

Научный журнал

Основан в 2010 г.  
Выходит 6 раз в год

Учредитель  
Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр  
«Коми научный центр УрО РАН»

# ИЗВЕСТИЯ

КОМИ НАУЧНОГО ЦЕНТРА  
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№4(44)

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

2020

**Главный редактор:**  
академик *А.М. Асхабов*

**Зам. главного редактора** — чл.-корр. РАН *В.Н. Лажнецев*  
**Ответственный секретарь** — к.х.н. *А.Я. Полле*

**Редакционная коллегия серии «Физико-математические науки»:**

д.ф.-м.н. *Н.А. Беляева*, д.ф.-м.н. *С.Г. Бобков*, д.ф.-м.н. *В.А. Бушуев*,  
д.ф.-м.н. *В.П. Голубятников*, д.т.н. *А.П. Господариков*, д.ф.-м.н. *О.Н. Граничин*,  
д.ф.-м.н. *Н.А. Громов* (ответственный редактор), д.ф.-м.н. *А.В. Жубр*,  
д.ф.-м.н. *Ю.А. Курочкин*, д.ф.-м.н. *В.В. Мазалов*, д.ф.-м.н. *В.И. Манько*,  
д.ф.-м.н. *В.М. Нежинский*, д.ф.-м.н. *А.Б. Певный*, д.ф.-м.н. *С.М. Полешиков*,  
д.ф.-м.н. *В.И. Пунегов*, д.ф.-м.н. *В.М. Редьков*, д.ф.-м.н. *В.Н. Сивков*, д.ф.-м.н. *В.Ф. Соколов*,  
к.ф.-м.н. *Д.А. Тимушев* (ответственный секретарь), д.ф.-м.н. *А.Н. Тихомиров*,  
д.ф.-м.н. *В.В. Ульянов*, д.ф.-м.н. *С.М. Хрящев*, д.ф.-м.н. *П.С. Щербаков*

**Редакционный совет:**

акад. *В.В. Алексеев*, чл.-корр. РАН *В.Н. Анфилогов*, д.и.н. *Е.Т. Артемов*,  
чл.-корр. РАН *А.А. Барях*, д.м.н. *Е.Р. Бойко*, акад. *В.И. Бердышев*,  
акад. *В.Н. Большаков*, д.э.н. *Н.М. Большаков*, проф. *Т.М. Бречко*, д.б.н. *М.В. Гецен*,  
акад. *А.Д. Гвишиани*, д.б.н. *С.В. Дёгтева*, д.и.н. *А.Е. Загребин*,  
д.э.н. *В.А. Ильин*, акад. *В.А. Коротеев*, чл.-корр. РАН *С.В. Кривовичев*,  
д.и.н. *Е.Ф. Кринко*, чл.-корр. РАН *А.В. Кучин*, чл.-корр. РАН *Ю.Б. Марин*,  
акад. *В.П. Матвеев*, д.и.н. *В.И. Меньковский*, акад. *Г.А. Месяц*,  
д.и.н. *П.Ю. Павлов*, чл.-корр. РАН *Е.В. Пименов*, к.г.-м.н. *А.М. Плякин*,  
чл.-корр. РАН *В.Н. Пучков*, чл.-корр. РАН *И.М. Роцевская*, акад. *М.П. Роцевский*,  
д.х.н. *С.А. Рубцова*, д.и.н. *Э.А. Савельева*, к.и.н. *А.В. Самарин*, чл.-корр. РАН *А.Ф. Титов*,  
д.филол.н. *Г.В. Федюнева*, акад. *В.Н. Чарушин*, д.т.н. *Ю.Я. Чукреев*,  
д.б.н. *Е.В. Шамрикова*, акад. *В.С. Шацкий*, д.б.н. *Д.Н. Шмаков*, д.т.н. *Н.Д. Цхадая*

Адрес редакции:

167982, Республика Коми, Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24  
Коми научный центр УрО РАН, каб. 317  
Тел. (8212) 24-47-79, факс (8212) 24-22-64  
E-mail: [journal@frc.komisc.ru](mailto:journal@frc.komisc.ru)  
[www.izvestia.komisc.ru](http://www.izvestia.komisc.ru)

Подписной индекс в каталоге «Почта России» 52047

ISSN 1994-5655

Журнал включен в перечень рецензируемых  
научных изданий ВАК

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору за  
соблюдением законодательства в сфере массовых ком-  
муникаций и охране культурного наследия. Свид. о ре-  
гистрации средств массовой информации ПИ № ФС 77-  
26969 от 11 января 2007 г.

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр «Коми научный центр УрО РАН», 2020

Science Journal  
Founded in 2010  
Published 6 times a year

Established by  
Federal State Budgetary  
Institution of Science  
Federal Research Centre  
«Komi Science Centre, Ural Branch, RAS»

# PROCEEDINGS

OF THE KOMI SCIENCE CENTRE  
URAL BRANCH  
RUSSIAN ACADEMY OF  
SCIENCES

---

№4(44) «PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES» series 2020

---

**Editor-in-chief:**

academician *A.M. Askhabov*

**Deputy editor-in-chief** — RAS corresp. member *V.N. Lazhentsev*

**Executive Secretary** — Cand. Sci. (Chem.) *A.Ya. Polle*

**Editorial Board «Physical and Mathematical Sciences»:**

Dr. Sci. (Phys.&Math.) *N.A. Belyaeva*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *S.G. Bobkov*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.A. Bushuev*,  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.P. Golubyatnikov*, Dr. Sci. (Tech.) *A.P. Gospodarikov*,  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *O.N. Granichin*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *N.A. Gromov* (executive editor of the series),  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *A.V. Zhubr*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *Yu.A. Kurochkin*,  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.V. Mazalov*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.I. Man'ko*,  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.M. Nezhinsky*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *A.B. Pevny*,  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *S.M. Poleshchikov*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.I. Punegov*,  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.M. Red'kov*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.N. Sivkov*,  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.F. Sokolov*, Cand. Sci. (Phys.&Math.) *D.A. Timushev* (executive secretary),  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *A.N. Tikhomirov*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *V.V. Ulyanov*,  
Dr. Sci. (Phys.&Math.) *S.M. Khryashchev*, Dr. Sci. (Phys.&Math.) *P.S. Shcherbakov*

**Editorial Council:**

acad. *V.V. Alekseev*, RAS corresp. member *V.N. Anfilogov*, Dr. Sci. (Hist.) *E.T. Artemov*,  
RAS corresp. member *A.A. Baryakh*, Dr. Sci. (Med.) *E.R. Bojko*, acad. *V.I. Berdyshev*, acad. *V.N. Bolshakov*,  
Dr. Sci. (Econ.) *N.M. Bolshakov*, Prof. *T.M. Brechko*, Dr. Sci. (Biol.) *M.V. Getsen*, acad. *A.D. Gvishiani*,  
Dr. Sci. (Biol.) *S.V. Degteva*, Dr. Sci. (Hist.) *A.E. Zagrebin*, Dr. Sci. (Econ.) *V.A. Ilyin*, acad. *V.A. Koroteev*,  
RAS corresp. member *S.V. Krivovichev*, Dr. Sci. (Hist.) *E.F. Krinko*, RAS corresp. member *A.V. Kuchin*,  
RAS corresp. member *Yu.B. Marin*, acad. *V.P. Matveenko*, Dr. Sci. (Hist.) *V.I. Men'kovsky*, acad. *G.A. Mesyats*,  
Dr. Sci. (Hist.) *P.Yu. Pavlov*, RAS corresp. member *E.V. Pimenov*, Cand. Sci. (Geol.&Mineral.) *A.M. Plyakin*,  
RAS corresp. member *V.N. Puchkov*, RAS corresp. member *I.M. Roshchevskaya*, acad. *M.P. Roshchevsky*,  
Dr. Sci. (Chem.) *S.A. Rubtsova*, Dr. Sci. (Hist.) *E.A. Savelyeva*, Cand. Sci. (Hist.) *A.V. Samarin*,  
RAS corresp. member *A.F. Titov*, Dr. Sci. (Philol.) *G.V. Fedyuneva*,  
acad. *V.N. Charushin*, Dr. Sci. (Tech.) *Yu.Ya. Chukreev*, Dr. Sci. (Biol.) *E.V. Shamrikova*, acad. *V.S. Shatsky*,  
Dr. Sci. (Biol.) *D.N. Shmakov*, Dr. Sci. (Tech.) *N.D. Tshkadaya*

**Editorial Office:**

Office 317, Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS  
24, Kommunisticheskaya st., Syktyvkar 167982, Komi Republic  
Tel. +7 8212 244779 Fax +7 8212 242264  
E-mail: [journal@frc.komisc.ru](mailto:journal@frc.komisc.ru)  
[www.izvestia.komisc.ru](http://www.izvestia.komisc.ru)

*The "Russian Post" catalogue subscription index 52047*

ISSN 1994-5655

Registered by the Russian Federal Surveillance Service  
for Compliance with the Law in Mass Communications  
and Cultural Heritage Protection. The certificate of mass  
media registration — ПИ № ФС 77-26969 dated 11 Janua-  
ry, 2007.

*The journal is included in the list of peer-reviewed  
scientific publications  
of the Higher Attestation Commission  
of the Russian Federation*

© Federal State Budgetary Institution of Science Federal Research Centre  
"Komi Science Centre, Ural Branch, RAS", 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>В.Ф. Соколов</b> Адаптивное оптимальное слежение для дискретного минимально-фазового объекта с неопределенностью по выходу и смещенным внешним возмущением .....	5
<b>Н.А. Громов</b> Лагранжиан и фейнмановские диаграммы стандартной модели с контрактированной калибровочной группой .....	16
<b>Н.А. Громов, И.В. Костяков, В.В. Куратов</b> Диагональные контракции унитарных алгебр малой размерности.....	23
<b>Н.А. Громов, И.В. Костяков, В.В. Куратов</b> Когерентность в открытой квантовой системе .....	30
<b>А.В. Жубр</b> Полуспинорные структуры, часть 2 .....	34
<b>А.Н. Тихомиров</b> О спектральной норме прореженных прямоугольных случайных матриц .....	40
<b>В.Н. Тарасов, Н.О. Смолева</b> Контактная задача упругого кольца и жесткого основания .....	45
<b>Я.А. Войнова, Н.Г. Крылова, Е.М. Овсюк</b> Частица со спином 1 и аномальным магнитным моментом в кулоновском поле. Нерелятивистская теория .....	50
<b>А.Д. Коральков, Е.М. Овсюк, В.В. Кисель, Я.А. Войнова, В.М. Редьков</b> О некоторых способах описания связанных состояний для частиц со спином 1 в кулоновском поле .....	58
<b>В.И. Пунегов</b> О фокусировке рентгеновских лучей клиновыми многослойными Лауэ линзами.....	68

## C O N T E N T S

<b>V.F. Sokolov</b> Adaptive optimal tracking for discrete-time minimum phase plant under output uncertainty and external disturbance .....	5
<b>N.A. Gromov</b> Lagrangian and Feynman diagrams of the standard model with a contracted gauge group	16
<b>N.A. Gromov, I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov</b> Diagonal contractions of small-dimensional unitary algebras .....	23
<b>N.A. Gromov, I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov</b> Coherence in an open quantum system .....	30
<b>A.V. Zhubr</b> Twisted spin structures, part 2 .....	34
<b>A.N. Tikhomirov</b> On the spectral norm of sparse rectangular random matrices .....	40
<b>V.N. Tarasov, N.O. Smoleva</b> Contact problem of elastic ring and rigid base .....	45
<b>Ya.A. Voynova, N.G. Krylova, E.M. Ovsyuk</b> Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the Coulomb field. Nonrelativistic theory .....	50
<b>A.D. Koral'kov, E.M. Ovsyuk, V.V. Kisel, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov</b> On some methods to describe bound states for a spin 1 particle in the Coulomb field .....	58
<b>V.I. Punegov</b> On X-ray focusing by wedge multilayer Laue lenses .....	68

УДК 517.977 + 62-50  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-5-15

**В.Ф. СОКОЛОВ**

**АДАПТИВНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ СЛЕЖЕНИЕ  
ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МИНИМАЛЬНО-  
ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА  
С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ПО ВЫХОДУ  
И СМЕЩЕННЫМ ВНЕШНИМ  
ВОЗМУЩЕНИЕМ**

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар*

*[sokolov@dm.komisc.ru](mailto:sokolov@dm.komisc.ru)*

**V.F. SOKOLOV**

**ADAPTIVE OPTIMAL TRACKING FOR  
DISCRETE-TIME MINIMUM PHASE PLANT  
UNDER OUTPUT UNCERTAINTY AND  
EXTERNAL DISTURBANCE**

*Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS,  
Syktывkar*

**Аннотация**

Рассмотрена задача адаптивного оптимального робастного слежения для дискретного минимально-фазового объекта в детерминированной постановке. Предполагаются неизвестными коэффициенты передаточной функции номинальной модели, смещение и верхняя граница внешнего возмущения, а также коэффициент усиления нелинейной неопределенности по выходу. Решение оптимальной задачи с желаемой точностью в условиях неидентифицируемости неизвестных параметров получено с помощью полиэдральных оценок неизвестных параметров, согласованных с данными измерений, и использования показателя качества задачи слежения в качестве идентификационного критерия. Приведены результаты численного моделирования для системы с 10 неизвестными параметрами, иллюстрирующие эффективность предложенного метода синтеза. Для сравнения приведены также результаты моделирования адаптивного управления с использованием метода наименьших квадратов и проекционного алгоритма оценивания, иллюстрирующие их непригодность для решения рассмотренной оптимальной задачи.

**Ключевые слова:**

*адаптивное управление, оптимальное управление, робастное управление, неопределенность, ограниченное возмущение, множественное оценивание*

**Abstract**

This paper addresses the problem of adaptive optimal robust tracking for discrete-time minimum phase plant in deterministic setup. The transfer function coefficients of the nominal model, the bias and the upper bound of external disturbance, as well as the gain of nonlinear output uncertainty are unknown to controller designer and are non-identifiable. The solution of the optimal problem with the prespecified tolerance is based on the use of polyhedral estimates that are consistent with measurement data and on treating the control criterion as the identification criterion. Simulations for a system with 10 unknown parameters illustrate the efficiency of the proposed adaptive control. For comparison, simulations of adaptive control based on the recurrent least squares and the projection estimation algorithms illustrate that conventional recurrent estimation algorithms are unsuitable for solving the optimal problem under consideration.

**Keywords:**

*adaptive control, optimal control, robust control, uncertainty, bounded disturbance, set-membership estimation*

**Введение**

Рекуррентные алгоритмы оценивания неизвестных параметров управляемого объекта в теории адаптивного управления с дискретным временем обычно базируются на минимизации идентификационного критерия в виде некоторого функционала от невязки модели объекта. Одним из двух наиболее распространенных функционалов являет-

ся средний квадрат невязки модели. Этому функционалу соответствуют различные модификации метода наименьших квадратов (МНК). На основе МНК была построена математически строгая стохастическая теория адаптивного оптимального управления для линейных стационарных объектов со случайными внешними возмущениями (см., например, [1–3]). При этом асимптотическая оптимальность адаптивного управления базировалась на сходимости оценок к неизвестному конструктору вектору параметров управляемого объекта. Однако обобщения этой оптимальной теории на робастный случай, т.е. для объектов с неопределенностью (немоделируемой динамикой), не появилось, поскольку неопределенность в различных разработанных вариантах теории робастного управления является детерминированной, а не стохастической. Второй распространенный тип идентификационных критериев базируется на минимизации функционала  $|\theta_t - \theta|^2$ , где  $|\cdot|$  – евклидова норма вектора и  $\theta_t$  – оценка неизвестного вектора оцениваемых параметров  $\theta$  в момент времени  $t$ . Различные модификации градиентных алгоритмов, связанных с этим критерием, применялись для решения задач обеспечения глобальной устойчивости адаптивных систем управления со случайными или ограниченными внешними возмущениями и достаточно малыми неопределенностями. Следует отметить, что большая часть результатов в этом направлении имела условный характер, поскольку опиралась на дополнительное предположение постоянного возбуждения фазового вектора или задающего сигнала. В [4] было показано, что глобальная устойчивость робастных адаптивных систем на основе градиентных алгоритмов без привлечения дополнительных предположений достигается за счет взрывных эффектов, при которых фазовые переменные замкнутой системы принимают большие значения. Именно за счет этого обеспечивается улучшение оценок неизвестных параметров, в результате чего фазовые переменные возвращаются к желаемым значениям. Но ввиду наличия возмущений и неопределенностей оценки могут снова ухудшаться, что приводит к использованию дестабилизирующего регулятора и очередному всплеску фазовых переменных. Неприемлемость указанного эффекта в практических приложениях отмечалась в работе [5], посвященной анализу и обсуждению других недостатков адаптивного управления, основанного на описанных выше традиционных алгоритмах оценивания.

Во многих практических задачах управления цель управления формулируется в терминах допусков, которым должны удовлетворять выходные переменные во все моменты времени. В таких задачах внешние возмущения должны быть ограниченными, и основным сигнальным пространством является нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей  $\ell_\infty$ . С середины 1960-х задачи адаптивного управления объектами с ограниченными возмущениями решались в детерминированной постановке с помощью предложенного В.А. Якубовичем метода рекуррентных целевых неравенств и алгоритмов оценивания градиентного типа при предположении об известной верхней гра-

нице внешнего возмущения [6, 7]. Особенность систем с ограниченными возмущениями заключается в неидентифицируемости их параметров, т.к. для любого конечного набора измерений имеется множество параметров, согласованных с измерениями, и все усилия специалистов по идентификации таких систем были направлены на вычисление имеющих ограниченную сложность аппроксимаций этих множеств. Однако многочисленные публикации этого направления оставались в области идентификации и не нашли применения в адаптивном управлении.

В настоящей статье решается задача синтеза адаптивного регулятора, гарантирующего минимизацию установившейся ошибки отслеживания ограниченного задающего (командного) сигнала. Предполагается, что параметры передаточной функции линейной стационарной минимально-фазовой номинальной модели управляемого объекта неизвестны и лежат в известном компактном множестве пространства параметров. Также неизвестными предполагаются коэффициент усиления неопределенности по выходу, смещение и верхняя граница внешнего ограниченного детерминированного возмущения. Необходимость оценивать неизвестное смещение для улучшения качества управления многократно отмечалась в литературе по адаптивному управлению. Для оценки смещения предлагалось дополнить вектор регрессоров единичной компонентой, а вектор оцениваемых параметров – оценкой смещения. Однако автору неизвестны работы, где этот подход строго обоснован при детерминированной постановке задачи адаптивного управления.

Для решения рассматриваемой задачи применяется идентификационный подход, согласно которому по данным измерений вычисляются оценки неизвестных параметров и для управления в каждый текущий момент дискретного времени используется оптимальный регулятор, соответствующий вычисленным оценкам. В качестве идентификационного критерия используется показатель качества задачи слежения, равный наихудшей асимптотической ошибке слежения по всем допустимым возмущениям и неопределенностям. Теоретическая возможность синтеза адаптивного оптимального робастного управления на основе множественного оценивания неизвестных параметров и выборе идентификационного критерия в виде показателя качества задачи слежения была предложена и обоснована в [8]. Этот подход требует в общем случае неприемлемо большого объема вычислений, и интерес представляют задачи, в которых эти вычисления возможно производить в режиме онлайн, благодаря высокой вычислительной мощности современных компьютеров. Одной из таких задач является рассматриваемая в статье задача с неопределенностью только в канале выхода, в которой показатель качества задачи слежения является дробно-рациональной функцией параметров модели. Благодаря этому вычисление текущих оптимальных оценок на полиэдральном множестве параметров, согласованных с данными измерений, сводится к задаче линейного программирования. Более того, то обстоятельство, что поверхностями уровня дробно-рациональных функций яв-

ляются гиперплоскости в пространстве параметров, позволяет использовать для оценки неизвестных параметров полиэдральные множественные оценки заданной сложности.

Статья структурирована следующим образом. В 1 разделе дана постановка задачи. Во 2 – поясняется неидентифицируемость параметров рассматриваемой модели и поясняется необходимость использования показателя качества задачи слежения в качестве идентификационного критерия. Алгоритм полиэдрального оценивания заданной сложности описан в разделе 3. Основной результат об оптимальности построенного адаптивного управления изложен в разделе 4. В замечании 2 в конце раздела 4 поясняются важные отличительные достоинства предложенного адаптивного управления, заключающиеся в обеспечении онлайн верификации модели и в онлайн оценке гарантируемого качества слежения, согласованной с измерениями и априорной информацией. Раздел 5 содержит описание и результаты численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность предложенного метода синтеза адаптивного оптимального управления. В подразделе 5.3 иллюстрируются описанные выше отличительные достоинства предложенного адаптивного управления. Также приведены результаты численного моделирования адаптивных систем, основанных на "чистом" методе наименьших квадратов и "чистом" проекционным алгоритме, иллюстрирующие непригодность традиционных алгоритмов оценивания для решения задач адаптивного оптимального робастного управления в детерминированной постановке с минимаксными показателями качества. Раздел 6 содержит заключительные комментарии.

**Обозначения:**

$|\varphi|$  – евклидова норма вектора  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ ,  
 $\dim \varphi := n$  – размерность вектора  $\varphi$ ;  
 $\ell_\infty$  – нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  с нормой  $\|x\| = \sup_t |x_t|$ ;  
 $\|x\|_{ss} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_t|$ ;  
 $\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k|$  – индуцированная норма линейной стационарной системы  $G : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$  с устойчивой передаточной функцией  $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$ .

**1. Постановка задачи**

Рассматривается динамический объект управления, описываемый моделью

$$a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$ , соответственно, выход объекта, управление и суммарное возмущение в момент времени  $t$ ,  $q^{-1}$  – оператор сдвига назад ( $q^{-1}x_t := x_{t-1}$ ) и

$$a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n, \\ b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \dots + b_m\lambda^{m-1}.$$

Неизвестное суммарное возмущение  $v$  в модели (1) имеет вид

$$v_t = c_w + \delta_w w_t + \delta_y (\Delta y)_t, \quad \delta_w \geq 0, \delta_y \geq 0, \quad (2)$$

где последовательность  $w \in \ell_\infty$  описывает нормализованное внешнее возмущение,

$$\|w\|_\infty = \sup_{t>0} |w_t| \leq 1, \quad (3)$$

$c_w$  и  $\delta_w$ , соответственно, – смещение и норма (верхняя граница) *внешнего возмущения*

$$d_t = c_w + \delta_w w_t,$$

нелинейный (стационарный или нестационарный) оператор  $\Delta : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$  удовлетворяет ограничению

$$|(\Delta y)_t| \leq p_t, \quad p_t := \max_{t-\mu \leq s < t} |y_s| \quad (4)$$

и описывает нормализованную неопределенность в канале выхода с памятью  $\mu$ ,  $\delta_y$  – коэффициент усиления *неопределенности по выходу*  $\delta_y \Delta$ . Параметр  $\mu \in \mathbb{N}$  из определения  $p_t$  в (4) характеризует память неопределенности и без ущерба для гарантируемого качества управления может быть выбрана конструктором достаточно большой с учетом априорной информации о неопределенности.

Априорная информация об объекте управления состоит из предположений **П1**, **П2**:

**П1.** Неизвестный вектор коэффициентов

$$\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)^T$$

модели (1) лежит в ограниченном многограннике  $\Xi$ ,

$$\xi \in \Xi = \{ \hat{\xi} \mid A_{pr} \hat{\xi} \geq a_{pr} \} \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

с известными матрицей  $A_{pr} \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}$  и вектором  $a_{pr} \in \mathbb{R}^l$ ;  $b_1 \neq 0$  и корни полинома  $b(\lambda)$  лежат вне замкнутого единичного круга  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  для любого  $\xi \in \Xi$ .

**П2.** Внешнее возмущение  $d$ , его верхняя граница  $\delta_w$  и смещение  $c_w$ , а также неопределенность по выходу  $\delta_y \Delta$  и ее коэффициент усиления  $\delta_y$  неизвестны, но известна верхняя граница  $\bar{\delta}_y < 1$  коэффициента  $\delta_y$ :

$$0 \leq \delta_y \leq \bar{\delta}_y < 1. \quad (5)$$

Обозначим через

$$\theta := (\xi^T, c_w, \delta_y, \delta_w)^T$$

вектор всех неизвестных параметров рассматриваемой модели.

В общих словах задача состоит в построении адаптивного регулятора, подстраиваемого по данным измерений и обеспечивающего при априорных предположениях **П1** и **П2** отслеживание заданного ограниченного сигнала  $y^*$  с как можно меньшей асимптотической (установившейся) ошибкой слежения:

$$J_\mu(\theta, y^*) := \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*| \rightarrow \min,$$

где супремум берется по всем возмущениям  $v$ , удовлетворяющим ограничениям (2)–(4). Для строгой формулировки задачи воспользуемся результатом из теории робастного управления в  $\ell_1$ -постановке.

Если вектор коэффициентов  $\xi$  полиномов  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  известен и известно смещение  $c_w$  внешнего возмущения, то при любых начальных данных  $y_0, \dots, y_{-n+1}, u_0, \dots, u_{-m+1}$  регулятор

$$b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + y_{t+1}^* - c_w \quad (6)$$

обеспечивает при всех  $t$  равенство

$$y_{t+1} = v_{t+1} - c_w = \delta_w w_{t+1} + \delta_y (\Delta y)_{t+1}$$

и в силу непредсказуемости  $w_{t+1}$  и  $(\Delta y)_{t+1}$  гарантирует минимизацию ошибки слежения  $y_{t+1} - y_{t+1}^*$ .

Для формулировки результата о значении показателя качества  $J_\mu$  для замкнутой системы (1), (6) понадобится следующее определение.

**Определение.** Будем говорить, что последовательность  $|y^*|$  равномерно часто попадает в окрестности своего верхнего предела  $\|y^*\|_{ss}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют число  $N$  и подпоследовательность  $\{t_j\}_{j=1}^\infty$  последовательности натуральных чисел такие, что

$$\forall j \quad (t_{j+1} - t_j \leq N \wedge |y_{t_j}^*| \geq \|y^*\|_{ss} - \varepsilon).$$

**Теорема 1.** Для замкнутой системы управления (1), (6) с суммарным возмущением  $v$ , удовлетворяющим ограничениям (2)–(4), и вектором параметров  $\theta$ , в котором  $\delta_y < 1$ ,

$$J_\mu(\theta, y^*) \leq J(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \|y^*\|_{ss}}{1 - \delta_y}$$

и

$$J_\mu(\theta, y^*) \nearrow J(\theta, y^*) \quad (\mu \rightarrow +\infty),$$

если последовательность  $|y^*|$  равномерно часто попадает в окрестности своего верхнего предела (символ  $\nearrow$  обозначает монотонную сходимость снизу).

Теорема 1 является следствием теорем 3 и 8 [9] для замкнутой системы (1), (6).

Следует добавить, что условие  $\delta_y < 1$  является необходимым и достаточным условием робастной стабилизируемости модели (1) в классе линейных стационарных регуляторов при  $\mu \rightarrow +\infty$ . Поэтому предположение (5) об известной верхней границе  $\bar{\delta}_y$  коэффициента усиления неопределенности является не обременительным, а чисто техническим. Конструктор может выбрать любую верхнюю границу  $\bar{\delta}_y < 1$ , и этот выбор не влияет на качество адаптивного управления.

Таким образом, показатель качества  $J(\theta, y^*)$ , определенный в теореме 1, является точной верхней границей показателя качества  $J_\mu(\theta, y^*)$  при  $\mu \rightarrow +\infty$  и будет служить показателем качества адаптивного управления. Поскольку точное значение показателя  $J_\mu$  неизвестно, выбор показателя  $J(\theta, y^*)$  для оценки качества адаптивного управления не имеет альтернативы.

**Задача.** Для модели (1) с априорной информацией **П1**, **П2** требуется построить обратную связь, гарантирующую с наперед заданной точностью неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*| \leq J(\theta, y^*) \quad (7)$$

при любых начальных данных и любых возмущениях  $v$ , удовлетворяющих ограничениям (2)–(4).

Поставленная задача является задачей *адаптивного оптимального робастного слежения с показателем качества  $J(\theta, y^*)$* .

## 2. Оптимальное оценивание в условиях неидентифицируемости модели

Решение поставленной задачи базируется на методе рекуррентных целевых неравенств, множественном оценивании неизвестных параметров модели и выборе показателя качества задачи слежения  $J(\theta, y^*)$  в качестве идентификационного критерия. В этом подразделе поясняется необходимость такого подхода в условиях неидентифицируемости модели (1) при априорных предположениях **П1**, **П2**.

Для решения задачи будет использоваться идентификационный подход, согласно которому в каждый момент времени следует вычислять по данным измерений необходимые оценки неизвестных параметров модели (1) и применять оптимальный регулятор вида (6), соответствующий вычисленным оценкам.

Новая информация о векторе всех неизвестных параметров  $\theta$  модели (1), удовлетворяющей априорным предположениям **П1**, **П2**, получаемая в момент времени  $t + 1$  после измерения выхода  $y_{t+1}$ , заключается в неравенстве

$$|a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_t - c_w| \leq \delta_w + \delta_y p_{t+1}, \quad (8)$$

вытекающем из уравнений и ограничений (1)–(4).

Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления базируется на следующем простом утверждении.

**Утверждение 1.** Если для некоторой оценки

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}_w, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^T, \quad \hat{\xi} \in \Xi, \quad 0 \leq \hat{\delta}_y \leq \bar{\delta}_y, \quad 0 \leq \hat{\delta}_w,$$

при всех достаточно больших  $t$  выполняются неравенства

$$|\hat{a}(q^{-1})y_{t+1} - \hat{b}(q^{-1})u_t - \hat{c}_w| \leq \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{t+1}, \quad (9)$$

то модель (1) с вектором параметров  $\hat{\theta}$  удовлетворяет априорным предположениям **П1**, **П2** при всех достаточно больших  $t$ .

Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления заключается в построении алгоритма оценивания, гарантирующего сходимость оценок за конечное время к некоторой предельной оценке  $\theta_\infty$ , удовлетворяющей целевым неравенствам (9) с достаточной для решения задачи точностью. Если полученная оценка  $\theta_\infty$  удовлетворяет неравенствам (9) при всех достаточно больших  $t$ , то применение соответствующего этой оценке оптимального регулятора вида (6) гарантирует, в силу теоремы 1, неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*| \leq J(\theta_\infty, y^*). \quad (10)$$

Неравенство (10) достаточно для решения задачи адаптивной стабилизации, но не поставленной оптимальной задачи, решение которой будет гарантировано, если дополнительно выполняется неравенство

$$J(\theta_\infty, y^*) \leq J(\theta, y^*).$$

Из (8) следует, что при любом управлении моделью (1) на интервале времени  $[0, t - 1]$  полная информация о неизвестном векторе параметров  $\theta$  в момент времени  $t$  имеет вид

$$\theta \in P_t := \{ \hat{\theta} \in P_0 \mid |\hat{a}(q^{-1})y_{k+1} - \hat{b}(q^{-1})u_k - \hat{c}_w| \leq \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, t-1 \}, \quad (11)$$

где

$$P_0 := \{ \hat{\theta} \mid \hat{\xi} \in \Xi, 0 \leq \hat{\delta}_y \leq \bar{\delta}_y, \hat{\delta}_w \geq 0 \}$$

– априорное множество векторов  $\theta$ , удовлетворяющих априорной информации **П1**, **П2**. Каждое множество  $P_t$  включает те и только те векторы  $\hat{\theta}$  из априорного множества  $P_0$ , которые согласованы с уравнением модели (1), априорными предположениями **П1**, **П2** и с измерениями на промежутке  $[0, t]$  и является неограниченным полиэдром (многогранником).

**Утверждение 2.** При любом управлении объектом (1) на любом промежутке  $[0, t]$ , для любого  $\hat{\xi} \in \Xi$ , любого  $\hat{c}_w \in \mathbb{R}$  и любого  $\hat{\delta}_y \geq 0$

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}_w, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^T \in P_t \quad (12)$$

при всех достаточно больших  $\hat{\delta}_w$ .

Справедливость утверждения 2 очевидно следует из того, что неравенства (9) на каждом конечном интервале времени выполняются при всех достаточно больших  $\hat{\delta}_w$ .

Утверждение 2 представляет собой строгое математическое утверждение о *неидентифицируемости неизвестного вектора параметров  $\theta$*  при априорных предположениях **П1**, **П2**. При этом для любой пары  $\hat{\xi}, \hat{c}_w$  имеется семейство пар  $\hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w$  с любым  $\hat{\delta}_y \in [0, \bar{\delta}_y]$  и соответствующим  $\hat{\delta}_y$  минимальным значением  $\hat{\delta}_w$ , для которых на данном интервале  $[0, t]$  выполнены неравенства (9).

Если мы хотим обеспечить решение задачи 1 с помощью какого-либо алгоритма оценивания, обеспечивающего сходимость оценок к некоторому предельному значению  $\theta_\infty$ , и использования оптимального регулятора для вычисляемых оценок, то задача 1 будет решена, если вектор  $\theta_\infty$  будет удовлетворять неравенствам (9) при всех достаточно больших  $t$  и

$$J(\theta_\infty, y^*) \leq J(\theta, y^*). \quad (13)$$

Поскольку в любой момент времени  $t$  вектором параметров  $\theta$  управляемой модели может быть любой вектор из согласованного с измерениями и априорной информацией множества  $P_t$ , ключевое неравенство (13) диктует выбор текущих оптимальных оценок в виде

$$\theta_t = \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in P_t} J(\hat{\theta}, y^*). \quad (14)$$

Таким образом, неидентифицируемость параметров модели (9) при априорных предположениях **П1**, **П2** диктует выбор показателя качества  $J(\hat{\theta}, y^*)$  в качестве идентификационного критерия.

### 3. Алгоритм полиэдрального оценивания заданной сложности

Для решения поставленной задачи будет использован алгоритм оценивания, который в каждый момент времени  $t$ , наряду с оценками  $\theta_t$  неизвестного вектора параметров  $\theta$ , вычисляет полиэдральные верхние (по включению) оценки  $\Theta_t$  полиэдров  $P_t$ , определенных в (11). Выберем натуральное число

$$N \geq \dim \theta = n + m + 3,$$

равное числу запоминаемых линейных неравенств для описания полиэдральных оценок  $\Theta_t$ , и параметр мертвой зоны  $\varepsilon > 0$ , характеризующий желаемую точность выполнения неравенств (9) для оценок  $\theta_t$ . Выберем в качестве начальных оценок

$$\Theta_0 = P_0, \quad \theta_0 = (\xi_0^T, 0, 0, 0)^T,$$

где  $\xi_0$  – любой вектор из априорного множества  $\Xi$ . Пусть

$$\theta_t = (\xi_t^T, c_{w,t}, \delta_{y,t}, \delta_{w,t})^T \quad (15)$$

– оценка неизвестного вектора  $\theta$  в момент  $t$  и в момент времени  $t+1$  измерен выход  $y_{t+1}$ . Неравенство (9) относительно вектора  $\theta_t$  представляет собой систему двух линейных неравенств (ввиду наличия модуля в левой части неравенства), только одно из которых может нарушаться. Для проверки наличия такого неравенства введем следующие обозначения. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_t &:= (-y_t, -y_{t-1}, \dots, -y_{t-n+1}, u_t, \dots, u_{t-m+1})^T, \\ \eta_{t+1} &:= \operatorname{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^T \xi_t - c_{w,t}), \\ \psi_{t+1} &:= (\eta_{t+1} \varphi_t^T, \eta_{t+1}, p_{t+1}, 1)^T, \\ \zeta_{t+1} &:= \eta_{t+1} y_{t+1}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях неравенство (9) для вектора  $\theta_t$  принимает вид

$$\psi_{t+1}^T \theta_t \geq \zeta_{t+1}, \quad (16)$$

а одно из двух линейных неравенств (9), которое может нарушаться, имеет вид

$$\psi_{t+1}^T \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1}. \quad (17)$$

Каждая полиэдральная оценка  $\Theta_t$  будет описываться системой  $N$  линейных неравенств вида (17) или неравенств из описания априорного множества  $\Theta_0$  (на некотором начальном отрезке число неравенств может быть меньше  $N$ , пока не достигнет этого значения). Положим

$$\theta_{t+1} := \theta_t, \quad \Theta_{t+1} := \Theta_t,$$

$$\text{если } \psi_{t+1}^T \theta_t \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|. \quad (18)$$

В противном случае положим

$$\Omega_{t+1} := \{ \hat{\theta} \mid \psi_{t+1}^T \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1} \},$$

$$\theta_{t+1} := \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*), \quad (19)$$

где  $\theta_{t+1}$  – вершина полиэдра  $\Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}$ , являющаяся решением задачи дробно-линейного программирования (19). Оценка  $\Theta_t$  обновляется согласно алгоритму

$$\Theta_{t+1} = \mathcal{S}(\Theta_t, \Omega_{t+1}), \quad (20)$$

где алгоритм  $\mathcal{S}$  дает  $\Theta_t \cap \Omega_{t+1}$  (т.е. добавление к линейным неравенствам из описания  $\Theta_t$  нового неравенства (17)), если число неравенств в описании  $\Theta_t$  строго меньше  $N$ . Если же число неравенств в описании  $\Theta_t$  равно  $N$ , то новое неравенство (17) включается в описание  $\Theta_{t+1}$  вместо любого из неравенств в описании  $\Theta_t$ , на границе которого не лежит  $\theta_{t+1}$ .

Задача оптимального оценивания (19) является задачей дробно-линейного программирования с не более, чем  $l+3+N+1$  линейными неравенствами ( $l+3$  – число неравенств в описании априорного множества  $\Theta_0$ ). Известно (см., например, [10]), что задача дробно-линейного программирования стандартным образом сводится к задаче линейного программирования путем добавления одной переменной, одного линейного неравенства и одного линейного равенства. Таким образом, описанный алгоритм оценивания имеет ограниченную сложность, не растущую с ростом времени.

#### 4. Адаптивное оптимальное слежение

Используя введенное в предыдущем разделе обозначение  $\varphi_t$  для фазового вектора, уравнение неизвестного конструктору оптимального регулятора (6) можно записать в виде

$$\varphi_t^T \xi = y_{t+1}^* - c_w.$$

Согласно описанному в начале раздела 2 идентификационному подходу, управление в момент  $t$  будет осуществляться *адаптивным регулятором*

$$\varphi_t^T \xi_t = y_{t+1}^* - c_{w,t}, \quad (21)$$

где  $\xi_t$  и  $c_{w,t}$  – компоненты вектора оценок (15).

Основной результат сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть объект управления удовлетворяет уравнению (1) и априорным предположениям **П1**, **П2** с неизвестным вектором параметров

$$\theta = (\xi^T, c_w, \delta_y, \delta_w)^T.$$

Пусть объект управляется адаптивным регулятором (21) с использованием алгоритма оценивания (18)–(20). Тогда для любого достаточно малого параметра мертвой зоны  $\varepsilon > 0$  и для любых начальных данных в замкнутой системе управления (1), (21) справедливы утверждения:

1. Последовательность  $J(\theta_t, y^*)$  возрастающая и

$$J(\theta_t, y^*) = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t} J(\hat{\theta}, y^*) \leq J(\theta, y^*) \quad \forall t. \quad (22)$$

2. Если оценки  $\Theta_t$  и  $\theta_t$  не изменяются при всех достаточно больших  $t$ , то

$$\|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J(\theta_\infty, y^*) + K_{\theta_\infty} \varepsilon \leq J(\theta, y^*) + K_{\theta_\infty} \varepsilon, \quad (23)$$

где  $\theta_\infty = (\xi_\infty^T, c_{w,\infty}, \delta_{y,\infty}, \delta_{w,\infty})$  – финальное значение оценок  $\theta_t$  и

$$K_{\theta_\infty} = \frac{4}{(1 - \delta_{y,\infty})^2} \times [1 + 2\|y^*\|_{ss} + C_\infty + (\delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty}\|y^*\|_{ss})(2 + C_\infty)],$$

где  $C_\infty = \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|$ .

**Доказательство.** Монотонность последовательности  $J(\theta_t, y^*)$  доказывается индукцией по времени  $t$ . Пока число неравенств в полиэдральных оценках  $\Theta_t$  не превосходит  $N$ , эти оценки убывают по включению, и возрастание последовательности  $J(\theta_t, y^*)$  и равенство в (22) прямо следуют из (19) и равенства  $\Theta_{t+1} = \Theta_t \cap \Omega_{t+1}$ . Докажем индукционный переход. Пусть возрастание  $J(\theta_t, y^*)$  имеет место до момента  $t$  включительно, справедливо равенство в (22) и число неравенств в описании  $\Theta_t$  достигло  $N$ . В момент  $t+1$  из включения  $\Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1} \subset \Theta_t$ , (22) и (19) следует

$$J(\theta_{t+1}, y^*) \geq J(\theta_t, y^*).$$

Для доказательства первого утверждения теоремы остается показать, что после обновления  $\Theta_t$  на  $\Theta_{t+1}$  согласно (20) выполнено равенство

$$\min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*) = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*), \quad (24)$$

несмотря на замену одного из неравенств полиэдра  $\Theta_t$  на неравенство, задающее полупространство  $\Omega_{t+1}$ . Для этого заметим, что линии уровня дробно-линейного показателя качества  $J(\hat{\theta}, y^*)$  лежат на гиперплоскости в  $\mathbb{R}^{\dim \theta}$ :

$$J(\hat{\theta}, y^*) = C \Leftrightarrow \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y(\|y^*\|_{ss} + C) = C.$$

В силу этого весь полиэдр  $\Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}$  лежит в полупространстве

$$\{ \hat{\theta} \mid J(\hat{\theta}, y^*) \geq J(\theta_{t+1}, y^*) \},$$

а его вершина  $\theta_{t+1}$  – на границе этого полупространства и задается  $\dim \theta$  неравенствами из описания этого полиэдра. Согласно (20) из полиэдра  $\Theta_t$  исключается неравенство, на границе которого не лежит точка минимума  $\theta_{t+1}$ , при этом все добавленные при исключении неравенства векторы, если таковые имеются, могут находиться только в этом же полупространстве. Поэтому  $\theta_{t+1}$  остается точкой минимума показателя качества  $J$  на “урезанном” полиэдре  $\Theta_0 \cap \Theta_{t+1}$ , что означает справедливость (24).

