – симметричные, положительно определенные матрицы, а $W_1, W_2 \in R^{m\times n}$. Обратным операторам G_1, G_2 также соответствуют некоторые матрицы $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2$. В этом случае решение задачи (9) существует, и метод последовательных приближений (12) – (13), где операторы G_1 и G_2 нужно заменить на «сеточные» операторы $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$, сходится к некоторой точке $r_* \in R^{m\times n}$. Метод (9) применялся для решения контактной задачи двух прямоугольных пластин и в нелинейном случае.

Если рассматривать нелинейные уравнения равновесия пластин в рамках теории Кармана, то вместо уравнения (5) необходимо решать систему уравнений:

$$\begin{cases} D_1\Delta\Delta w_1 = q + \beta\alpha(w_1, \phi_1) - r, \\ \dfrac{2}{E}\Delta\Delta\phi_1 = -\alpha(w_1, w_2), \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} D_2\Delta\Delta w_2 = \beta\alpha(w_2, \phi_2) + r, \\ \dfrac{2}{E}\Delta\Delta\phi_2 = -\alpha(w_2, w_2), \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\alpha(w, \phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

– билинейная форма Кармана. При $\beta = 0$ уравнения (15) – (16) переходят в уравнения (7).

Функции напряжений $\phi(x, y)$ в самом простом случае граничных условий – отсутствие касательных и нормальных напряжений на краях пластины – удовлетворяют краевым условиям:

$$\frac{\partial^2\phi_i(0, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\phi_i(a, y)}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\phi_i(0, y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\phi_i(a, y)}{\partial x\partial y} = 0,$$

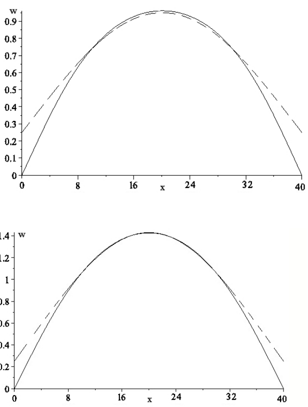
$$\frac{\partial^2\phi_i(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi_i(x, b)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\phi_i(x, 0)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\phi_i(x, b)}{\partial x\partial y} = 0,\ \ (x, y) \in [0, a] \times [0, b].$$

Для конечномерной аппроксимации уравнений (15) – (16) также применялся метод сеток.

Полученные результаты

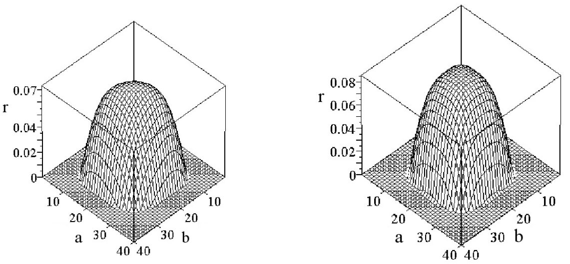
Для пластин размером $a = b = 40$ см, $h = 0,5$ см, $D_1 = D_2 = 57,234$ кг*см, $D_1 = D_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\nu = 0,3$, модуль Юнга $E = 5000$кг/см^2, нормальная нагрузка $q = 0,1$кг/см^2, с количеством точек разбиения $m = n = 40$, на рис. 1 показаны графики прогибов пластин $w_1(x, b/2)$, $w_2(x, b/2)$, где вдоль оси X указано изменение размера пластины при $x \in [0 \dots a]$ в линейном и нелинейном случаях. На рис. 2 изображены реакции контактного взаимодействия между пластинами. По осям X и Y показаны размеры пластин $a = b = 40$.



(a) (b)

Рис. 1. Прогибы пластин $w_i(x, y)$, $i = 1; 2$. Нелинейная теория Кармана (a), линейная теория (b).

Fig. 1. Deflections of the plates $w_i(x, y)$, $i = 1; 2$. Karman's nonlinear theory (a), linear theory (b).



(a) (b)

Рис. 2. Реакция пластин r. Нелинейная теория Кармана (a), линейная теория (b).

Fig. 2. Reaction of the plates r. Karman's nonlinear theory (a), linear theory (b).

Заключение

Рассмотрена контактная задача для системы двух параллельных пластин в линейной и нелинейной постановке. Проведено сравнение полученных результатов, которое показало, что учет «Кармановских» добавок существенно влияет на величину контактного взаимодействия. Метод, применяемый в работе, основан на теории двойственности выпуклых задач оптимизации и может быть использован для широкого класса задач с негладкой нелинейностью, в частности, для решения контактных задач с неизвестной областью активного взаимодействия элементов. Его применение предполагает предварительное обращение операторов уравнений равновесия контактирующих элементов. Решение уравнений механики стержней, пластин и оболочек само по себе представляет достаточно сложную проблему. Однако для этого можно использовать все классические методы (метод сеток, конечных элементов, граничных элементов и т.д.).