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Сходимость оценок к финальному значению  $\theta_\infty$  за конечное время означает, что в силу (18) при всех достаточно больших  $t$  выполнены неравенства

$$\psi_{t+1}^T \theta_t \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|. \quad (25)$$

Поскольку неравенства (16) эквивалентны неравенствам (9) для финальной оценки  $\hat{\theta} = \theta_\infty$ , то при всех

достаточно больших  $t$  из (25) следует

$$\begin{aligned} & |a_\infty(q^{-1})y_{t+1} - b_\infty(q^{-1})u_t - | \leq \\ & \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty}p_{t+1} + \varepsilon|\psi_{t+1}| \leq \\ & \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty}p_{t+1} + \\ & + \varepsilon(|y_{t-n+1}^t| + |u_{t-m+1}^t| + p_{t+1} + 1) \leq \\ & \delta_{w,\infty} + \varepsilon + (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon)p_{t+1} + \varepsilon|u_{t-m+1}^t|. \end{aligned} \quad (26)$$

Неравенства (26) позволяют рассматривать (см. утверждение 1) выход  $y_t$  для всех достаточно больших  $t$  как выход модели (1) с вектором параметров  $(\xi_\infty^T, \delta_{y,\infty} + 2\varepsilon, \delta_{w,\infty} + \varepsilon)^T$  вместо  $\theta$  и с дополнительной неопределенностью  $\varepsilon(\Delta_1 u)_{t+1}$  в канале управления, где  $\varepsilon$  – коэффициент усиления неопределенности, и нормированная неопределенность  $\Delta_1$  удовлетворяет ограничению

$$|(\Delta_1 u)_t| \leq \max_{t-\mu \leq s < t} |u_{t-s}|.$$

По теореме 8 [9] установившаяся ошибка слежения  $\|y_t - y_t^*\|_{ss}$  для такой замкнутой системы управления не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \bar{J}_\infty := \\ & = \frac{\delta_{w,\infty} + \varepsilon + (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon + \varepsilon\|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|)\|y^*\|_{ss}}{1 - (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon) - \varepsilon\|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|} \end{aligned} \quad (27)$$

Левое неравенство в (23) получается оценкой сверху разности  $\bar{J}_\infty - J(\theta_\infty, y^*)$  с помощью ряда алгебраических преобразований, которые здесь не приводятся. Наконец, правое неравенство в (23) следует из ключевого неравенства (13), которое, в свою очередь, следует из определения (19) оптимальных оценок  $\theta_t = \theta_\infty$  и включений  $\theta \in \Theta_t$  при всех  $t$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 1.** Второе утверждение теоремы содержит предположение о сходимости алгоритма оценивания за конечное время. Такая конечная сходимость строго доказана в [11] для случая  $\dim \theta \leq 3$  и является открытой проблемой для произвольной размерности вектора оцениваемых параметров. Однако сходимость множественных и векторных оценок за конечное время строго гарантирована, если искусственно не ограничивать число неравенств в множественных оценках  $\Theta_t$ . Эта конечная сходимость следует из того, что в этом случае из монотонно убывающих по включению оценок  $\Theta_t$  при каждом их обновлении выбрасывается по меньшей мере шар радиуса  $\varepsilon/2$  (см. [8]). Однако очевидно вытекающая из этого обстоятельства экспоненциальная оценка числа возможных обновлений множественных оценок и, тем более, числа запоминаемых неравенств, является грубой и заведомо завышенной. Результаты моделирования адаптивного управления показывают, что число обновлений не растет экспоненциально с ростом размерности. Кроме того, численные эксперименты показывают, что конечная сходимость алгоритма оценивания (18)–(20) наблюдается в любых размерностях, и проблема состоит в получении доказательства конечной сходимости.

**Замечание 2.** Важным отличительным достоинством использованного для синтеза адаптивного управления метода рекуррентных целевых неравенств является *онлайн верификация* не только те-

кущих оценок, но и априорных предположений об управляемом объекте. Традиционные градиентные и МНК алгоритмы не обеспечивают такой верификации, которая представляет собой отдельную проблему, не изучавшуюся в рамках теории адаптивного управления. Более того, постоянство оценок на длительном промежутке времени заведомо гарантирует неравенства (23), в которых роль  $\theta_\infty$  играет текущая не обновляющаяся оценка  $\theta_t$ . Таким образом, конструктор системы управления имеет не только оценку гарантируемого качества слежения (в условиях действия возмущения и неопределенности априори неизвестной амплитуды!), но и оценку точности  $K_{\theta_t, \varepsilon}$  адаптивного оптимального управления и может при необходимости уменьшить параметр мертвой зоны  $\varepsilon$  для повышения точности.

## 5. Моделирование

### 5.1. Проекционный и МНК алгоритмы оценивания

Одним из традиционных градиентных алгоритмов оценивания для решения задач адаптивной стабилизации является *проекционный алгоритм*, основанный на следующем идентификационном критерии. Для простоты изложения предположим сначала, что внешнее возмущение – несмещенное, т.е.  $c_w = 0$ . Тогда уравнение модели (1) можно записать в виде

$$y_{t+1} - \xi^T \varphi_t = v_{t+1}.$$

Пусть  $\xi_t$  – некоторая оценка неизвестного вектора коэффициентов  $\xi$  в момент  $t$ . Тогда оценка  $\xi_{t+1}$  проекционного алгоритма имеет вид

$$\xi_{t+1} = \underset{\{\hat{\xi} \mid y_{t+1} - \hat{\xi}^T \varphi_t = 0\}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\xi} - \xi_t\|,$$

т.е. является проекцией вектора  $\xi_t$  на гиперплоскость  $y_{t+1} - \hat{\xi}^T \varphi_t = 0$  в пространстве оценок  $\hat{\xi}$ . Если оценка  $\xi_{t+1}$  не попадает в априорное выпуклое множество  $\Xi$ , то она дополнительно проектируется на  $\Xi$ . Таким образом, цель проекционного алгоритма – вычислить ближайшую к вектору  $\xi_t$  оценку  $\xi_{t+1}$ , дающую нулевую невязку модели в момент  $t + 1$ . Выбор ближайшей оценки гарантирует убывание функции Ляпунова  $|\xi_t - \xi|^2$  при отсутствии возмущения  $v$  в модели (1). В случае ненулевого смещения  $c_w$  к вектору  $\xi$  следует добавить компоненту  $c_w$ , а к векторам оценок  $\hat{\xi}$  – компоненту  $\hat{c}_w$ .

С самого начала развития теории адаптивного управления в 1960-х гг. предлагались и исследовались различные модификации проекционного алгоритма с целью обеспечения стабилизации адаптивных систем без возмущений или при ограниченных возмущениях. Однако только относительно недавно в [12, 13] были получены, без каких-либо дополнительных искусственных предположений, строгие результаты в задаче адаптивного слежения для дискретных систем с помощью проекционного алгоритма. Было доказано, что ошибка слежения в адаптивной системе с чистым проекционным алгоритмом пропорциональна взвешенной по времени сумме суммарного возмущения  $v$  и задающего сигнала

$y^*$ . В разделе 5.2 приводятся результаты моделирования, иллюстрирующие на примере проекционного алгоритма непригодность традиционных градиентных алгоритмов оценивания для решения задач адаптивного оптимального управления в детерминированной постановке.

МНК базируется на идентификационном критерии в виде суммы квадратов невязок модели

$$I(\hat{\xi}, \hat{c}_w) = \sum_{k=1}^{k=t} (y_{k+1} - \hat{\xi}^T \varphi_k - \hat{c}_w)^2.$$

Как отмечалось во введении, МНК нашел широкое применение в теории адаптивного оптимального управления для систем со случайными внешними возмущениями. Но стохастическая теория робастного управления до настоящего времени не разработана и поэтому нет и теории адаптивного оптимального робастного управления. В этом разделе приводятся результаты моделирования адаптивной системы с МНК алгоритмом оценивания, показывающие, что при наличии даже случайной, а не детерминированной неопределенности по выходу, поведение адаптивной системы, приемлемое для большинства реализаций случайных возмущений и неопределенностей, может быть не только далеко не оптимальным, но и практически неприемлемым для некоторых реализаций.

### 5.2. Описание и результаты численного моделирования

Для численного моделирования выбран неустойчивый минимально-фазовый объект (1) с полюсами (корнями  $a(\lambda)$ ) 0, 8 и 0, 9, каждый кратности 2, и нулями (корнями  $b(\lambda)$ ) 1, 1 и 1, 2 и с  $b_1 = 2$ . Этим полюсам и нулям соответствует вектор коэффициентов

$$\xi = (-4, 2222; 6, 9290; -5, 2469; 1, 5432; 2, 0000; -3, 4848; 1, 5152)^T.$$

Суммарное возмущение  $v$  моделируется в виде

$$v_t = 1 + w_t + 0.5 \varkappa_t p_t, \quad (28)$$

где  $w_t, \varkappa_t$  – последовательности независимых равномерно распределенных на отрезке  $[-1, 1]$  случайных величин. Таким образом, неизвестные конструктору смещение и норма внешнего возмущения равны, соответственно,  $c_w = 1$  и  $\delta_w = 1$ . Память неопределенности  $\mu = 10$ , а коэффициент усиления неопределенности  $\delta_y$  в приводимых численных результатах принимал значения 0,2 и 0,5.

Априорное множество  $P_0$  векторов  $\theta$  описывается ограничениями

$$\begin{aligned} |a_i| &\leq 10, |b_i| \leq 10, i = 1, 2, 3, \\ b_1 &\geq 0, 1, 0, 8 \geq \delta_y \geq 0, \delta_w \geq 0, \\ b_1 - b_3 &\geq 0, 01, b_1 \pm b_2 + b_3 \geq 0, 01. \end{aligned}$$

Неравенства в последней строке эквивалентны условию минимальной фазовости модели, если в правых частях этих неравенств вместо 0,01 поставить нули. Сколь угодно малый отступ, в данном случае 0,01, необходим во избежание сингулярности. Параметр мертвой зоны алгоритма оценивания выбран равным

0, 001, начальные значения  $y_1, y_2, y_3, y_4$  – случайные из отрезка  $[-1, 1]$ ,  $u_1, u_2, u_3, u_4$  – нули.

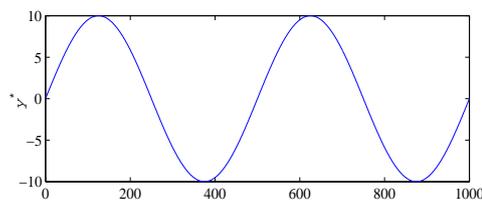


Рис. 1. График задающего сигнала  $y^*$ .

Fig. 1. Plot of the reference signal  $y^*$ .

График периодического задающего сигнала  $y_t^* = 10 \sin(0.002 t)$  с  $\|y_t^*\|_{ss} = 10$  представлен на рис. 1.

Для иллюстрации поведения адаптивных систем с различными алгоритмами оценивания при неблагоприятных возмущениях, значения внешнего возмущения и неопределенности на промежутке  $[500, 700]$  выбирались так, чтобы максимизировать абсолютную величину выхода в следующий момент времени:

$$v_{t+1} = (\delta_w + \delta_y p_{t+1}) \text{sign}(\xi_t^T \varphi_t).$$

При моделировании адаптивного управления с оптимальным алгоритмом оценивания (18)–(20) использовалось  $N = 2 \dim \theta = 20$  запоминаемых неравенств. Этому числу неравенств соответствует сохранение информации о текущей оптимальной оценке  $\theta_t$  и всех ее 10 смежных вершинах.

Пунктирные линии на всех приводимых далее графиках ошибки слежения соответствуют неизвестным конструктору адаптивной системы оптимальным границам для ошибки слежения  $\pm J(\theta, y^*)$ .

На рис. 2, 3 и 4 приведены графики выхода установившейся ошибки слежения соответственно для адаптивного управления с проекционным, МНК и оптимальными алгоритмами оценивания (18)–(20) при одинаковых реализациях случайных величин  $w_t$  и  $\varkappa_t$  и относительно малом коэффициенте усиления неопределенности  $\delta_y = 0,2$ , которому соответствует оптимальное значение  $J(\theta, y^*) = 3,75$ . Рис. 2 иллюстрирует неприемлемое качество, доставляемое проекционным алгоритмом оценивания уже при относительно малом значении  $\delta_y$ . Рис. 3 иллюстрирует, как изменение задающего сигнала нежелательным образом отражается на выходе адаптивной системы с МНК алгоритмом оценивания.

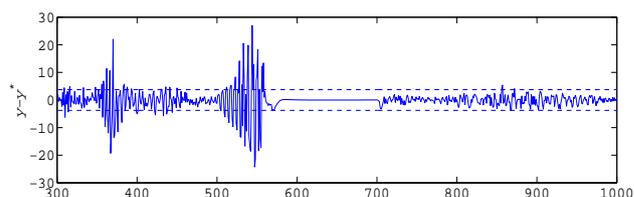


Рис. 2. Проекционный алгоритм,  $\delta_y = 0,2, J(\theta, y^*) = 3,75$ .

Fig. 2. Projection algorithm,  $\delta_y = 0,2, J(\theta, y^*) = 3,75$ .

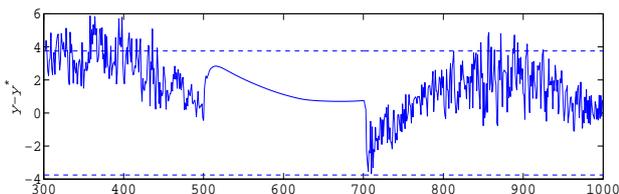


Рис. 3. МНК алгоритм,  $\delta_y = 0,2$ ,  $J(\theta, y^*) = 3,75$ .

Fig. 3. Least squares algorithm,  $\delta_y = 0.2$ ,  $J(\theta, y^*) = 3,75$ .

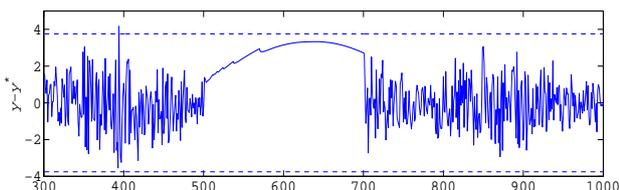


Рис. 4. Оптимальный алгоритм,  $\delta_y = 0,2$ ,  $J(\theta, y^*) = 3,75$ .

Fig. 4. Optimal algorithm,  $\delta_y = 0.2$ ,  $J(\theta, y^*) = 3,75$ .

На рис. 5 приведен пример всплеска ошибки слежения при МНК оценивании и другой реализации случайных величин  $w_t$  и  $\varkappa_t$ . Отметим, что в установившемся режиме до момента  $t = 500$  начала возмущений максимальной амплитуды ошибка слежения значительно смещена относительно гарантируемого адаптивным оптимальным управлением интервала, а при возмущениях максимальной амплитуды превысила оптимальную верхнюю границу более чем на порядок. Для этих же реализаций случайных величин  $w_t$  и  $\varkappa_t$  на рис. 6 представлен график ошибки слежения при оптимальном алгоритме оценивания.

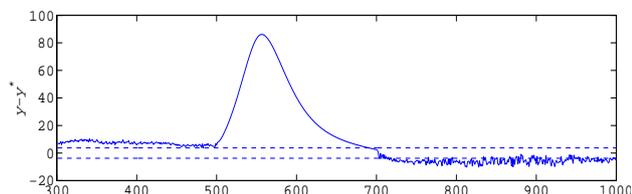


Рис. 5. МНК алгоритм,  $\delta_y = 0,2$ ,  $J(\theta, y^*) = 3,75$ .

Fig. 5. Least squares algorithm,  $\delta_y = 0.2$ ,  $J(\theta, y^*) = 3,75$ .

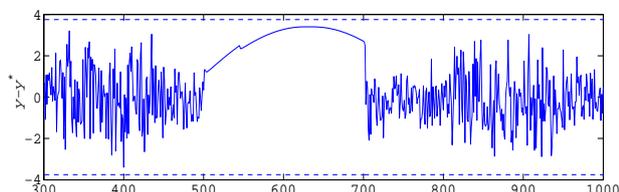


Рис. 6. Оптимальный алгоритм,  $\delta_y = 0,2$ ,  $J(\theta, y^*) = 3,75$ .

Fig. 6. Optimal algorithm,  $\delta_y = 0.2$ ,  $J(\theta, y^*) = 3,75$ .

На рис. 7, 8 и 9 приведены графики выхода установившейся ошибки слежения соответственно для адаптивного управления с проекционным, МНК и оптимальными алгоритмами оценивания при одинаковых реализациях случайных величин  $w_t$  и  $\varkappa_t$  и коэффициенте усиления неопределенности  $\delta_y =$

0,5, которому соответствует оптимальное значение  $J(\theta, y^*) = 12$ . При таком коэффициенте усиления адаптивное управление с проекционным алгоритмом демонстрирует неприемлемое качество при почти всех реализациях возмущения и неопределенности. Адаптивное управление с МНК алгоритмом на большинстве реализаций возмущений и неопределенности демонстрирует хорошее качество слежения, но не может гарантировать его для всех допустимых возмущений и неопределенности. На рис. 8 проиллюстрировано неприемлемое качество адаптивного управления с МНК алгоритмом в установившемся режиме до момента  $t = 500$ , начала промежутка возмущения и неопределенности максимальной амплитуды, которые помогли МНК улучшить оценки и, как следствие, ошибку слежения.

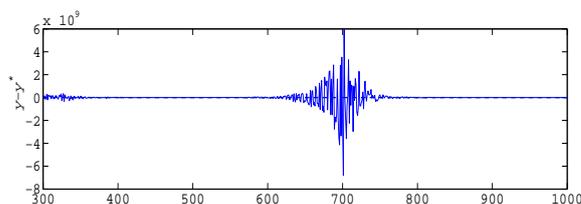


Рис. 7. Проекционный алгоритм,  $\delta_y = 0,5$ ,  $J(\theta, y^*) = 12$ .

Fig. 7. Projection algorithm,  $\delta_y = 0.5$ ,  $J(\theta, y^*) = 12$ .

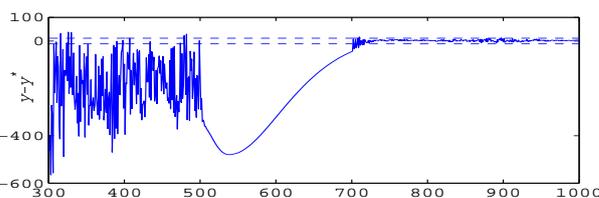


Рис. 8. МНК алгоритм,  $\delta_y = 0,5$ ,  $J(\theta, y^*) = 12$ .

Fig. 8. Least squares algorithm,  $\delta_y = 0.5$ ,  $J(\theta, y^*) = 12$ .

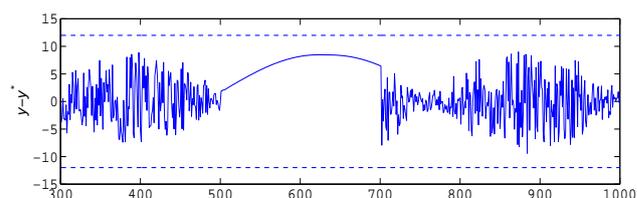


Рис. 9. Оптимальный алгоритм,  $\delta_y = 0,5$ ,  $J(\theta, y^*) = 12$ .

Fig. 9. Optimal algorithm,  $\delta_y = 0.5$ ,  $J(\theta, y^*) = 12$ .

Для адаптивного управления с алгоритмом оценивания (18)–(20) асимптотическая оптимальность слежения наблюдалась абсолютно во всех многочисленных экспериментах. Число обновлений оценок алгоритмом (18)–(20) при случайных и детерминированных  $w_t$  и  $\varkappa_t$  находилось в промежутке [65, 90], а время счета на ноутбуке с процессором 4xIntelCore i5-7200U CPU@2.50GHz колебалось в промежутке от 2,5 до 4,7 сек. При моделировании адаптивного оптимального управления, в котором количество запоминаемых линейных неравенств не ограничивалось и для которого гарантирована сходимость оценок за конечное время, число обновлений оценок возрастает на единицы, а время счета

примерно на 0,5 сек. Следует отметить, что оценки, доставляемые алгоритмом (18)–(20) к моменту  $t = 1000$ , настолько близки к вектору  $\theta$ , что при увеличении времени моделирования до  $t = 10^4$  оценки  $\theta_t$  испытывают единицы обновлений.

### 5.3. Онлайн оценка качества слежения и верификация модели

В этом разделе иллюстрируется первое утверждение теоремы 2 и замечание 2 в конце предыдущего раздела. На рис. 10 показана динамика роста оптимальных значений показателя качества  $J(\theta_t, y^*)$ , согласованных с данными измерений к моменту  $t$  (за исключением моментов, соответствующих выбрасываемым из оценок  $\Theta_t$  неравенностям для реализаций возмущения и неопределенности, соответствующих рис. 9. Отметим, что последние 4 обновления оценок происходили в моменты времени 501, 507, 516, 854. Таким образом, к моменту  $t = 500$  начала возмущений максимальной амплитуды, способствующих получению более точных оценок, алгоритм оптимального оценивания (18)–(20) уже предоставил достаточно хорошие оценки, которые всего трижды уточнялись при действии возмущений максимальной амплитуды и всего один раз после их окончания. Последнее согласованное с измерениями значение  $J(\theta_{1000}, y^*) = J(\theta_{854}, y^*) = 10,2695 < J(\theta, y^*) = 12$ . В заключение приведем последнюю оценку

$$\theta_{1000} = (-3.8640; 6.2783; -4.8115; 1.4014; 1.8285; 3.1815; 1,3846; 0,9459; 0,4378; 1,3961)^T$$

неизвестного конструктору вектора параметров

$$\theta = (-4,2222; 6,9290; -5,2469; 1,5432; 2; -3,4848; 1,5152; 1; 0,5; 1)^T.$$

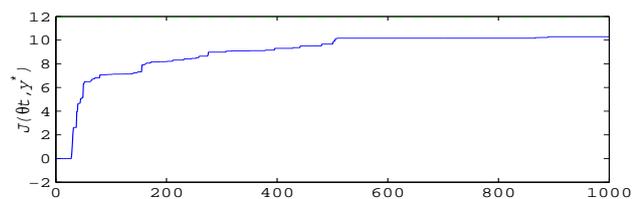


Рис. 10. График  $J(\theta_t, y^*)$ ,  $\delta_y = 0,5$ ,  $J(\theta, y^*) = 12$ .

Fig. 10. Plot of  $J(\theta_t, y^*)$ ,  $\delta_y = 0,5$ ,  $J(\theta, y^*) = 12$ .

Множественное оценивание неизвестных параметров в рамках теории идентификации систем традиционно базировалось на предположении об известных верхних границах возмущений и неопределенности и поэтому этот метод считался слишком консервативным [14]. Приведенные результаты наглядно опровергают широко распространенную точку зрения о неизбежном консерватизме множественного оценивания.

## 6. Заключение

В данной работе рассмотрена детерминированная задача адаптивного оптимального робастного слежения для относительно простого дискретного минимально-фазового объекта с одним вхо-

дом и одним выходом в условиях сильной априорной неопределенности, при которой параметры номинальной модели, характеристики ограниченного внешнего возмущения и коэффициент усиления неопределенности по выходу не идентифицируемы. Традиционные алгоритмы синтеза адаптивного стабилизирующего управления, базирующиеся на методе наименьших квадратов или градиентных алгоритмах оценивания, непригодны для решения рассмотренной оптимальной задачи. Для решения оптимальной задачи необходимо, во-первых, задействовать множественные оценки неизвестных параметров, согласованные с данными измерений, и, во-вторых, использовать показатель качества задачи слежения в качестве идентификационного критерия. В рассматриваемой специальной задаче этот показатель качества является дробно-рациональной функцией неизвестных параметров, благодаря чему вычисление текущих оптимальных оценок сводится к задаче линейного программирования и может быть реализовано в режиме онлайн. Важными отличительными достоинствами предложенного адаптивного управления являются онлайн верификация модели управляемого объекта и оценка гарантируемого качества слежения, согласованная с данными измерений и априорной информацией.

## Литература

1. Goodwin G.C. and Sin K.S. Adaptive Filtering, Prediction and Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1984.
2. Chen H., Guo L. Identification and Stochastic Adaptive Control // Boston, MA. Birkhauser. 1991.
3. Guo L. Self-Convergence of Weighted Least-Squares with Applications to Stochastic Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. Vol. 41. No. 1. P. 79–89.
4. Radenkovich M., Michel A. Stochastic adaptive control of nonminimum phase systems in the presence of unmodelled dynamics // Circuits, Systems, and Signal Processing. 1995. Vol. 14. No. 3. P. 317–349.
5. Anderson B. Failures of adaptive control theory and their resolution // Communications in Information and Systems. 2005. Vol. 5. No. 1. P. 1–20.
6. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
7. Bondarko V.A. and Yakubovich V.A. Method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 1992. Vol. 6. No. 3. P. 141–160.
8. Соколов В.Ф. Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в  $\ell_1$ -постановке // Автоматика и телемеханика. 1998. № 3. С. 107–131.
9. Соколов В.Ф. Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в  $\ell_1$ -метрике // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 101–112.
10. Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. Cambridge University Press. NY. 2004.

11. Соколов В.Ф. Адаптивное минимаксное управление на основе рекуррентного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 1993. № 12. С. 127–139.
12. Miller D.E. A Parameter Adaptive Controller Which Provides Exponential Stability: The First Order Case // Systems and Control Letters. 2017. Vol. 103. No. 5. P. 23–31.
13. Miller D.E., Shahab M.T. Classical Pole Placement Adaptive Control Revisited: Linear-like Convolution Bounds and Exponential Stability // Mathematics of Control, Signals and Systems. 2018. Vol. 30. No. 4. P. 1–51.
14. Ninnés B. and Goodwin G. Estimation of model quality // Automatica. 1995. Vol. 31. No. 10. P. 1667–1682.
6. Fomin V.N., Fradkov A.L., Yakubovich V.A. Adaptivnoye upravleniye dinamicheskimi obyektami [Adaptive control of dynamic plants]. Moscow: Nauka, 1981.
7. Bondarko V.A. and Yakubovich V.A. Method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 1992. Vol.6. No. 3. P. 141–160.
8. Sokolov V.F. Adaptive Robust Control of a Discrete Scalar Object in the  $\ell_1$ -statement // Autom. Remote Control. 1998. Vol. 59. No. 3. P. 392–411.
9. Sokolov V.F. Asymptotic robust performance of the discrete tracking system in the  $\ell_1$ -metric // Autom. Remote Control. 1999. Vol. 60. No. 1 Part 2. P. 82–91.

#### References

1. Goodwin G.C., Sin K.S. Adaptive Filtering, Prediction and Control // Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ. 1984.
2. Chen H., Guo L. Identification and Stochastic Adaptive Control // Boston. MA. Birkhauser. 1991.
3. Guo L. Self-Convergence of Weighted Least-Squares with Applications to Stochastic Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. Vol. 41. No. 1. P. 79–89.
4. Radenkovich M., Michel A. Stochastic adaptive control of nonminimum phase systems in the presence of unmodelled dynamics // Circuits, Systems, and Signal Processing. 1995. Vol. 14. No. 3. P. 317–349.
5. Anderson B. Failures of adaptive control theory and their resolution // Communications in Information and Systems. 2005. Vol. 5. No. 1. P. 1–20.
10. Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization // Cambridge University Press. NY. 2004.
11. Sokolov V.F. Adaptive minimax control based on recursive linear programming // Autom. Remote Control. 1993. Vol. 54. No. 12. P. 1835–1845.
12. Miller D.E. A Parameter Adaptive Controller Which Provides Exponential Stability: The First Order Case // Systems and Control Letters. 2017. Vol. 103. No. 5. P. 23–31.
13. Miller D.E., Shahab M.T. Classical Pole Placement Adaptive Control Revisited: Linear-like Convolution Bounds and Exponential Stability // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2018. Vol. 30. No. 4. P. 1–51.
14. Ninnés B., Goodwin G. Estimation of model quality // Automatica. 1995. Vol. 31. No. 10. P. 1667–1682.

Статья поступила в редакцию 09.09.2020.

УДК 539.12.01  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-16-22

**Н.А. ГРОМОВ**

## **ЛАГРАНЖИАНЫ И ФЕЙНМАНОВСКИЕ ДИАГРАММЫ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ С КОНТРАКТИРОВАННОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППОЙ**

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар*

*[gromov@ipm.komisc.ru](mailto:gromov@ipm.komisc.ru)*

**N.A. GROMOV**

## **LAGRANGIAN AND FEYNMAN DIAGRAMS OF THE STANDARD MODEL WITH A CONTRACTED GAUGE GROUP**

*Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS,  
Syktuvkar*

### **Аннотация**

Представлены диаграммы Фейнмана, описывающие свойства элементарных частиц и их взаимодействий на разных стадиях эволюции Вселенной, начиная с энергии Планка  $10^{19}$  ГэВ. Описание базируется на гипотезе о том, что высокоэнергетический (высокотемпературный) предел стандартной модели генерируется контракцией калибровочной группы и отталкивается от явного вида контрактированного лагранжиана.

### **Ключевые слова:**

*стандартная модель, контракция калибровочной группы, фейнмановские диаграммы*

### **Abstract**

Feynman diagrams, describing the properties of elementary particles and their interactions at different stages of the evolution of the Universe, starting with the Planck energy  $10^{19}$  GeV, are presented. The description is based on the hypothesis that the high-energy (high-temperature) limit of the standard model is generated by the contraction of the gauge group and is based on the explicit form of the contracted Lagrangian.

### **Keywords:**

*standard model, contractions of gauge group, Feynman diagrams*

### **Введение**

Стандартная модель, состоящая из электро-слабой модели, объединяющей электромагнитные и слабые взаимодействия, и квантовой хромодинамики (КХД), описывающей сильные взаимодействия, является современной теорией элементарных частиц. Она достаточно хорошо описывает имеющиеся экспериментальные данные и получила дальнейшие убедительные подтверждения своей адекватности с недавним открытием скалярного бозона Хиггса в экспериментах на большом адронном коллайдере. Если мы интересуемся свойствами частиц в ранней Вселенной и хотим оставаться на твердой научной почве, нам необходимо использовать высокотемпературный (высокоэнергетический) предел стандартной модели. Такой предел построен [1, 2] на основе гипотезы о контракции калибровочной группы стандартной модели с ростом температуры Вселенной при приближении к моменту ее рождения.

Действительно, стандартная модель представляет собой калибровочную теорию, основанную на калибровочной группе  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , которая является прямым произведением простых групп. Сильные взаимодействия кварков описываются квантовой хромодинамикой с калибровочной группой  $SU(3)$  и характерной температурой 0, 2 ГэВ. В калибровочной группе  $SU(2) \times U(1)$  электро-слабой модели группа  $SU(2)$  отвечает за слабые взаимодействия с характерной температурой 100 ГэВ, тогда как группа  $U(1)$  ассоциирована с дальнедействующими электромагнитными взаимодействиями. Вследствие нулевой массы фотона – переносчика этого взаимодействия – его характерная температура простирается до “бесконечной” планковской энергии  $10^{19}$  ГэВ. Из сопоставления характерных тем-

ператур заключаем, что калибровочная группа теории элементарных частиц с увеличением температуры Вселенной становится проще. Мы предполагаем, что при увеличении температуры более простая калибровочная группа стандартной модели получается с помощью контракции, параметр которой обратно пропорционален температуре Вселенной.

Операция контракции (или предельного перехода) групп хорошо известна в физике [3]. Она, в частности, преобразует простую группу в неполупростую. Понятие контракции было распространено [4] на алгебраические структуры, такие как квантовые группы, супергруппы, а также на фундаментальные представления унитарных групп, которые имеют непосредственное отношение к стандартной модели. Для симметричной физической системы контракция группы симметрии означает переход к тому или иному предельному состоянию системы. В случае сложной физической системы, каковой является стандартная модель, изучение предельных состояний при тех или иных предельных значениях физических параметров открывает возможность лучше понять поведение системы в целом.

Этот прием использован для того, чтобы восстановить эволюцию ранней Вселенной, опираясь на достигнутый к настоящему времени уровень знаний. Оказалось, что в результате контракции калибровочной группы лагранжиан стандартной модели распадается на ряд слагаемых, которые различаются степенями контракционного параметра  $\epsilon \rightarrow 0$ . Поскольку средняя энергия (температура) горячей Вселенной связана с ее возрастом, то двигаясь вперед во времени, т.е. в обратном к высокотемпературной контракции направлении, заключаем, что после рождения Вселенной элементарные частицы и их взаимодействия проходят ряд стадий в эволюции от предельного состояния с бесконечной температурой до состояния, описываемого стандартной моделью. Эти стадии формирования кварк-глюонной плазмы, восстановления электрослабой и цветовой симметрий различаются по степеням контракционного параметра и, следовательно, по времени их возникновения. В данной работе мы строим диаграммы Фейнмана для лагранжиана стандартной модели на разных стадиях эволюции Вселенной.

### 1. Стадии эволюции элементарных частиц

При контракции калибровочной группы лагранжиан стандартной модели распадается на ряд слагаемых, пропорциональных степеням  $\epsilon^k$  контракционного параметра. В соответствии с принятой гипотезой этот параметр является монотонной функцией температуры:  $\epsilon(T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ . Очень высокие температуры отвечают ранней Вселенной после инфляции на первых стадиях Большого взрыва. Контракция калибровочной группы стандартной модели позволяет упорядочить во времени стадии ее развития, но не дает возможности установить абсолютные даты. Чтобы оценить их, используется тот факт, что электрослабая эпоха начинается при температуре  $T_4 = 100$  ГэВ ( $1 \text{ ГэВ} = 10^{13} \text{ К}$ ), а КХД эпоха при  $T_8 = 0.2$  ГэВ. Иначе говоря, предполагается, что

полная реконструкция электрослабой модели и восстановление КХД происходят при этих температурах.

Вводится уровень обрезания  $\Delta$  для  $\epsilon^k$ , т.е. при  $\epsilon^k < \Delta$  все слагаемые в лагранжиане пропорциональные  $\epsilon^k$  являются пренебрежимо малыми. Наконец, предполагается, что контракционный параметр пропорционален обратной температуре

$$\epsilon(T) = \frac{A}{T}, \quad A = \text{const.} \quad (1)$$

Из уравнения для КХД  $\epsilon^8(T_8) = A^8 T_8^{-8} = \Delta$  получается значение константы  $A = T_8 \Delta^{1/8} = 0,2 \Delta^{1/8}$  ГэВ. Из подобного уравнения для электрослабой модели находится уровень обрезания  $\Delta = (T_8 E_4^{-1})^8 = (0,2 \cdot 10^{-2})^8 \approx 10^{-22}$ . Уравнение для  $k$ -й степени  $\epsilon^k(T_k) = A^k T_k^{-k} = \Delta$  приводит к формуле

$$T_k = T_8 \Delta^{\frac{k-8}{8k}} \approx 10^{\frac{88-15k}{4k}}, \quad (2)$$

откуда легко находятся граничные значения (ГэВ):

$$T_1 = 10^{18}, \quad T_2 = 10^7, \quad T_3 = 10^3,$$

$$T_4 = 10^2, \quad T_5 = 4, \quad T_6 = 1, \quad T_8 = 2 \cdot 10^{-1}. \quad (3)$$

Оценка "бесконечной" температуры  $T_1 \approx 10^{18}$  ГэВ сравнима с энергией Планка  $\approx 10^{19}$  ГэВ, при которой становится существенным влияние гравитации. Таким образом, полученная эволюция элементарных частиц не выходит за пределы проблем, описываемых электрослабыми и сильными взаимодействиями.

### 2. Лагранжиан и диаграммы электрослабой модели

Полный лагранжиан модифицированной электрослабой модели с контрактированной группой  $SU(2; \epsilon)$  равен сумме бозонного, лептонного и кваркового лагранжианов и дается формулой (5.37) [2]

$$L_{EW}(\epsilon) = L_\infty + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \epsilon^3 L_3 + \epsilon^4 L_4, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} L_\infty &= L_{B,0} + L_{L,0} + L_{Q,0} = \\ &= -\frac{1}{4} Z_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \nu_e^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu \nu_e + e_r^\dagger i \tau_\mu \partial_\mu e_r + \\ &+ g' \sin \theta_w e_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu e_r - g' \cos \theta_w e_r^\dagger \tau_\mu A_\mu e_r + \\ &+ \frac{g}{2 \cos \theta_w} \nu_e^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu \nu_e + d_r^\dagger i \tau_\mu \partial_\mu d_r + u_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu u_l + \\ &+ u_r^\dagger i \tau_\mu \partial_\mu u_r - \frac{1}{3} g' \cos \theta_w d_r^\dagger \tau_\mu A_\mu d_r + \\ &+ \frac{1}{3} g' \sin \theta_w d_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu d_r + \frac{2e}{3} u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu u_l + \\ &+ \frac{g}{\cos \theta_w} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu u_l + \\ &+ \frac{2}{3} g' \cos \theta_w u_r^\dagger \tau_\mu A_\mu u_r - \frac{2}{3} g' \sin \theta_w u_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu u_r, \quad (5) \end{aligned}$$

$$L_1 = -m_u (u_r^\dagger u_l + u_l^\dagger u_r), \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 L_2 = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 (Z_\mu)^2 - \frac{1}{2} \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ \mathcal{W}_{\mu\nu}^- + \\
 & + \frac{gm_z}{2 \cos \theta_W} (Z_\mu)^2 \chi + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} (Z_\mu)^2 \chi^2 - \\
 & - 2ig (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+) \left( \mathcal{F}_{\mu\nu} \sin \theta_W + \right. \\
 & \left. + \mathcal{Z}_{\mu\nu} \cos \theta_W \right) - \frac{i}{2} e A_\mu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+) + \\
 & + \frac{i}{2} e A_\nu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\mu^+) - \\
 & - \frac{i}{2} g \cos \theta_W [Z_\mu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - \\
 & - Z_\nu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\mu^+)] - \\
 & - \frac{e^2}{4} \left\{ [(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2] (A_\nu)^2 - \right. \\
 & - 2 (W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-) A_\mu A_\nu + \\
 & + [(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2] (A_\mu)^2 \left. \right\} - \\
 & - \frac{g^2}{4} \cos \theta_W \left\{ [(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2] (Z_\nu)^2 - \right. \\
 & - 2 (W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-) Z_\mu Z_\nu + \\
 & + [(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2] (Z_\mu)^2 \left. \right\} - \\
 & - eg \cos \theta_W \left[ W_\mu^+ W_\mu^- A_\nu Z_\nu + W_\nu^+ W_\nu^- A_\mu Z_\mu - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-) (A_\mu Z_\nu + A_\nu Z_\mu) \right] + \\
 & + e_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu e_l - m_e (e_r^\dagger e_l + e_l^\dagger e_r) + \frac{g \cos 2\theta_w}{2 \cos \theta_w} e_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu e_l - \\
 & - ee_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu e_l + \frac{g}{\sqrt{2}} (\nu_e^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^+ e_l + e_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^- \nu_e) + \\
 & + d_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu d_l - m_d (d_r^\dagger d_l + d_l^\dagger d_r) - \frac{e}{3} d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu d_l - \\
 & - \frac{g}{\cos \theta_w} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu d_l + \\
 & + \frac{g}{\sqrt{2}} [u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^+ d_l + d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^- u_l], \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$L_3 = g W_\mu^+ W_\mu^- \chi, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 L_4 = & m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \lambda v \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 + \\
 & + \frac{g^2}{4} (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+)^2 + \frac{g^2}{4} W_\mu^+ W_\nu^- \chi^2. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Здесь  $A_\mu$  представляет фотон,  $W_\mu^\pm, Z_\mu$  – поля заряженных и нейтрального калибровочных бозонов,  $\chi$  обозначает бозон Хиггса,  $e_l (e_r), \nu_e$  есть поля левого (правого) электрона и электронного нейтрино,

$u_l (u_r)$  – поля левого (правого)  $u$ -кварка,  $d_l (d_r)$  – поля левого (правого)  $d$ -кварка. Левые поля образуют  $SU(2)$ -дублеты, тогда как правые поля есть  $SU(2)$ -синглеты.

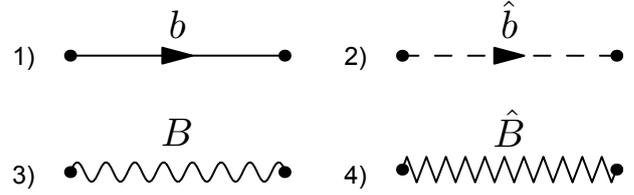
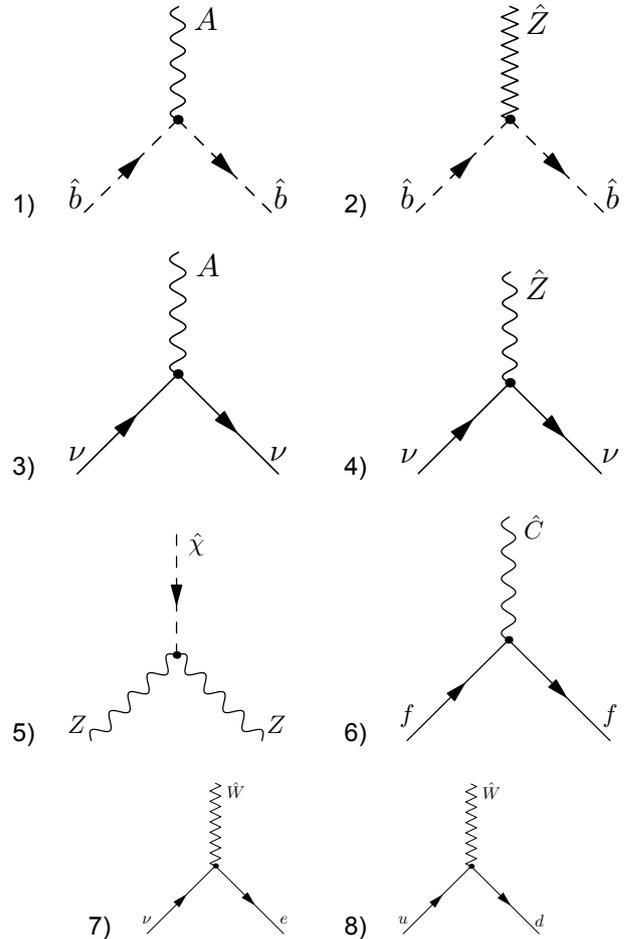


Рис. 1. Пропагаторы частиц: 1)  $b = e, u, d, \chi, \nu$  – массивные частицы и нейтрино, 2)  $\hat{b} = \hat{e}, \hat{u}, \hat{d}, \chi$  – безмассовые частицы. Пропагаторы калибровочных бозонов: 3)  $B = A, W, Z$  – фотон, массивные  $W$ - и  $Z$ -бозоны, 4)  $\hat{B} = \hat{W}, \hat{Z}$  – бозоны с нулевой массой.

Fig. 1. Particle propagators: 1)  $b = e, u, d, \chi, \nu$  – massive particles and neutrinos, 2)  $\hat{b} = \hat{e}, \hat{u}, \hat{d}, \chi$  – massless particles. 3)  $B = A, W, Z$  – photon, massive  $W$ - and  $Z$ -bosons, 4)  $\hat{B} = \hat{W}, \hat{Z}$  – massless gauge bosons.

В интервале “бесконечных” температур  $T > 10^{18}$  ГэВ частицы электрослабой модели теряют массу, а динамические слагаемые в лагранжиане  $L_{EW} = L_\infty$  (5) описывают пропагаторы безмассовых частиц, в том числе калибровочных бозонов. Соответствующие диаграммы представлены на рис.1. Кроме того, имеются 3-х вершинные взаимодействия нейтрино, электронов и кварков с фотоном и  $Z$ -бозоном (диаграммы 1)–4) на рис.2).



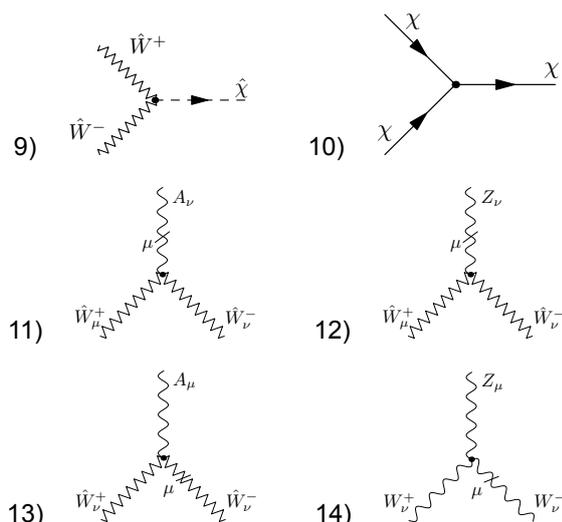


Рис. 2. 3-х вершинные взаимодействия частиц в электрослабой модели. Здесь  $\hat{b} = \hat{e}, \hat{u}, \hat{d}$ ,  $\hat{C} = \hat{Z}, \hat{A}$ ,  $f = e, d$ . Диаграмма 11) представляет взаимодействие  $\hat{W}_\mu^+ \hat{W}_\nu^- \partial_\mu A_\nu$ . Аналогично диаграммы 12)–14).

Fig. 2. 3-vertex particle interactions in the electroweak model. Here  $\hat{b} = \hat{e}, \hat{u}, \hat{d}$ ,  $\hat{C} = \hat{Z}, \hat{A}$ ,  $f = e, d$ . Diagram 11) represents interaction  $\hat{W}_\mu^+ \hat{W}_\nu^- \partial_\mu A_\nu$ . Similar to diagrams 12)–14).

При остывании Вселенной ниже  $10^{18}$  ГэВ до температуры  $10^7$  ГэВ лагранжиан равен сумме  $L_{EW} = L_\infty + \epsilon L_1$ , т.е. добавляются массовые слагаемые  $u$ -кварка (6), поэтому появляется пропагатор массивного  $u$ -кварка (диаграмма 1) на рис.1.

Дальнейшая эволюция от  $10^7$  ГэВ до температуры  $10^3$  ГэВ приводит к расширению лагранжиана на слагаемые (7) до  $L_{EW} = L_\infty + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2$ . В этом интервале температур происходит существенное восстановление свойств электрослабой модели: появляются пропагаторы массивного электрона (диаграмма 1) на рис.1 и массивного  $Z$ -бозона (диаграмма 3) на рис.1, возникает безмассовый бозон Хиггса, пропагатор которого представлен диаграммой типа 2) на рис.1, а также калибровочный  $W$ -бозон с нулевой массой и пропагатором типа 4) на рис.1.

Взаимодействия представлены как 3-х вершинными, так и 4-х вершинными процессами. Взаимодействие безмассового бозона Хиггса с массивным калибровочным  $Z$ -бозоном представлено диаграммой 5) на рис.2, а взаимодействия электрона и кварков с фотоном и  $Z$ -бозоном — диаграммами 1), 2) на рис.2. Кроме того, диаграмма 7) изображает взаимодействие электрона и нейтрино, а диаграмма 8) — взаимодействие  $u$ - и  $d$ -кварков посредством безмассового  $W$ -бозона. 4-х вершинные диаграммы типов 1)–3) на рис.3 описывают взаимодействие калибровочных бозонов  $A$  и  $Z$  с безмассовым  $W$ -бозоном.

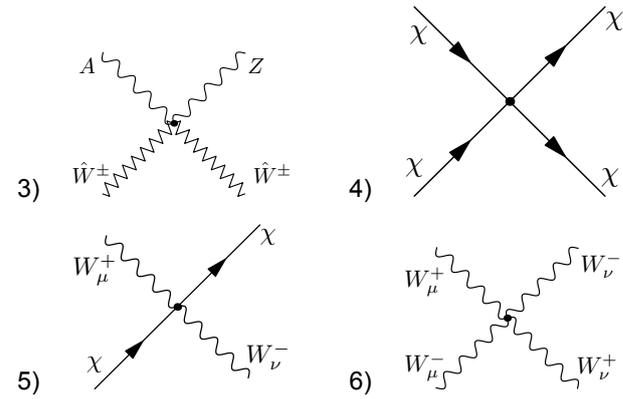
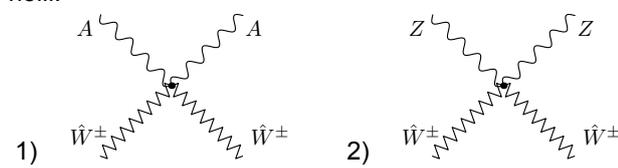


Рис. 3. 4-х вершинные взаимодействия частиц в электрослабой модели.

Fig. 3. 4-vertex particle interactions in the electroweak model.

Охлаждение Вселенной от  $10^3$  ГэВ до температуры  $10^2$  ГэВ добавляет к лагранжиана электрослабой модели слагаемое  $L_3$  (8), т.е.  $L_{EW} = L_\infty + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \epsilon^3 L_3$ . Появляется взаимодействие заряженных  $W$ -бозонов с полем бозона Хиггса (диаграмма 9) на рис.2). В данном интервале температур все эти поля по-прежнему остаются безмассовыми.

Наконец, при падении температуры ниже  $10^2$  ГэВ электрослабая модель восстанавливается в полном объеме до лагранжиана (4). На этой стадии  $W$ -бозоны и бозон Хиггса приобретают массу и их пропагаторы изображаются диаграммами типа 1), 3) на рис.1. Появляются 3-х и 4-х вершинные самодействия поля бозона Хиггса, представленные диаграммой 10) на рисунке 2 и 3, 4-х вершинные взаимодействия  $W$ -бозонов с полем бозона Хиггса (диаграмма 5) на рис.3), а также 4-х вершинные взаимодействия  $W$ -бозонов между собой (диаграмма 6) на рис.3).

### 3. Лагранжиан и диаграммы КХД

В лагранжиане КХД (5.41) [2]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{gl} = \sum_q \bar{q}^i (i\gamma^\mu) (D_\mu)_{ij} q^j - \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu \alpha}, \quad (10)$$

опущены массовые слагаемые  $-m_q \bar{q}^i q_i$ . При переходе к контрактированной группе  $SU(3; \epsilon)$  эти слагаемые вида

$$-m_q \bar{q}^i(\epsilon) q_i(\epsilon) = -m_q \left( |q_1|^2 + \epsilon^2 |q_2|^2 + \epsilon^4 |q_3|^2 \right) \quad (11)$$

добавляются к кварковой части лагранжиана (5.52) в монографии [2], которая принимает вид

$$\mathcal{L}_q(\epsilon) = L_q^\infty + \epsilon^2 L_q^{(2)} + \epsilon^4 L_q^{(4)}, \quad (12)$$

где

$$L_q^\infty = \sum_q \left\{ i\bar{q}_1 \gamma^\mu \partial_\mu q_1 - m_q |q_1|^2 + \frac{g_s}{2} |q_1|^2 \gamma^\mu \left( \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 + A_\mu^3 \right) \right\}, \quad (13)$$

$$L_q^{(2)} = \sum_q \left\{ i\bar{q}_2 \gamma^\mu \partial_\mu q_2 - m_q |q_2|^2 + \frac{g_s}{2} \left( |q_2|^2 \gamma^\mu \left( \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 - A_\mu^3 \right) + q_1 \bar{q}_2 \gamma^\mu (A_\mu^1 + iA_\mu^2) + \bar{q}_1 q_2 \gamma^\mu (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \right) \right\}, \quad (14)$$

$$L_q^{(4)} = \sum_q \left\{ i\bar{q}_3 \gamma^\mu \partial_\mu q_3 - m_q |q_3|^2 + \frac{g_s}{2} \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 |q_3|^2 \gamma^\mu A_\mu^{BB} + q_1 \bar{q}_3 \gamma^\mu (A_\mu^4 + iA_\mu^5) + \bar{q}_1 q_3 \gamma^\mu (A_\mu^4 - iA_\mu^5) + q_2 \bar{q}_3 \gamma^\mu (A_\mu^6 + iA_\mu^7) + \bar{q}_2 q_3 \gamma^\mu (A_\mu^6 - iA_\mu^7) \right) \right\}. \quad (15)$$

Здесь  $q(x)$  – кварковые поля,  $q = u, d, s, c, b, t$ , компоненты  $q_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  обозначают цветовые степени свободы, а  $A_\mu^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 8$  представляют поля глюонов.

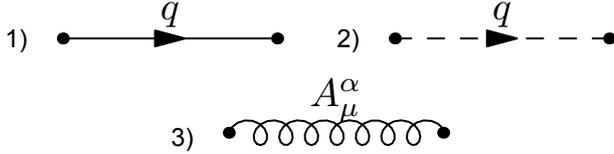


Рис. 4. Пропагаторы: 1) массивных кварков, 2) безмассовых кварков и 3) глюонов.

Fig. 4. Propagators: 1) massive quarks, 2) massless quarks and 3) gluons.

Глюонная часть лагранжиана имеет вид

$$L_{gl}(\epsilon) = L_{gl}^\infty + \epsilon^2 L_{gl}^{(2)} + \epsilon^4 L_{gl}^{(4)} + \epsilon^6 L_{gl}^{(6)} + \epsilon^8 L_{gl}^{(8)}, \quad (16)$$

где

$$L_{gl}^\infty = -\frac{1}{4} \left\{ (\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)^2 + (\partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8)^2 \right\}, \quad (17)$$

$$L_{gl}^{(2)} = -\frac{1}{4} \left\{ (\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1 + g_s (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2))^2 + (\partial_\mu A_\nu^6 - \partial_\nu A_\mu^6 + \frac{g_s}{2} ((A_\mu^3 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^3) + \sqrt{3} (A_\mu^7 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^7)))^2 + (\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2 - g_s (A_\mu^1 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^1))^2 + (\partial_\mu A_\nu^7 - \partial_\nu A_\mu^7 - \frac{g_s}{2} (A_\mu^3 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^3 + \sqrt{3} (A_\mu^6 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^6)))^2 + \right.$$

$$+ g_s \left( (2 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1) - A_\mu^6 A_\nu^7 + A_\mu^7 A_\nu^6) \times (\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3) + \sqrt{3} (A_\mu^6 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^6) (\partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8) \right) \left. \right\}, \quad (18)$$

$$L_{gl}^{(4)} = -\frac{1}{4} \left\{ (\partial_\mu A_\nu^4 - \partial_\nu A_\mu^4)^2 + (\partial_\mu A_\nu^5 - \partial_\nu A_\mu^5)^2 + g_s \left( (A_\mu^4 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^4 - A_\mu^5 A_\nu^6 + A_\mu^6 A_\nu^5) \times (\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1) + (A_\mu^4 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^4 + A_\mu^5 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^5) (\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2) - (A_\mu^1 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^2 + A_\mu^3 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^3 - \sqrt{3} (A_\mu^5 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^5)) (\partial_\mu A_\nu^4 - \partial_\nu A_\mu^4) + (A_\mu^1 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^1 - A_\mu^2 A_\nu^7 + A_\mu^7 A_\nu^2 + A_\mu^3 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^3 - \sqrt{3} (A_\mu^4 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^4)) (\partial_\mu A_\nu^5 - \partial_\nu A_\mu^5) + (A_\mu^2 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^2 - A_\mu^1 A_\nu^5 + A_\mu^5 A_\nu^1) (\partial_\mu A_\nu^6 - \partial_\nu A_\mu^6) + (A_\mu^1 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^2) (\partial_\mu A_\nu^7 - \partial_\nu A_\mu^7) + \sqrt{3} (A_\mu^4 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^4) (\partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8) \right) + g_s^2 \left( (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2 + (A_\mu^6 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^6)^2 - (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1) (A_\mu^6 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^6) - (A_\mu^1 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^1) (A_\mu^4 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^4 + A_\mu^5 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^5) + (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) (A_\mu^4 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^4 - A_\mu^5 A_\nu^6 + A_\mu^6 A_\nu^5) + \frac{1}{2} (A_\mu^3 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^3 + \sqrt{3} (A_\mu^7 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^7)) \times (A_\mu^2 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^2 - A_\mu^1 A_\nu^5 + A_\mu^5 A_\nu^1) - \frac{1}{2} (A_\mu^3 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^3 + \sqrt{3} (A_\mu^6 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^6)) \times (A_\mu^1 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^2) + \frac{1}{2} (A_\mu^1 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^2 + A_\mu^3 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^3 - \sqrt{3} (A_\mu^5 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^5)) + \frac{1}{2} (A_\mu^1 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^1 - A_\mu^2 A_\nu^7 + A_\mu^7 A_\nu^2 + \right.$$

$$+A_\mu^3 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^3 - \sqrt{3} (A_\mu^4 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^4)^2 \Big\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} L_{gl}^{(6)} = & \\ = -\frac{g_s^2}{16} & \left\{ \left( A_\mu^4 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^4 - A_\mu^5 A_\nu^6 + A_\mu^6 A_\nu^5 \right)^2 + \right. \\ & \left( A_\mu^4 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^4 + A_\mu^5 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^5 \right)^2 + \\ & \left( A_\mu^2 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^2 - A_\mu^1 A_\nu^5 + A_\mu^5 A_\nu^1 \right)^2 + \\ & \left( A_\mu^1 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^2 \right)^2 + \\ & \left. + 4 \left( A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1 + A_\mu^6 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^6 \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( A_\mu^4 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^4 \right) \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$L_{gl}^{(8)} = -\frac{g_s^2}{4} \left( A_\mu^4 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^4 \right)^2. \quad (21)$$

Кварковая часть лагранжиана содержит квадратичные по полям слагаемые  $i\bar{q}_1 \gamma^\mu \partial_\mu q_k - m_q |q_k|^2$ ,  $k = 1, 2, 3$ , которым отвечают фейнмановские диаграммы пропагаторов кварков, изображенные на рис.4, 1). Слагаемые, содержащие произведение двух полей кварков и поля глюонов  $\frac{g_s}{2} \bar{q}_i \gamma^\mu A_\mu^\alpha \bar{q}_k$ , описывают 3-х вершинные взаимодействия кварка с глюоном, которое изображается диаграммой 1) на рис.5.

Слагаемые вида  $-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2$  в глюонной части лагранжиана соответствуют пропагаторам глюонов, которые представляются диаграммой 3) на рис.4. Трехвершинные самодействия глюонов, отвечающие слагаемым вида  $\sim g_s A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \partial_\mu A_\nu^\gamma$ , представлены диаграммой 3) на рис.5. Наконец, четырехглюонные взаимодействия типа  $\sim g_s^2 A_\mu^\alpha A_\nu^\beta A_\mu^\gamma A_\nu^\delta$ , описываются фейнмановской диаграммой 4), изображенной на рис.5.

Следует отметить, что высокотемпературный предел КХД, вызванный контракцией калибровочной группы  $SU(3)$ , не меняет характер взаимодействия кварков и глюонов между собой [5]. Типы взаимодействия лишь распределяются по температурным интервалам в соответствии со стадиями развития Вселенной после ее появления в результате большого взрыва.

Если дополнительно учесть преобразование масс кварков (5.29)  $m_q \rightarrow \epsilon m_q$ , вызванное спонтанным нарушением симметрии, то слагаемое  $-\sum_q m_q |q_1|^2$  в (13) будет пропорционально  $\epsilon$ , слагаемое  $-\sum_q m_q |q_2|^2$  в (14) пропорционально  $\epsilon^3$ , а слагаемое  $-\sum_q m_q |q_3|^2$  в (15) пропорционально  $\epsilon^5$ , т.е. они вносят существенный вклад в лагранжиан на других стадиях эволюции по сравнению с динамической частью. Поэтому кварки с первой цветовой компонентой являются безмассовыми (диаграмма 2) на рис.4) при температуре выше  $10^{18}$  ГэВ и приобретают массу лишь при остывании Вселенной ниже

этой температуры (диаграмма 1) на рис.4). Аналогично при температуре выше  $10^3$  ГэВ появляются кварки второго цвета с нулевой массой, которые становятся массивными при более низких температурах. Для кварков с третьей цветовой компонентой граничная температур составляет 4 ГэВ.

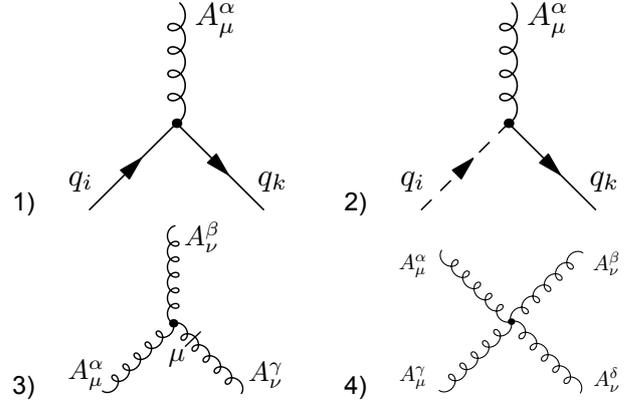


Рис. 5. Сильные взаимодействия: 1) массивных кварков с глюонами; 2) безмассовых и массивных кварков с глюонами; 3), 4) 3-х и 4-х вершинные взаимодействия глюонов.

Fig. 5. Strong interactions: 1) massive quarks with gluons; 2) massless and massive quarks with gluons; 3), 4) 3- and 4-vertex interactions of gluons.

#### 4. Лагранжиан и диаграммы стандартной модели

Модифицированный лагранжиан стандартной модели получается объединением лагранжиана (4) электрослабой модели с кварковым (12) и глюонным (16) лагранжианами квантовой хромодинамики. Его можно представить в виде разложения по степеням контракционного параметра

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM}(\epsilon) = & \\ = \mathcal{L}_\infty + \epsilon \mathcal{L}_1 + \epsilon^2 \mathcal{L}_2 + \epsilon^3 \mathcal{L}_3 + \epsilon^4 \mathcal{L}_4 + \epsilon^6 \mathcal{L}_6 + \epsilon^8 \mathcal{L}_8, \quad (22) \end{aligned}$$

где выживающие при бесконечной температуре члены

$$\mathcal{L}_\infty = L_\infty + L_q^\infty + L_{gl}^\infty \quad (23)$$

представляют собой суммы слагаемых из уравнений (5), (13) и (17),  $\mathcal{L}_1 = L_1$  из (6). Слагаемые второго порядка

$$\mathcal{L}_2 = L_2 + L_q^2 + L_{gl}^2 \quad (24)$$

находятся суммированием формул (7), (14) и (18). Пропорциональные третьей степени  $\epsilon$  слагаемые совпадают с (8), т.е.  $\mathcal{L}_3 = L_3$ . Члены четвертого порядка

$$\mathcal{L}_4 = L_4 + L_q^4 + L_{gl}^4 \quad (25)$$

равны сумме слагаемых в формулах (9), (15) и (19). Наконец, слагаемые шестого и восьмого порядков порождаются только глюонной частью КХД:  $\mathcal{L}_6 = L_{gl}^6$  (20) и  $\mathcal{L}_8 = L_{gl}^8$  (21).

При учете преобразования масс кварков, вызванного спонтанным нарушением симметрии, в разложении (22) появляются члены пятого порядка  $\mathcal{L}_5 = -\sum_q m_q |q_3|^2$ , которые переходят из  $\mathcal{L}_4$ . Слагаемые первого и третьего порядков модифицируются  $\mathcal{L}'_1 =$

$L_1 - \sum_q m_q |q_1|^2$ ,  $\mathcal{L}'_3 = L_3 - \sum_q m_q |q_2|^2$  за счет добавления членов из  $\mathcal{L}_\infty$  и  $\mathcal{L}_2$ , соответственно.

Что касается взаимодействия кварков и глюонов между собой, то в высокотемпературном пределе КХД, вызванном контракцией калибровочной группы  $SU(3)$ , его характер не меняется. Происходит лишь распределение типов взаимодействия по температурным интервалам в соответствии со стадиями развития Вселенной после ее появления в результате большого взрыва.

Аналогичные процессы имеют место и в электрослабой модели. Калибровочные бозоны и частицы эффективно теряют массу при возрастании температуры Вселенной, стандартные взаимодействия частиц, не изменяя своего вида, распределяются по этапам ее развития. Однако появляются новые виды взаимодействия с участием безмассовых частиц.

*Автор выражает свою признательность В.В. Куратову за полезные обсуждения и помощь в оформлении работы.*

#### Литература

1. *Gromov N.A.* Elementary particles in the early Universe // *J. Cosmol. Astroparticle Phys.* 2016. Vol. 03. P. 053.
2. *Gromov N.A.* Particles in the Early Universe: High-Energy Limit of the Standard Model from the Contraction of Its Gauge Group. Singapore: World Scientific, 2020. 159 p.
3. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1953. Vol. 39. P. 510–524.
4. *Громов Н.А.* Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.
5. *Емельянов В.М.* Стандартная модель и ее расширения. М.: Физматлит, 2007. 584 с.

#### References

1. *Gromov N.A.* Elementary particles in the early Universe // *J. Cosmol. Astroparticle Phys.* 2016. Vol. 03. P. 053.
2. *Gromov N.A.* Particles in the Early Universe: High-Energy Limit of the Standard Model from the Contraction of Its Gauge Group. Singapore: World Scientific, 2020. 159 p.
3. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1953. Vol. 39. P. 510–524.
4. *Gromov N.A.* Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups]. Moscow: Fizmatlit, 2012. 318 p.
5. *Emel'yanov V.M.* Standartnaya model i ee rasshireniya [Standard model and its extensions]. Moscow: Fizmatlit, 2007. 584 p.

*Статья поступила в редакцию 15.09.2020.*

УДК 530.145, 512.81  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-23-29

**Н.А. ГРОМОВ, И.В. КОСТЯКОВ, В.В. КУРАТОВ**

## **ДИАГОНАЛЬНЫЕ КОНТРАКЦИИ УНИТАРНЫХ АЛГЕБР МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ**

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар*

*[gromov@ipm.komisc.ru](mailto:gromov@ipm.komisc.ru)  
[kostyakov@ipm.komisc.ru](mailto:kostyakov@ipm.komisc.ru)  
[kuratov@ipm.komisc.ru](mailto:kuratov@ipm.komisc.ru)*

**N.A. GROMOV, I.V. KOSTYAKOV, V.V. KURATOV**

## **DIAGONAL CONTRACTIONS OF SMALL- DIMENSIONAL UNITARY ALGEBRAS**

*Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS,  
Syktывkar*

### **Аннотация**

Рассмотрены специальные унитарные алгебры  $su(2)$  и  $su(3)$ . Подробно изучены возможные диагональные контракции этих алгебр, которые получаются при умножении каждого генератора алгебры на свой контракционный параметр. Для каждой допустимой контракции установлена структура получающейся алгебры. Имея в виду приложения метода контракций к эволюции неконсервативных систем, для каждой предельной алгебры указано количество нулевых коммутаторов.

### **Ключевые слова:**

*контракции алгебр Ли, унитарные алгебры  $su(2)$  и  $su(3)$*

### **Abstract**

Special unitary algebras  $su(2)$  and  $su(3)$  are considered. Possible diagonal contractions of these algebras, which are obtained by multiplying each algebra generator by its contractional parameter, are studied in detail. For each admissible contraction, the structure of the resulting algebra is established. Bearing in mind the applications of the contraction method to the evolution of non-conservative systems, the number of zero commutators is indicated for each limit algebra.

### **Keywords:**

*contractions of Lie algebras, unitary algebras  $su(2)$  and  $su(3)$*

### **Введение**

Специальные унитарные группы и их алгебры находят многочисленные применения как в математике, так и в теоретической физике. В частности, классические специальные функции математической физики — многочлены Лежандра и Якоби — выражаются через матричные элементы неприводимых унитарных представлений этих групп [1]. Понятие спина элементарных частиц, а также изотопического спина нуклона, объединяющего в один мультиплет протон и нейтрон, связано с группой  $SU(2)$  [2]. В основе современной теории элементарных частиц лежат унитарные калибровочные группы и алгебры:  $SU(2) \times U(1)$  в случае электрослабой модели [3] и  $SU(3)$  в случае квантовой хромодинамики [4].

Эволюция консервативной (изолированной) квантовой системы определяется унитарным оператором. Поэтому коммутационные соотношения ее алгебры наблюдаемых не изменяются с течением времени. Диссипативные процессы в открытых квантовых системах могут приводить к обнулению некоторых коммутаторов алгебры наблюдаемых, что интерпретируется как частичная потеря системой квантовых свойств, т.е. частичному переходу от квантового поведения к классическому [5]. В работах [6–9] диссипативные процессы в открытых квантовых системах анализируются с точки зрения контракций, приводящих к изменению их алгебраических свойств. Метод контракций групп (алгебр) Ли хорошо известен в физике [10–12]. С точки зрения физических приложений контракция группы (алгебры) соответствует рассмотрению того или иного предельного случая физической системы, имеющей симмет-

рию, описываемую этой группой (алгеброй). В частности, предельные переходы типа Кэли–Клейна в унитарных алгебрах Ли  $su(2)$  и  $su(3)$  использовались для изучения высокоэнергетического поведения стандартной модели взаимодействия элементарных частиц [13].

В данной работе мы рассматриваем так называемые диагональные контракции специальных унитарных алгебр малых размерностей  $su(2)$  и  $su(3)$ . Самые общие диагональные преобразования получаются при умножении каждого генератора алгебры на свой контракционный параметр с последующим анализом условий, гарантирующих сохранение алгебраической структуры при стремлении параметров к нулю. Основное содержание работы связано с выявлением допустимых контракций алгебры  $su(3)$ . Случай алгебры  $su(2)$  хорошо известен и приведен для полноты рассмотрения.

### 1. Контракции алгебры $su(2)$

Специальная унитарная алгебра  $su(2)$  в фундаментальном представлении генерируется операторами

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ X_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

с коммутационными соотношениями

$$[X_1^*, X_2^*] = 2iX_3^*, \quad [X_2^*, X_3^*] = 2iX_1^*, \\ [X_3^*, X_1^*] = 2iX_2^*. \quad (2)$$

Матрица общего вида из алгебры  $su(2)$  такова

$$su(2) \ni u = w_{12}X_1^* + v_{12}X_2^* + u_{11}X_3^* = \\ = \begin{pmatrix} u_{11} & w_{12} - iv_{12} \\ w_{12} + iv_{12} & -u_{11} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $u_{11}, w_{12}, v_{12} \in \mathbf{R}$ .

Контракция — это отображение алгебры (здесь  $su(2)$ ) в алгебру того же типа (здесь  $su(2; \varepsilon)$ ), но с другими коммутационными соотношениями.

Общее диагональное преобразование генераторов

$$X_1 = \varepsilon_1 X_1^*, \quad X_2 = \varepsilon_2 X_2^*, \quad X_3 = \varepsilon_3 X_3^* \quad (4)$$

приводит к коммутаторам

$$[X_1, X_2] = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_3} 2iX_3, \quad [X_2, X_3] = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1} 2iX_1, \\ [X_3, X_1] = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_2} 2iX_2, \quad (5)$$

которые образуют алгебру  $su(2; \varepsilon)$ , если при  $\varepsilon \rightarrow 0$  конечны все пределы

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_3} < \infty, \quad \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_2} < \infty, \quad \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1} < \infty. \quad (6)$$

Условия (6) выполняются автоматически, если положить  $\varepsilon_1 = \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3$ ,  $\varepsilon_2 = \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_3$ ,  $\varepsilon_3 = \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2$ . Тогда коммутаторы (5) равны

$$[X_1, X_2] = \hat{\varepsilon}_3^2 2iX_3, \quad [X_2, X_3] = \hat{\varepsilon}_1^2 2iX_1, \\ [X_3, X_1] = \hat{\varepsilon}_2^2 2iX_2, \quad (7)$$

а матрица общего положения из алгебры  $su(2; \varepsilon)$  имеет вид

$$su(2; \varepsilon) \ni u(\varepsilon) = w_{12}X_1 + v_{12}X_2 + u_{11}X_3 = \\ = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2 u_{11} & \hat{\varepsilon}_3 (\hat{\varepsilon}_2 w_{12} - \hat{\varepsilon}_1 i v_{12}) \\ \hat{\varepsilon}_3 (\hat{\varepsilon}_2 w_{12} + \hat{\varepsilon}_1 i v_{12}) & -\hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2 u_{11} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Рассмотрим возможные контракции унитарной алгебры  $su(2)$ .

1. Одномерные контракции  $\hat{\varepsilon}_k = \varepsilon \rightarrow 0$ ,  $k = 1, 2, 3$  приводят к алгебре со структурой полупрямой суммы  $u_1 \ltimes T_2$ , где коммутативная подалгебра  $T_2$  натягивается на разные генераторы при разных  $k$ , а именно:  $T_2(X_2, X_3)$ ,  $k = 1$ ,  $T_2(X_1, X_3)$ ,  $k = 2$ ,  $T_2(X_1, X_2)$ ,  $k = 3$ , а одномерная подалгебра  $u_1$  порождается оставшимся генератором.

2. Контрактированная по двум параметрам алгебра имеет две структуры полупрямой суммы  $u_1 \ltimes T_2$ . При  $\hat{\varepsilon}_k \neq 0$  коммутативные подалгебры равны  $T_2(X_k, X_m)$  и  $T_2(X_k, X_n)$ , где  $k, m, n = 1, 2, 3$ ,  $k \neq m \neq n$ .

3. Отметим еще тривиальную контракцию, когда все параметры стремятся к нулю  $\hat{\varepsilon}_k = \varepsilon \rightarrow 0$ . Она приводит к коммутативной абелевой алгебре  $su(2; \varepsilon) = T_3(X_k, k = 1, 2, 3) = u_1(X_1) \oplus u_1(X_2) \oplus u_1(X_3)$  со структурой прямой суммы одномерных подалгебр.

Канонические контракции Кэли–Клейна [12, 13] реализуются при  $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ . В терминах параметров  $\hat{\varepsilon}_k$  они получаются при  $\hat{\varepsilon}_3 = 1$ .

### 2. Общие (диагональные) контракции алгебры Ли $su(3)$

Специальная унитарная алгебра  $su(3)$  характеризуется генераторами  $t_k^* = \frac{1}{2} \lambda_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ , где  $\lambda_k^*$  матрицы Гелл–Манна вида

$$\lambda_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^* = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Структурные константы  $c_{\alpha, \beta}^{*\gamma}$ , описывающие коммутационные соотношения этих матриц  $[\lambda_\alpha, \lambda_\beta] =$

$\sum_{\gamma} c_{\alpha,\beta}^{*\gamma} \lambda_{\gamma}$ , антисимметричны по всем индексам и равны

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_{12}^{*3} = c_{14}^{*7} = c_{24}^{*6} = c_{25}^{*7} = c_{34}^{*5} = c_{63}^{*7} = c_{51}^{*6} = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} c_{45}^{*8} = \frac{1}{\sqrt{3}} c_{67}^{*8} = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Общее диагональное преобразование генераторов алгебры  $su(3)$  (чтобы не учитывать числовые коэффициенты, мы используем матрицы  $\lambda_k$  вместо  $t_k$ )

$$\lambda_k = \varepsilon_k \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, 8 \quad (11)$$

порождает преобразование структурных постоянных  $c_{\alpha\beta}^{*\gamma}$  алгебры  $su(3)$

$$c_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}}{\varepsilon_{\gamma}} c_{\alpha\beta}^{*\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 8, \quad (12)$$

что приводит к коммутаторам, представленным в таблице 1, где обозначено

$$\begin{aligned} (+) &= \left( \frac{\varepsilon_4\varepsilon_5}{\varepsilon_8} \sqrt{3}\lambda_8 + \frac{\varepsilon_4\varepsilon_5}{\varepsilon_3} \lambda_3 \right), \\ (-) &= \left( \frac{\varepsilon_6\varepsilon_7}{\varepsilon_8} \sqrt{3}\lambda_8 - \frac{\varepsilon_6\varepsilon_7}{\varepsilon_3} \lambda_3 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Генераторы (11) образуют алгебру  $su(3; \varepsilon)$ , если при стремлении к нулю всех или некоторых контракционных параметров  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  все структурные константы остаются конечными

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta}}{\varepsilon_{\gamma}} < \infty, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 8. \quad (14)$$

Матрица общего вида из фундаментального представления алгебры  $su(3; \varepsilon)$

$$\begin{aligned} su(3; \varepsilon) \ni u(\varepsilon) = w_{12}\lambda_1 + v_{12}\lambda_2 + w_{13}\lambda_4 + v_{13}\lambda_5 + \\ + w_{23}\lambda_6 + v_{23}\lambda_7 + w\lambda_3 + v\lambda_8 = \\ = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 w + \varepsilon_8 \frac{v}{\sqrt{3}} & \varepsilon_1 w_{12} - \varepsilon_2 i v_{12} \\ \varepsilon_1 w_{12} + \varepsilon_2 i v_{12} & \varepsilon_8 v - \varepsilon_3 w \\ \varepsilon_4 w_{13} + \varepsilon_5 i v_{13} & \varepsilon_6 w_{23} + \varepsilon_7 i v_{23} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_{11} & \bar{u}_{21} & \bar{u}_{31} \\ u_{21} & u_{22} & \bar{u}_{32} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

эрмитова  $u(3; \varepsilon)^{\dagger} = u(3; \varepsilon)$  и имеет нулевой след  $\text{Tr } u(3; \varepsilon) = 0$  при любых значениях контракционных параметров  $\varepsilon_k$ , т.е. она сохраняет основные свойства специальной унитарной алгебры.

1. По аналогии со случаем алгебры  $su(2)$  введем вместо параметров  $\varepsilon_k$  их произведения по праву:

$$\varepsilon_{3,8} = 1, \quad \varepsilon_{1,2} = \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_3, \quad \varepsilon_{6,7} = \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3, \quad \varepsilon_{4,5} = \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2, \quad (16)$$

что приводит к матрицам вида

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} u_{11} & \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_3 \bar{u}_{21} & \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2 \bar{u}_{31} \\ \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_3 u_{21} & u_{22} & \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3 \bar{u}_{32} \\ \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2 u_{31} & \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3 u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, а также к коммутационным соотношениям, представленным в таблице 2, где использованы обозначения

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3), \quad \tilde{\lambda}_8 = \frac{1}{2}(\lambda_8 + \sqrt{3}\lambda_3). \quad (18)$$

Как и в случае алгебры  $su(2)$ , канонические контракции Кэли–Клейна [12, 13] получаются при  $\hat{\varepsilon}_3 = 1$ .

1-А. При однопараметрической контракции  $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon \rightarrow 0$  алгебра имеет структуру

$$\begin{aligned} su(3; \varepsilon) = \left( su_2(\tilde{\lambda}_3, \lambda_6, \lambda_7; \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3) \oplus \right. \\ \left. \oplus u_1(\tilde{\lambda}_8) \right) \# T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $su_2(\tilde{\lambda}_3, \lambda_6, \lambda_7; \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3)$  – унитарная,  $u_1(\tilde{\lambda}_8)$  – одномерная, а  $T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5)$  – коммутативная подалгебра.

При  $\hat{\varepsilon}_2 = \varepsilon \rightarrow 0$  получаем структуру контракционной алгебры

$$\begin{aligned} su(3; \varepsilon) = \left( su_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_3) \oplus \right. \\ \left. \oplus u_1(\lambda_8) \right) \# T_4(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7). \end{aligned} \quad (20)$$

Предел  $\hat{\varepsilon}_3 = \varepsilon \rightarrow 0$  приводит к алгебре с аналогичной структурой

$$\begin{aligned} su(3; \varepsilon) = \left( su_2(\lambda_4, \lambda_5, \tilde{\lambda}_8; \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2) \oplus \right. \\ \left. \oplus u_1(\lambda_3) \right) \# T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_7), \end{aligned} \quad (21)$$

но подалгебры генерируются другими образующими.