Литература

1. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 45–87.
2. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 576 p.
3. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квази вариационные неравенства. М.: Наука, 1988. 448 с.
4. *Михайловский Е.И., Тарасов В.Н.* О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // ПММ. 1993. Т. 57. Вып 1. С. 156–160.
5. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
6. *Дюво Г., Лионс Ж.Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
7. *Михайловский Е.И.* Элементы конструктивно-нелинейной механики. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2011. 212 с.
8. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1968. 180 с.
9. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.:Мир, 1979. 400 с.
10. *Аронов П.С.* Численное решение контактной задачи теории упругости с односторонними связями с помощью смешанной схемы метода конечных элементов // Политехнический молодежный журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2017. № 10. DOI: 10.18698/2541-8009-2017-10-175.
11. *Осипенко М.А., Няшин Ю.И.* Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1. С. 77–84.
12. *Tzaros K.A., Mistakidis E.S.* The unilateral contact buckling problem of continuous beams in the presence of initial geometric imperfections: an analytical approach based on the theory of elastic stability. International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier, 2011. No 46 (9). P. 1265. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011-06-008.
13. *Ермоленко А.В.* Уточненные соотношения теории пластин, ориентированные на решение контактных задач // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Вып. 1 (19). 2014. С. 25–32.
14. *Ricardo A.M. Silveira, Wellington L.A. Pereira, Paulo B. Goncalves.* Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by a Ritz type approach. International Journal of Solids and Structures. 2008. Vol. 45. P. 2629–2650.DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.12.012.

15. *Пяткина Е.В.* Контактная задача для двух пластин одинаковой формы, склеенных вдоль одного берега трещины // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21. № 2. С. 79–92. DOI: 10.17377/SIBJIM.2018.21.207.
16. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 384 с.

References

1. *Burago N.G., Kukudzhanov V.N.* // Obzor kontaktnykh algoritmov [Overview of contact algorithms]. Mechanics of Solids, 2005. No. 1. P. 45–87.
2. *Glovinsky R., Lions J.L., Tremolier R.* // Chislennoe issledovanie variatsionnykh neravenstv [Numerical research of variational inequalities]. Moscow: Mir, 1979. 576 p.
3. *Bayokki K., Capelo A.* Variatsionnye i kvazivariatsionnye neravenstva [Variational and quasi-variational inequalities]. Moscow: Nauka, 1988. 448 p.
4. *Mikhailovsky E.I., Tarasov V.N.* // O shodimosti metoda obobshennoi reaktsii v sadachah so svobodnoi granitcei [On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary] // PMM. 1993. Vol. 57. Issue 1. P. 156–160.
5. *Panagiotopulos P.* Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevypuklyye funktsii energii [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non–convex energy function]. Moscow: Mir, 1989. 494 p.
6. *Duvo G., Lions J.L.*. Neravenstva v mehanike i fizike [Inequalities in mechanics and physics]. Moscow: Nauka, 1980. 384 p.
7. *Mikhailovsky E.I.* Elementy konstruktivno–nelineynoy mekhaniki [Elements of structural and non–linear mechanics]. Syktyvkar: Syktyvkar Univ. Publ., 2011. 212 p.
8. *Demyanov V.F., Rubinov A.M.* Priblizhennye metody resheniya ekstremal'nykh zadach [Approximate methods for solving extremal problems]. Leningrad: Leningrad Univ. Publ., 1968. 180 p.
9. *Ekland I., Temam R.* Vypuklyi analiz i variatsionnye problemy [Convex analysis and variational problems]. Moscow: Mir, 1979. 400 p.
10. *Aronov P.S.* Chislennoye resheniye kontaktnoy zadachi teorii uprugosti s odnostoronnimi svyazyami s pomoshch'yu smeshannoy skhemy metoda konechnykh elementov [Numerical solution of the contact problem of the theory of elasticity with one-sided connections using a mixed scheme of the finite element method] // Politechnic. youth J. N.E. Bauman Moscow State Techn. Univ. 2017. No. 10. DOI: 10.18698/2541-8009-2017-10-175.
11. *Osipenko M.A., Nyashin Yu.I.* // Ob odnom podkhode k resheniyu nekotorykh odnomernykh kontaktnykh zadach [About one approach to the solution of some one-dimensional contact problems] // Saratov Univ. Publ. New series. 2011. Vol. 11. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. Issue 1. P. 77–84.
12. *Tzaros K.A., Mistakidis E.S.* The unilateral contact buckling problem of continuous beams in the presence of initial geometric imperfections: an analytical approach based on the theory of elastic stability. International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier, 2011, 46 (9), P.1265. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011–06–008.
13. *Ermolenko A.V.* // Utochnennyye sootnosheniya teorii plastin, oriyentirovannyye na resheniye kontaktnykh zadach [Refined relations of the theory of plates, focused on the solution of contact problems] // Bull. of Syktyvkar Univ. Series 1. Issue 1 (19). 2014. P. 25–32.
14. *Ricardo A.M. Silveira, Wellington L.A. Pereira, Paulo B. Goncalves.* Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by a Ritz type approach. International Journal of Solids and Structures. Vol. 45. 2008, P. 2629–2650. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.12.012.
15. *Pyatkina E.V.* // Kontaktnaya zadacha dlya dvukh plastin odinakovoy formy, skleyennykh vdol' odnogo berega treshchiny [The contact problem for two plates of the same shape, glued along one side of the crack] // Siberian J. of Industr. Mathematics. 2018. Vol. 21. № 2. P. 79–92. DOI: 10.17377/SIBJIM.2018.21.207.
16. *Balakrishnan A.V.* Prikladnoi funktsional'nyi analiz [Applied functional analysis]. Moscow: Nauka, 1980. 384 p.

Статья поступила в редакцию 17.10.2019.