1-В. При  $\hat{\varepsilon}_{1,2} = \varepsilon \rightarrow 0$  структура дважды контракционной алгебры может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} su(3; \varepsilon) = \\ = \left( T_2(\lambda_3, \lambda_8) \# T_2(\lambda_1, \lambda_2) \right) \# T_4(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7) = \\ = \left( T_2(\lambda_3, \lambda_8) \# T_2(\lambda_6, \lambda_7) \right) \# T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5). \end{aligned} \quad (22)$$

Двухпараметрическая контракция  $\hat{\varepsilon}_{1,3} = \varepsilon \rightarrow 0$  дает алгебру со структурой

$$\begin{aligned} su(3; \varepsilon) = \\ = \left( T_2(\lambda_3, \lambda_8) \# T_2(\lambda_4, \lambda_5) \right) \# T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_7) = \\ = \left( T_2(\lambda_3, \lambda_8) \# T_2(\lambda_6, \lambda_7) \right) \# T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5). \end{aligned} \quad (23)$$

Контракция  $\hat{\varepsilon}_{2,3} = \varepsilon \rightarrow 0$  приводит к алгебре со строением

$$\begin{aligned} su(3; \varepsilon) = \\ = \left( T_2(\lambda_3, \lambda_8) \# T_2(\lambda_6, \lambda_7) \right) \# T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5) = \\ = \left( T_2(\lambda_3, \lambda_8) \# T_2(\lambda_4, \lambda_5) \right) \# T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_7). \end{aligned} \quad (24)$$

Таблица 1

**Коммутаторы алгебры  $su(3)$  при общем диагональном преобразовании генераторов**

Table 1

**Commutators of the algebra  $su(3)$  under general diagonal transformation of generators**

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$
$\lambda_1$	0	$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_3} 2i\lambda_3$	$-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_2} 2i\lambda_2$	$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4}{\varepsilon_7} i\lambda_7$	$-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_5}{\varepsilon_6} i\lambda_6$	$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_6}{\varepsilon_5} i\lambda_5$	$-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_7}{\varepsilon_4} i\lambda_4$	0
$\lambda_2$	.	0	$\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1} 2i\lambda_1$	$\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_4}{\varepsilon_7} i\lambda_6$	$-\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_5}{\varepsilon_6} i\lambda_7$	$-\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_6}{\varepsilon_5} i\lambda_4$	$-\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_7}{\varepsilon_4} i\lambda_5$	0
$\lambda_3$	.	.	0	$\frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4}{\varepsilon_5} i\lambda_5$	$-\frac{\varepsilon_3 \varepsilon_5}{\varepsilon_4} i\lambda_4$	$-\frac{\varepsilon_3 \varepsilon_6}{\varepsilon_7} i\lambda_7$	$\frac{\varepsilon_3 \varepsilon_7}{\varepsilon_6} i\lambda_6$	0
$\lambda_4$	.	.	.	0	$i(+)$	$\frac{\varepsilon_4 \varepsilon_6}{\varepsilon_2} i\lambda_2$	$\frac{\varepsilon_4 \varepsilon_7}{\varepsilon_1} i\lambda_1$	$-\frac{\varepsilon_4 \varepsilon_8}{\varepsilon_5} i\sqrt{3}\lambda_5$
$\lambda_5$	.	.	.	.	0	$-\frac{\varepsilon_5 \varepsilon_6}{\varepsilon_1} i\lambda_1$	$\frac{\varepsilon_5 \varepsilon_7}{\varepsilon_2} i\lambda_2$	$\frac{\varepsilon_5 \varepsilon_8}{\varepsilon_4} i\sqrt{3}\lambda_4$
$\lambda_6$	.	.	.	.	.	0	$i(-)$	$-\frac{\varepsilon_6 \varepsilon_8}{\varepsilon_7} i\sqrt{3}\lambda_7$
$\lambda_7$	.	.	.	.	.	.	0	$\frac{\varepsilon_7 \varepsilon_8}{\varepsilon_6} i\sqrt{3}\lambda_6$
$\lambda_8$	.	.	.	.	.	.	.	0

Таблица 2

**Коммутаторы алгебры  $su(3)$  при преобразовании генераторов (16)**

Table 2

**Commutators of the algebra  $su(3)$  under the transformation of generators (16)**

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$
$\lambda_1$	0	$\hat{\varepsilon}_1^2 \hat{\varepsilon}_3^2 2i\lambda_3$	$-2i\lambda_2$	$\hat{\varepsilon}_1^2 i\lambda_7$	$-\hat{\varepsilon}_1^2 i\lambda_6$	$i\hat{\varepsilon}_3^2 \lambda_5$	$-i\hat{\varepsilon}_3^2 \lambda_4$	0
$\lambda_2$	.	0	$2i\lambda_1$	$\hat{\varepsilon}_1^2 i\lambda_6$	$-\hat{\varepsilon}_1^2 i\lambda_7$	$-i\hat{\varepsilon}_3^2 \lambda_4$	$-i\hat{\varepsilon}_3^2 \lambda_5$	0
$\lambda_3$	.	.	0	$i\lambda_5$	$-i\lambda_4$	$-i\lambda_7$	$i\lambda_6$	0
$\lambda_4$	.	.	.	0	$\hat{\varepsilon}_1^2 \hat{\varepsilon}_2^2 2i\lambda_8$	$\hat{\varepsilon}_2^2 i\lambda_2$	$\hat{\varepsilon}_2^2 i\lambda_1$	$-i\sqrt{3}\lambda_5$
$\lambda_5$	.	.	.	.	0	$-\hat{\varepsilon}_2^2 i\lambda_1$	$\hat{\varepsilon}_2^2 i\lambda_2$	$i\sqrt{3}\lambda_4$
$\lambda_6$	.	.	.	.	.	0	$\hat{\varepsilon}_2^2 \hat{\varepsilon}_3^2 2i\lambda_3$	$-i\sqrt{3}\lambda_7$
$\lambda_7$	.	.	.	.	.	.	0	$i\sqrt{3}\lambda_6$
$\lambda_8$	.	.	.	.	.	.	.	0

1-С. В случае  $\hat{\varepsilon}_{1,2,3} = \varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля только коммутаторы

$$[\lambda_1, \lambda_3] = -2i\lambda_2, [\lambda_2, \lambda_3] = 2i\lambda_1, [\lambda_3, \lambda_4] = i\lambda_5,$$

$$[\lambda_3, \lambda_5] = -i\lambda_4, [\lambda_3, \lambda_6] = -i\lambda_7, [\lambda_3, \lambda_7] = i\lambda_6,$$

$$[\lambda_4, \lambda_8] = -i\sqrt{3}\lambda_5, [\lambda_5, \lambda_8] = i\sqrt{3}\lambda_4,$$

$$[\lambda_6, \lambda_8] = -i\sqrt{3}\lambda_7, [\lambda_7, \lambda_8] = i\sqrt{3}\lambda_6 \quad (25)$$

и алгебра приобретает структуру полупрямой суммы двух коммутативных подалгебр

$$su(3; \varepsilon) = T_2(\lambda_3, \lambda_8) \oplus T_6(\lambda_k, k \neq 3, 8). \quad (26)$$

2. Все  $\varepsilon_k = \varepsilon$ , кроме одной из списка (1, 2, 4, 5, 6, 7). Пусть  $\varepsilon_1 = 1$ , тогда матрица имеет вид

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon u_{11} & w_{12} - i\varepsilon v_{12} & \varepsilon \bar{u}_{31} \\ w_{12} + i\varepsilon v_{12} & \varepsilon u_{22} & \varepsilon \bar{u}_{32} \\ \varepsilon u_{31} & \varepsilon u_{32} & \varepsilon u_{33} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля коммутаторы

$$[\lambda_1, \lambda_2] = 2i\lambda_3, [\lambda_1, \lambda_3] = -2i\lambda_2, [\lambda_1, \lambda_4] = i\lambda_7,$$

$$[\lambda_1, \lambda_5] = -i\lambda_6, [\lambda_1, \lambda_6] = i\lambda_5, [\lambda_1, \lambda_7] = -i\lambda_4, \quad (28)$$

а алгебра приобретает структуру полупрямой суммы

$$su(3; \varepsilon) = u_1(\lambda_1) \oplus T_7(\lambda_k, k = 2, 3, \dots, 8). \quad (29)$$

Более того, если все  $\varepsilon_k = \varepsilon$ , кроме одного  $\varepsilon_m = 1$ , то при контракции  $\varepsilon \rightarrow 0$  алгебра имеет структуру полупрямой суммы вида

$$su(3; \varepsilon) = u_1(\lambda_m) \oplus T_7(\lambda_k, k = 1, 2, \dots, 8, k \neq m). \quad (30)$$

3. Пусть  $\varepsilon_{2,5,7} = 1$ , а  $\varepsilon_{1,3,4,6,8} = \varepsilon$ . Этим параметрам отвечает матрица вида

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon u_{11} & \varepsilon w_{12} - iv_{12} & \varepsilon w_{13} - iv_{13} \\ \varepsilon w_{12} + iv_{12} & \varepsilon u_{22} & \varepsilon w_{23} - iv_{23} \\ \varepsilon w_{13} + iv_{13} & \varepsilon w_{23} + iv_{23} & \varepsilon u_{33} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля коммутаторы

$$[\lambda_1, \lambda_2] = 2i\lambda_3, [\lambda_1, \lambda_5] = -i\lambda_6, [\lambda_1, \lambda_7] = -i\lambda_4,$$

$$[\lambda_2, \lambda_3] = 2i\lambda_1, [\lambda_2, \lambda_4] = i\lambda_6, [\lambda_2, \lambda_5] = i\lambda_7,$$

$$[\lambda_2, \lambda_6] = -i\lambda_4, [\lambda_2, \lambda_7] = -i\lambda_5, [\lambda_3, \lambda_5] = -i\lambda_4,$$

$$[\lambda_3, \lambda_7] = i\lambda_6, [\lambda_4, \lambda_5] = i(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8), [\lambda_4, \lambda_7] = i\lambda_1,$$

$$[\lambda_5, \lambda_6] = -i\lambda_1, [\lambda_5, \lambda_7] = i\lambda_2, [\lambda_5, \lambda_8] = i\sqrt{3}\lambda_4,$$

$$[\lambda_6, \lambda_7] = i(\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3), [\lambda_7, \lambda_8] = i\sqrt{3}\lambda_6, \quad (32)$$

а алгебра приобретает структуру полупрямой суммы подалгебры  $su_2$  и коммутативной подалгебры

$$su(3; \varepsilon) = su_2(\lambda_2, \lambda_5, \lambda_7) \oplus T_5(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_8). \quad (33)$$

4. Пусть  $\varepsilon_{1,2,4,5,6,7} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{3,8} = \varepsilon^2$ , тогда матрица имеет вид

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 u_{11} & \varepsilon \bar{u}_{21} & \varepsilon \bar{u}_{31} \\ \varepsilon u_{21} & \varepsilon^2 u_{22} & \varepsilon \bar{u}_{32} \\ \varepsilon u_{31} & \varepsilon u_{32} & \varepsilon^2 u_{33} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля только три коммутатора

$$[\lambda_1, \lambda_2] = 2i\lambda_3, \quad [\lambda_4, \lambda_5] = 2i\tilde{\lambda}_8, \quad [\lambda_6, \lambda_7] = 2i\tilde{\lambda}_3 \quad (35)$$

и алгебра имеет структуру

$$su(3; \varepsilon) = T_2(\lambda_4, \lambda_7) \oplus \left( H_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \oplus T_3(\lambda_5, \lambda_6, \lambda_8) \right), \quad (36)$$

где  $H_3$  – алгебра Галилея (Гейзенберга).

5. Пусть  $\varepsilon_{4,5,6,7} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{1,2,3,8} = \varepsilon^2$ , тогда матрица имеет вид

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 u_{11} & \varepsilon^2 \bar{u}_{21} & \varepsilon \bar{u}_{31} \\ \varepsilon^2 u_{21} & \varepsilon^2 u_{22} & \varepsilon \bar{u}_{32} \\ \varepsilon u_{31} & \varepsilon u_{32} & \varepsilon^2 u_{33} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля коммутаторы

$$[\lambda_4, \lambda_5] = 2i\tilde{\lambda}_8, \quad [\lambda_4, \lambda_6] = [\lambda_5, \lambda_7] = i\lambda_2, \\ [\lambda_4, \lambda_7] = [\lambda_6, \lambda_5] = i\lambda_1, \quad [\lambda_6, \lambda_7] = 2i\tilde{\lambda}_3. \quad (38)$$

В контрактированной алгебре выделяются подалгебры Галилея (Гейзенберга)  $H_3(\lambda_4, \lambda_5, \tilde{\lambda}_8)$ ,  $H_3(\lambda_6, \lambda_7, \tilde{\lambda}_3)$  и коммутативная подалгебра  $T_2(\lambda_1, \lambda_2)$ , которые приводят к структуре

$$su(3; \varepsilon) = \\ = H_3(\lambda_4, \lambda_5, \tilde{\lambda}_8) \oplus \left( H_3(\lambda_6, \lambda_7, \tilde{\lambda}_3) \oplus T_2(\lambda_1, \lambda_2) \right) = \\ = H_3(\lambda_6, \lambda_7, \tilde{\lambda}_3) \oplus \left( H_3(\lambda_4, \lambda_5, \tilde{\lambda}_8) \oplus T_2(\lambda_1, \lambda_2) \right). \quad (39)$$

5-1. Пусть  $\varepsilon_{1,2,4,5} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{6,7,3,8} = \varepsilon^2$ , тогда матрица имеет вид

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 u_{11} & \varepsilon \bar{u}_{21} & \varepsilon \bar{u}_{31} \\ \varepsilon u_{21} & \varepsilon^2 u_{22} & \varepsilon^2 \bar{u}_{32} \\ \varepsilon u_{31} & \varepsilon^2 u_{32} & \varepsilon^2 u_{33} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля коммутаторы

$$[\lambda_1, \lambda_2] = 2i\lambda_3, \quad [\lambda_1, \lambda_4] = [\lambda_2, \lambda_5] = i\lambda_7, \\ [\lambda_5, \lambda_1] = [\lambda_2, \lambda_4] = i\lambda_6, \quad [\lambda_4, \lambda_5] = 2i\tilde{\lambda}_8. \quad (41)$$

Контракция алгебры приводит к структурам

$$su(3; \varepsilon) = \\ = H_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \oplus \left( H_3(\lambda_4, \lambda_5, \tilde{\lambda}_8) \oplus T_2(\lambda_6, \lambda_7) \right) = \\ = H_3(\lambda_4, \lambda_5, \tilde{\lambda}_8) \oplus \left( H_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \oplus T_2(\lambda_6, \lambda_7) \right). \quad (42)$$

5-2. Пусть  $\varepsilon_{1,2,6,7} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{4,5,3,8} = \varepsilon^2$ , тогда матрица имеет вид

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 u_{11} & \varepsilon \bar{u}_{21} & \varepsilon^2 \bar{u}_{31} \\ \varepsilon u_{21} & \varepsilon^2 u_{22} & \varepsilon \bar{u}_{32} \\ \varepsilon^2 u_{31} & \varepsilon u_{32} & \varepsilon^2 u_{33} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля коммутаторы

$$[\lambda_1, \lambda_2] = 2i\lambda_3, \quad [\lambda_1, \lambda_6] = [\lambda_7, \lambda_2] = i\lambda_5, \\ [\lambda_7, \lambda_1] = [\lambda_6, \lambda_2] = i\lambda_4, \quad [\lambda_6, \lambda_7] = 2i\tilde{\lambda}_3. \quad (44)$$

Контракция алгебры приводит к структурам

$$su(3; \varepsilon) = \\ = H_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \oplus \left( H_3(\lambda_6, \lambda_7, \tilde{\lambda}_3) \oplus T_2(\lambda_4, \lambda_5) \right) = \\ = H_3(\lambda_6, \lambda_7, \tilde{\lambda}_3) \oplus \left( H_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \oplus T_2(\lambda_4, \lambda_5) \right). \quad (45)$$

6. Пусть  $\varepsilon_{3,4,5,6,7,8} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon^2$ , тогда матрица имеет вид

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon u_{11} & \varepsilon^2 \bar{u}_{21} & \varepsilon \bar{u}_{31} \\ \varepsilon^2 u_{21} & \varepsilon u_{22} & \varepsilon \bar{u}_{32} \\ \varepsilon u_{31} & \varepsilon u_{32} & \varepsilon u_{33} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля коммутаторы

$$[\lambda_4, \lambda_6] = [\lambda_5, \lambda_7] = i\lambda_2, \quad [\lambda_4, \lambda_7] = [\lambda_6, \lambda_5] = i\lambda_1. \quad (47)$$

Контрактированная алгебра имеет структуры

$$su(3; \varepsilon) = T_2(\lambda_4, \lambda_5) \oplus T_6(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8) = \\ = T_2(\lambda_6, \lambda_7) \oplus T_6(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_8) = \\ = T_4(\lambda_6, \lambda_7, \lambda_3, \lambda_8) \oplus T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5). \quad (48)$$

6-1. Пусть  $\varepsilon_{1,2,3,4,5,8} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{6,7} = \varepsilon^2$ , тогда матрица имеет вид

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon u_{11} & \varepsilon \bar{u}_{21} & \varepsilon \bar{u}_{31} \\ \varepsilon u_{21} & \varepsilon u_{22} & \varepsilon^2 \bar{u}_{32} \\ \varepsilon u_{31} & \varepsilon^2 u_{32} & \varepsilon u_{33} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля коммутаторы

$$[\lambda_1, \lambda_4] = [\lambda_2, \lambda_5] = i\lambda_7, \quad [\lambda_5, \lambda_1] = [\lambda_2, \lambda_4] = i\lambda_6. \quad (50)$$

Контрактированная алгебра имеет структуры

$$su(3; \varepsilon) = T_2(\lambda_1, \lambda_2) \oplus T_6(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8) = \\ = T_2(\lambda_4, \lambda_5) \oplus T_6(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8) = \\ = T_4(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_3, \lambda_8) \oplus T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_7). \quad (51)$$

6-2. Пусть  $\varepsilon_{1,2,3,6,7,8} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{4,5} = \varepsilon^2$ , тогда матрица имеет вид

$$u(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon u_{11} & \varepsilon \bar{u}_{21} & \varepsilon^2 \bar{u}_{31} \\ \varepsilon u_{21} & \varepsilon u_{22} & \varepsilon \bar{u}_{32} \\ \varepsilon^2 u_{31} & \varepsilon u_{32} & \varepsilon u_{33} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличны от нуля коммутаторы

$$[\lambda_1, \lambda_6] = [\lambda_7, \lambda_2] = i\lambda_5, \quad [\lambda_7, \lambda_1] = [\lambda_6, \lambda_1] = i\lambda_4. \quad (53)$$

Контрактированная алгебра имеет структуры

$$su(3; \varepsilon) = T_2(\lambda_1, \lambda_2) \oplus T_6(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8) =$$

$$= T_2(\lambda_6, \lambda_7) \oplus T_6(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_8) =$$

$$= T_4(\lambda_6, \lambda_7, \lambda_3, \lambda_8) \oplus T_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5). \quad (54)$$

7. Тривиальная контракция: все  $\varepsilon_k = \varepsilon$ . В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем коммутативную абелеву алгебру со структурой прямой суммы одномерных подалгебр

$$u(3; \varepsilon) = T_8(\lambda_1, \dots, \lambda_8) = \sum_{k=1}^8 \oplus u_1(\lambda_k). \quad (55)$$

### 3. Заключение

Чисто алгебраически специальная унитарная алгебра  $su(3)$ , которая имеет 3 нулевых коммутатора из общего числа 28, допускает следующие контракции.

1. Все однопараметрические контракции 1-А приводят к структуре  $(su_2 \oplus u_1) \oplus T_4$ , но подалгебры порождаются разными генераторами (19)–(21). Они дают в итоге 9 нулевых коммутаторов.

Двухпараметрические контракции 1-В дают структуру  $(T_2 \oplus T_2) \oplus T_4$  с коммутативными подалгебрами, натянутыми на разные генераторы (22)–(24). Контрактированные алгебры имеют по 14 нулевых коммутаторов.

Контракция по трем параметрам 1-С порождает полупрямую сумму коммутативных подалгебр  $T_2 \oplus T_6$  (26). У контрактированной алгебры есть 18 нулевых коммутаторов.

2. Контракция: все  $\varepsilon_k = \varepsilon$ , кроме  $\varepsilon_m = 1$  дает структуру  $u_1 \oplus T_7$  (29), (30) и 22 нулевых коммутатора.

3. Контракция:  $\varepsilon_{2,5,7} = 1$ , остальные  $\varepsilon_k = \varepsilon$  сообщает алгебре строение  $su_2 \oplus T_5$  (33) и обеспечивает 11 нулевых коммутаторов.

4. Контракция:  $\varepsilon_{3,8} = \varepsilon^2$ , остальные  $\varepsilon_k = \varepsilon$  дает алгебре структуру  $T_2 \oplus (H_3 \oplus T_3)$  (36) и 25 нулевых коммутаторов.

5. Контракции 5:  $\varepsilon_{1,2,3,8} = \varepsilon^2$ , 5-1:  $\varepsilon_{6,7,3,8} = \varepsilon^2$ , 5-2:  $\varepsilon_{4,5,3,8} = \varepsilon^2$ , остальные  $\varepsilon_k = \varepsilon$ , приводят к структуре  $H_3 \oplus (H_3 \oplus T_2)$  с различными подалгебрами (39)–(45). Контрактированные алгебры имеют по 22 нулевых коммутатора.

6. Контракции 6:  $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon^2$ , 6-1:  $\varepsilon_{6,7} = \varepsilon^2$ , 6-2:  $\varepsilon_{4,5} = \varepsilon^2$ , остальные  $\varepsilon_k = \varepsilon$  порождают структуры  $T_2 \oplus T_6$  или  $T_4 \oplus T_4$  (48)–(54). Во всех случаях контрактированные алгебры имеют по 24 нулевых коммутатора.

7. Абелева контракция: все  $\varepsilon_k = \varepsilon$  приводит к коммутативной алгебре  $T_8$ , у которой все 28 коммутаторов нулевые, а ее структура представляет собой прямую сумму одномерных подалгебр (55).

Следует иметь в виду, что когда речь идет о приложениях контракций групп (алгебр) Ли в физических системах, то в них могут реализовываться не все алгебраически допустимые контракции, поскольку конкретная физическая система имеет свои специфические свойства и эти свойства должны сохраняться при контракциях.

### Литература

1. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
2. *Румер Ю.Б., Фет А.И.* Теория унитарной симметрии. М.: Наука, 1970. 400 с.
3. *Рубаков В.А.* Классические калибровочные поля. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 336 с.
4. *Емельянов В.М.* Стандартная модель и ее расширения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 584 с.
5. *Бройер Х.-П., Петруччионе Ф.* Теория открытых квантовых систем. Институт компьютерных исследований / М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 824 с.
6. *Chruściński D., Facchi P., Marmo G., Pascazio S.* The Observables of a Dissipative Quantum System // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19. No. 01. 1250001.
7. *Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al.* The quantum-to-classical transition: contraction of associative products // Physica Scripta. 2016. Vol. 91. 045201. ArXiv:1603.01108 [quant-ph].
8. *Alipour S., Chruscinski D., Facchi P. et al.* Dynamical algebra of observables in dissipative quantum systems // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.
9. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Диссипации кубита и контракции алгебр Ли // Известия Коми НИЦ УрО РАН. 2019. № 4(40). С. 7–14.
10. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
11. *Saletan E.J.* Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 1–21.
12. *Громов Н.А.* Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.
13. *Gromov N.A.* Particles in the early Universe. Singapore: World Scientific, 2020. 160 p.

### References

1. *Vilenkin N.Ya.* Spetsialnyye funktsii i teoriya predstavleniy grupp [Special Functions and Group Representation Theory]. Moscow: Nauka, 1965. 588 p.
2. *Rumer Yu.B., Fet A.I.* Teoriya unitarnoy simmetrii [Theory of Unitary Symmetry]. Moscow: Nauka, 1970. 400 p.
3. *Rubakov V.A.* Klassicheskiye kalibrovochnyye polya [Classical Gauge Fields]. Moscow: Editorial URSS, 1999. 336 p.
4. *Emel'yanov V.M.* Standartnaya model i eye rasshireniya [Standard Model and its extensions]. Moscow: FIZMATLIT, 2007. 584 p.
5. *Broyer Kh.-P., Petruchchione F.* Teoriya otkrytykh kvantovykh sistem [Theory of open quantum systems] / Inst. of computer research. Moscow–Izhevsk: Research center "Regular and chaotic dynamics", 2010. 824 p.
6. *Chruściński D., Facchi P., Marmo G., Pascazio S.* The Observables of a Dissipative Quantum System // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19. No. 01. 1250001.
7. *Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al.* The quantum-to-classical transition: contraction of

- associative products // *Physica Scripta*. 2016. Vol. 91. 045201. ArXiv:1603.01108 [quant-ph].
8. *Alipour S., Chruscinski D., Facchi P. et al.* Dynamical algebra of observables in dissipative quantum systems // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2017. Vol. 50. 065301.
  9. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Dissipaciya qubita i kontraktsii algebr Lie [Qubit dissipation and contractions of Lie algebras] // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS*. 2019. No. 4(40). P. 7–14.
  10. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
  11. *Saletan E.J.* Contraction of Lie groups // *J. Math. Phys.* 1961. Vol. 2. P. 1–21.
  12. *Gromov N.A.* Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of Classical and Quantum Groups]. Moscow: FIZMATLIT, 2012. 318 p.
  13. *Gromov N.A.* Particles in the early Universe. Singapore: World Scientific, 2020. 160 p.

Статья поступила в редакцию 26.08.2020.

УДК 530.145, 512.81  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-30-33

**Н.А. ГРОМОВ, И.В. КОСТЯКОВ, В.В. КУРАТОВ**

## **КОГЕРЕНТНОСТЬ В ОТКРЫТОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЕ**

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, г. Сыктывкар*

*[gromov@ipm.komisc.ru](mailto:gromov@ipm.komisc.ru)  
[kostyakov@ipm.komisc.ru](mailto:kostyakov@ipm.komisc.ru)  
[kuratov@ipm.komisc.ru](mailto:kuratov@ipm.komisc.ru)*

**N.A. GROMOV, I.V. KOSTYAKOV, V.V. KURATOV**

## **COHERENCE IN AN OPEN QUANTUM SYSTEM**

*Institute of Physics and Mathematics  
Federal Research Centre Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS,  
Syktывkar*

### **Аннотация**

Рассматривается двухуровневая открытая квантовая система, взаимодействующая с окружающей средой тепловым и электромагнитным образом. В результате теплового взаимодействия первоначально некоммутирующие квантовые наблюдаемые в процессе эволюции частично приобретают классические черты, что проявляется в изменении (контракции) их коммутационных соотношений от  $su(2)$  до алгебры Гейзенберга, а система становится некогерентной. При комбинированном тепловом и электромагнитном взаимодействии системы с окружающей средой наблюдаемые теряют квантовые свойства и становятся чисто классическими коммутирующими наблюдаемыми. Однако система при этом сохраняет свойство когерентности.

### **Ключевые слова:**

*диссипативные квантовые системы, алгебра наблюдаемых, кубит, когерентность, контракции алгебр Ли*

### **Abstract**

A two-level open quantum system interacting with the environment in a thermal and magnetic manner is considered. As a result of thermal interaction, initially non-commuting quantum observables in the process of evolution partially acquire classical features, which is manifested in the change (contraction) of their commutation relations from  $su(2)$  to the Heisenberg algebra, and the system becomes incoherent. With the combined thermal and magnetic interaction of the system with the environment, the observables lose their quantum properties and become purely classical commuting observables. However, the system retains the coherence property.

### **Keywords:**

*dissipative quantum systems, algebra of observables, qubit, coherence, contractions of Lie algebras*

### **Введение**

Основной сложностью создания квантовых компьютеров является быстрая декогеренция квантовых состояний открытых систем [1–3]. Диссипативные процессы в открытых квантовых системах с точки зрения контракций анализируются в работах [4–7]. Возможность сохранения когерентности открытых систем, по-видимому, демонстрирует нам природа на примере явлений фотосинтеза [8–11]. В данной работе мы приводим пример эволюции кубита, взаимодействующего с открытой системой, но сохраняющего когерентность. Все коммутаторы алгебры наблюдаемых при этом обнуляются, демонстрируя классическое поведение.

Известно, что диссипативная эволюция матрицы плотности кубита

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \quad (1)$$

описывается уравнением Линдблада [1, 2, 5]

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, \hat{H}] + \sum_k \left( V_k \rho V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho\} \right), \quad (2)$$

или для наблюдаемых  $\sigma_i$

$$\dot{\sigma}_i = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \sigma_i] + \sum_k \left( V_k^+ \sigma_i V_k - \frac{1}{2} \{V_k^+ V_k, \sigma_i\} \right). \quad (3)$$

### Двухуровневая система в тепловом поле

Квантовая двухуровневая система [1] характеризуется наблюдаемыми  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= 2i\sigma_z, & [\sigma_y, \sigma_z] &= 2i\sigma_x, \\ [\sigma_z, \sigma_x] &= 2i\sigma_y, \end{aligned} \quad (4)$$

образующими алгебру  $su(2)$ .

Рассмотрим двухуровневую систему в тепловом поле [6, 12]. Обозначим оператор перехода из основного состояния  $|0\rangle$  в возбужденное  $|1\rangle$  как  $A^+ = \sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$ , а оператор перехода из верхнего состояния в основное — через  $A = \sigma_- = |0\rangle\langle 1|$ .

Пусть уравнение Линдблада содержит только диссипативную часть ( $H = 0, V = A$ ), тогда вместо (2) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\gamma}{2}(n+1) \left( 2\sigma_- \rho \sigma_+ - \{\sigma_+ \sigma_-, \rho\} \right) + \\ &+ \frac{\gamma n}{2} \left( 2\sigma_+ \rho \sigma_- - \{\sigma_- \sigma_+, \rho\} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y), \quad n = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) - 1}. \quad (6)$$

Здесь  $\hbar\omega_0$  — разность уровней энергии основного и возбужденного состояний,  $\gamma$  — константа взаимодействия,  $T$  — температура окружающей среды.

Переписывая уравнение (5) в терминах переменных  $x, y, z$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) x, \\ \dot{y} = -\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) y, \\ \dot{z} = -\gamma(1 + (2n+1)z), \end{cases} \quad (7)$$

решения которой имеют вид

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t} x_0, \\ y(t) = e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t} y_0, \\ z(t) = e^{-\gamma(1+2n)t} \left( z_0 + \frac{1}{1+2n} \right) + z_s, \end{cases} \quad (8)$$

где  $z_s = -(1+2n)^{-1}$ . С учетом (6), имеем  $z_s = -1$  при нулевой температуре  $T = 0$  окружающей среды, что соответствует основному состоянию системы  $|0\rangle$

с матрицей плотности  $\rho = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . При возрастании температуры  $T \rightarrow \infty$  получаем  $z_s \rightarrow$

0, что соответствует полностью смешанному состоянию системы  $\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Формулы (8) при  $t \rightarrow \infty$  описывают эволюцию кубита. Поскольку в процессе эволюции  $x$  и  $y \rightarrow 0$ , то матрица плотности (1) диагонализируется, что соответствует потере кубитом когерентности. Траектории эволюции кубита изображены на рис.1.

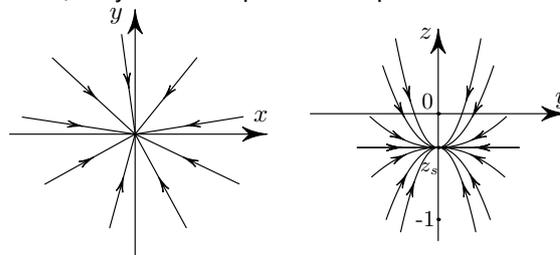


Рис. 1. Траектории эволюции кубита (8) в плоскостях  $(x, y)$  и  $(y, z)$ .

Fig. 1. Evolution trajectories of a qubit (8) in the planes  $(x, y)$  and  $(y, z)$ .

Что касается наблюдаемых системы, то уравнение (3) переписывается

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= \frac{\gamma}{2}(n+1) \left( 2\sigma_+ \sigma_i \sigma_- - \{\sigma_+ \sigma_-, \sigma_i\} \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{2} n \left( 2\sigma_- \sigma_i \sigma_+ - \{\sigma_- \sigma_+, \sigma_i\} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для наблюдаемых  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  оно принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_x = -\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma_x, \\ \dot{\sigma}_y = -\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma_y, \\ \dot{\sigma}_z = -\gamma I - \gamma(2n+1)\sigma_z \end{cases} \quad (10)$$

и имеет решения

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t} \sigma_x, \\ \sigma_y(t) &= e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t} \sigma_y, \\ \sigma_z(t) &= e^{-\gamma(1+2n)t} \left( \sigma_z + \frac{I}{1+2n} \right) - \frac{I}{1+2n} \end{aligned} \quad (11)$$

с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y]_t &= 2i \left( \sigma_z + \frac{I}{1+2n} \left( 1 - e^{-\gamma(2n+1)t} \right) \right), \\ [\sigma_y, \sigma_z]_t &= 2ie^{-\gamma t} \sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x]_t = 2ie^{-\gamma t} \sigma_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Переобозначая  $\sigma_z \rightarrow \sigma_z + \frac{I}{1+2n}$  в пределе  $t \rightarrow \infty$  имеем алгебру Гейзенберга.

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y]_{\infty} &= 2i\sigma_z, \\ [\sigma_y, \sigma_z]_{\infty} &= 0, \quad [\sigma_z, \sigma_x]_{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, в результате теплового взаимодействия кубита с окружающей средой первоначально некоммутирующие квантовые наблюдаемые  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  (4) в процессе эволюции частично приобретают классические черты, что проявляется в изменении (контракции) их коммутационных соотношений до алгебры Гейзенберга.

**Двухуровневая система в тепловом и электромагнитном полях**

Добавим теперь в правую часть уравнения (5) гамильтониан взаимодействия с когерентным электромагнитным полем

$$H_I = h\sigma_x. \quad (14)$$

Уравнение Линдблада (2) преобразуется в систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) x, \\ \dot{y} = -\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) y - 2hz, \\ \dot{z} = -\gamma(1 + (2n + 1)z) + 2hy. \end{cases} \quad (15)$$

Эта система имеет предельную точку типа узел с координатами

$$\begin{aligned} x_s &= 0, \\ y_s &= \frac{4h\gamma}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}, \\ z_s &= -\frac{\gamma^2(2n + 1)}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решения системы (15) описываются формулами

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t}x_0, \\ y(t) &= (y_0 - y_s)(C_+e^{-\lambda-t} - C_-e^{-\lambda+t}) + \\ &+ \frac{2h(z_0 - z_s)}{\sqrt{\gamma^2(n+\frac{1}{2})^2 - 16h^2}}(e^{-\lambda-t} - e^{-\lambda+t}) + y_s, \\ z(t) &= (z_0 - z_s)(C_+e^{-\lambda+t} - C_-e^{-\lambda-t}) + \\ &+ 2h(y_0 - y_s)(e^{-\lambda+t} - e^{-\lambda-t}) + z_s, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} C_{\pm} &= \frac{\gamma(n+\frac{1}{2}) \pm \sqrt{\gamma^2(n+\frac{1}{2})^2 - 16h^2}}{2\sqrt{\gamma^2(n+\frac{1}{2})^2 - 16h^2}}, \\ \lambda_{\pm} &= \frac{3}{2}\gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - 16h^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Соответствующие траектории эволюции кубита изображены на рис.2.

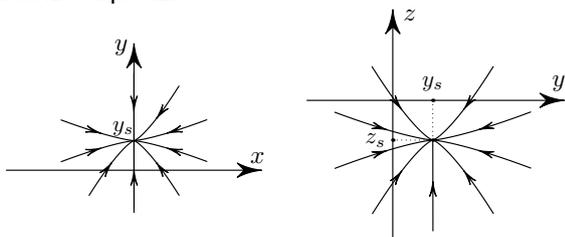


Рис. 2. Траектории эволюции кубита (15) в плоскостях  $(x, y)$  и  $(y, z)$ .

Fig.2. Evolution trajectories of a qubit (15) in the planes  $(x, y)$  and  $(y, z)$ .

Уравнения для наблюдаемых в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_x = -\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma_x, \\ \dot{\sigma}_y = -\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma_y - 2a\sigma_z, \\ \dot{\sigma}_z = -\gamma(1 + (2n + 1)\sigma_z) + 2a\sigma_y, \end{cases} \quad (19)$$

а решения даются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= e^{-\gamma(n+\frac{1}{2})t}\sigma_x, \\ \sigma_y(t) &= \left( \sigma_y - \frac{4h\gamma}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}I \right) \times \\ &\times (C_+e^{-\lambda-t} - C_-e^{-\lambda+t}) + \frac{2h}{\sqrt{\gamma^2(n+\frac{1}{2})^2 - 16h^2}} \times \\ &\times \left( \sigma_z + \frac{\gamma^2(2n + 1)}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}I \right) (e^{-\lambda-t} - e^{-\lambda+t}) + \\ &+ \frac{4h\gamma}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}I, \\ \sigma_z(t) &= \left( \sigma_z + \frac{\gamma^2(2n + 1)}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}I \right) \times \\ &\times (C_+e^{-\lambda+t} - C_-e^{-\lambda-t}) + \\ &+ 2h \left( \sigma_y - \frac{4h\gamma}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}I \right) \times \\ &\times (e^{-\lambda+t} - e^{-\lambda-t}) - \\ &- \frac{\gamma^2(2n + 1)}{\gamma^2(2n + 1)^2 + 8h^2}I. \end{aligned} \quad (20)$$

В пределе  $t \rightarrow \infty$  алгебра наблюдаемых становится абелевой

$$[\sigma_x, \sigma_y]_{\infty} = [\sigma_y, \sigma_z]_{\infty} = [\sigma_z, \sigma_x]_{\infty} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, в результате теплового и электромагнитного взаимодействия двухуровневой квантовой системы с окружающей средой первоначально некоммутирующие квантовые наблюдаемые  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  (4) в процессе эволюции теряют квантовые свойства и становятся чисто классическими коммутирующими наблюдаемыми. Однако система при этом сохраняет свойство когерентности.

Авторы выражают благодарность А.А. Карбанову за плодотворные обсуждения.

## Литература

1. Нильсен М.А., Чанг И.Л. Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006. 824 с.
2. Прескилл Дж. Квантовая информация и квантовые вычисления. Т. 1–2. Ижевск: РХД, 2008, 464 с.; 2011. 312 с.
3. Бройер Х.-П., Петруччионе Ф. Теория открытых квантовых систем / М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 824 с.
4. Chruściński D., Facchi P., Marmo G., Pascazio S. The Observables of a Dissipative Quantum System // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19. No. 01.1250001.
5. The quantum-to-classical transition: contraction of associative products / A. Ibert, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, C. Stornaiolo, F. Ventriglia // Physica Scripta. 2016. Vol. 91. No. 4. 045201. ArXiv:1603.01108 [quant-ph].
6. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems / S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.
7. Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В. Диссипация кубита и контракции алгебр Ли // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. № 4(40). С. 5–12.
8. Арефьева И.Я., Волович И.В., Козырев С.В. Метод стохастического предела и интерференция в квантовых многочастичных системах // Теоретическая и математическая физика. 2015. Т. 183. №3. С. 388–408.
9. Aref'eva I.Y., Volovich I.V. Holographic Photosynthesis. arXiv:1603.09107 [hep-th].
10. Ohya M., Volovich I. Mathematical Foundations of Quantum Information and Computation and Its Applications to Nano- and Bio-systems. Springer. 2011. 759 p.
11. Kozyrev S.V., Mironov A.A., Teretenkov A.E., Volovich I.V. Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2017. Vol. 20:4. 1750021; arXiv:1612.00213
12. Белавин А.А., Зельдович Б.Я., Переломов А.М., Попов В.С. Релаксация квантовых систем с эквидистантным спектром // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1969. Т. 56 (1). С. 264–274.

## References

1. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
2. Preskill J. Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
3. Breuer H.-P., Petruccione F. The theory of open quantum systems. Oxford University Press, 2007.
4. Chruściński D., Facchi P., Marmo G., Pascazio S. The Observables of a Dissipative Quantum System // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19. No. 01. 1250001.
5. The quantum-to-classical transition: contraction of associative products / A. Ibert, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, C. Stornaiolo, F. Ventriglia // Physica Scripta. 2016. Vol. 91. No. 4. 045201. ArXiv:1603.01108 [quant-ph].
6. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems / S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.
7. Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V. Dissipaciya qubita i kontraksiiy algebr Lie [Qubit dissipation and contractions of Lie algebras] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2019. No. 4(40). P. 7–14.
8. Aref'eva I.Ya., Volovich I.V., Kozyrev S.V. Metod stokhasticheskogo predela i interferentsiya v kvantovykh mnogochastichnykh sistemakh [Stochastic limit method and interference in quantum multiparticle systems] // TMF. 2015. Vol. 183. No. 3. P. 388–408.
9. Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. Holographic Photosynthesis, arXiv:1603.09107 [hep-th].
10. Ohya M., Volovich I. Mathematical Foundations of Quantum Information and Computation and Its Applications to Nano- and Bio-systems. Springer. 2011. 759 p.
11. Kozyrev S.V., Mironov A.A., Teretenkov A.E., Volovich I.V. Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2017. Vol. 20:4. 1750021, arXiv: 1612.00213
12. Belavin A.A., Zel'dovich B.Ya., Perelomov A.M., Popov V.S. Relaksatsiya kvantovykh sistem s ekvidistantnym spektrom [Relaxation of quantum systems with equidistant spectrum] // JETP. 1969. Vol. 56(1). P. 264–274.

Статья поступила в редакцию 21.09.2020.

УДК 515.1,514.74  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-34-39

**А.В. ЖУБР**

## **ПОЛУСПИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ, ЧАСТЬ 2**

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар*

*[avzhubr@gmail.com](mailto:avzhubr@gmail.com)*

**A.V. ZHUBR**

## **TWISTED SPIN STRUCTURES, PART 2**

*Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS,  
Syktuvkar*

### **Аннотация**

Данная статья – продолжение работы [1], в которой изучалось некоторое обобщение понятия спинорной структуры на векторном расслоении с нулевым классом Штифеля-Уитни  $w_2$ , позволяющее рассматривать произвольные ориентированные расслоения (не только с  $w_2 = 0$ ). Такое обобщение было предложено много раньше в работе автора [2], где оно послужило одним из инструментов в доказательстве теоремы классификации для всех замкнутых односвязных шестимерных многообразий. В вышеупомянутой заметке [1] эта конструкция изучалась несколько более подробно, в настоящей же работе устанавливаются дальнейшие свойства таких структур, в частности, здесь рассматриваются соответствующие группы бордизмов (уже использовавшиеся в работе [2]) и выясняется их связь со «скрученными спинорными бордизмами» в работе М.Крека и С.Штольца [3].

### **Ключевые слова:**

*гомотопия, векторное расслоение, полуспинорная структура, различающий класс, группа бордизмов*

### **Abstract**

This paper is a sequel to the note [1], where a certain generalization of the notion of spin structure on a vector bundle with zero  $w_2$  Stiefel-Whitney class, to the case of all oriented vector bundles (with whatever  $w_2$ ), has been given. This generalization was actually introduced much earlier in the author's work [2], where it served as one of the instruments in the proof of classification theorem for all closed simply connected 6-manifolds. In the above-mentioned note [1] this construction has been considered in more detail; the present paper gives further properties of such structures (functorial properties; difference class and its properties; twisted Spin structures and trivialisations on the 1-skeleton; etc.). In particular, we consider the corresponding bordism groups (having been used already in [1]), and establish their connection with «twisted spin bordism groups» used by M.Kreck and S.Stolz in [3].

### **Keywords:**

*homotopy, vector bundle, twisted Spin structure, difference class, bordism group*

### **Введение**

Как уже было сказано в аннотации, данный текст является продолжением и развитием заметки автора [1], поэтому вводимые ниже соглашения и обозначения в основном повторяют (с некоторыми модификациями) то, что было сказано там. То же относится и к вспомогательным результатам – мы приводим необходимые формулировки из работы [1], опуская соответствующие доказательства; общеизвестные факты приводятся без указания ссылок.

## **1. Обозначения и терминология**

### **1.1. Пространства и отображения**

Термин «пространство» всюду понимается в смысле «паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство»; во многих случаях это будет конечный  $CW$ -комплекс или многообразие. «Многообразии» означает «ориентированное компактное

гладкое многообразие» (с краем или без края). «Отображение» означает «непрерывное отображение».

Для любых множеств  $X, Y$  проекции их декартова произведения  $X \times Y$  на  $X$  и  $Y$  обозначаются как  $\text{pr}_1$  и  $\text{pr}_2$ , соответственно.

### 1.2. Гомотопии и гомотопии гомотопий

Гомотопия между двумя отображениями  $f, g: X \rightarrow Y$  (мы будем говорить «гомотопия из  $f$  в  $g$ ») – это, как всегда, отображение

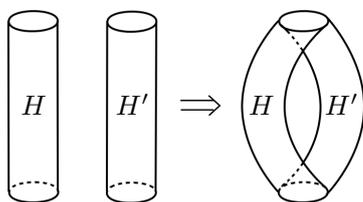
$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

с  $H(x, 0) = f(x)$  и  $H(x, 1) = g(x)$ ; все это будем коротко записывать в виде  $H: f \rightarrow g$ , а вместо  $H(x, t)$  будем также писать  $H_t(x)$ . Если  $H, H': f \rightarrow g$  – две гомотопии, то *гомотопией между  $H$  и  $H'$*  называется отображение  $G: X \times [0, 1]^2 \rightarrow Y$

$$G(x, t, s) = \begin{cases} H_t(x) & \text{при } s = 0; \\ H'_t(x) & \text{при } s = 1; \\ f(x) & \text{при } t = 0; \\ g(x) & \text{при } t = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Можно, таким образом, сказать, что гомотопия между двумя отображениями из пространства  $X$  в пространство  $Y$  – это путь в пространстве  $C(X, Y)$  отображений из  $X$  в  $Y$ , а гомотопия гомотопий – это гомотопия такого рода пути с фиксированными началом и концом. Факт гомотопности как двух отображений  $f, g$ , так и двух гомотопий  $H, K$  мы будем обозначать одинаковым образом – соответственно,  $f \sim g$  и  $H \sim K$ .

Мы рассмотрим один специальный случай, когда нетрудно сформулировать условие гомотопности двух гомотопий на языке стандартной теории препятствий. Пусть пространство  $X$  снабжено структурой  $CW$ -комплекса, а  $Y$  – пространство Эйленберга-Маклейна  $K(\pi, n)$  с  $n \geq 2$ . Пара гомотопий  $H, H'$  между двумя отображениями  $f, g: X \rightarrow K(\pi, n)$  – это, по существу, отображение пары «цилиндров» вида  $X \times [0, 1]$  со склеенными между собой верхними и нижними основаниями:



Иначе говоря, это отображение  $X \times S^1 \rightarrow K(\pi, n)$  (наша пара «цилиндров» может быть представлена в виде  $X \times S^1_l$  и  $X \times S^1_r$ , где  $S^1_l$  и  $S^1_r$  обозначают две взаимно дополняющие – «левую» и «правую» – полуокружности, см. еще раз рисунок выше). Теперь заметим, что «продеформировать гомотопию  $H$  в гомотопию  $H'$ » в таких терминах означает: продеформировать соответствующее отображение  $\tilde{H}: X \times S^1 \rightarrow K(\pi, n)$  в отображение вида  $\tilde{H} \circ P$ , где  $P: S^1 \rightarrow S^1_r$  – ортогональная проекция окружности на «правую полуокружность»; при этом

предполагается, что «правая половина» отображения  $\tilde{H}$  остается в процессе деформации постоянной. Стандартная теория препятствий говорит, что соответствующее (в данном случае единственное) препятствие к такой деформации – это относительный класс когомологий

$$o(\tilde{H}, \tilde{H} \circ P) \in H^n(X \times S^1, X \times S^1_r; \pi).$$

Остается лишь заметить, что факторпространство  $X \times S^1 / X \times S^1_r$  или, что то же,  $X \times [0, 1] / X \times \{0, 1\}$  – не что иное как надстройка  $\Sigma X$  над пространством  $X$  с двумя отождествленными точками (или, что гомотопически то же, букет  $\Sigma X \vee S^1$ ). Пользуясь изоморфизмом надстройки, окончательно получаем

$$o(H, H') \in H^{n-1}(X; \pi). \quad (2)$$

### 1.3. Векторные расслоения

*Векторное расслоение* везде означает «ориентированное векторное расслоение». Таким образом,  $n$ -мерное векторное расслоение  $\xi$  – это пара пространств  $E_\xi, B_\xi$  и отображение  $p_\xi: E_\xi \rightarrow B_\xi$ , локально изоморфное (с сохранением ориентаций слоёв) проекции  $U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , где  $U$  – некоторая окрестность любой точки пространства  $B_\xi$ ; как обычно, пространство  $B_\xi$  называется *базой* расслоения  $\xi$ , пространство  $E_\xi$  – *тотальным пространством*, отображение  $p_\xi$  – *проекцией*, а ориентированные векторные пространства  $F_{\xi, x} = p_\xi^{-1}(x) \subset E_\xi, x \in B_\xi$ , – *слоями* над соответствующими точками базы.

Пусть  $\xi = (E_\xi, B_\xi, p_\xi)$  – векторное расслоение,  $A \subset B_\xi$  – подпространство базы и  $Y$  – произвольное пространство. Мы обозначаем через  $\xi|_A$  «сужение» расслоения  $\xi$  на подпространство  $A$  – расслоение с базой  $A$ , тотальным пространством  $E_1 = p_\xi^{-1}A$  и проекцией  $p_1 = p_\xi|_{E_1}$ . Мы обозначаем через  $\xi \times Y$  «произведение» расслоения  $\xi$  на пространство  $Y$  – расслоение с базой  $B_\xi \times Y$ , тотальным пространством  $E_\xi \times Y$  и проекцией  $p_\xi \circ \text{pr}_1$ .

### 1.4. Послойные изоморфизмы и индуцированные расслоения

Пусть  $\xi, \eta$  – два расслоения. *Послойный изоморфизм*  $f: \xi \rightarrow \eta$  – это любое отображение  $E_\xi \rightarrow E_\eta$ , переводящее каждый слой  $F_{\xi, x}$  в некоторый слой  $F_{\eta, y}$ , при этом каждое сужение  $f|_{F_{\xi, x}}$  представляет собой сохраняющий ориентации линейный изоморфизм; мы будем использовать выражения «послойный изоморфизм  $f: \xi \rightarrow \eta$ » и «послойный изоморфизм  $f: E_\xi \rightarrow E_\eta$ » как синонимы. Ясно, что всякий послойный изоморфизм  $f: E_\xi \rightarrow E_\eta$  определяет отображение  $g: B_\xi \rightarrow B_\eta$ ; мы будем говорить, что  $f$  – «изоморфизм над  $g$ ». Если при этом  $B_\xi = B_\eta = B$  и  $g$  – тождественное отображение, то  $f$  называется «изоморфизмом над  $B$ », или же просто изоморфизмом. В дальнейшем мы будем систематически использовать для отображения  $B_\xi \rightarrow B_\eta$ , соответствующего послойному изоморфизму  $f: \xi \rightarrow \eta$ , обозначение  $f_B$ .

Пусть  $\xi$  – векторное расслоение и  $g: X \rightarrow B_\xi$  – некоторое отображение. В этом случае возникает новое расслоение  $g^*\xi$  с базой  $X$  – расслоение, *индуцированное* посредством отображения  $g$  – чье

тотальное пространство определяется как подмножество декартова произведения  $X \times E_\xi$ , заданное уравнением  $g(x) = p_\xi(y)$  для любых  $(x, y) \in X \times E_\xi$ . При этом имеется канонический послыйный изоморфизм  $g_E : g^* \xi \rightarrow \xi$  над  $g$ , действующий по формуле  $g_E(x, y) = (g(x), y)$ .

Пусть, наконец, мы имеем опять послыйный изоморфизм  $f : \xi \rightarrow \eta$ . Согласно сказанному выше, в этой ситуации возникает третье расслоение, а именно расслоение  $f_B^* \eta$  над  $B_\xi$ , и мы получаем «тавтологический» изоморфизм  $s : \xi \rightarrow f_B^* \eta$ . Обратно, для любых расслоений  $\xi, \eta$ , отображения  $g : B_\xi \rightarrow B_\eta$  и изоморфизма  $s : \xi \rightarrow g^* \eta$  формула  $f = g_E \circ s$  дает послыйный изоморфизм  $\xi \rightarrow \eta$  над  $g$ . Таким образом, мы можем сказать, что всякий послыйный изоморфизм  $\xi \rightarrow \eta$  – не что иное как пара  $(g, s)$ , состоящая из отображения  $g : B_\xi \rightarrow B_\eta$  и изоморфизма  $s : \xi \rightarrow g^* \eta$ .

*Замечание.* Полезно иметь в виду, что всякий изоморфизм  $\xi \rightarrow \eta$  над пространством  $B$  можно рассматривать как сечение (нелинейного) расслоения  $\text{Iso}(\xi, \eta)$ , слой которого над каждой точкой  $x \in B$  – множество всех сохраняющих ориентации изоморфизмов  $F_{\xi, x} \rightarrow F_{\eta, x}$ , что при выборе каких-нибудь базисов в ориентированных векторных пространствах  $F_{\xi, x}$  и  $F_{\eta, x}$  превращается в  $GL^+(n)$  – группу невырожденных квадратных матриц порядка  $n$ . Как хорошо известно, всякое (конечномерное) расслоение может быть снабжено евклидовой метрикой, вследствие чего можно рассматривать «евклидов» вариант расслоения  $\text{Iso}(\xi, \eta)$  – со слоем  $SO(n)$ .

### 1.5. Классифицирующие пространства для векторных расслоений

Через  $B_{SO(n)}$  обозначается классифицирующее пространство для  $n$ -мерных векторных расслоений (пространство Грассмана ориентированных  $n$ -мерных плоскостей в бесконечномерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^\infty$ ), а через  $\gamma_{SO(n)}$  – соответствующее универсальное векторное расслоение над  $B_{SO(n)}$ . Таким образом, для любого  $n$ -мерного векторного расслоения  $\xi$  найдется послыйный изоморфизм  $f : \xi \rightarrow \gamma_{SO(n)}$ , имеющий в некотором гомотопическом смысле «контролируемую неоднозначность» (см. ниже пункт 3).

Предполагается, что размерности всех рассматриваемых далее векторных расслоений не менее трех, и что базы этих расслоений являются конечными  $CW$ -комплексами (последнее, конечно, не относится к универсальным расслоениям, таким как  $B_{SO(n)}$ ). Мы будем часто опускать обозначение размерности расслоения, если эта размерность подразумевается, и писать просто  $B_{SO}, \gamma_{SO}$  и т.д.

Через  $K(\mathbb{Z}_2, 2)$  обозначается универсальное пространство Эйленберга-Маклейна типа  $(\mathbb{Z}_2, 2)$  и через  $\varkappa$  – соответствующий универсальный  $(\mathbb{Z}_2, 2)$ -когомологический класс. Пусть

$$\pi : B_{SO} \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2) \quad (3)$$

– отображение, индуцирующее изоморфизм 2-мерных гомотопических групп (фактически отображение (3) – то, что называется «гомотопическая 3-эквивалентность», поскольку индуцирует изоморфизмы

гомотопических групп в размерностях 1, 2 и 3). Очевидно,  $\pi^*(\varkappa) = w_2(\gamma_{SO})$  – «универсальный» двумерный класс Штифеля-Уитни. Пользуясь хорошо известной конструкцией, мы можем превратить отображение (3) в расслоение Серра, заменив пространство  $B_{SO}$  на ему гомотопически эквивалентное (и сохранив при этом те же обозначения); будем считать это расслоение раз навсегда фиксированным. Слой расслоения (3) будет обозначаться далее через  $B_{Spin}$ , расслоение  $i^* \gamma_{SO}$  над пространством  $B_{Spin}$ , индуцированное естественным вложением  $i : B_{Spin} \rightarrow B_{SO}$  – через  $\gamma_{Spin}$ , и соответствующее тотальное пространство – через  $E_{Spin}$ . Как известно,  $B_{Spin(n)}$  – это классифицирующее пространство для  $n$ -мерных спинорных расслоений, и соответственно  $\gamma_{Spin(n)}$  – универсальное  $n$ -мерное спинорное расслоение.

### 2. Spin( $\theta$ )-структуры: определение

Пусть имеется векторное расслоение  $\xi$  и отображение  $\theta : B_\xi \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$ . Мы называем *Spin( $\theta$ )-структурой* на расслоении  $\xi$  (варианты – *спинорной структурой над  $\theta$* , *полуспинорной структурой*) гомотопический класс послыйных изоморфизмов  $f : \xi \rightarrow \gamma_{SO}$ , удовлетворяющих коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} B_\xi & \xrightarrow{f_B} & B_{SO} \\ \theta \searrow & & \swarrow \pi \\ & & K(\mathbb{Z}_2, 2) \end{array} \quad (4)$$

Мы будем далее называть отображения  $B_\xi \rightarrow B_{SO}$ , удовлетворяющие вышеприведенной коммутативной диаграмме, и гомотопии таких отображений, соответственно отображениями и гомотопиями «над  $\theta$ ».

*Замечание.* Подчеркнем, что в вышеприведенном определении диаграмма (4) должна быть *строга коммутативной* (а не «гомотопически коммутативной»).

*Замечание.* В случае, когда  $\theta : B_\xi \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$  – постоянное отображение (отображение в точку), мы, очевидно, получаем гомотопический класс послыйных изоморфизмов  $f : \xi \rightarrow \gamma_{Spin}$  – одно из стандартных определений классической *Spin*-структуры.

### 3. Некоторые вспомогательные результаты

Приведенные здесь формулировки частично хорошо известны или повторяют имеющиеся в работе [1] (в этих случаях мы ограничиваемся краткими пояснениями).

**Теорема 1.** Для любого пространства  $X$ , расслоения  $\xi$  и гомотопных друг другу отображений  $f, g : X \rightarrow B_\xi$  индуцированные расслоения  $f^* \xi$  и  $g^* \xi$  изоморфны между собой; более того, каждой гомотопии  $H : f \rightarrow g$  соответствует однозначно определенный гомотопический класс изоморфизмов из  $f^* \xi$  в  $g^* \xi$ , зависящий только от гомотопического класса этой гомотопии.

Это утверждение – легкое следствие теоремы о структуре векторных расслоений над цилиндрами [4, Теорема 3.4.3]. На «неформальном» уровне можно сказать, что изоморфизмы индуцированных расслоений, о которых идёт речь в этой теореме, получаются в результате «продолжения по непрерывности».

Если обозначить множество гомотопических классов изоморфизмов  $\xi \rightarrow \eta$  (с  $B_\xi = B_\eta$ ) через  $\text{Iso}_h(\xi, \eta)$ , а множество гомотопических классов гомотопий из  $f$  в  $g$  (пустое множество, если отображения  $f, g$  не гомотопны) – через  $[f, g]$ , то утверждение теоремы 1 можно переформулировать следующим образом:

Для любого расслоения  $\xi$ , пространства  $X$  и отображений  $f, g : X \rightarrow B_\xi$  определено отображение

$$[f, g] \rightarrow \text{Iso}_h(f^*\xi, g^*\xi). \quad (5)$$

Для конкретной гомотопии  $H : f \rightarrow g$  мы будем обозначать соответствующий изоморфизм  $f^*\xi \rightarrow g^*\xi$  (точнее соответствующий класс изоморфизмов) через  $\tilde{H}$ .

**Теорема 2.** *Всякое  $n$ -мерное векторное расслоение над пространством  $X$  изоморфно расслоению  $f^*\gamma_{SO(n)}$  для некоторого отображения  $f : X \rightarrow B_{SO(n)}$ .*

Это, конечно, хорошо известно. Доказательство см., например, в [4, глава 3, следствие 5.6].

**Теорема 3.** (а) *Для отображений  $f, g : X \rightarrow B_{SO}$  и изоморфизма  $s : f^*\gamma_{SO} \rightarrow g^*\gamma_{SO}$  найдется гомотопия из  $f$  в  $g$ , индуцирующая гомотопический класс  $[s] \in \text{Iso}_h(f^*\gamma_{SO}, g^*\gamma_{SO})$ .*

(б) *Если две гомотопии между отображениями  $f, g : X \rightarrow B_{SO}$  индуцируют одинаковые (или гомотопные) изоморфизмы  $f^*\gamma_{SO} \rightarrow g^*\gamma_{SO}$ , то эти две гомотопии гомотопны между собой.*

Доказательство см. [1, теоремы 4 и 6].

**Замечание.** Теорему 3 можно сформулировать так:

Для любых (гомотопных друг другу) отображений  $f, g : X \rightarrow B_{SO}$  отображение (5) биективно.

#### 4. $Spin(\theta)$ -структуры: классификация

##### 4.1. Существование $Spin(\theta)$ -структуры

Очевидно, что из коммутативной диаграммы (4) с необходимостью вытекает соотношение

$$\theta^*(\varkappa) = w_2(\xi), \quad (6)$$

что и является необходимым условием существования  $Spin(\theta)$ -структуры на расслоении  $\xi$ . Обратное, пусть выполнено соотношение (6). Выберем отображение  $g : B_\xi \rightarrow B_{SO}$ , накрываемое послойным изоморфизмом  $\xi \rightarrow \gamma_{SO}$  (см. п. 1.5). Тогда мы можем написать

$$\theta^*(\varkappa) = w_2(\xi) = f_B^*(w_2) = g^*\pi^*(\varkappa) = (\pi \circ g)^*(\varkappa).$$

Равенство  $\theta^*(\varkappa) = (\pi \circ g)^*(\varkappa)$  означает, что отображения  $\theta$  и  $\pi \circ g$  гомотопны друг другу. Применив к отображению  $g$  «принцип накрывающей гомотопии», получим отображение  $g' : B_\xi \rightarrow B_{SO}$  с  $\pi \circ g' = f$ , а

вследствие теоремы 1 отображение  $g'$  также накрывается послойным изоморфизмом  $\xi \rightarrow \gamma_{SO}$ .

##### 4.2. Условие совпадения двух $Spin(\theta)$ -структур

Пусть  $g_i : B_\xi \rightarrow B_{SO}$ ,  $s_i : \xi \rightarrow g_i^*\gamma_{SO}$ ,  $i=1, 2$  – представители двух  $Spin(\theta)$ -структур на заданном расслоении  $\xi$ . Напомним, что пара отображений

$$\begin{cases} g : B_\xi \rightarrow B_{SO} \\ s : \xi \rightarrow g^*\gamma_{SO} \end{cases},$$

– то же, что послойный изоморфизм  $\xi \rightarrow \gamma_{SO}$  (см. п.1.4). Мы будем  $Spin(\theta)$ -структуру, представленную парой  $(g, s)$  такого вида, т.е. соответствующий гомотопический класс диаграмм (4), обозначать через  $[g, s]$ . Заметим, что отображения  $g_1$  и  $g_2$  здесь заведомо гомотопны между собой в силу теоремы 3 и, более того, согласно этой же теореме такая гомотопия между  $g_1$  и  $g_2$  определена, в свою очередь с точностью до гомотопии, условием

$$\tilde{H} \circ s_1 \sim s_2 \quad (7)$$

(если угодно, это условие можно записать и в виде  $s_2 \circ s_1^{-1} \in \tilde{H}$ ).

**Теорема 4.**  *$Spin(\theta)$ -структуры  $[g_1, s_1]$  и  $[g_2, s_2]$  совпадают в том и только том случае, если существует гомотопия  $H : g_1 \rightarrow g_2$  (не обязательно «гомотопия над  $\theta$ »), удовлетворяющая следующим двум условиям:*

- (1)  $\tilde{H} \circ s_1 \sim s_2$ ;
- (2)  $H \sim H'$ , где  $H'$  – некоторая гомотопия «над  $\theta$ ».

**Доказательство.** 1. Необходимость условий 1 и 2 – это прямое следствие определений. Действительно, утверждение « $[g_1, s_1] = [g_2, s_2]$ », в силу определения  $Spin(\theta)$ -структуры (§ 2), означает, что существует гомотопия  $H : g_1 \rightarrow g_2$  «над  $\theta$ », накрываемая гомотопией  $s_1 \rightarrow s_2$ ; соотношение (1) – просто другой способ это записать. Что касается соотношения (2), то мы просто полагаем  $H' = H$ .

2. Доказательство достаточности столь же элементарно. Пусть условия 1 и 2 выполнены. Тогда мы имеем  $\tilde{H}' \circ s_1 \sim \tilde{H} \circ s_1$  ввиду условия (2), и дальнейшее очевидно.  $\square$

##### 4.3. Различающий класс для $Spin(\theta)$ -структур

Мы будем предполагать с этого момента, что пространство  $B_\xi$  линейно связно (общий случай будет получаться как очевидное «покомпонентное» объединение). Пусть  $A = [g_1, s_1]$  и  $B = [g_2, s_2]$  – пара  $Spin(\theta)$ -структур на расслоении  $\xi$ . Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B_\xi & \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} & B_{SO(k)} \\ & \begin{array}{c} \searrow \theta \\ \searrow \pi \end{array} & \\ & & K(\mathbb{Z}_2, 2) \end{array} \quad (8)$$

и изоморфизмы  $s_i : \xi \rightarrow g_i^*\gamma_{SO}$ .

Как мы видели в п.4.2, существует гомотопически однозначно определенная гомотопия  $H : g_1 \rightarrow g_2$ ,

заданная условием (7). Взяв композицию этой гомотопии с отображением  $\pi$ , мы получаем гомотопию

$$D = \pi \circ H : B \times [0, 1] \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$$

с  $D_0 = D_1 = \theta$ . Ясно, что  $H$  является «гомотопией над  $\theta$ » в том и только том случае, когда ее «проекция»  $D$  – постоянная гомотопия

$$D_\theta = \theta \circ \text{pr}_1 : B \times [0, 1] \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2).$$

Мы назовём препятствие  $\alpha(D, D_\theta) \in H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$  для деформации гомотопии  $D$  в постоянную гомотопию  $D_\theta$  (см. п.1.2) *различающим классом* для  $\text{Spin}(\theta)$ -структур  $A, B$  и обозначаем этот класс через  $\delta(A, B)$ .

Следующая теорема без труда доказывается с помощью результатов п. 4.2 и «принципа накрывающей гомотопии».

**Теорема 5.** 1) Для любых  $\text{Spin}(\theta)$ -структур  $A, B$  из  $\delta(A, B) = 0$  следует  $A = B$ ;

2) Для любой  $\text{Spin}(\theta)$ -структуры  $A$  и любого класса  $d \in H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$  найдется такая  $\text{Spin}(\theta)$ -структура  $B$ , что  $\delta(A, B) = d$ ;

3) Для любых  $\text{Spin}(\theta)$ -структур  $A, B, C$  имеет место равенство  $\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C)$ .

Введем следующее обозначение: для всякого расслоения  $\xi$  над пространством  $X$ , и всякого отображения  $\theta : X \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$ , множество всех  $\text{Spin}(\theta)$ -структур на  $\xi$  обозначается  $\text{SPIN}(\xi, \theta)$ . Из доказанной выше теоремы вытекает:

**Следствие 1.** Множество  $\text{SPIN}(\xi, \theta)$  является аффинным пространством над группой  $H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$ ; в частности, мощность этого множества равна  $2^b$ , где  $b$  – одномерное  $\mathbb{Z}_2$ -число Бетти пространства  $B_\xi$ .

#### 4.4. Множества $\text{SPIN}(\xi, \theta)$ как функторы

Предположим, что в дополнение к диаграмме (4), задающей  $\text{Spin}(\theta)$ -структуру  $A = [g, s]$ , мы имеем еще одно отображение  $\theta' : B_\xi \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$ , плюс некоторую гомотопию  $H : \theta \rightarrow \theta'$ :

$$\begin{array}{ccc} B_\xi & \xrightarrow{?} & B_{SO(k)} \\ & \searrow g & \xrightarrow{\quad} \\ & \theta & \theta' \\ & \searrow & \searrow \pi \\ & & K(\mathbb{Z}_2, 2) \end{array}$$

Согласно «принципу накрывающей гомотопии», уже много раз здесь применявшемуся, мы можем взять некоторую (конечно, неединственную) «накрывающую гомотопию»  $H' : g \rightarrow g'$ . При этом отображение  $g'$ , как нетрудно видеть, оказывается определенным с точностью до гомотопии «над  $\theta'$ » и, таким образом, мы получаем корректно определенную  $\text{Spin}(\theta')$ -структуру  $A' = [g', s']$ .

Полученное отображение

$$H_* : \text{SPIN}(\xi, \theta) \rightarrow \text{SPIN}(\xi, \theta') \quad (9)$$

зависит только от гомотопического класса гомотопии  $H : \theta \rightarrow \theta'$ . Таким образом, мы имеем (для всякого расслоения  $\xi$ ) гомотопически инвариантный функтор из категории отображений  $B_\xi \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$  (с гомотопиями в качестве морфизмов) в категорию конечных

множеств; при этом все морфизмы как в одной категории, так и в другой, оказываются изоморфизмами (все гомотопии, очевидно, обратимы, а значит, все индуцированные отображения (9) – биекции).

### 5. $\text{Spin}(\theta)$ -структуры на полиэдрах

#### 5.1. Сужения $\text{Spin}(\theta)$ -структур на двумерные остовы

Хорошо известно, что обычная  $\text{Spin}$ -структура на расслоении, базой которого является полиэдр (или  $CW$ -комплекс), может быть задана как гомотопический класс тривиализаций расслоения на одномерном остове, продолжаемых на двумерный остов. Отсюда следует, что  $\text{Spin}$ -структура однозначно определяется своим сужением на двумерный остов. Оказывается, что аналогичное утверждение верно и для рассматриваемых здесь  $\text{Spin}(\theta)$ -структур.

**Теорема 6.** Пусть имеется векторное расслоение  $\xi$  над полиэдром (или  $CW$ -комплексом)  $X$ , и некоторое отображение  $\theta : X \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$ . Всякая  $\text{Spin}(\theta)$ -структура на  $\xi$  определяется своим сужением на  $X^{(2)}$  – двумерный остов пространства  $X$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = [g_1, s_1]$ ,  $B = [g_2, s_2]$  – две  $\text{Spin}(\theta)$ -структуры на расслоении  $\xi$  (см. п. 4.2). Пусть  $A', B'$  – естественные сужения  $A$  и  $B$  на расслоение  $\xi' = \xi|_{X^{(2)}}$ . Предположим, что имеет место равенство  $A' = B'$ . Нетрудно убедиться, что в этом случае оказывается и  $A = B$ . В самом деле, в силу естественности определения различающего класса (п. 4.3), мы имеем равенство

$$\delta(A', B') = i^* \delta(A, B),$$

где  $i : X^{(2)} \rightarrow X$  – отображение включения. Но очевидно, что гомоморфизм  $i^* : H^1(X) \rightarrow H^1(X^{(2)})$  является для любых  $X$  изоморфизмом, поэтому из  $\delta(A', B') = 0$  следует, что и  $\delta(A, B) = 0$ .  $\square$

**Следствие 2.** Отображение сужения

$$\text{SPIN}(\xi, \theta) \rightarrow \text{SPIN}(\xi', \theta')$$

является биекцией.

**Доказательство.** Данные множества равномощны (следствие 1), поэтому всякая инъекция – автоматически биекция.  $\square$

### 6. $\text{Spin}(\theta)$ -структуры и группы бордизмов

#### 6.1. Группы $\text{Spin}(\theta)$ -бордизмов

Для отображения  $\theta : X \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$  мы введем категорию объектов вида  $(M, f, A)$ , где  $M$  – некоторое многообразие,  $f : M \rightarrow X$  – отображение и  $A$  –  $\text{Spin}(\theta \circ f)$ -структура на «стабильном» нормальном расслоении  $\nu M$  многообразия  $M$ . В данном случае слово «стабильный» в применении к нормальному расслоению означает, что размерность расслоения достаточно велика, а именно не менее чем размерность многообразия  $M$  (а также не менее трёх).

Как хорошо известно, такое нормальное расслоение можно считать корректно определенным (во всяком случае с точностью до некоторого «гомотопически тривиального» класса послойных изоморфизмов) и во всяком случае мы имеем определенный с точностью до гомотопии послойный изоморфизм  $\nu M \rightarrow \gamma_{SO}$ .

Для любого объекта  $(M, f, A)$  можно определить его «край»  $\partial(M, f, A)$  – объект вида  $(\partial M, f', A')$ , где  $f'$  и  $A'$  обозначают соответствующие сужения. Возникающие в результате этого группы бордизмов мы обозначаем  $\Omega_n^{spin}(X; \theta)$ ; класс бордизмов объекта  $(M, f, A)$  обозначается  $[M, f, A]$ .

Пусть  $\theta'$  – другое отображение  $X \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$  в том же гомотопическом классе, что и  $\theta$ . Как следствие сказанного в п. 4.4, мы имеем изоморфизм

$$\Omega_n^{spin}(X; \theta) \rightarrow \Omega_n^{spin}(X; \theta'),$$

зависящий от выбора гомотопии  $H: \theta \rightarrow \theta'$ . Можно сказать, таким образом, что группы  $\Omega_n^{spin}(X; \theta)$  с точностью до автоморфизма не зависят от выбора отображения  $\theta$  в его гомотопическом классе; иначе говоря, они зависят только от класса  $w = \theta^*(\varkappa) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ . По этой причине в работе [2] было принято обозначение  $\Omega_n^{spin}(X; w)$ .

### 6.2. О работе М.Крека и С.Штольца [3]

Авторы данной работы вводят, в качестве технического средства, другой способ определения «скрученных *Spin*-бордизмов», формально отличный от изложенного выше. Именно, пусть имеется пространство  $X$  и расслоение  $\alpha$  над  $X$ . В этой ситуации рассматриваются группы бордизмов, образованные тройками  $(M, f, A)$ , где  $f: M \rightarrow X$  – произвольное отображение и  $A$  – спинорная структура на расслоении  $\nu M \oplus f^*\alpha$ ; эти группы обозначаются через  $\Omega_n^{spin}(X; \alpha)$ .

Напомним теперь, что *Spin*-структура определяется своим сужением на 2-мерный остов базы расслоения (в данном случае расслоения  $\nu M \oplus f^*\alpha$

над  $M$ ). Но, как нетрудно видеть, расслоение над 2-мерным пространством определяется, с точностью до изоморфизма, отображением в пространство  $K(\mathbb{Z}_2, 2)$  (являющееся «гомотопической аппроксимацией» для пространства  $B_{SO}$  до размерности 3). Это позволяет отождествить группы  $\Omega_n^{spin}(X; \alpha)$  с нашими группами  $\Omega_n^{spin}(X; w)$  с  $w = w_2(\alpha) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ .

### Литература

1. *Жубр А.В.* Полуспинорные структуры // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. № 3(39). С. 8–12.
2. *Zhubr A.V.* Closed simply connected 6-manifolds: the proofs of classification theorems // St.Petersburg Math. J. 2001. Vol. 12. No. 4. P. 605–680.
3. *Kreck M., Stolz S.* Some nondiffeomorphic homeomorphic homogeneous 7-manifolds with positive sectional curvature // J. Differential Geometry. 1991. Vol. 33. P. 465–486.
4. *Husemoller D.* Fibre bundles // Springer-Verlag, 1993 (3<sup>rd</sup> edition). 356 p.

### References

1. *Zhubr A.V.* Poluspinnornyye struktury [Semispinal structures] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2019. No. 3(39). P. 8–12.
2. *Zhubr A.V.* Closed simply connected 6-manifolds: the proofs of classification theorems // St.Petersburg Math. J. 2001. Vol. 12. No. 4. P. 605–680.
3. *Kreck M., Stolz S.* Some nondiffeomorphic homeomorphic homogeneous 7-manifolds with positive sectional curvature // J. Differential Geometry. 1991. Vol. 33. P. 465–486.
4. *Husemoller D.* Fibre bundles // Springer-Verlag, 1993 (3<sup>rd</sup> edition). 356 p.

Статья поступила в редакцию 05.10.2020.

УДК 519.2  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-40-44

**А.Н. ТИХОМИРОВ**

## О СПЕКТРАЛЬНОЙ НОРМЕ ПРОРЕЖЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар*

*Высшая школа экономики,  
Национальный исследовательский  
университет, г. Москва*

*tikhomirov@ipm.komisc.ru*

**A.N. TIKHOMIROV**

## ON THE SPECTRAL NORM OF SPARSE RECTANGULAR RANDOM MATRICES

*Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS,  
Syktyvkar*

*Higher School of Economics,  
National Research University, Moscow*

### Аннотация

Мы доказываем верхнюю оценку для спектральной нормы  $m \times n$  ( $n \leq m$ ) прямоугольной случайной матрицы в предположении, что распределение ее элементов имеет конечный момент порядка  $4 + \delta$  и элементы матрицы усечены на уровне  $(np)^{1/2 - \varkappa}$ , где  $\varkappa > 0$  и зависит от  $\delta$ . Символ  $p$  означает вероятность прореживания.

### Ключевые слова:

*выборочная ковариационная матрица, прореженная матрица, наибольшее сингулярное число, случайная матрица*

### Abstract

We prove an upper bound for the spectral norm of  $n \times m$  ( $n \leq m$ ) of a rectangular random matrix under the assumption that the distribution of matrix elements has a finite moment of order  $4 + \delta$  ( $\delta > 0$ ) and the elements are truncated at the level  $(np)^{1/2 - \varkappa}$ , where  $\varkappa > 0$  and depends on  $\delta$ . Here  $p$  denotes the probability of sparsity.

### Keywords:

*sample covariance matrix, sparse matrix, largest singular value, random matrix*

### Introduction and the main result

Let  $m = m(n)$ ,  $m \geq n$ . Consider independent zero mean random variables  $X_{jk}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $1 \leq k \leq m$  with  $\mathbb{E}X_{jk}^2 = 1$  and independent of that Bernoulli random variables  $\xi_{jk}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $1 \leq k \leq m$  with  $\mathbb{E}\xi_{jk} = p_n$ . In addition suppose that  $np_n \rightarrow \infty$  as  $n \rightarrow \infty$ . Then we put  $p = p_n$ . Consider the sequence of random matrices

$$\mathbf{X} = (\xi_{jk}X_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m}. \quad (1)$$

We denote the non-zero singular values of the matrix  $\mathbf{X}$  by  $s_1 \geq \dots \geq s_n$  and define the sample covariance matrix  $\mathbf{W} = \mathbf{X}\mathbf{X}^*$ .

Let  $y = y(n) = \frac{n}{m}$ . We are interested in estimating the maximal singular value  $s_1$  (or spectral norm) of matrix  $\mathbf{X}$ . The problem of estimating the norm of a random matrix arises in many applications. This topic has been studied by many authors. The case of Wigner matrices or sample covariance matrices has been sufficiently studied. See, for example, the work of Rudelson and Vershynin [1] and the literature to it. Sparse matrices with  $p_n \rightarrow 0$  when  $n \rightarrow \infty$  take a special place. Our motivation for studying the largest singular value of a sparse random matrix is related to the proof of local laws for sparse covariance matrices with "heavy tailed" entries.

The main result of our paper is the following

**Theorem 1.** *Let  $\mathbb{E}X_{jk} = 0$  and  $\mathbb{E}|X_{jk}|^2 = 1$ . Let's assume that*

$$\mathbb{E}|X_{jk}|^{4+\delta} \leq C_0 < \infty,$$

*for any  $j, k \geq 1$  and for some  $\delta > 0$ . Suppose that there exists a positive constant  $B$ , such that*

$$np_n \geq B \log^{\frac{2}{\kappa}} n,$$

*where  $\varkappa = \frac{\delta}{2(4+\delta)}$ . Additionally assume that*

$$|X_{jk}| \leq C_1(np_n)^{\frac{1}{2} - \varkappa}. \quad (2)$$

Then for every  $Q \geq 1$  there exists a constant  $C = C(Q, \delta, C_0, C_1)$ , such that

$$\Pr\{s_1 \geq C\sqrt{np}\sqrt{\log n}\} \leq Cn^{-Q}, \quad (3)$$

The estimations of the largest singular value for sparse covariance matrices like (3) but without factor  $\sqrt{\log n}$ , with stricter restrictions of moments, is possible to find in [2].

### Some applications and proof of the main result

To estimate the spectral norm of the matrix  $\mathbf{X}$ , we introduce the matrix  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^* & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

where  $\mathbf{O}$  denotes a matrix of the corresponding dimension with zero entries. Note that

$$\mathbf{V}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{X}^* & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X}^*\mathbf{X} \end{bmatrix}$$

and

$$\text{Tr}\mathbf{V}^s = 2\text{Tr}\mathbf{V}^{2s}.$$

Let's consider the estimates of the high order moments of the matrix  $\mathbf{V}$ . First we note that for  $q = 2r + 1$

$$\mathbb{E}\text{Tr}\mathbf{V}^q = 0.$$

We investigate  $q = 2r$ . Let  $\alpha_{2k} = \frac{1}{n}\text{Tr}\mathbf{V}^{2k}$ .

**Theorem 2.** The following inequality holds for  $r \leq C(np)^\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\alpha_{2r} &\leq np \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \mathbb{E}\alpha_{2s}\alpha_{2r-2s-2} + \\ &+ Cnp \frac{r}{(np)^\varepsilon} \mathbb{E} \frac{r-1}{r} \alpha_{2r} + C\mathbb{E} \frac{2r-1}{2r} \alpha_{2r}. \end{aligned}$$

**Corollary 1.** Under conditions of Theorem 2, for  $r \leq C_0(np)^\varepsilon$  there exist the constant  $C_1 > 0$  depending on  $C_0$  such that the following inequality holds

$$\mathbb{E}\alpha_{2r} \leq C_1 r^r (np)^r$$

*Proof of Corollary 1.* Let

$$y_r = (np)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E} \frac{1}{2r} \alpha_{2r}.$$

Using Young inequality, we can rewrite the result of Theorem 2 as follows

$$\begin{aligned} y_r^{2r} &\leq \frac{1}{r} \left[ 4r \left( 1 + \frac{1}{(np)^\varepsilon} \right) \right]^r + \\ &+ \frac{1}{4} y_r^{2r} + \frac{1}{r} (4C)^{2r} + \frac{1}{4} y_r^{2r}. \end{aligned}$$

Here from we get the required.  $\square$

**Corollary 2.** There exists an absolute constant  $C$ , s.t. for every  $t > C$ ,

$$\Pr\{s_1 \geq t\sqrt{np}\sqrt{\log n}\} \leq \exp\{-c \log t \log n\}.$$

*Proof of Corollary 2.* Note that  $(np)^\varepsilon > C \log n$ . We put  $r = c \log n$ . It is easy to see that

$$s_1 \leq n^{\frac{1}{2r}} \alpha_{2r}^{\frac{1}{2r}}.$$

Applying Chebyshev's inequality, we get

$$\begin{aligned} \Pr\{s_1 \geq t\sqrt{np}\sqrt{\log n}\} &\leq \frac{\mathbb{E}s_1^{2r}}{t^{2r}(np)^r \log^r n} \leq \\ &\leq \frac{n\mathbb{E}\alpha_{2r}}{t^{2r}(np)^r \log n^r}. \end{aligned}$$

Using Theorem 2, we get

$$\Pr\{s_1 \geq t\sqrt{np}\sqrt{\log n}\} \leq \frac{nC^r}{t^{2r}} \leq \left(\frac{C}{t}\right)^{2r}.$$

$\square$

**Lemma 1.**

$$\mathbb{E}\text{Tr}\mathbf{V}^{2r} = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (A_s + B_s) + Z_r$$

where

$$\begin{aligned} A_s &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m X_{jk} \xi_{jk} X_{jl} \xi_{jl} \times \right. \\ &\quad \left. \times [(\mathbf{V}^{(j)})^{2s}]_{k+n, l+n} \right] [\mathbf{V}^{2r-2s-2}]_{jj}, \\ B_s &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^m X_{jk} \xi_{jk} [(\mathbf{V}^{(j)})^{2s+1}]_{k+n, j} \right] \times \\ &\quad \times [\mathbf{V}^{2r-2s-2}]_{j, j}, \\ Z_r &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [(\mathbf{V}^{(j)})^{r-1} \mathbf{V}^r]_{k+n, j}. \end{aligned}$$

*Proof of Lemma 1.* We have the following equality

$$\mathbb{E}\text{Tr}\mathbf{V}^{2r} = 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [\mathbf{V}^{2r-1}]_{k+n, j}$$

Let's denote the  $j$ th column of the matrix  $\mathbf{V}$  for  $j = 1, \dots, n$  by  $\mathbf{V}_j$ . Let

$$\Delta_j = \mathbf{V}_j \mathbf{e}_j^T + \mathbf{e}_j \mathbf{V}_j^T - \frac{1}{\sqrt{mp}} X_{jj} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T$$

and

$$\mathbf{V}^{(j)} = \mathbf{V} - \Delta_j. \quad (5)$$

Using these notations, we obtain

$$\mathbb{E}\text{Tr}\mathbf{V}^{2r} = C_1 + C_2,$$

where

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [(\mathbf{V}^{(j)}) \mathbf{V}^{2r-2}]_{k+n, j}, \\ C_2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [\Delta_j \mathbf{V}^{2r-2}]_{k+n, j}. \end{aligned}$$

It is straightforward to see that

$$C_2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk}^2 \xi_{jk} [\mathbf{V}^{2r-2}]_{j,j} = A_0.$$

We continue with  $C_1$ . Using representation (5), we get

$$C_1 = C_{11} + C_{12},$$

where

$$C_{11} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [(\mathbf{V}^{(j)})^2 \mathbf{V}^{2r-3}]_{k+n,j},$$

$$C_{12} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [\mathbf{V}^{(j)} \Delta_j \mathbf{V}^{2r-3}]_{k+n,j}$$

Next, it is easy to check that

$$C_{12} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [\mathbf{V}^{(j)}]_{k+n,j} [\mathbf{V}^{2r-2}]_{j,j} = B_0.$$

Note that

$$C_{12} = 0.$$

We continue with  $C_{11}$ . Applying again representation (5), we get

$$C_{11} = C_{111} + C_{112},$$

where

$$C_{111} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [(\mathbf{V}^{(j)})^3 \mathbf{V}^{2r-4}]_{k+n,j},$$

$$C_{112} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [(\mathbf{V}^{(j)})^2 \Delta_j \mathbf{V}^{2r-4}]_{k+n,j}.$$

Using the definition of  $\Delta_j$ , we get

$$C_{112} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \mathbb{E} X_{jk} X_{jl} \xi_{jk} \xi_{jl} [(\mathbf{V}^{(j)})^2]_{k+n,l+n} \times \\ \times [\mathbf{V}^{2r-4}]_{j,j} = A_2.$$

Repeating with  $C_{111}$ , we get

$$C_{111} = B_1 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E} X_{jk} \xi_{jk} [(\mathbf{V}^{(j)})^4 \mathbf{V}^{2r-5}]_{k+n,j}.$$

Continuing this procedure, we get the required.  $\square$

*Proof of Theorem 2.* We start with the estimation of  $A_s$ , for  $s = 1, \dots, \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$ . We represent

$$A_s = \tilde{A}_s + \hat{A}_s,$$

where

$$\tilde{A}_s = \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^m X_{jk}^2 \xi_{jk} [(\mathbf{V}^{(j)})^{2s}]_{k+n,k+n} \right] \times \\ \times [\mathbf{V}^{2r-2s-2}]_{jj},$$

$$\hat{A}_s = \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1, l \neq k}^m X_{jk} \xi_{jk} X_{jl} \xi_{jl} \times \right. \\ \left. \times [(\mathbf{V}^{(j)})^{2s}]_{k+n,l+n} \right] [\mathbf{V}^{2r-2s-2}]_{jj}.$$

Further, we continue with  $\tilde{A}_s$  as follows

$$\tilde{A}_s = \tilde{A}_s^{(1)} + \tilde{A}_s^{(2)},$$

where

$$\tilde{A}_s^{(1)} = p \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^m [(\mathbf{V}^{(j)})^{2s}]_{k+n,k+n} \right] \times \\ \times [\mathbf{V}^{2r-2s-2}]_{jj},$$

$$\tilde{A}_s^{(2)} = \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^m (X_{jk}^2 \xi_{jk} - p) \times \right. \\ \left. \times [(\mathbf{V}^{(j)})^{2s}]_{k+n,k+n} \right] [\mathbf{V}^{2r-2s-2}]_{jj}.$$

Using  $\mathbf{V}_{kk} \geq 0$  and  $\mathbf{V}_{kk}^{(j)} \geq 0$  for  $k = 1, \dots, n+m$  and interlacing theorem, we get

$$\tilde{A}_s^{(1)} \leq p \mathbb{E} \text{Tr} \mathbf{V}^{2s} \text{Tr} \mathbf{V}^{2r-2s-2}.$$

We can rewrite it as

$$\frac{1}{n} \tilde{A}_s^{(1)} \leq np \mathbb{E} \alpha_{2s} \alpha_{2r-2s-2}.$$

Applying Hölder inequality, we get

$$|\tilde{A}_s^{(2)}| \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{E}^{\frac{s-1}{r-1}} \left| \sum_{k=1}^m (X_{jk}^2 \xi_{jk} - \mathbb{E} X_{jk}^2 \xi_{jk}) \times \right. \\ \left. \times [(\mathbf{V}^{(j)})^{2s}]_{k+n,k+n} \right|^{\frac{r-1}{s-1}} \times \\ \mathbb{E}^{\frac{r-s-1}{r-1}} \left| [\mathbf{V}^{2r-2s-2}]_{jj} \right|^{\frac{r-s-1}{r-1}}.$$

Note that for  $s = 0, \dots, \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$  we have  $q = \frac{r-1}{s} \geq 2$ .

Taking the conditional expectation with respect to  $\mathbf{V}^{(j)}$  and applying Rosenthal's inequality, we get the inequality

$$|\tilde{A}_s^{(2)}| \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{E}^{\frac{1}{q}} \left( \left( qp \sum_{k=1}^m \left( [(\mathbf{V}^{(j)})^{\frac{2(r-1)}{q}}]_{k+n,k+n} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}} + \right. \\ \left. + q^q p (np)^{q-2} \sum_{k=1}^m \left( \left( [(\mathbf{V}^{(j)})^{\frac{2(r-1)}{q}}]_{k+n,k+n} \right)^q \right) \times \right. \\ \left. \times \mathbb{E}^{\frac{q-1}{q}} \left| [\mathbf{V}^{2(r-1)\frac{q}{q-1}}]_{jj} \right|^{\frac{q}{q-1}} \right).$$

This implies that

$$|\tilde{A}_s^{(2)}| \leq \Gamma_s^{(1)} + \Gamma_s^{(2)},$$

where

$$\begin{aligned} \Gamma_s^{(1)} &= C\sqrt{2npq} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}^{\frac{1}{q}} \left( \frac{1}{2n} \text{Tr} \left( \mathbf{V}^{(j)} \right)^{2(r-1)} \right) \times \\ &\quad \times \mathbb{E}^{\frac{q-1}{q}} \left| \left[ \mathbf{V}^{2(r-1)} \right]_{jj} \right|^{\frac{q}{q-1}}, \\ \Gamma_s^{(2)} &= q(np)^{1-2\kappa-1/q} n^{-\frac{1}{q}} \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^n \mathbb{E}^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{k=1}^m \left( \left[ \left( \mathbf{V}^{(j)} \right)^{\frac{2(r-1)}{q}} \right]_{k+n, k+n} \right)^q \right) \times \\ &\quad \times \mathbb{E}^{\frac{q-1}{q}} \left| \left[ \mathbf{V}^{2(r-1)} \right]_{jj} \right|^{\frac{q}{q-1}}. \end{aligned}$$

Applying Hölder's inequality and interlacing theorem, we get

$$\begin{aligned} \Gamma_s^{(1)} &\leq 2\sqrt{npq} \left( \mathbb{E} \text{Tr}(\mathbf{V})^{2(r-1)} \right) \leq \\ &\leq 2\sqrt{npqn}^{\frac{1}{r}} \left( \mathbb{E} \text{Tr} \mathbf{V}^{2r} \right)^{\frac{r-1}{r}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_s^{(2)} &\leq Cq(np)^{1-2\kappa-\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{r}} \left( \mathbb{E} \text{Tr}(\mathbf{V})^{2(r-1)} \right) \leq \\ &\leq Cq(np)^{1-2\kappa-\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{r}} \left( \mathbb{E} \text{Tr} \mathbf{V}^{2r} \right)^{\frac{r-1}{r}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Further, we consider  $\hat{A}_s$ . Applying twice Hölder's inequality, we get

$$\begin{aligned} \hat{A}_s &\leq \left( \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left| \left[ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1, l \neq k}^m X_{jk} \xi_{jk} X_{jl} \xi_{jl} \times \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left[ \left( \mathbf{V}^{(j)} \right)^{2s} \right]_{k+n, l+n} \right] \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ &\quad \times \left( \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left( \left[ \mathbf{V}^{2r-2s-2} \right]_{jj} \right)^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned}$$

Applying inequality for quadratic forms (see [3]), we get

$$\begin{aligned} \hat{A}_s &\leq n^{\frac{1}{q}} \left( \hat{\Gamma}_s^{(1)} + \hat{\Gamma}_s^{(2)} + \hat{\Gamma}_s^{(3)} \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ &\quad \times \left( \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left( \left[ \mathbf{V}^{2r-2s-2} \right]_{jj} \right)^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}}, \end{aligned}$$

where

$$\hat{\Gamma}_s^{(1)} = q^q p^q \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left( \left[ \mathbf{V}^{2s} \right]_{k+n, l+n} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}},$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_s^{(2)} &= q^{\frac{3q}{2}} p^{\frac{q}{2}} (np)^{\frac{q}{2}-q\kappa-2} p \times \\ &\quad \times \mathbb{E} \sum_{k=1}^m \left( \sum_{l=1}^m \left( \left[ \mathbf{V}^{2s} \right]_{k+n, l+n} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}}, \end{aligned}$$

$$\hat{\Gamma}_s^{(3)} = q^{2q} (np)^{q-2\kappa q-4} p^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \mathbb{E} \left| \left[ \mathbf{V}^{2s} \right]_{k+n, l+n} \right|^q.$$

Note that

$$\begin{aligned} \left( \hat{\Gamma}_s^{(1)} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq qp \mathbb{E} \left( \text{Tr} \mathbf{V}^{4s} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq qp n^{\frac{(r-2s)}{2r}} \mathbb{E} \left( \text{Tr} \mathbf{V}^{2r} \right)^{\frac{s}{r}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Further,

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^m \left( \sum_{l=1}^m \left( \left[ \mathbf{V}^{2s} \right]_{k+n, l+n} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}} \leq \mathbb{E} \text{Tr} \mathbf{V}^{2(r-1)}. \quad (9)$$

This implies that

$$\left( \hat{\Gamma}_s^{(2)} \right)^{\frac{1}{q}} \leq q^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} (np)^{\frac{1}{2}-\kappa-\frac{1}{q}} \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \left( \mathbb{E} \text{Tr} \mathbf{V}^{2r} \right)^{\frac{s}{r}}. \quad (10)$$

Finally,

$$\left( \hat{\Gamma}_s^{(3)} \right)^{\frac{1}{q}} \leq q^2 (np)^{1-2\kappa-\frac{2}{q}} \frac{1}{n^{\frac{2}{q}}} \left( \mathbb{E} \text{Tr} \mathbf{V}^{2r} \right)^{\frac{s}{r}}.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left( \left[ \mathbf{V}^{2r-2s-2} \right]_{jj} \right)^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} &\leq \\ &\leq n^{\frac{(q-1)}{qr}} \left( \text{Tr} \mathbf{V}^{2r} \right)^{\frac{r-s-1}{r}}. \end{aligned}$$

Combining the estimates (8)–(10), we get

$$\hat{A}_s \leq Cnp(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) \left( \mathbb{E} \text{Tr}(\mathbf{V})^{2r} \right)^{\frac{r-1}{r}},$$

where

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= qn^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{r}}, \\ \Sigma_2 &= q^{\frac{3}{2}} (np)^{-\frac{1}{2}-\left(\kappa+\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{r}(1-\frac{s}{r-1})}, \\ \Sigma_3 &= \frac{q^2}{(np)^{2\kappa+\frac{2}{q}}} n^{\frac{1}{r}-\frac{2s}{r(r-1)}}. \end{aligned}$$

Summing by  $s = 1, \dots, \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$ , we get

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \hat{A}_s &\leq Cnpn^{\frac{1}{r}} \left( \frac{r \log r}{\sqrt{n}} + \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(np)^{\frac{1}{2}+\kappa} \sqrt{n}} + \frac{r^2}{(np)^{2\kappa}} \right) \times \\ &\quad \times \left( \mathbb{E} \text{Tr} \mathbf{V}^{2r} \right)^{\frac{r-1}{r}}. \end{aligned}$$

Now we estimate  $B_s$ . First we note that  $B_0 = 0$ . We can assume that  $s \geq 1$ . We represent  $B_s$  in the form

$$\begin{aligned} B_s &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1, l \neq j}^m X_{jl} X_{jk} \xi_{jl} \xi_{jk} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \left( \mathbf{V}^{(j)} \right)^{2s} \right]_{l+n, k+n} \right] \left( \left[ \mathbf{V}^{2r-2s-2} \right]_{jj} \right). \end{aligned}$$

The estimation of  $B_s$  is similar to the estimation of  $\hat{A}_s$ . We get

$$\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} |B_s| \leq Cnpn^{\frac{1}{r}} \left( \frac{r \log r}{\sqrt{n}} + \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(np)^{\frac{1}{2}+\kappa} \sqrt{n}} + \right)$$

$$+ \frac{r^2}{(np)^{2\kappa}} \left( \mathbb{E} Tr(\mathbf{V})^{2r} \right)^{\frac{r-1}{r}}.$$

In conclusion, we estimate  $Z_r$ . Without loss of generality, we can assume that  $r$  is even. First we write

$$|Z_r| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^m X_{jk} \xi_{jk} \left[ \left( \mathbf{V}^{(j)} \right)^{r-1} \right]_{k+n,l} \right| \times \\ \times \left| [\mathbf{V}^r]_{l,j} \right|.$$

Applying Cauchy inequality, we obtain

$$|Z_r| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \mathbb{E}^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=1}^m X_{jk} \xi_{jk} \left[ \left( \mathbf{V}^{(j)} \right)^{r-1} \right]_{k+n,l} \right|^2 \times \\ \times \mathbb{E}^{\frac{1}{2}} \left| [\mathbf{V}^r]_{l,j} \right|^2$$

Taking the conditional expectation and applying Cauchy inequality again, we get

$$|Z_r| \leq \sum_{j=1}^n \left( p \mathbb{E} \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \left| \left[ \left( \mathbf{V}^{(j)} \right)^{r-1} \right]_{k+n,l} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left( \mathbb{E} \sum_{l=1}^m \left| [\mathbf{V}^r]_{l,j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

From here it follows that

$$|Z_r| \leq C \sqrt{p} \sum_{j=1}^n \left( \mathbb{E} Tr \left[ \mathbf{V}^{(j)} \right]^{2r-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left( \mathbb{E} \sum_{l=1}^m \left| [\mathbf{V}^r]_{l,j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Taking into account interlacing theorem and applying Cauchy inequality, we get

$$|Z_r| \leq C \sqrt{np} \mathbb{E}^{\frac{1}{2}} Tr[\mathbf{V}]^{2r-2} \left( \mathbb{E} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \left| [\mathbf{V}^r]_{l,j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C n^{\frac{1}{2r}} \sqrt{np} \mathbb{E}^{\frac{2r-1}{2r}} Tr \mathbf{V}^{2r}. \quad (11)$$

Combining inequalities (6), (7), (11), and estimates of corresponding sums, we get the required.  $\square$

*Proof of Theorem 1.* The proof of Theorem 1 follows now from Corollary 2 by choosing  $t$  sufficiently large.  $\square$

### Литература

1. Rudelson M., Vershynin R. The Littlwood-Offord problem and invertibility of random matrices // Advances in Mathematics. 2008. Vol. 218. P. 600–633.
2. Hwang J. Y., Lee J. O., Schnell K. Local law and Tracy-Widom limit for sparse covariance matrices // arXiv:1806.03186v2.
3. Тихомиров А. Н. Простые доказательства неравенства Розенталя для линейных форм от независимых случайных величин и его обобщения на квадратичные формы // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2018. № 2(34). С. 8–13.

### References

1. Rudelson M., Vershynin R. The Littlwood-Offord problem and invertibility of random matrices // Advances in Mathematics. 2008. Vol. 218. P. 600–633.
2. Hwang J. Y., Lee J. O., Schnell K. Local law and Tracy-Widom limit for sparse covariance matrices // arXiv:1806.03186v2.
3. Tikhomirov A. N. Prostye dokazatel'stva neravenstva Rozentalya dlya linejnyh form ot nezavisimyh sluchajnyh velichin i ego obobshcheniya na kvadratichnye formy [Simple proofs of Rosenthal inequalities for linear forms of independent random variables and its generalization to quadratic forms] // Proc. of the Komi Science Centre, Ural Branch, RAS. 2018. No. 2(34). P. 8–13.

Статья поступила в редакцию 14.09.2020.

УДК 539.3  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-45-49

**В.Н. ТАРАСОВ, Н.О. СМОЛЕВА**

## **КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОГО КОЛЬЦА И ЖЕСТКОГО ОСНОВАНИЯ**

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар*

*[vntarasov@dm.komisc.ru](mailto:vntarasov@dm.komisc.ru)  
[nataljafilipp5@gmail.com](mailto:nataljafilipp5@gmail.com)*

**V.N. TARASOV, N.O. SMOLEVA**

## **CONTACT PROBLEM OF ELASTIC RING AND RIGID BASE**

*Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS,  
Syktывkar*

### **Аннотация**

Работа посвящена исследованию контактной задачи находящегося под действием весовой нагрузки кругового кольца и жесткого основания. Проблема сводится к решению задачи выпуклого квадратичного программирования. Решение двойственной задачи позволяет определить силы реакции контактного взаимодействия.

### **Ключевые слова:**

*упругая энергия, квадратичное программирование, двойственная задача, контактные взаимодействия*

### **Abstract**

The work deals with the study of the contact problem of a circular ring under the influence of a weight load and a rigid base. The problem is reduced to solving the convex quadratic programming problem. Solving the dual problem allows one to determine the reaction forces of the contact interaction.

### **Keywords:**

*elastic energy, quadratic programming, dual problem, contact interactions*

### **Введение**

Решению контактных задач для гибких элементов конструкции в настоящее время уделяется большое внимание. Это вызвано, с одной стороны, необходимостью расчета все более сложных конструкций, а с другой, – с развитием современных методов решения задач, возникающих в теории стержней, пластин и оболочек с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции, развитием численных методов, теории оптимизации и вариационного исчисления. В настоящей работе рассматривается контактная задача кругового кольца, испытывающего весовую нагрузку и находящегося над жестким основанием. Определяются граница области активного взаимодействия (область контакта) и силы реакции связи, что может оказаться полезным для расчета износостойкости колец.

Некоторые контактные задачи, в том числе и задачи устойчивости упругих систем при наличии односторонних ограничений на перемещения, и методы их решений рассмотрены в работе [1-3].

### **1. Постановка задачи**

Представим, что тонкий упругий стержень находится под действием сил и нагрузки, распределенной по его оси. Введем в точке  $M$  на оси стержня систему координат  $(x, y, z)$ , ось  $z$  направлена по касательной к оси стержня, оси  $x$  и  $y$  – по главным осям инерции поперечного сечения,  $ds$  – элемент длины стержня,  $s$  – длина, отсчитываемая от некоторой точки  $M_0$ . Пусть точка  $M$  движется со скоростью, равной 1 ( $\frac{ds}{dt} = 1$ ), тогда система координат  $(x, y, z)$  будет вращаться с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ , проекции которой на оси  $(x, y, z)$  обозначим через  $(p, q, r)$ .

В точке  $M$  приложены силы  $(V_x, V_y, V_z)$  и моменты  $(M_x, M_y, M_z)$ , а также вектор внешней нагрузки  $(F_x, F_y, F_z)$ . Тогда уравнения равновесия Кирхго-

фа [4] имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{ds} - rV_y + qV_z + F_x = 0, \\ \frac{dV_y}{ds} - pV_z + rV_x + F_y = 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x + pV_y + F_z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{ds} - rL_y + qL_z - V_y = 0, \\ \frac{dL_y}{ds} - pL_z + rL_x + V_x = 0, \\ \frac{dL_z}{ds} - qL_x + pL_y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В недеформированном (первоначальном) состоянии оси  $x, y, z$  обозначим через  $x_0, y_0, z_0$ . Соответствующую угловую скорость – через  $\Omega_0$  с проекциями  $(p_0, q_0, r_0)$  на оси  $(x_0, y_0, z_0)$  соответственно.

В результате деформации стержня точка  $M$  получает перемещение, проекции которого на оси  $(x_0, y_0, z_0)$  обозначим через  $(u, v, w)$ . Векторы  $(p, q, r)$  и  $(p_0, q_0, r_0)$  характеризуют изменения кривизны стержня в результате деформации.

Считая деформации малыми, можно записать уравнение Клебша [4]:

$$p = p_0 + \delta p, \quad q = q_0 + \delta q, \quad r = r_0 + \delta r,$$

$$\begin{cases} \delta p = \frac{d\alpha}{ds} - r_0\beta + q_0\gamma, \\ \delta q = \frac{d\beta}{ds} - p_0\gamma + r_0\alpha, \\ \delta r = \frac{d\gamma}{ds} - q_0\alpha + p_0\beta, \end{cases} \quad (3)$$

где  $(\alpha, \beta, \gamma)$  – косинусы углов между осями  $(x, y, z)$  и  $(x_0, y_0, z_0)$ .

	$x$	$y$	$z$
$x_0$	1	$-\alpha$	$\beta$
$y_0$	$\alpha$	1	$-\alpha$
$z_0$	$-\beta$	$\alpha$	1

$$(4)$$

Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  связаны с перемещением уравнениями:

$$\begin{cases} \beta = \frac{du}{ds} + q_0w - r_0v, \\ -\alpha = \frac{dv}{ds} + r_0u - p_0w, \\ 0 = \frac{dw}{ds} + p_0v - q_0u. \end{cases} \quad (5)$$

Считаем, что ось стержня в недеформированном состоянии представляет собой окружность радиуса  $R$ . Тогда  $p_0 = 0, q_0 = \frac{1}{R}, r_0 = 0$ , и предположим, что кольцо нагружено весовой нагрузкой:

$$F_y = 0, \quad ds = R d\vartheta,$$

$\vartheta$  – центральный угол, отсчитываемый от оси  $\xi$ ,  $(\xi, \zeta)$  – некоторая неподвижная система координат (рис. 1), так что координаты точки  $M$  кольца в недеформированном состоянии определяются формулами:

$$\xi = R \cos \vartheta, \quad \zeta = R \sin \vartheta.$$

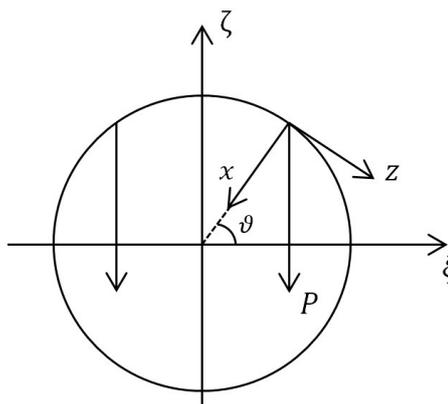


Рис. 1. Кольцо с весовой нагрузкой.

Fig. 1. Weighted ring.

В нашем случае деформация кольца плоская, таким образом, уравнения Кирхгофа-Клебша упрощаются.

Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{ds} + qV_z + F_x = 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x + F_z = 0, \\ \frac{dL_y}{ds} - V_y = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$p = 0, \quad q = q_0 + \delta q, \quad r = 0,$$

$$\delta q = \frac{d\beta}{ds}, \quad L_y = B \delta q, \quad q_0 = \frac{1}{R},$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{du}{ds} + q_0w, \\ 0 = \frac{dw}{ds} - q_0u, \end{cases} \quad (7)$$

$$ds = R d\theta, \quad \delta q = \frac{d\beta}{ds}, \quad (8)$$

где  $B$  – жесткость стержня при изгибе.

Координаты точек деформированного кольца определяются уравнениями

$$\begin{cases} \xi = (R - u) \cos \theta - w \sin \theta, \\ \zeta = (R - u) \sin \theta + w \cos \theta. \end{cases} \quad (9)$$

## 2. Алгоритм решения контактной задачи

Пусть кольцо находится под жестким препятствием так, что

$$\zeta = (R - u) \sin \theta + w \cos \theta \geq -R. \quad (10)$$

Наличие неравенства (10) приведет к тому, что силы  $F_x$  и  $F_z$  становятся неизвестными и подлежат определению. Поэтому перейдем к вариационной постановке задачи.

Известно [5,6], что упругая энергия стержня в квадратичном приближении определяется изменением кривизны (замечая, что  $ds = R d\theta$ )

$$V = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} \delta q d\theta = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (u'' + u)^2 d\theta,$$

и второе уравнение в (7) принимает вид (условие несжимаемости оси стержня):

$$u = u'. \quad (11)$$

Предположим, что по ободу кольца равномерно распределена весовая нагрузка  $P$ , направленная как это показано на рис. 1. Проектируя эту силу на оси  $(x, z)$ , получим:  $P_x = P \sin \theta, P_z = P \cos \theta$ . Считая деформации малыми, работу внешних сил можно определить формулой

$$A = P \int_0^{2\pi} \zeta(\theta) d\theta = P \int_0^{2\pi} (-u \sin \theta + w \cos \theta) d\theta.$$

Таким образом, получаем задачу вариационного исчисления

$$V - A \rightarrow \min_{u, w} \quad (12)$$

при выполнении ограничений (10) и условия несжимаемости (11).

Для конечномерной аппроксимации представим  $w$  в виде частичной суммы ряда Фурье:

$$w = \sum_{k=1}^n y_k \sin k\theta + y_{k+n} \cos k\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (13)$$

Тогда из условия несжимаемости

$$u = \sum_{k=1}^n y_k k \cos k\theta - y_{k+n} k \sin k\theta. \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в выражения для упругой энергии и работы внешних сил, учитывая условие ортогональности тригонометрических функций, получим

$$\tilde{V} = \frac{B}{2R^3} \sum_{j=0}^n y_j^2 j^2 (j^2 - 1)^2 + \sum_{j=1}^n y_{j+n}^2 j^2 (j^2 - 1)^2, \quad (15)$$

$$A = 2\pi P R y_{n+1}. \quad (16)$$

Потребуем, чтобы ограничения (10) выполнялись в конечном числе точек  $\varphi_j$ :

$$\varphi_j = \left( \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{j\pi}{M}, \quad j \in 1 : M.$$

Тогда неравенства (10) запишем в виде:

$$\sum_{j=1}^n y_j a_j + \sum_{j=1}^n y_{j+n} a_{j+n} + b_j \leq 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a_j &= j \cos(j\varphi_j) \sin(\varphi_j) - \sin(j\varphi_j) \cos(\varphi_j), \\ a_{j+n} &= -j \sin(j\varphi_j) \sin(\varphi_j) - \cos(j\varphi_j) \cos(\varphi_j), \\ b_j &= -R(1 + \sin(\varphi_j)). \end{aligned}$$

Необходимо исключить перемещение кольца как жесткого целого в направлении оси  $\xi$ . Для этого потребуем, чтобы

$$\xi(0) + \xi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \xi(\pi) + \xi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

что приводит при  $n = 10$  к равенству:

$$4z_1 + 4z_3 + 8z_5 + 8z_7 + 20z_9 + 20z_{11} + 28z_{13} + 28z_{15} + 36z_{17} + 36z_{19} = 0 \quad (18)$$

или  $(a_0, z) = 0$ .

Таким образом, получаем задачу выпуклого квадратичного программирования

$$V - 2\pi P R y_{n+1} \rightarrow \min_{y \in R^{2n}} \quad (19)$$

при ограничениях (17), (18). Без ограничения общности можно считать  $\frac{B}{R} = 1$ . Результаты вычислений представлены на рис. 2–5.

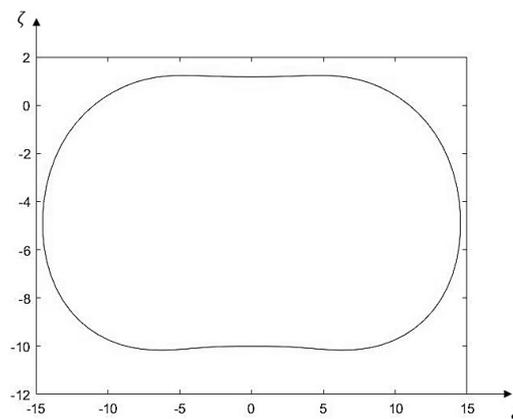


Рис. 2. Форма равновесия кольца при  $P = 20$ .  
Fig. 2. Ring equilibrium form at  $P = 20$ .

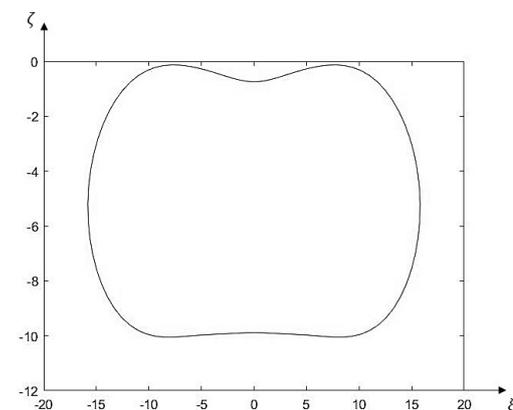


Рис. 3. Форма равновесия кольца при  $P = 30$ .  
Fig. 3. Ring equilibrium form at  $P = 30$ .

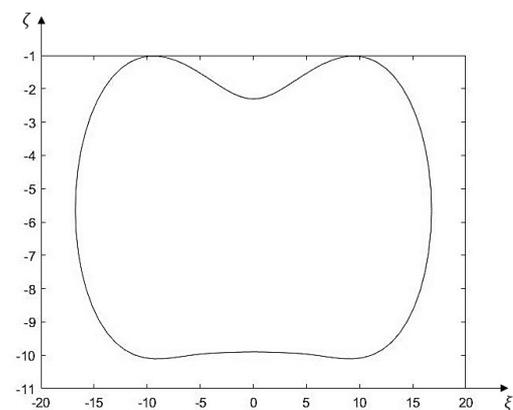


Рис. 4. Форма равновесия кольца при  $P = 40$ .  
Fig. 4. Ring equilibrium form at  $P = 40$ .

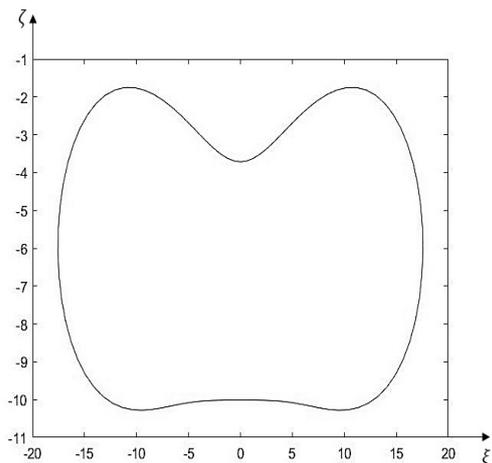


Рис. 5. Форма равновесия кольца при  $P = 50$ .  
Fig. 5. Ring equilibrium form at  $P = 50$ .

Интересной и практически важной является задача определения силы реакции контактного взаимодействия. Составим функцию Лагранжа для задачи (17)–(19) выпуклого квадратичного программирования

$$(\lambda; y) = V(y) - \pi P R y_{n+1} + \sum_{j=0}^M \lambda_j ((a_j, y) + b_j) + (\lambda_0, a_0).$$

Обозначим через  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M) \in R^{M+1}$ .

Решение задачи (17)–(19) обозначим через  $y_*$ . Для того, чтобы точка  $y_*$  была решением задачи необходимо и достаточно, чтобы нашелся множитель Лагранжа  $\lambda_*$  такой, что точка  $(\lambda_*, y_*)$  была седловой точкой функции Лагранжа на множестве  $R^{2n} \times \Lambda$ ,

$$(\lambda, y_*) \leq (\lambda_*, y_*) \leq (\lambda_*, y) \quad (20)$$

$$\forall y \in R^{2n}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

$$\Lambda = \{(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M), \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in 1 : M.\}$$

Из (20) следует, что

$$(\lambda_*, y_*) = \max_{\lambda \in \Lambda} \min_{y \in R^{2n}} (\lambda, y) = \min_{y \in R^{2n}} \max_{\lambda \in \Lambda} (\lambda, y),$$

т.е. операции взятия max и min в данном случае перестановочны.

Введем в рассмотрение матрицу  $A$ , строками которой являются векторы  $(a_0, a_1, \dots, a_M)$ , диагональную матрицу  $Q$ , элементы  $q_{ij}$  которой имеют вид  $q_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ,  $q_{jj} = q_{j+n, j+n} = j^2(j^2 - 1)^2$ , вектор  $b_{0j} = 0$ ,  $j \neq n + 1$ ,  $b_{0, n+1} = -2\pi P R y_{n+1}$ ,  $b = (b_0, b_1, \dots, b_M)$ .

Функция Лагранжа в этих обозначениях определяется формулой

$$(\lambda, y) = \frac{1}{2}(Qy, y) + (g, y) + (Ay, \lambda) + (\lambda, b),$$

где  $g_{n+1} = -2\pi P R$ ,  $g_i = 0$  при  $i \neq n + 1$ .

Решение задачи

$$\min_{y \in R^{2n}} (\lambda, y)$$

имеет вид:

$$y = y(\lambda) = -(Q^{-1}g + Q^{-1}A^T \lambda).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\phi(\lambda) = \min_{y \in R^{2n}} (\lambda, y). \quad (21)$$

Тогда и поиск седловой функции Лагранжа сводится к задаче квадратичного программирования

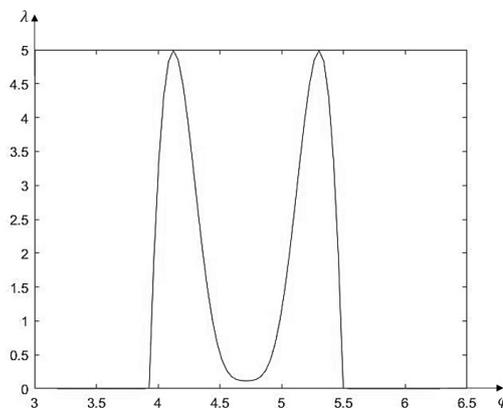
$$\phi(\lambda_*) = \max_{\lambda \in \Lambda} \phi(\lambda).$$

Подставляя  $y(\lambda)$  в функцию  $(\lambda, y(\lambda))$ , находим

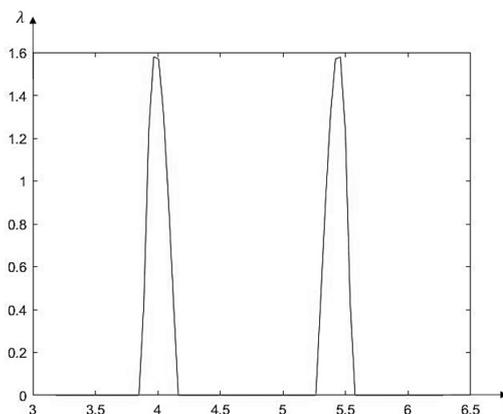
$$\begin{aligned} \phi(\lambda) = & \frac{1}{2}(Q^{-1}(A^T \lambda + g), A^T \lambda + g) - \\ & -(Q^{-1}(A^T \lambda + g), g) - (Q^{-1}(A^T \lambda + g), A^T \lambda) + \\ & + (\lambda, b) = \frac{1}{2}(Q^{-1}A^T \lambda, A^T \lambda) + (Q^{-1}A^T \lambda, g) + \\ & + \frac{1}{2}(Q^{-1}g, g) - (Q^{-1}A^T \lambda, g) - (Q^{-1}g, g) - \\ & -(Q^{-1}A^T \lambda, A^T \lambda) - (AQ^{-1}g, \lambda) + (\lambda, b). \end{aligned} \quad (22)$$

### 3. Результаты численных экспериментов

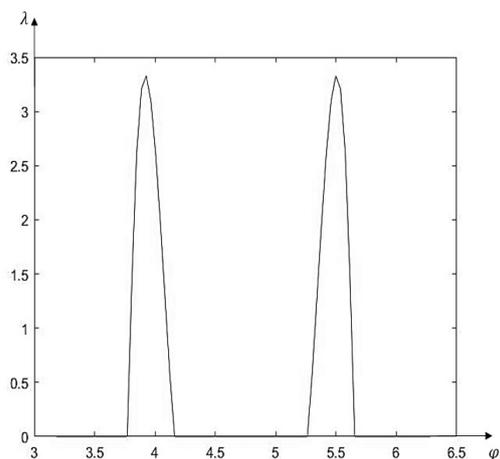
Компоненты вектора  $\tilde{\Lambda}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$  и являются силой реакции контактного взаимодействия кольца и жесткого основания. Графики сил реакции приведены на рис. 6.



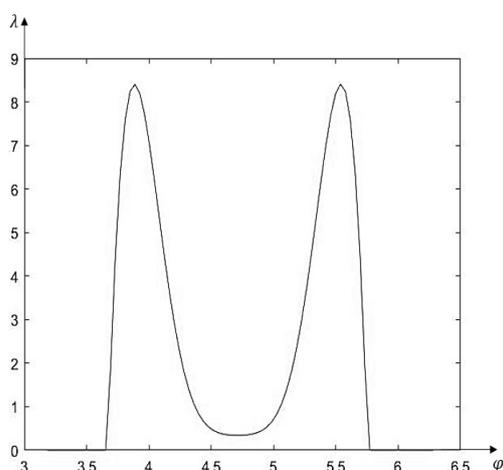
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 6. Графики силы реакции: (a) – при  $P = 20$ ; (b) – при  $P = 30$ ; (c) – при  $P = 40$ ; (d) – при  $P = 50$ .

Fig. 6. Reaction force graphs: (a) – at  $P = 20$ ; (b) – at  $P = 30$ ; (c) – at  $P = 40$ ; (d) – at  $P = 50$ .

Интересной особенностью задачи является то, что силы реакции контактного взаимодействия носят сосредоточенный характер, т.е. кольцо в окрестности точки  $Q = \frac{3\pi}{2}$  отходит от препятствий.

### Заключение

В данной работе рассмотрена контактная задача кругового кольца и жесткого основания. Ее решение сводится к решению задачи квадратичного программирования. При решении двойственной задачи были определены силы реакции контактного взаимодействия.

### Литература

1. Михайловский Е. И., Тарасов В. Н. О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.
2. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
3. Тарасов В. Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2013. 238 с.
4. Николаи Е. Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 583 с.
5. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения // Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана. М.: Мир, 1974. 254 с.
6. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М., Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1946. 532 с.

### References

1. Mikhailovsky E.I., Tarasov V.N. O skhodimosti metoda obobshhennoi reaktsii v kontaktnykh zadachakh so svobodnoi granitsej [On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary] // Applied mathematics and mechanics. 1993. Vol. 57. Issue 1. P. 128–136.
2. Panagiotopoulos P. Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevypuklyye funktsii energii [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy function]. Moscow: Mir. 1989. 494 p.
3. Tarasov V.N. Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem [Optimization methods in the study of constructive-nonlinear problems of elastic systems mechanics]. Syktывkar: Komi Science Centre, Ural Branch, RAS, 2013. 238 p.
4. Nikolai E.L. Trudy po mekhanike [Transactions on mechanics]. Moscow: Gostekhizdat. 1955. 583 p.
5. Teoriya vetvleniya i nelineynnye zadachi na sobstvennyye znacheniya [Branching theory and nonlinear eigenvalue problems] // Ed. J.B. Keller and S. Antman. Moscow: Mir, 1974. 254 p.
6. Timoshenko S.P. Ustoychivost uprugih sistem [Stability of elastic systems]. Moscow, Leningrad: OGIЗ. State Publ. House of Techn. and Theoret. Liter., 1946. 532 p.

Статья поступила в редакцию 16.09.2020.

УДК 539.12  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-50-57

**Я.А. ВОЙНОВА\***, **Н.Г. КРЫЛОВА\*\***,  
**Е.М. ОВСИЮК\*\*\***

## **ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 И АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ**

\* *Институт физики НАН Беларуси,  
г. Минск, Беларусь*

\*\* *Белорусский государственный  
университет,  
г. Минск, Беларусь*

\*\*\* *Мозырский государственный  
педагогический университет,  
г. Мозырь, Беларусь*

*[voinovayanina@mail.ru](mailto:voinovayanina@mail.ru)  
[nina-kr@tut.by](mailto:nina-kr@tut.by)  
[e.ovsiyuk@mail.ru](mailto:e.ovsiyuk@mail.ru)*

**YA.A. VOYNOVA\***, **N.G. KRYLOVA\*\***,  
**E.M. OVSIYUK\*\*\***

## **SPIN 1 PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT IN THE COULOMB FIELD. NONRELATIVISTIC THEORY**

\* *Institute of Physics, NAS of Belarus,  
Minsk, Belarus*

\*\* *Belarus State University,  
Minsk, Belarus*

\*\*\* *Mozyr State Pedagogical University,  
Mozyr, Belarus*

### **Аннотация**

Исследуется векторная частица с аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле. После разделения переменных найдены две радиальные системы из 4 и 6 уравнений, соответственно для состояний с четностями  $P = (-1)^{j+1}$  и  $P = (-1)^j$ . Обусловленные аномальным магнитным моментом слагаемые присутствуют только в системе из 6 уравнений, она и исследуется. Чтобы упростить задачу, выполнен переход к нерелятивистскому приближению. Для состояний с  $j = 0$  выведено уравнение из класса дважды вырожденного уравнения Гойна. Для состояний с  $j = 1, 2, \dots$  радиальная система приводится к двум связанным уравнениям 2-го порядка, откуда следует уравнение 4-го порядка. Построены решения Фробениуса этого уравнения, исследована сходимость возникающих степенных рядов. Условие трансцендентности решений дает простую формулу для энергий  $E = -\text{const}/n^2$ , она едва ли корректно описывает реальный спектр, поскольку не зависит от параметра аномального магнитного момента.

### **Ключевые слова:**

*частица со спином 1, аномальный магнитный момент, кулоновское поле, решения Фробениуса, квантование энергии*

### **Abstract**

After separating the variables in the Duffin–Kemmer equations for a vector particle with anomalous magnetic moment in presence of Coulomb field, there are found two radial systems of 4 and 6 equations respectively for states with parities  $P = (-1)^{j+1}$  and  $P = (-1)^j$ . Depending on the anomalous magnetic moment, the terms are present only in the system of 6 equations, and it is investigated. To simplify the problem, transition to the nonrelativistic approximation is performed. For states with  $j = 0$ , we have derived a 2-nd order equation belonging to the double confluent of Heun type. For states with  $j = 1, 2, \dots$ , the radial system is reduced to two 2-nd order linked equations, whence the 4-th order equation follows. Frobenius solutions of this equation are constructed. Imposing the known transcendency condition, we derive the formula for the energies  $E = -\text{const}/n^2$ , which does not depend on the quantum number  $j$  and the parameter of anomalous magnetic moment, and therefore cannot correctly describe the physical spectrum.

### **Keywords:**

*spin 1 particle, anomalous magnetic moment, Coulomb field, Frobenius solutions, energy quantization*

### **Введение**

Известно, что в рамках теории релятивистских волновых уравнений можно предложить так называемые неминимальные уравнения, которые описывают частицы с дополнительными электромагнитными характеристиками, со спектрами спиновых или массовых состояний. В частности, интенсивно исследовались [1–11] уравнения для частиц со спином 1, обладающих помимо электрического заряда аномальным магнитным моментом. Уравнение для векторной частицы в случае внешнего кулоновского поля оказывается очень сложным даже в случае обычной частицы без аномального момента. Эта задача все еще

не исследована полностью [12]. Однако в нерелятивистском пределе уравнение для обычной векторной частицы в кулоновском поле может быть решено точно. В настоящей работе мы исследуем аналогичную нерелятивистскую задачу для частицы с аномальным магнитным моментом.

Кратко содержание работы сводится к следующему. Исследуется квантово-механическая частица со спином 1 и аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле. Исходным является релятивистское уравнение Даффина–Кеммера, в котором введен дополнительный член взаимодействия, обусловленного аномальным магнитным моментом. На основе диагонализации операторов энергии, квадрата и третьей проекции полного момента выполнено разделение переменных. Выведена система уравнений для десяти радиальных функций. Используя диагонализацию оператора пространственного отражения, разбиваем систему на две подсистемы из четырех и шести уравнений, для четностей  $P = (-1)^{j+1}$  и  $P = (-1)^j$ , соответственно.

Дополнительные слагаемые, обусловленные аномальным магнитным моментом, присутствуют только в подсистеме из шести уравнений. Эта система уравнений и исследуется. Сначала отдельно рассмотрена относящаяся к классу четности  $P = (-1)^j$  релятивистская система при  $j = 0$ . В этом случае задача приводится к дифференциальному уравнению второго порядка. Оно найдено в явном виде и характеризуется очень сложной структурой особых точек.

Чтобы упростить возникающие математические задачи, в радиальных уравнениях выполнен переход к нерелятивистскому приближению. При этом для состояний с  $j = 0$  выведено радиальное уравнение, принадлежащее классу дважды вырожденно-го уравнения Гойна. Строятся его решения Фробениусовского типа. В качестве условия квантования использовано ограничение, выделяющее трансцендентные функции Гойна. В результате получен некоторый спектр энергии, который выглядит физически интерпретируемым, однако получаемые таким способом уровни энергии не зависят от параметра аномального момента, в то же время степенные ряды зависят от этого параметра. Для состояний с большими значениями полного углового момента  $j = 1, 2, \dots$  нерелятивистская радиальная система приводится к двум связанным дифференциальным уравнениям 2-го порядка для двух функций. Методом исключения можно получить уравнения 4-го порядка для каждой из этих функций. Исследованы локальные решения Фробениуса возникающих уравнений, сходимость вовлеченных в них степенных рядов с 8-членными рекуррентными соотношениями, а также возможность использования условия трансцендентности для получения спектра энергий.

### 1. Разделение переменных в релятивистском уравнении

Исходное уравнение имеет вид (предполагая использование тетрадного формализма; обозна-

чения в [13])

$$\left\{ i\beta^c \left[ i(e'_{(c)} \partial_\beta + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc}(x)) - e' A_c \right] + \lambda \frac{e}{M} F_{\alpha\beta}(x) P j^{\alpha\beta}(x) - M \right\} \Psi = 0, \quad (1)$$

где свободный параметр  $\lambda$  – безразмерный,  $P$  – проективный оператор, выделяющий из 10-компонентной функции векторную составляющую. Ниже используются обозначения

$$P = \begin{vmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad M = \frac{mc}{\hbar}, \quad e' = \frac{e}{c\hbar},$$

$$\Gamma = \lambda \frac{4\alpha}{M}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}. \quad (2)$$

В сферической тетраде [14] уравнение (1) принимает вид

$$\left[ \beta^0 (i\partial_t + \frac{\alpha}{r}) + i(\beta^3 \partial_r + \frac{\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}}{r}) + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta,\phi} + \frac{\Gamma}{r^2} P j^{03} - M \right] \Phi = 0, \quad (3)$$

где зависящий от угловых переменных оператор определен равенством

$$\Sigma_{\theta,\phi} = i \beta^1 \partial_\theta + \beta^2 \frac{i\partial_\phi + ij^{12} \cos \theta}{\sin \theta}.$$

В используемом тетрадном базисе выражения для компонент оператора полного момента имеют шредингеровскую структуру [14]:

$$j_1 = l_1 + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} ij^{12}, \quad j_2 = l_2 + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} ij^{12},$$

$$j_3 = l_3, \quad j^{12} = \beta^1 \beta^2 - \beta^2 \beta^1. \quad (4)$$

Ниже будем использовать волновую функцию и явные выражения для матриц Даффина–Кеммера [14] в циклическом представлении, где оператор третьей проекции спина  $ij^{12}$  имеет диагональный вид:

$$ij^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_3 \end{vmatrix}, \quad t_3 = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Выражение для проективного оператора  $P$  не меняется при переходе к циклическому базису.

Система радиальных уравнений для обычной векторной частицы в кулоновском поле известна [12]. Чтобы получить обобщенную систему уравнений для векторной частицы с аномальным моментом, достаточно найти явный вид дополнительного слагаемого в уравнении

$$\frac{\Gamma}{r^2} P j^{03} = \frac{\Gamma}{r^2} P (\beta^0 \beta^3 - \beta^3 \beta^0). \quad (5)$$

Здесь оператор  $P j^{03}$  представляет собой матрицу размерности 10, у которой отличны от нуля только элементы  $(P j^{03})_{13} = (P j^{03})_{31} = -1$ .

Структура 10-компонентной волновой функции векторной частицы с квантовыми числами  $\epsilon, j, m$  задается соотношениями

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \{\Phi_0(x), \vec{\Phi}(x), \vec{E}(x), \vec{H}(x)\}, \\ \Phi_0(x) &= e^{-i\epsilon t} f_0(r) D_0, \\ \vec{\Phi}(x) &= e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} f_1(r) D_{-1} \\ f_2(r) D_0 \\ f_3(r) D_{+1} \end{pmatrix}, \\ \vec{E}(x) &= e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} E_1(r) D_{-1} \\ E_2(r) D_0 \\ E_3(r) D_{+1} \end{pmatrix}, \\ \vec{H}(x) &= e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} H_1(r) D_{-1} \\ H_2(r) D_0 \\ H_3(r) D_{+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где используются  $D$ -функции Вигнера  $D_\sigma = D_{-m, \sigma}^j(\phi, \theta, 0)$ ,  $\sigma = 0, -1, +1$ . После необходимых вычислений находим систему радиальных уравнений

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\nu}{r}(E_1 + E_3) - \frac{\Gamma}{r^2}f_2 &= m f_0, \\ +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 &= m f_1, \\ i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - i\frac{\nu}{r}(H_1 - H_3) - \frac{\Gamma}{r^2}f_0 &= m f_2, \\ +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_3 - i\frac{\nu}{r}H_2 &= m f_3, \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 + \frac{\nu}{r}f_0 &= m E_1, \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{d}{dr}f_0 &= m E_2, \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_3 + \frac{\nu}{r}f_0 &= m E_3, \\ -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 - i\frac{\nu}{r}f_2 &= m H_1, \\ +i\frac{\nu}{r}(f_1 - f_3) &= m H_2, \\ +i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_3 + i\frac{\nu}{r}f_2 &= m H_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Одновременно с операторами  $\vec{j}^2, j_3$  будем диагонализировать оператор пространственной инверсии  $\hat{\Pi}$ . В представлении декартовой тетрады и декартова базиса матриц  $\beta^a$  этот оператор имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +I \end{pmatrix} \hat{P}, \\ \hat{P}\Psi(\vec{r}) &= \Psi(-\vec{r}). \end{aligned} \quad (7)$$

После перехода к сферической тетраде, а затем к циклическому представлению матриц Даффина-Кеммера получаем другое представление:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_3 \end{pmatrix} \hat{P}, \\ \Pi_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение на собственные значения  $\hat{\Pi}'\Psi = P\Psi$  дает два решения:

$$\begin{aligned} P &= (-1)^{j+1}, \quad f_0 = f_2 = 0, \quad f_3 = -f_1, \\ E_3 &= -E_1, \quad E_2 = 0, \quad H_3 = H_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} P &= (-1)^j, \quad f_3 = f_1, \\ E_3 &= E_1, \quad H_3 = -H_1, \quad H_2 = 0. \end{aligned}$$

Для состояний с  $P = (-1)^{j+1}$  имеем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 &= m f_1, \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 = m E_1, \quad -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 &= m H_1, \\ 2i\frac{\nu}{r}f_1 &= m H_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Для этого класса решений аномальный магнитный момент никак себя не проявляет в присутствии внешнего кулоновского поля. Система допускает полное решение для основной функции  $f_1$ :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right) f_1 = 0. \quad (10)$$

Это уравнение возникает в теории скалярной частицы во внешнем кулоновском поле, его точные решения и соответствующий спектр энергии известны.

Для состояний с четностью  $P = (-1)^j$  имеем систему из шести уравнений:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - 2\frac{\nu}{r}E_1 - \frac{\Gamma}{r^2}f_2 &= m f_0, \\ +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 &= m f_1, \\ +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 - \frac{\Gamma}{r^2}f_0 &= m f_2, \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{d}{dr}f_0 &= m E_2, \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 + \frac{\nu}{r}f_0 &= m E_1, \\ i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 &= -m H_1. \end{aligned} \quad (11)$$

## 2. Случай минимального значения момента $j = 0$

Для состояний с минимальным  $j = 0$  нужно использовать более простую подстановку:

$$\Phi_0 = e^{-i\epsilon t} f_0(r), \quad \vec{\Phi} = e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(r) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{E} = e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} 0 \\ E_2(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} 0 \\ H_2(r) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае получаем четыре радиальные уравнения:

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\Gamma}{r^2}f_2 = mf_0,$$

$$i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - \frac{\Gamma}{r^2}f_0 = mf_2,$$

$$-i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{d}{dr}f_0 = mE_2, \quad H_2 = 0. \quad (12)$$

Исключая  $E_2$ , находим уравнения для функций  $f_0, f_2$ :

$$i\left(\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{d}{dr} + \frac{2\epsilon}{r} + \frac{\alpha + i\Gamma m}{r^2}\right)f_2 +$$

$$+\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - m^2\right)f_0 = 0,$$

$$f_2 = i\frac{r^2}{P(r)}\left(\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{d}{dr} - \frac{i\Gamma m}{r^2}\right)f_0,$$

$$P(r) = (\epsilon^2 - m^2)r^2 + 2\epsilon\alpha r + \alpha^2.$$

Исключая далее  $f_2$ , получим уравнение 2-го порядка для функции  $f \equiv f_0$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(-2xP^{-1} + (2\alpha^2 x + 6E\alpha x^2 + 4E^2 x^3)P^{-2} +\right.$$

$$+\left((2E^2 - 2E^4)x^5 + (4E\alpha - 6E^3\alpha)x^4 +\right.$$

$$+\left.(2\alpha^2 - 6E^2\alpha^2)x^3 - 2E\alpha^3 x^2\right)P^{-3}\left)\frac{df}{dx} +\right.$$

$$+\left(x^2P^{-1} + (-2ixE\gamma + \gamma^2 - i\alpha\gamma)P^{-2} +\right.$$

$$+\left.((-2iE\gamma + 2iE^3\gamma)x^3 + (-2i\alpha\gamma + 4iE^2\alpha\gamma)x^2 +\right.$$

$$\left.+2iE\alpha^2\gamma x\right)P^{-3}\left)f = 0,$$

где используются безразмерные переменные  $x, E, \gamma$ :

$$x = mr, \quad E = \frac{\epsilon}{m}, \quad \gamma = m\Gamma, \quad \alpha = \frac{1}{137}.$$

Полученное уравнение имеет сложный набор сингулярных точек. В следующем разделе выведем его нерелятивистский аналог, который будет существенно проще.

## 3. Нерелятивистское приближение, случай $j = 0$

В системе уравнений (12) осуществим переход к нерелятивистскому приближению. Сначала исключим нединамическую переменную  $f_0(r)$ :

$$i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - \frac{\Gamma}{mr^2}\left(-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\Gamma}{r^2}f_2\right) = mf_2,$$

$$-i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{1}{m}\frac{d}{dr}\left(-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\Gamma}{r^2}f_2\right) = mE_2.$$

Затем вводим большие и малые компоненты [14]  $f_2 = (B_2 + M_2)$ ,  $iE_2 = (B_2 - M_2)$ . Одновременно выделим энергию покоя формальной заменой  $\epsilon \Rightarrow m + E$ , где  $E$  – нерелятивистская энергия. В результате получаем

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)(B_2 - M_2) - \frac{\Gamma}{mr^2}\left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)(B_2 - M_2) -\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma}{r^2}(B_2 + M_2)\right] = 2mM_2,$$

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)(B_2 + M_2) - \frac{1}{m}\frac{d}{dr}\left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)(B_2 - M_2) -\right.$$

$$\left.-\frac{i\Gamma}{r^2}(B_2 + M_2)\right] = -2mM_2.$$

Чтобы получить уравнение для большой компоненты  $B_2$ , сложим последние два уравнения и после этого малой компонентой  $M_2$  в сравнении с большой  $B_2$  можно пренебречь:

$$2\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)B_2 - \frac{\Gamma}{mr^2}\left(i\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\Gamma}{r^2}\right)B_2 +$$

$$+\frac{1}{m}\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{i\Gamma}{r^2}\right)B_2 = 0.$$

Отсюда находим (пусть  $B_2(r) = R(r)$ )

$$\left\{\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{i\Gamma}{r^2}\right) + 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{i\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{i\Gamma}{r^2}\right)\right\}R(r) = 0. \quad (13)$$

Учитывая, что по физическим соображениям параметр  $\Gamma$  чисто мнимый, сделаем замену  $i\Gamma \Rightarrow \Gamma$ :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} +$$

$$+\left(2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{2}{r^2} - \frac{4\Gamma}{r^3} - \frac{\Gamma^2}{r^4}\right)R = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет две нерегулярные особые точки  $r = 0$  и  $r = \infty$ , обе ранга 2, оно относится к классу дважды вырожденного уравнения Гойна [15]. Локальные решения около точки  $r = 0$  строим в виде

$$R = e^{Ar} r^B e^{\frac{C}{r}} f(r). \quad (15)$$

Для функции  $f(r)$  получаем уравнение

$$f'' + \left(2A + \frac{2B+2}{r} - \frac{2C}{r^2}\right)f' +$$

$$+ \left( 2mE + A^2 + \frac{2AB + 2m\alpha + 2A}{r} + \frac{B^2 + B - 2AC - 2}{r^2} + \frac{-4\Gamma - 2BC}{r^3} + \frac{-\Gamma^2 + C^2}{r^4} \right) f = 0.$$

Накладываем ограничения

$$2mE + A^2 = 0, \quad -\Gamma^2 + C^2 = 0, \quad 4\Gamma + 2BC = 0,$$

это дает

$$A = \pm\sqrt{-2mE} \quad (E < 0),$$

$$C = \pm\Gamma, \quad B = -\frac{2\Gamma}{C} = \mp 2.$$

Для описания связанных состояний используем следующие значения:

$$\Gamma > 0, \quad A = -\sqrt{-2mE}, \quad C = -\Gamma, \quad B = +2;$$

$$\Gamma < 0, \quad A = -\sqrt{-2mE}, \quad C = +\Gamma, \quad B = -2. \quad (16)$$

С учетом (16) уравнение упрощается

$$f'' + \left( 2A + \frac{2B + 2}{r} - \frac{2C}{r^2} \right) f' + \left( \frac{2AB + 2m\alpha + 2A}{r} + \frac{B^2 + B - 2AC - 2}{r^2} \right) f = 0.$$

Для двух подслучаев оно выглядит по-разному:

$$\Gamma > 0, \quad f'' + \left( -2\sqrt{-2mE} + \frac{6}{r} + \frac{2\Gamma}{r^2} \right) f' + \left( \frac{-6\sqrt{-2mE} + 2m\alpha}{r} + \frac{4 - 2\Gamma\sqrt{-2mE}}{r^2} \right) f = 0; \quad (17)$$

$$\Gamma < 0, \quad f'' + \left( -2\sqrt{-2mE} - \frac{2}{r} - \frac{2\Gamma}{r^2} \right) f' + \left( \frac{+2\sqrt{-2mE} + 2m\alpha}{r} + \frac{2\Gamma\sqrt{-2mE}}{r^2} \right) f = 0. \quad (18)$$

Оба эти уравнения можно представить символически так:

$$f'' + \left( a + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} \right) f' + \left( \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} \right) f = 0. \quad (19)$$

Решения уравнения (19) строим в виде степенных рядов с трехчленными рекуррентными соотношениями:

$$[a(k-1) + b_1]c_{k-1} + [k(k-1) + a_1k + b_2]c_k + a_2(k+1)c_{k+1} = 0 \quad (20)$$

или в краткой форме

$$P_{k-1}c_{k-1} + P_k c_k + P_{k+1}c_{k+1} = 0,$$

где

$$P_{k-1} = a(k-1) + b_1, \quad P_k = k(k-1) + a_1k + b_2,$$

$$P_{k+1} = a_2(k+1).$$

Делим соотношение (20) на  $c_{k-1}k^2$  и устремляем  $k$  к бесконечности:  $k \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{k^2}[a(k-1) + b_1] + \frac{1}{k^2}[k(k-1) + a_1k + b_2] \frac{c_k}{c_{k-1}} + \frac{1}{k^2}a_2(k+1) \frac{c_{k+1}}{c_k} \frac{c_k}{c_{k-1}} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k}{c_{k-1}} = r.$$

В результате получаем уравнение, определяющее радиус сходимости: значению  $r = 0$  отвечает радиус  $R_{\text{conv}} = \frac{1}{|r|} = \infty$ .

Приведем явный вид величин, задающих рекуррентные соотношения (формулы немного различаются для двух подслучаев):

$$\Gamma > 0, \quad P_{k+1} = 2\Gamma(k+1),$$

$$P_{k-1} = -2\sqrt{-2mE}(k-1) - 6\sqrt{-2mE} + 2m\alpha,$$

$$P_k = k(k-1) + 6k + 4 - 2\sqrt{-2mE}\Gamma, \quad (21)$$

$$\Gamma < 0, \quad P_{k+1} = -2\Gamma(k+1),$$

$$P_{k-1} = -2\sqrt{-2mE}(k-1) + 2\sqrt{-2mE} + 2m\alpha,$$

$$P_k = k(k-1) - 2k + 2\sqrt{-2mE}\Gamma. \quad (22)$$

В качестве условия квантования используем условие трансцендентности функций Гойна [15]

$$\Gamma > 0, \quad P_{k-1} = -2\sqrt{-2mE}(k-1) -$$

$$-6\sqrt{-2mE} + 2m\alpha = 0,$$

$$\Gamma < 0, \quad p_{k-1} = -2\sqrt{-2mE}(k-1) +$$

$$+2\sqrt{-2mE} + 2m\alpha = 0.$$

Отсюда находим две разные формулы для энергий в зависимости от знака  $\Gamma$ :

$$\Gamma > 0, \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2} \frac{1}{(k+2)^2}, \quad k \geq 2,$$

$$\Gamma < 0, \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2} \frac{1}{(k-2)^2}, \quad k > 2. \quad (23)$$

Формулы выглядят физически интерпретируемыми лишь частично, поскольку получаемые таким способом уровни энергии не зависят от параметра аномального момента  $\Gamma$ . В то же время сами радиальные решения  $R(r)$  зависят от  $\Gamma$ . Поэтому соотношения (23) едва ли описывают правильные спектры энергии.

**4. Нерелятивистские уравнения,  $j = 1, 2, \dots$**

Исходим из релятивистских радиальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) E_2 - 2\frac{\nu}{r} E_1 - \frac{\Gamma}{r^2} f_2 &= m f_0, \\ +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) H_1 &= m f_1, \\ i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) E_2 - 2i\frac{\nu}{r} H_1 - \frac{\Gamma}{r^2} f_0 &= m f_2, \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_2 - \frac{d}{dr} f_0 &= m E_2, \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_1 + \frac{\nu}{r} f_0 &= m E_1, \\ i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) f_1 + i\frac{\nu}{r} f_2 &= -m H_1. \end{aligned}$$

Исключим нединамические переменные  $f_0, H_1$ . Оставшиеся четыре уравнения примут вид

$$\begin{aligned} -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{m} \left[ i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) f_1 + i\frac{\nu}{r} f_2 \right] + \\ + i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) E_1 &= m f_1, \\ -\frac{\nu}{r} \frac{1}{m} \left[ \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) E_2 + 2\frac{\nu}{r} E_1 + \frac{\Gamma}{r^2} f_2 \right] - \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_1 &= m E_1, \\ +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) E_2 + 2i\frac{\nu}{r} \frac{1}{m} \left[ i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) f_1 + i\frac{\nu}{r} f_2 \right] + \\ + \frac{\Gamma}{r^2} \frac{1}{m} \left[ \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) E_2 + 2\frac{\nu}{r} E_1 + \frac{\Gamma}{r^2} f_2 \right] &= m f_2, \\ \frac{d}{dr} \frac{1}{m} \left[ \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) E_2 + 2\frac{\nu}{r} E_1 + \frac{\Gamma}{r^2} f_2 \right] - \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_2 &= m E_2. \end{aligned}$$

Большие и малые компоненты вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} f_1 &= (\Psi_1 + \psi_1), \quad iE_1 = (\Psi_1 - \psi_1), \\ f_2 &= (\Psi_2 + \psi_2), \quad iE_2 = (\Psi_2 - \psi_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда предыдущие уравнения дают (одновременно выделяем энергию покоя заменой  $\epsilon = m + E$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{m} \left[ \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) (\Psi_1 + \psi_1) + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{r} (\Psi_2 + \psi_2) \right] + \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) (\Psi_1 - \psi_1) &= 2m\psi_1, \\ \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) (\Psi_1 + \psi_1) - \frac{\nu}{r} \frac{1}{m} \left[ \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) (\Psi_2 - \psi_2) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. + 2\frac{\nu}{r} (\Psi_1 - \psi_1) + \frac{i\Gamma}{r^2} (\Psi_2 + \psi_2) \right] &= -2m\psi_1, \\ \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) (\Psi_2 - \psi_2) - 2\frac{\nu}{r} \frac{1}{m} \left[ \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) (\Psi_1 + \psi_1) + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{r} (\Psi_2 + \psi_2) \right] + \frac{\Gamma}{r^2} \frac{1}{m} \left[ -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) (\Psi_2 - \psi_2) - \right. \\ \left. - 2i\frac{\nu}{r} (\Psi_1 - \psi_1) + \frac{\Gamma}{r^2} (\Psi_2 + \psi_2) \right] &= 2m\psi_2, \\ \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) (\Psi_2 + \psi_2) + \frac{d}{dr} \frac{1}{m} \left[ \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) (\Psi_2 - \psi_2) + \right. \\ \left. + 2\frac{\nu}{r} (\Psi_1 - \psi_1) + \frac{i\Gamma}{r^2} (\Psi_2 + \psi_2) \right] &= -2m\psi_2. \end{aligned}$$

Чтобы получить нерелятивистские радиальные уравнения для больших компонент  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , складываем уравнения в каждой паре, и затем пренебрегаем малыми компонентами в сравнении с большими. В результате находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\beta - \lambda r}{r} - \frac{2\nu^2}{r^2}\right) \Psi_1 - \\ - \nu \frac{2r + \Gamma}{r^3} \Psi_2 = 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\beta - \lambda r}{r} - \frac{2\nu^2}{r^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{4\Gamma}{r^3} - \frac{\Gamma^2}{r^4}\right) \Psi_2 - \\ - 2\nu \frac{2r + \Gamma}{r^3} \Psi_1 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку  $\Gamma$  чисто мнимый параметр, то в уравнениях сделана замена  $i\Gamma$  на  $\Gamma$ , а также использованы обозначения

$$\begin{aligned} 2mE &= -\lambda, \quad \lambda > 0, \quad 2m\alpha = \beta, \\ 2\nu^2 &= j(j+1) \equiv L. \end{aligned} \quad (26)$$

Методом исключения можно получить уравнения 4-го порядка для каждой из функций  $\Psi_1(r)$  и  $\Psi_2(r)$ . В частности, для функции  $\Psi_1$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dr^4} \Psi_1 + \left(-\frac{4}{2r + \Gamma} + \frac{10}{r}\right) \frac{d^3}{dr^3} \Psi_1 + \\ + \left(-2\lambda + \frac{2\Gamma\beta - 24}{\Gamma r} + \frac{22 - 2L}{r^2} - \frac{4\Gamma}{r^3} - \frac{\Gamma^2}{r^4} + \right. \\ \left. + \frac{48}{\Gamma(2r + \Gamma)} + \frac{8}{(2r + \Gamma)^2}\right) \frac{d^2}{dr^2} \Psi_1 + \\ + \left(\frac{-8L + 64 - 10\Gamma^2\lambda - 4\Gamma\beta}{\Gamma^2 r} + \frac{4L - 24 + 8\Gamma\beta}{\Gamma r^2} + \right. \\ \left. + \frac{8 - 6L}{r^3} - \frac{8\Gamma}{r^4} - \frac{2\Gamma^2}{r^5} + \right. \\ \left. + \frac{4\Gamma^2\lambda + 16L - 128 + 8\Gamma\beta}{\Gamma^2(2r + \Gamma)} - \frac{32}{\Gamma(2r + \Gamma)^2}\right) \frac{d}{dr} \Psi_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \lambda^2 + \frac{16\Gamma^2\lambda + 64L + 32\Gamma\beta - 2\beta\lambda\Gamma^3}{\Gamma^3 r} + \right. \\
 & + \frac{-10\Gamma^2\lambda - 24L - 12\Gamma\beta + \beta^2\Gamma^2 + 2\lambda\Lambda\Gamma^2}{\Gamma^2 r^2} + \\
 & + \frac{4\Gamma^2\lambda + 4\Gamma\beta + 8L - 2\Gamma\beta L}{\Gamma r^3} - \frac{\Gamma^2\beta}{r^5} + \\
 & + \frac{-4\Gamma\beta + L^2 + \Gamma^2\lambda - 4L}{r^4} + \frac{-32\Gamma^2\lambda - 128L - 64\Gamma\beta}{\Gamma^3(2r + \Gamma)} + \\
 & \left. + \frac{-32L - 8\Gamma^2\lambda - 16\Gamma\beta}{\Gamma^2(2r + \Gamma)^2} \right) \Psi_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Символически структура уравнения записывается так (пусть  $\Psi_1 = F$ )

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^4}{dr^4} F + \left( -\frac{4}{2r + \Gamma} + \frac{10}{r} \right) \frac{d^3}{dr^3} F + \\
 & + \left( -2\lambda + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_4}{r^4} + \frac{a_5}{2r + \Gamma} + \right. \\
 & + \left. \frac{a_6}{(2r + \Gamma)^2} \right) \frac{d^2}{dr^2} F + \left( \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^4} + \frac{b_5}{r^5} + \right. \\
 & + \left. \frac{b_6}{2r + \Gamma} + \frac{b_7}{(2r + \Gamma)^2} \right) \frac{d}{dr} F + \left( \lambda^2 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{c_3}{r^3} + \frac{c_4}{r^4} + \frac{c_5}{r^5} + \frac{c_6}{2r + \Gamma} + \frac{c_7}{(2r + \Gamma)^2} \right) F = 0.
 \end{aligned}$$

В окрестности регулярной особой точки  $r = -\Gamma/2$  это уравнение упрощается:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{d^4}{dr^4} - \frac{4}{2r + \Gamma} \frac{d^3}{dr^3} + \frac{a_6}{(2r + \Gamma)^2} \frac{d^2}{dr^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{b_7}{(2r + \Gamma)^2} \frac{d}{dr} + \frac{c_7}{(2r + \Gamma)^2} \right) F = 0.
 \end{aligned}$$

Ищем его решения в виде  $F = (2r + \Gamma)^s$ . Для индекса  $s$  получаем при этом алгебраическое уравнение четвертой степени с простыми корнями:

$$\Psi_1 = (2r + \Gamma)^s, \quad s = 0, -1, -3, -4. \quad (27)$$

Только при  $s = 0$  решения ведут себя в точке  $r = -\Gamma/2$  регулярно. Точка  $r = 0$  является нерегулярной особой точкой и имеет ранг 2. Поэтому решения уравнения 4-го порядка в окрестности точки  $r = 0$  ищем в виде

$$\Psi_1(r) = e^{Dr} r^A e^{B/r} f(r). \quad (28)$$

Дальнейший анализ технически довольно громоздкий. Параметры  $D, A, B$  выбираются так, чтобы упростить вид уравнения для  $f(r)$ . Приводим только конечный результат.

Существуют четыре различных решения:

$$(I) \quad D = -\sqrt{-2\epsilon}, \quad B = 0, \quad A = 0,$$

$$F_1 = e^{Dr} f_1(r); \quad (29)$$

$$(II) \quad D = -\sqrt{-2\epsilon}, \quad B = 0, \quad A = -1,$$

$$F_2 = e^{Dr} \frac{1}{r} f_2(r); \quad (30)$$

$$(III) \quad D = -\sqrt{-2\epsilon}, \quad B = +\Gamma, \quad A = -1,$$

$$F_3 = e^{Dr} \frac{1}{r} e^{+\Gamma/r} f_3(r); \quad (31)$$

$$(IV) \quad D = -\sqrt{-2\epsilon}, \quad B = -\Gamma, \quad A = +3,$$

$$F_4 = e^{Dr} r^3 e^{-\Gamma/r} f_4(r). \quad (32)$$

Решения для функций  $f_1(r), f_2(r)$  строятся в виде степенных рядов с восьмичленными рекуррентными соотношениями. Решения для функций  $f_3(r), f_4(r)$  также строятся в виде степенных рядов, но с девятичленными рекуррентными соотношениями. Исследована сходимость этих четырех степенных рядов методом Пуанкаре–Перрона. Возможные радиусы сходимости следующие:  $R_{\text{conv}} = |\Gamma|/2, \infty$ . Для описания связанных состояний можно использовать решения  $F_3, \Gamma < 0$  и  $F_4, \Gamma > 0$ .

Условие трансцендентности решений здесь также дает формулу для энергий в виде  $E = -\text{const}/n^2$ . Уровни энергии не зависят от параметра аномального магнитного момента. Последнее обстоятельство указывает на их непригодность для описания связанных состояний в системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф19М-032 для молодых ученых и гранта БРФФИ Ф20РА-007 в рамках сотрудничества НАН Беларуси и Румынской Академии.

#### Литература

1. Плетюхов В.А., Редьков В.М., Стражев В.И. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы. Минск: Беларуская навука, 2015. 328 с.
2. Elementary particles with internal structure in external field. I / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov // General Theory. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2018. 404 p.
3. Elementary particles with internal structure in external field. II / E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov // Physical Problems. Inc. USA: Nova Science Publishers. 2018. 402 p.
4. Corben H.C., Schwinger J. The electromagnetic properties of mesotrons // Phys. Rev. 1940. Vol. 58. P. 953.
5. Shamaly A., Capri A.Z. Unified theories for massive spin 1 fields // Canadian J. of Physic. 1973. Vol. 51. P. 1467–1470.
6. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov. In S. Griffin (Eds.) Quaternions: Theory and Applications. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2017. P. 47–84.
7. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov In S. Griffin

- (Eds.) Quaternions: Theory and Applications. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2017. P. 11–46.
8. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field / *V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsyuk, V. Balan, V. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. Vol. 20. No 1. P. 21–39.
  9. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / *V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsyuk, V. Balan, V. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2018. Vol. 21. No 1. P. 1–20.
  10. *Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M.* On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2010. Vol. 13. No 4. P. 352–367.
  11. *Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Voynova Ya.A., Red'kov V.M.* Quantum mechanics of spin 1 particle with quadrupole moment in external uniform magnetic field // Problems of Physics, Mathematics, and Technics. 2017. Vol. 32(3). P. 18–27.
  12. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / *E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Balkan Society of Geometers Proceedings. 2018. Vol. 25. P. 59–78.
  13. *Red'kov V.M.* Fields in Riemannian space and the Lorentz group. Minsk: Belarusian Science, 2009. 486 p.
  14. *Red'kov V.M.* Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrödinger basis. Minsk: Belarusian Science, 2011. 339 p.
  15. *Ronveaux A.* Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.
  4. *Corben H.C., Schwinger J.* The electromagnetic properties of mesotrons // Phys. Rev. 1940. Vol. 58. P. 953.
  5. *Shamaly A., Capri A.Z.* Unified theories for massive spin 1 fields // Canadian Journal of Physic. 1973. Vol. 51. P. 1467–1470.
  6. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / *E.M. Ovsyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov*. In S. Griffin (Eds.) Quaternions: Theory and Applications. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2017. P. 47–84.
  7. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / *E.M. Ovsyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov* In S. Griffin (Eds.) Quaternions: Theory and Applications. Inc. USA: Nova Science Publishers, 2017. P. 11–46.
  8. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field / *V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsyuk, V. Balan, V. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. Vol. 20. No 1. P. 21–39.
  9. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / *V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsyuk, V. Balan, V. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2018. Vol. 21. No 1. P. 1–20.
  10. *Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M.* On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2010. Vol. 13. No. 4. P. 352–367.
  11. *Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Voynova Ya.A., Red'kov V.M.* Quantum mechanics of spin 1 particle with quadrupole moment in external uniform magnetic field // Problems of Physics, Mathematics, and Technics. 2017. Vol. 32(3). P. 18–27.
  12. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / *E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Balkan Society of Geometers Proceedings. 2018. Vol. 25. P. 59–78.
  13. *Red'kov V.M.* Fields in Riemannian space and the Lorentz group. Minsk: Belarusian Science, 2009. 486 p.
  14. *Red'kov V.M.* Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrödinger basis. Minsk: Belarusian Science, 2011. 339 p.
  15. *Ronveaux A.* Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.

#### References

Статья поступила в редакцию 21.07.2020.

УДК 539.12  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-58-67

**А.Д. КОРАЛЬКОВ\***, **Е.М. ОВСИЮК\***,  
**В.В. КИСЕЛЬ\*\***, **Я.А. ВОЙНОВА\*\*\***,  
**В.М. РЕДЬКОВ\*\*\***

## О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ ОПИСАНИЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1 В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

\* *Мозырский государственный педагогический университет, г. Мозырь, Беларусь*

\*\* *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск, Беларусь*

\*\*\* *Институт физики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь*

[artemkoralkov@gmail.com](mailto:artemkoralkov@gmail.com)  
[e.ovsiyuk@mail.ru](mailto:e.ovsiyuk@mail.ru)  
[vasiliy\\_bspu@mail.ru](mailto:vasiliy_bspu@mail.ru)  
[voinovayanina@mail.ru](mailto:voinovayanina@mail.ru)  
[v.redkov@ifanbel.bas-net.by](mailto:v.redkov@ifanbel.bas-net.by)

**A.D. KORAL'KOV\***, **E.M. OVSIYUK\***, **V.V. KISEL\*\***,  
**YA.A. VOYNOVA\*\*\***, **V.M. RED'KOV\*\*\***

## ON SOME METHODS TO DESCRIBE BOUND STATES FOR A SPIN 1 PARTICLE IN THE COULOMB FIELD

\* *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

\*\* *Belarus State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*

\*\*\* *Institute of Physics, NAS of Belarus, Minsk, Belarus*

### Аннотация

Выполнен анализ системы из 6 радиальных уравнений, описывающей состояния с четностью  $P = (-1)^j$  для векторной частицы в кулоновском поле. С учетом обобщенного условия Лоренца показано, что одна функция из 6 обязана обращаться в нуль. Показывается, что в качестве независимой можно выбирать одну любую функцию из этих пяти, при этом для выбранной функции получаем два разных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Эти уравнения 2-го порядка найдены в явном виде, построены их решения Фробениуса, исследована сходимость вовлеченных в решения степенных рядов. Для получения правила квантования используется условие трансцендентности решений Фробениуса. Для обоих типов уравнений они дают разумные с физической точки зрения формулы для спектров энергии, причем эти спектры различаются между собой.

### Ключевые слова:

*частица со спином 1, кулоновское поле, точные решения, условие трансцендентности, связанные состояния*

### Abstract

We have studied the system of 6 equations which describes quantum states of a spin 1 particle with parity  $P = (-1)^j$  in external Coulomb field. It is shown that due to the Lorentz condition one of the radial functions must be equal to zero. Any of 5 remaining functions may be taken as a primary one. For such a primary function we derive two different 2-nd order differential equations. Their Frobenius solutions are constructed, and convergence of the involved power series is studied. As a quantization rule, we apply the so called transcendency condition of Frobenius solutions. In this way, for both equations we have found different reasonable from physical point of view energy spectra.

### Keywords:

*spin 1 particle, Coulomb field, exact solutions, transcendency condition, bound states*

### Введение

До сих пор не решенной полностью является квантово-механическая задача о поведении частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле [1–12]. Первый из трех ожидаемых подклассов решений и соответствующий ему дискретный спектр энергий был установлен еще И.Е. Таммом [1]. Незавершенность анализа относится к двум другим подклассам решений, описываемых системой из шести сцепляющихся между собой уравнений. Основной вывод работы [1] заключается в утверждении, что в этих состояниях векторная частица должна падать на кулоновский центр, не образуя устойчивых стационарных состояний в кулоновском поле. Однако исследование нерелятивистского предела в уравнениях для векторной частицы в кулоновском поле показало [2–7], что существуют три подкласса решений, отвечающих связанным состояниям, с соответствующими спектрами энергии, модифицируемыми известную шредингеровскую формулу для нерелятивистской скалярной частицы. Выполненный в работах [8,9] анализ также показал, что есть возможность

получать для некоторых радиальных функций дифференциальные уравнения второго порядка вместо уравнений 4-го порядка.

Исходя из уравнения Даффина–Кеммера для векторной частицы во внешнем кулоновском поле, можно вывести систему из 10 радиальных уравнений. С использованием оператора пространственной четности систему можно разбить на две подсистемы, состоящие из 4 и 6 уравнений. Решение системы из 4 уравнений известно и выражается через гипергеометрические функции, при этом найденный спектр энергий совпадает с известным для скалярной частицы в кулоновском поле. Также можно легко найти точные решения при нулевом значении квантового числа полного момента.

В настоящей работе внимание сосредоточено на плохо изученной подсистеме из 6 уравнений при значениях квантового числа полного момента  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Содержание сводится к следующему. На основе использования уравнения Даффина–Кеммера исследуется квантово-механическая задача о векторной частице во внешнем кулоновском поле притяжения. Выполнен анализ системы из 6 радиальных уравнений, описывающей состояния частицы с четностью  $P = (-1)^j$ . С учетом обобщенного условия Лоренца показано, что одна функция из 6 обязана обращаться в нуль; следовательно, имеем систему из 6 уравнений для 5 неизвестных функций. Показывается, что в качестве независимой можно выбрать любую одну функцию из пяти, при этом для данной функции получаем два разных дифференциальных уравнения 2-го порядка, которые можно связывать с двумя подклассами состояний частицы с четностью  $P = (-1)^j$ . Эти независимые уравнения 2-го порядка найдены в явном виде, построены их решения Фробениуса, методом Пуанкаре–Перрона исследована сходимости вовлеченных в эти решения степенных рядов. Для получения некоторого правила квантования используется условие трансцендентности решений Фробениуса. Для обоих типов уравнений они дают разумные с физической точки зрения формулы для спектров энергии, причем эти спектры различаются между собой.

### 1. Условие Лоренца во внешнем кулоновском поле

Состояния векторной частицы с четностью  $P = (-1)^j$  описываются системой из 6 радиальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1 + m\Phi_0 = 0, \\ & +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 - m\Phi_1 = 0, \\ & +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 - m\Phi_2 = 0, \\ & -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_1 = 0, \\ & i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 + mE_2 = 0, \\ & i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 + mH_1 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Известно, что для частицы со спином 1 во внешнем поле должно существовать обобщенное условие Лоренца. Это условие дает для состояний с четностью  $P = (-1)^j$  следующее [2]:

$$\begin{aligned} -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\Phi_2 - \frac{2\nu}{r}\Phi_1 = \\ = \frac{i\alpha}{2mr^2}E_2. \end{aligned} \quad (2)$$

С использованием (2) из системы (1) можно вывести важное соотношение. Для этого из уравнения (2) исключим функцию  $\Phi_2$  с помощью третьего уравнения в (1):

$$\begin{aligned} -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)m\Phi_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\left[i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - \frac{2i\nu}{r}H_1\right] - \\ - \frac{2m\nu}{r}\Phi_1 = \frac{i\alpha}{2r^2}E_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)m\Phi_0 + i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \\ - \frac{2i\nu}{r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + \frac{2m\nu}{r}\Phi_1 = \frac{i\alpha}{2r^2}E_2. \end{aligned}$$

Преобразуя здесь второй и третий члены с помощью 1-го и 2-го уравнений системы (1), находим

$$i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)m\Phi_0 - im\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_0 = \frac{i\alpha}{2r^2}E_2.$$

Таким образом, пришли к условию  $E_2 = 0$ , т.е. в (1) имеем 6 уравнений для 5 неизвестных функций. С учетом этого равенства система (1) примет вид

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2\frac{\nu}{r}E_1 + m\Phi_0 = 0, \\ 2) \quad & +i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 - m\Phi_1 = 0, \\ 3) \quad & -2i\frac{\nu}{r}H_1 - m\Phi_2 = 0, \\ 4) \quad & -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_1 = 0, \\ 5) \quad & i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 = 0, \\ 6) \quad & i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 + mH_1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Исключим мнимую единицу, перейдя к новым переменным:  $i\Phi_1 = \varphi_1$ ,  $i\Phi_2 = \varphi_2$ , тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad & mE_1 = -\frac{m^2}{2\nu}r\Phi_0, \\ 2) \quad & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)mE_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)mH_1 + m^2\varphi_1 = 0, \\ 3) \quad & mH_1 = \frac{m^2}{2\nu}r\varphi_2, \\ 4) \quad & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\varphi_1 - \frac{\nu}{r}\Phi_0 + mE_1 = 0, \\ 5) \quad & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\varphi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 = 0, \end{aligned}$$

$$6) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\varphi_1 + \frac{\nu}{r}\varphi_2 + mH_1 = 0. \quad (4)$$

С помощью уравнений 1) и 3) можно исключить функции  $E_1$  и  $H_1$ , тогда остается четыре уравнения:

$$2) -\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{m^2}{2\nu}r\Phi_0 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{m^2}{2\nu}r\varphi_2 + m^2\varphi_1 = 0,$$

$$4) \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\varphi_1 - \frac{\nu}{r}\Phi_0 - \frac{m^2}{2\nu}r\Phi_0 = 0,$$

$$5) \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\varphi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 = 0,$$

$$6) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\varphi_1 + \frac{\nu}{r}\varphi_2 + \frac{m^2}{2\nu}r\varphi_2 = 0. \quad (5)$$

Легко увидеть две разные возможности для того, чтобы получить уравнения второго порядка для функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Первая возможность такая: из уравнения 2) с помощью уравнения 6) исключаем функцию  $\varphi_2$  и с помощью уравнения 4) исключаем функцию  $\Phi_0$ , тогда приходим к уравнению второго порядка для  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} - \frac{2r}{r^2 + 2\nu^2/m^2}\right)\frac{d\varphi_1}{dr} + \\ &+ \left(-m^2 + \epsilon^2 + \frac{2\alpha\epsilon}{r} - \frac{2}{r^2 + 2\nu^2/m^2} + \right. \\ &\left. + \frac{-2\nu^2 + \alpha^2 + 2}{r^2}\right)\varphi_1 = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Это уравнение имеет четыре сингулярные точки: три регулярные и точка  $r = \infty$ , которая является нерегулярной особенностью ранга 2. Только две особые точки лежат в физической области переменной  $r$ . Зная функцию  $\varphi_1$ , можно найти остальные: сначала функцию  $\Phi_0$  (см. (5)), затем – функцию  $\varphi_2$  (см. (6)), и затем – функции  $E_1$  и  $H_1$  (см. (1) и (3)).

Вторая возможность следующая: из 4) выражаем  $\Phi_0$  через  $\varphi_1$ , затем из 2) выражаем  $\varphi_1$  через  $\varphi_2$  и подставляем это в уравнение 6. В результате находим уравнение для функции  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_2}{dr^2} + \left[\frac{4}{r} + \frac{2m^2r}{m^2r^2 + 2\nu^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2(-m^2r + \epsilon^2r + \alpha\epsilon)}{m^2r^2 - \epsilon^2r^2 - 2\alpha\epsilon r + 2\nu^2 - \alpha^2}\right]\frac{d\varphi_2}{dr} + \\ &+ \left[-m^2 + \epsilon^2 + \frac{2\alpha\epsilon(2\nu^2 - \alpha^2 + 2)}{(2\nu^2 - \alpha^2)r} + \right. \\ &+ \frac{4m^2}{m^2r^2 + 2\nu^2} + \frac{-2\nu^2 + \alpha^2 + 2}{r^2} + \\ &+ \left(-4m^2r\alpha\epsilon + 4r\alpha\epsilon^3 - 8m^2\nu^2 + \right. \\ &\left. + 4m^2\alpha^2 + 8\nu^2\epsilon^2 + 4\alpha^2\epsilon^2\right) \times \\ &\times \left(m^2r^2 - \epsilon^2r^2 - 2\alpha\epsilon r + 2\nu^2 - \alpha^2\right)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(2\nu^2 - \alpha^2\right)^{-1} \varphi_2 = 0. \quad (7)$$

Это уравнение имеет 6 особых точек, 5 из них регулярные, а точка  $r = \infty$  является нерегулярной ранга 2. Зная  $\varphi_2$ , можно найти  $\Phi_0$  (см. (5)), затем можно найти  $\varphi_1$  (см. (6)), и затем – выражения для  $E_1$  и  $H_1$ .

## 2. Анализ уравнения для функции $\varphi_1$

Обратимся к анализу уравнения (6) для функции  $\varphi_1$ . Преобразуем его к новым переменным:

$$x = mr = \frac{Mc}{\hbar}r = \frac{r}{\lambda}, \quad \frac{\epsilon}{m} = E, \quad 2\nu^2 = \Gamma^2.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \left(\frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2 + \Gamma^2}\right)\frac{d\varphi_1}{dx} + \left(E^2 - 1 + \right. \\ &\left. + \frac{2\alpha E}{x} - \frac{2}{x^2 + \Gamma^2} + \frac{\alpha^2 + 2 - \Gamma^2}{x^2}\right)\varphi_1 = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x + i\Gamma} - \frac{1}{x - i\Gamma}\right)\frac{d\varphi_1}{dx} + \\ &+ \left(E^2 - 1 + \frac{2\alpha E}{x} - \frac{i/\Gamma}{x + i\Gamma} + \frac{i/\Gamma}{x - i\Gamma} + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha^2 + 2 - \Gamma^2}{x^2}\right)\varphi_1 = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь имеем три регулярные особые точки  $x = 0, -i\Gamma, +i\Gamma$  и одну нерегулярную особую точку  $x = \infty$  ранга 2. Построим решения Фробениуса [10,11] для этого уравнения (пусть  $\mu^2 = \Gamma^2 - 2 - \alpha^2$ ):

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x + i\Gamma} - \frac{1}{x - i\Gamma}\right)\frac{d\varphi_1}{dx} + \\ &+ \left(E^2 - 1 + \frac{2\alpha E}{x} - \frac{i/\Gamma}{x + i\Gamma} + \right. \\ &\left. + \frac{i/\Gamma}{x - i\Gamma} - \frac{\mu^2}{x^2}\right)\varphi_1 = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Ищем их в виде  $\varphi_1(x) = x^A e^{Bx} f(x)$ . Для функции  $f(x)$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} &f'' + \left(\frac{2A}{x} + 2B + \frac{4}{x} - \frac{1}{x + i\Gamma} - \frac{1}{x - i\Gamma}\right)f' + \\ &\left\{\frac{A(A-1)}{x^2} + \frac{2AB}{x} + B^2 + \frac{4A}{x} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{x + i\Gamma} \frac{A}{x} - \frac{1}{x - i\Gamma} \frac{A}{x} + \frac{4B}{x} - \frac{B}{x + i\Gamma} - \frac{B}{x - i\Gamma} + \right. \\ &\left. + E^2 - 1 + \frac{2\alpha E}{x} - \frac{i/\Gamma}{x + i\Gamma} + \frac{i/\Gamma}{x - i\Gamma} - \frac{\mu^2}{x^2}\right\}f_1 = 0. \end{aligned}$$

С учетом ограничений на параметры:  $A = -3/2 \pm \sqrt{(3/2)^2 + \mu^2}$ ,  $B = \pm\sqrt{1 - E^2}$ , приходим к

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left( 2B + \frac{4 + 2A}{x} - \frac{1}{x - i\Gamma} - \frac{1}{x + i\Gamma} \right) \frac{df}{dx} + \left( \frac{2AB + 2E\alpha + 4B}{x} + \frac{iA - B\Gamma + i}{\Gamma(x - i\Gamma)} - \frac{iA + B\Gamma + i}{\Gamma(x + i\Gamma)} \right) f = 0. \quad (11)$$

Чтобы строить решения, пригодные для описания связанных состояний, выбираем

$$A = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \mu^2} > 0, \quad B = -\sqrt{1 - E^2} < 0.$$

Удобно воспользоваться сокращающими обозначениями:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left( K + \frac{L}{x} - \frac{1}{x - i\Gamma} - \frac{1}{x + i\Gamma} \right) \frac{df}{dx} + \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{x - i\Gamma} - \frac{c}{x + i\Gamma} \right) f = 0. \quad (12)$$

Строим решения последнего уравнения в виде степенных рядов:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ . После выполнения необходимых вычислений находим четырехчленное рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда:

$$\begin{aligned} & [K(k - 2) + (a + b - c)]d_{k-2} + \\ & + [(k - 1)(k - 2) + (L - 2)(k - 1) + i\Gamma(b + c)]d_{k-1} + \\ & + [K\Gamma^2 k + a\Gamma^2]d_k + \\ & + [\Gamma^2(k + 1)k + L\Gamma^2(k + 1)]d_{k+1} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Исследуя сходимость ряда по методу Пуанкаре–Перрона, получаем два возможных радиуса сходимости:  $R_{conv} = \Gamma, +\infty$ . Гарантированный (минимальный) радиус сходимости – это  $\Gamma$ . Однако легко показать, что поведение решений около особых точек  $\pm i\Gamma$  задается соотношениями  $\varphi_1 \sim (x \pm i\Gamma)^D$ ,  $D = 0, +2$ , т.е. ряд  $f(x)$  обязательно сходится в этих особых точках. Поэтому можно полагать, что радиус сходимости степенного ряда  $f(x)$  равен  $\infty$ .

Пробуем получить правило квантования энергии, выделяя из всех построенных решений Фробениуса так называемые трансцендентные [10]. Условие трансцендентности имеет вид (см. (13)):

$$K(k - 2) + (a + b - c) = 0, \quad k \geq 2. \quad (14)$$

Находим явный вид этого условия

$$\sqrt{1 - E^2} N = E\alpha, \quad \text{где } N \equiv (k - 2) + A + 1. \quad (15)$$

Отсюда получаем формулу для уровней энергии (здесь  $k - 2 = n = 0, 1, 2, 3, \dots$ )

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/N^2}},$$

$$N = n - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \mu^2}. \quad (16)$$

Учитывая  $\mu^2 = j(j+1) - 2 - \alpha^2$ , перепишем формулу для энергий в следующем виде:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/N^2}},$$

$$N = n - \frac{1}{2} + \sqrt{j(j+1) + \frac{1}{4} - \alpha^2}, \quad (17)$$

где  $j = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

### 3. Уравнение для функции $\varphi_2$

Обратимся к анализу уравнения (7) для  $\varphi_2$ . Преобразуем его к виду (напоминаем, что  $x = mr, \epsilon/m = E, 2\nu^2 = \Gamma^2$ )

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} + \left[ \frac{4}{x} + \frac{2x}{x^2 + \Gamma^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\alpha E - 2(1 - E^2)x}{x^2(1 - E^2) - 2\alpha E x + \Gamma^2 - \alpha^2} \right] \frac{d\varphi_2}{dx} + \\ & + \left[ -(1 - E^2) + \frac{2\alpha E(\Gamma^2 - \alpha^2 + 2)}{\Gamma^2 - \alpha^2} \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2 + \Gamma^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2 - (\Gamma^2 - \alpha^2)}{x^2} + \frac{1}{\Gamma^2 - \alpha^2} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{-4\alpha E(1 - E^2)x - 4\Gamma^2(1 - E^2) + 4\alpha^2(1 + E^2)}{x^2(1 - E^2) - 2x\alpha E + \Gamma^2 - \alpha^2} \right] \cdot \\ & \cdot \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Корни полинома второй степени

$$x^2(1 - E^2) - 2x\alpha E + \Gamma^2 - \alpha^2 = 0$$

равны

$$x_{1,2} = \frac{\alpha E \pm \sqrt{\alpha^2 E^2 - (\Gamma^2 - \alpha^2)(1 - E^2)}}{1 - E^2}. \quad (19)$$

Чтобы оба корня были положительными, необходимо выполнение неравенства

$$1 - E^2 < \frac{\alpha^2}{\Gamma^2} \implies j(j+1) < \frac{\alpha^2}{1 - E^2}. \quad (20)$$

Квантовое число  $j$  не может быть ограниченным, наоборот, оно может быть как угодно большим. Поэтому последнее неравенство невыполнимо. Это означает, что корни  $x_{1,2}$  квадратного уравнения комплексные и сопряженные друг другу, т.е. лежат вне физической области изменения переменной  $x = mr$ .

Уравнение (18) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} + \left[ \frac{4}{x} + \frac{1}{x + i\Gamma} + \frac{1}{x - i\Gamma} - \frac{1}{x - x_1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{x - x_2} \right] \frac{d\varphi_2}{dx} + \left[ -(1 - E^2) + \frac{2\alpha E(\Gamma^2 - \alpha^2 + 2)}{(\Gamma^2 - \alpha^2)} \frac{1}{x} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha^2 - \Gamma^2 + 2}{x^2} + \frac{2i}{\Gamma} \frac{1}{x + i\Gamma} - \frac{2i}{\Gamma} \frac{1}{x - i\Gamma} + \frac{1}{\Gamma^2 - \alpha^2} \cdot \left. \frac{-4\alpha E(1 - E^2)x - 4\Gamma^2(1 - E^2) + 4\alpha^2(1 + E^2)}{x^2(1 - E^2) - 2x\alpha E + \Gamma^2 - \alpha^2} \right].$$

$$\varphi_2 = 0. \quad (21)$$

Это уравнение имеет 5 регулярных особых точек (из них только две лежат в физической области переменной) и одну нерегулярную точку  $x = \infty$  ранга 2:

$$0, \quad x_1, \quad x_2, \quad -i\Gamma, \quad +i\Gamma; \quad \infty_{[2]}.$$

В окрестности точек  $x_1, x_2$  решения ведут себя так:

$$\varphi_2(x) = (x - x_1)^\rho, \quad \varphi_2(x) = (x - x_2)^\rho, \quad (22)$$

где  $\rho = 0, 2$ . В окрестности точек  $x = \pm i\Gamma$  решения ведут себя следующим образом:

$$\varphi_2(x) = (x \pm i\Gamma)^\sigma, \quad \sigma = 0. \quad (23)$$

В окрестности точки  $x = 0$  поведение решения описывается формулой  $\varphi_2(x) = x^A$ , где  $A$  является корнем уравнения

$$A(A - 1) + 4A = (\Gamma^2 - \alpha^2) - 2,$$

и имеет вид

$$A = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \Gamma^2 - 2 - \alpha^2}. \quad (24)$$

Напомним, что  $\Gamma^2 = j(j + 1) \geq 2$ . На бесконечности поведение решений следующее:

$$\varphi_2(x) = e^{Bx}, \quad B = \pm\sqrt{1 - E^2}. \quad (25)$$

Уравнение (21) удобно представлять символически как

$$\varphi_2'' + \left( \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x - i\Gamma} + \frac{a_3}{x + i\Gamma} + \frac{a_4}{x - x_1} + \frac{a_5}{x - x_2} \right) \varphi_2' + \left( D + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_2}{x - i\Gamma} + \frac{b_3}{x + i\Gamma} + \frac{b_4}{x - x_1} + \frac{b_5}{x - x_2} \right) \varphi_2 = 0. \quad (26)$$

Строим решения Фробениуса в окрестности точки  $x = 0$  с помощью подстановки  $\varphi_2(x) = x^A e^{Bx} f(x)$ . Для функции  $f(x)$  имеем уравнение

$$f'' + \left( 2B + \frac{a_1 + 2A}{x} + \frac{a_2}{r - i\Gamma} + \frac{a_3}{r + i\Gamma} + \frac{a_4}{x - x_1} + \frac{a_5}{x - x_2} \right) f' + \left( (D + B^2) + \frac{a_1 A + b + A(A - 1)}{x^2} + \frac{a_1 B - \frac{a_2 A}{i\Gamma} + \frac{a_3 A}{i\Gamma} - \frac{a_4 A}{x_1} - \frac{a_5 A}{x_2} + b_1 + 2AB}{x} + \frac{\frac{a_2 A}{i\Gamma} + a_2 B + b_2}{x - i\Gamma} + \frac{-\frac{a_3 A}{i\Gamma} + a_3 B + b_3}{x + i\Gamma} + \frac{\frac{a_4 A}{x_1} + a_4 B + b_4}{x - x_1} + \frac{\frac{a_5 A}{x_2} + a_5 B + b_5}{x - x_2} \right) f = 0.$$

Чтобы следить за решениями, пригодными для описания связанных состояний, требуем выполнения условий

$$B = -\sqrt{1 - E^2},$$

$$A = \frac{3 + \sqrt{1 + 4(\Gamma^2 - \alpha^2)}}{2} > 0. \quad (27)$$

Резльтирующее уравнение для функции  $f(x)$  можно символически записать так:

$$f'' + \left( 2C + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x - i\Gamma} + \frac{C_3}{x + i\Gamma} + \frac{C_4}{x - x_1} + \frac{C_5}{x - x_2} \right) f' + \left( \frac{D_1}{x} + \frac{D_2}{x - i\Gamma} + \frac{D_3}{x + i\Gamma} + \frac{D_4}{x - x_1} + \frac{D_5}{x - x_2} \right) f = 0. \quad (28)$$

Ищем решения в виде степенного ряда  $f = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ . В результате приходим к шестичленным рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} & [2C(n - 4) + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5] d_{n-4} + \\ & [(n - 3)(n - 4) - 2C(x_1 + x_2)(n - 3) + \\ & + C_1(n - 3) + C_2(n - 3) + C_3(n - 3) + C_4(n - 3) + \\ & + C_5(n - 3) - D_1(x_1 + x_2) - D_2(x_1 + x_2 - i\Gamma) - \\ & - D_3(x_1 + x_2 + i\Gamma) - D_4 x_2 - D_5 x_1] d_{n-3} + \\ & [-(x_1 + x_2)(n - 2)(n - 3) + 2C(x_1 x_2 + \Gamma^2)(n - 2) - \\ & - C_1(x_1 + x_2)(n - 2) - C_2(x_1 + x_2 - i\Gamma)(n - 2) - \\ & - C_3(x_1 + x_2 + i\Gamma)(n - 2) - C_4 x_2(n - 2) - C_5 x_1(n - 2) + \\ & + D_1(x_1 x_2 + \Gamma^2) - D_2(x_1 i\Gamma + x_2 i\Gamma - x_1 x_2) + \\ & + D_3(x_1 i\Gamma + x_2 i\Gamma + x_1 x_2) + D_4 \Gamma^2 + D_5 \Gamma^2] d_{n-2} + \\ & [(x_1 x_2 + \Gamma^2)(n - 1)(n - 2) - 2C(x_1 + x_2) \Gamma^2(n - 1) + \\ & + C_1(x_1 x_2 + \Gamma^2)(n - 1) - C_2(x_1 i\Gamma + x_2 i\Gamma - x_1 x_2)(n - 1) + \\ & + C_3(x_1 i\Gamma + x_2 i\Gamma + x_1 x_2)(n - 1) + C_4 \Gamma^2(n - 1) + \\ & + C_5 \Gamma^2(n - 1) - D_1(x_1 + x_2) \Gamma^2 + D_2 i\Gamma x_1 x_2 - \\ & - D_3 i\Gamma x_1 x_2 - D_4 \Gamma^2 x_2 - D_5 \Gamma^2 x_1] d_{n-1} + \\ & + [-(x_1 + x_2) \Gamma^2 n(n - 1) + 2C \Gamma^2 x_1 x_2 n - \\ & - C_1(x_1 + x_2) \Gamma^2 n + C_2 i\Gamma x_1 x_2 n - \\ & - C_3 i\Gamma x_1 x_2 n - C_4 \Gamma^2 x_2 n - C_5 \Gamma^2 x_1 n + D_1 \Gamma^2 x_1 x_2] d_n + \\ & + \Gamma^2 x_1 x_2 (n + 1)(n + C_1) d_{n+1} = 0. \quad (29) \end{aligned}$$

Применяя метод Пуанкаре–Перрона, находим возможные радиусы сходимости:

$$R_{conv} = \infty, \quad |\Gamma|, \quad |x_1|, \quad |x_2|. \quad (30)$$

Получим правило квантования энергии, выделяя трансцендентные решения Фробениуса. Условие трансцендентности имеет вид (см. рекуррентные соотношения (29))

$$P_{k-4} = 0, \quad k \geq 4,$$

$$2C(k-4) + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 = 0, \quad (31)$$

где

$$2C = -2\sqrt{1-E^2},$$

$$D_1 = a_1B - a_2A/i\Gamma + a_3A/i\Gamma - a_4A/x_1 - a_5A/x_2 + b_1 + 2AB,$$

$$D_2 = a_2A/i\Gamma + a_2B + b_2, \quad D_3 = -a_3A/i\Gamma + a_3B + b_3,$$

$$D_4 = a_4A/x_1 + a_4B + b_4, \quad D_5 = a_5A/x_2 + a_5B + b_5.$$

Учтем явный вид параметров:

$$x_1 = \frac{\alpha E - \sqrt{\alpha^2 - \Gamma^2 + E^2\Gamma^2}}{1 - E^2},$$

$$x_2 = \frac{\alpha E + \sqrt{\alpha^2 - \Gamma^2 + E^2\Gamma^2}}{1 - E^2},$$

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = -1,$$

$$b_1 = \frac{2\alpha E (\Gamma^2 - \alpha^2 + 2)}{\Gamma^2 - \alpha^2}, \quad b_2 = \frac{-2i}{\Gamma}, \quad b_3 = \frac{2i}{\Gamma},$$

$$b_4 = -\frac{2(\alpha E + \sqrt{\alpha^2 - \Gamma^2 + E^2\Gamma^2})}{\Gamma^2 - \alpha^2},$$

$$b_5 = \frac{2(-\alpha E + \sqrt{\alpha^2 - \Gamma^2 + E^2\Gamma^2})}{\Gamma^2 - \alpha^2}.$$

В результате условие трансцендентности (31) дает уравнение (помним, что  $k-4 \geq 0$ )

$$\sqrt{1-E^2}[(k-4) + (A+2)] = \alpha E. \quad (32)$$

Пусть  $(k-4) + (A+2) = N$ , тогда для уровней энергии получаем формулу

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/N^2}}, \quad (33)$$

где

$$N = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + j(j+1) - \alpha^2},$$

$$k-4 = n = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что формулы для энергий, полученные в двух последних разделах, фактически описывают один и тот же спектр. Это согласуется с тем, что в соответствии с уравнениями 4) и 5) из системы (3), функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  различаются на элементарный рациональный множитель.

#### 4. Уравнение второго порядка для функции $\Phi_0$

Есть простая возможность найти уравнение 2-го порядка для функции  $\Phi_0$ . Для этого из уравнения 4) в (5) найдем следующее соотношение, связывающее функции  $\Phi_0$  и  $\varphi_1$ :

$$\frac{2\nu}{r} \left( \epsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \varphi_1(r) = \left( \frac{2\nu^2}{r^2} + m^2 \right) \Phi_0(r),$$

или в безразмерных переменных (множитель  $2\nu$  несущественен)

$$\Phi_0(x) = 2\nu \frac{(Ex + \alpha)}{2\nu^2 + x^2} \varphi_1(x) = F(x)\varphi_1(x). \quad (34)$$

Если воспользоваться известным уравнением 2-го порядка для функции  $\varphi_1$

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 = F^{-1}\Phi_0,$$

то можно получить и уравнение 2-го порядка для  $\Phi_0$

$$\Delta F^{-1}\Phi_0 = 0 \implies F\Delta F^{-1}\Phi_0 = 0.$$

Таким образом, уравнение для функции  $\Phi_0$  таково:

$$\frac{Ex + \alpha}{2\nu^2 + x^2} \Delta \frac{2\nu^2 + x^2}{Ex + \alpha} \Phi_0 = 0, \quad (35)$$

где оператор  $\Delta$  равен (см. (8))

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2 + \Gamma^2} \right) \frac{d}{dx} + E^2 - 1 + \frac{2\alpha E}{x} + \frac{\alpha^2 + 2 - \Gamma^2}{x^2} - \frac{2}{x^2 + \Gamma^2}.$$

Уравнение (35) легко приводится к следующему виду (учитываем  $2\nu^2 = \Gamma^2$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Phi_0}{dx^2} + \left[ \frac{4}{x} - \frac{2E}{Ex + \alpha} + \frac{2x}{x^2 + 2\nu^2} \right] \frac{d\Phi_0}{dx} + \\ & + \left[ \frac{2E(\alpha^2 - 2)}{x\alpha} + \frac{-2\nu^2 + \alpha^2 + 2}{x^2} + \frac{8\nu^2}{(x^2 + 2\nu^2)^2} + \right. \\ & + \frac{2(4E^2\nu^2 + 3\alpha^2)E^2}{(2E^2\nu^2 + \alpha^2)(Ex + \alpha)\alpha} + E^2 - 1 + \frac{2E^2}{(Ex + \alpha)^2} + \\ & \left. + \frac{-2E\alpha x + 4E^2\nu^2 + 4\alpha^2}{(x^2 + 2\nu^2)(2E^2\nu^2 + \alpha^2)} \right] \Phi_0 = 0. \quad (36) \end{aligned}$$

Исследовать это уравнение нет необходимости, поскольку оно должно приводить к спектру энергий, совпадающему со спектром, полученным выше из уравнений для функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , отличаясь от этих функций простыми множителями.

#### 5. Анализ второго уравнения для функции $\Phi_0$

Важным фактом является то, что для переменной  $\Phi_0(x)$ , комбинируя исходную систему уравнений из 6 переменных, можно вывести другое дифференциальное уравнение 2-го порядка для функции  $\Phi_0$ , которое приводит к другому спектру энергий. Чтобы вывести это второе уравнение для  $\Phi_0(x)$ , с самого начала будем исходить из уравнений, записанных в безразмерных величинах:

$$1) E_1 = -\frac{1}{2\nu}x\Phi_0,$$

$$2) \left( E + \frac{\alpha}{x} \right) E_1 + \left( \frac{d}{dx} + \frac{1}{x} \right) H_1 + \varphi_1 = 0,$$

$$3) \frac{2\nu}{x} H_1 = \varphi_2, \quad 4) - \left( E + \frac{\alpha}{x} \right) \varphi_1 + \frac{\nu}{x} \Phi_0 = E_1,$$

$$5) (E + \frac{\alpha}{x})\varphi_2 + \frac{d}{dx}\Phi_0 = 0,$$

$$6) (\frac{d}{dx} + \frac{1}{x})\varphi_1 + \frac{\nu}{x}\varphi_2 + H_1 = 0. \quad (37)$$

Сначала с помощью уравнений 3) и 4) исключим функции  $\varphi_2$  и  $E_1$ :

$$1) -\frac{2\nu}{x}(E + \frac{\alpha}{x})\varphi_1 + (\frac{2\nu^2}{x^2} + 1)\Phi_0 = 0,$$

$$2) (\frac{d}{dx} + \frac{1}{x})H_1 + (E + \frac{\alpha}{x})\frac{\nu}{x}\Phi_0 + [1 - (E + \frac{\alpha}{x})^2]\varphi_1 = 0,$$

$$5) \frac{d}{dx}\Phi_0 + \frac{2\nu}{x}(E + \frac{\alpha}{x})H_1 = 0,$$

$$6) (\frac{d}{dx} + \frac{1}{x})\varphi_1 + [(1 + \frac{2\nu^2}{x^2})H_1 = 0. \quad (38)$$

Подействуем на уравнение 5) оператором  $\frac{d}{dx}$ :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi_0 - \frac{2\nu}{x^2}(E + \frac{\alpha}{x})H_1 - \frac{2\nu}{x}\frac{\alpha}{x^2}H_1 + \frac{2\nu}{x}(E + \frac{\alpha}{x})\frac{d}{dx}H_1 = 0.$$

Затем с помощью уравнения 2)

$$\frac{d}{dx}H_1 = - \left[ \frac{1}{x}H_1 + (E + \frac{\alpha}{x})\frac{\nu}{x}\Phi_0 + [1 - (E + \frac{\alpha}{x})^2]\varphi_1 \right],$$

получим

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\nu^2}{x^2}(E + \frac{\alpha}{x})^2 \right] \Phi_0 - \left[ \frac{2\nu}{x^2}(E + \frac{\alpha}{x}) + \frac{2\nu}{x}\frac{\alpha}{x^2} + \frac{2\nu}{x^2}(E + \frac{\alpha}{x}) \right] H_1 - \frac{2\nu}{x}(E + \frac{\alpha}{x}) \left[ 1 - (E + \frac{\alpha}{x})^2 \right] \varphi_1 = 0.$$

Чтобы исключить отсюда функцию  $\varphi_1$ , воспользуемся уравнением 1) из (38):

$$\frac{2\nu}{x}(E + \frac{\alpha}{x})\varphi_1 = (1 + \frac{2\nu^2}{x^2})\Phi_0.$$

В результате приходим к

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + (E + \frac{\alpha}{x})^2 - 1 - \frac{2\nu^2}{x^2} \right] \Phi_0 - \frac{4\nu}{x^2}(E + \frac{\alpha}{x})H_1 - \frac{2\nu}{x}\frac{\alpha}{x^2}H_1 = 0. \quad (39)$$

Теперь воспользуемся уравнением 5) из (38)

$$\frac{d}{dx}\Phi_0 + \frac{2\nu}{x}(E + \frac{\alpha}{x})H_1 = 0,$$

тогда получим

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + (E + \frac{\alpha}{x})^2 - 1 - \frac{2\nu^2}{x^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} \right] \Phi_0 -$$

$$-\frac{2\nu}{x}\frac{\alpha}{x^2}H_1 = 0.$$

Наконец, воспользовавшись еще раз уравнением 5) из (38):

$$-\frac{x}{2\nu}\frac{1}{(E + \frac{\alpha}{x})}\frac{d}{dx}\Phi_0 = H_1,$$

приходим к нужному уравнению второго порядка для функции  $\Phi_0$

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{3}{x} - \frac{E}{Ex + \alpha} \right) \frac{d}{dx} + E^2 - 1 + \frac{2E\alpha}{x} + \frac{\alpha^2 - 2\nu^2}{x^2} \right] \Phi_0 = 0. \quad (40)$$

Уравнение (40) при переходе к переменной  $z$  по формуле  $x = -\frac{\alpha}{E}z$  принимает вид

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \left( \frac{3}{z} - \frac{1}{z-1} \right) \frac{d\Phi_0}{dz} + \left( \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{E^2} - \frac{2\alpha^2}{z} - \frac{2\nu^2 - \alpha^2}{z^2} \right) \Phi_0 = 0. \quad (41)$$

Далее будем пользоваться обозначениями

$$\gamma^2 = 2\nu^2 - \alpha^2 = j(j+1) - \alpha^2 > 0,$$

$$-\Lambda^2 = -(-\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{E^2}) = -\alpha^2 \frac{1 - E^2}{E^2} < 0, \quad (42)$$

тогда уравнение (41) запишется так:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \left( \frac{3}{z} - \frac{1}{z-1} \right) \frac{d\Phi_0}{dz} + \left( -\Lambda^2 - \frac{2\alpha^2}{z} - \frac{\gamma^2}{z^2} \right) \Phi_0 = 0. \quad (43)$$

Оно имеет две регулярные точки  $z = 0, 1$  и одну нерегулярную точку  $z = \infty$  ранга 2.

Рассмотрим поведение функций  $\Phi_0(z)$  около точки  $z = 0$

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \frac{3}{z}\frac{d\Phi_0}{dz} - \frac{\gamma^2}{z^2}\Phi_0 = 0,$$

$$\Phi_0 \sim z^A, \quad A = -1 + \sqrt{1 + \gamma^2} > 0. \quad (44)$$

Связанным состояниям соответствуют положительные значения для  $A$ .

В области  $z = +\infty$  решения ведут себя так:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\Phi_0}{dz} - \Lambda^2\Phi_0 = 0,$$

$$\Phi_0 = e^{\sqrt{\Lambda^2}z} = e^{-\sqrt{M^2c^4 - E^2}r/\hbar c}. \quad (45)$$

Выберем решения, затухающие на бесконечности. Будем строить решения уравнения (41) в следующем виде  $\Phi_0(z) = z^A e^{Bz} f(z)$ , тогда уравнение для функции  $f$  таково

$$f'' + \left( 2B + \frac{2A+3}{z} - \frac{1}{z-1} \right) f' +$$

$$+ \left( (B^2 - \Lambda^2) + \frac{A^2 + 2A - \gamma^2}{z^2} + \frac{2AB + A + 3B - 2\alpha^2}{z} - \frac{A + B}{z - 1} \right) f = 0.$$

Выбрав  $A$  и  $B$  в виде  $A = -1 + \sqrt{1 + \gamma^2}$ ,  $B = +\sqrt{\Lambda^2}$ , приводим уравнение к более простому виду

$$f'' + \left( 2B + \frac{2A + 3}{z} - \frac{1}{z - 1} \right) f' + \left( \frac{2AB + A + 3B - 2\alpha^2}{z} - \frac{A + B}{z - 1} \right) f = 0. \quad (46)$$

Оно может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна [10, 11]:

$$f'' + \left( -t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z - 1} \right) f' + \frac{\lambda - taz}{z(z - 1)} f = 0, \quad (47)$$

где параметры заданы равенствами

$$\begin{aligned} t &= -2B, & c &= 2A + 3, & d &= -1, \\ -\lambda &= 2AB + 3B + A - 2\alpha^2, \\ -ta &= 2BA + 2B - 2\alpha^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Для параметра  $a$  находим следующее выражение:

$$a = A + 1 - \frac{\alpha^2}{B} = +\sqrt{1 + \gamma^2} - \frac{\alpha^2}{\Lambda}. \quad (49)$$

Решения уравнения для  $f(z)$  в окрестности точки  $z = 0$  будем строить в форме степенных рядов:  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ , что приводит к трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} cd_1 + \lambda d_0 &= 0, \\ t(k - 1 + a)d_{k-1} - [k(k - 1 + t + d + c) + \lambda]d_k + \\ + (k + 1)(k + c)d_{k+1} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (50)$$

Рекуррентную формулу можно переписать так:

$$\begin{aligned} P_k d_k - (Q_k + \lambda)d_{k+1} + R_k d_{k+2} &= 0, \\ P_k &= t(k - 1 + a), \quad Q_k = k(k - 1 + t + d + c), \\ R_k &= (k + 1)(k + c), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Соотношение (51) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{k^2} P_k - \frac{1}{k^2} (Q_k + \lambda) \frac{d_{k+1}}{d_k} + \frac{1}{k^2} R_k \frac{d_{k+2}}{d_{k+1}} \frac{d_{k+1}}{d_k} = 0.$$

Отсюда при  $k \rightarrow \infty$  находим простое алгебраическое соотношение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+1}}{d_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+2}}{d_{k+1}} = r, \quad r^2 - r = 0.$$

Согласно методу Пуанкаре–Перрона, заключаем, что минимальный радиус сходимости равен  $R_{conv} = 1$ . Поведение решений около точки  $z = 1$  следующее:  $\Phi_0 \sim (z - 1)^\rho$ ,  $\rho = 0, 2$ . Другая возможность для радиуса сходимости – это  $R_{conv} = \infty$ .

Если наложить условие  $P_n = 0$ , то приходим к классу трансцендентных вырожденных функций Гойна [10]:

$$P_k = 0, \quad -a = k - 1 = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (52)$$

Это условие дает следующее правило квантования:

$$n + \sqrt{1 + \gamma^2} = \frac{\alpha^2}{\Lambda} \equiv \alpha \sqrt{\frac{E^2}{1 - E^2}},$$

откуда следует формула для уровней энергии

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/N^2}},$$

$$N = n + \sqrt{j(j + 1) + 1 - \alpha^2}. \quad (53)$$

Обращаем внимание на то, что она отличается от формулы для энергий (33). Последнее означает, что выведенное уравнение 2-го порядка для функции  $\Phi_0$  описывает класс состояний, отличных от состояний, определяемых как решения уравнения для  $\varphi_1$ , а также для связанной с ней простым множителем функции  $\varphi_2$ . Из общих соображений и следует ожидать, что система из 6 уравнений описывает два класса состояний векторной частицы в кулоновском поле.

Нужно обратить внимание на то, что согласно уравнениям 1) и 4) в (37), две функции связаны простым множителем:

$$\Phi_0(x) = 2\nu \frac{\alpha + Ex}{2\nu^2 + x^2} \varphi_1(x). \quad (54)$$

Если подставить это выражение для  $\Phi_0$  в уравнение (40), то для функции  $\varphi_1(x)$  получим уравнение, отличное из решенного выше уравнения (9),(10). Убедимся в этом. Исходим из соотношения связи

$$\Phi_0(x) = f(x)\varphi_1(x), \quad f(x) = \frac{xEx + \alpha}{2\nu^2 + x^2}$$

и из уравнения (40) для  $\Phi_0$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{3}{x} - \frac{E}{Ex + \alpha} \right) \frac{d}{dx} + E^2 - 1 + \right. \\ \left. + \frac{2E\alpha}{x} + \frac{\alpha^2 - 2\nu^2}{r^2} \right] \Phi_0 = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

В результате получим следующее уравнение для  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + \left( \frac{3}{x} - \frac{E}{Ex + \alpha} + \frac{2E}{Ex + \alpha} - \frac{4x}{2\nu^2 + x^2} \right) \varphi_1' + \\ + \left[ \left( \frac{E}{Ex + \alpha} - \frac{2x}{2\nu^2 + x^2} \right)^2 - \frac{E^2}{(Ex + \alpha)^2} - \right. \\ \left. - \frac{2}{2\nu^2 + x^2} + \frac{4x^2}{(2\nu^2 + x^2)^2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{3}{x} - \frac{E}{Ex + \alpha} \right) \left( \frac{E}{Ex + \alpha} - \frac{2x}{2\nu^2 + x^2} \right) + \right. \\ \left. + E^2 - 1 + \frac{2E\alpha}{x} + \frac{\alpha^2 - 2\nu^2}{x^2} \right] \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Формальная сложность этого уравнения для  $\varphi_1(x)$  в сравнении с уравнением (40) для  $\Phi_0(x)$  иллюзорная, поскольку обратной подстановкой эти лишние сингулярности можно убрать из уравнения, в результате приходим к (40). Отметим, что выведенное уравнение (56) для  $\varphi_1$  отличается от решенного выше уравнения (10). Это означает, что классы решений, определяемые двумя разными уравнениями для  $\varphi_1(x)$ , различны.

## 6. Заключение

Выполнен анализ системы из шести радиальных уравнений, описывающей состояния с четностью  $P = (-1)^j$  для векторной частицы в кулоновском поле. С учетом обобщенного условия Лоренца показано, что одна функция из шести обязана обращаться в нуль, следовательно, имеем систему из шести уравнений для пяти неизвестных функций. Показано, что в качестве независимой можно выбирать одну любую функцию из этих пяти, при этом для нее получаем два разных дифференциальных уравнения 2-го порядка, которые можно связать с двумя подклассами состояний. Эти независимые уравнения 2-го порядка найдены в явном виде, построены их решения Фробениуса, методом Пуанкаре–Перрона исследована сходимости вовлеченных в эти решения степенных рядов. Для получения правила квантования используется условие трансцендентности решений Фробениуса. В обоих случаях условия трансцендентности дают разумные с физической точки зрения формулы для спектров энергии, причем эти спектры различаются между собой.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф20РА-007 в рамках сотрудничества НАН Беларуси и Румынской Академии.

## Литература

1. Тамм И.Е. Движение мезонов в электромагнитных полях // Докл. АН СССР. 1940. Т. 29. С. 551–554.
2. Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M. On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2010. Vol. 13. No. 4. P. 352–367.
3. Кисель В.В., Редьков В.М., Овсюк Е.М. Волновые функции и спектр энергии для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле // ДАН Беларуси. 2011. Т. 55. № 1. С. 50–55.
4. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid, Lobachevsky, and Riemann: nonrelativistic approximation / E. Ovsyuk, O. Veko, K. Kazmerchuk, V. Kisel, V. Red'kov // Ukraine Phys. J. 2013. Vol. 58. No. 11. P. 1073–1083.
5. Spin 1 particle in the magnetic monopole potential for Minkowski and Lobachevsky spaces: nonrelativistic approximation / O.M. Veko, K.M. Kazmerchuk, E.M. Ovsyuk, V.V. Kisel, A.M. Ishkhanyan, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2015. Vol. 18. No. 2. P. 243–258.
6. From quantum dynamics of spin 1 particle in Coulomb field to jet geometric-physical objects / M. Neagu, O. Florea, O. Veko, E. Ovsyuk, V. Red'kov // Applied Sciences. 2014. Vol. 16. P. 73–99.
7. Krylova N.G., Ovsyuk E.M., Balan V., Red'kov V.M. Geometrization for a Quantum-Mechanical Problem of a Vector Particle in External Coulomb Field // NPC. 2018. Vol. 21. No. 4. P. 309–325.
8. Об описании связанных состояний для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле / Е.М. Овсюк, О.В. Веко, Я.А. Войнова, А.Д. Коральков, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Проблемы физики, информатики и техники. 2018. № 2(35). С. 21–33.
9. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / E.M. Ovsyuk, O.M. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koralkov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Balkan Society of Geometers Proceedings. 2018. Vol. 25. P. 59–78.
10. Ronveaux A. Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.
11. Slavyanov S.Yu., Lay W. Special functions. A unified theory based on singularities. Oxford: Oxford University Press, 2000.

## References

1. Tamm I.E. Motion of mesons in electromagnetic fields // Dokl. USSR Ac. Sci. 1940. Vol. 29. P. 551–554.
2. Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M. On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2010. Vol. 13, № 4. P. 352–367.
3. Kisel V.V., Red'kov V.M., Ovsyuk E.M. Wave functions and energy spectrum for spin 1 particle in external Coulomb field // Dokl. Ac. Sci. of Belarus. 2011. Vol. 55. No. 1. P. 50–55.
4. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid, Lobachevsky, and Riemann: nonrelativistic approximation / E. Ovsyuk, O. Veko, K. Kazmerchuk, V. Kisel, V. Red'kov // Ukraine Phys. J. 2013. Vol. 58. No. 11. P. 1073–1083.
5. Spin 1 particle in the magnetic monopole potential for Minkowski and Lobachevsky spaces: nonrelativistic approximation / O.M. Veko, K.M. Kazmerchuk, E.M. Ovsyuk, V.V. Kisel, A.M. Ishkhanyan, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2015. Vol. 18. No. 2. P. 243–258.
6. From quantum dynamics of spin 1 particle in Coulomb field to jet geometric-physical objects / M. Neagu, O. Florea, O. Veko, E. Ovsyuk, V. Red'kov // Applied Sciences. 2014. Vol. 16. P. 73–99.
7. Krylova N.G., Ovsyuk E.M., Balan V., Red'kov V.M. Geometrization for a Quantum-Mechanical Problem of a Vector Particle in External Coulomb Field // NPC. 2018. Vol. 21. No. 4. P. 309–325.
8. On describing the bound states for spin 1 particle in external Coulomb field / E.M. Ovsyuk,

- O.M. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Problems of Physics, Informatics and Technics. 2018. № 2 (35). P. 21–33.
9. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / *E.M. Ovsiyuk, O.M. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Balkan Society of Geometers Proceedings. 2018. Vol. 25. P. 59–78.
10. *Ronveaux A.* Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.
11. *Slavyanov S.Yu., Lay W.* Special functions. A unified theory based on singularities. Oxford: Oxford University Press, 2000.

*Статья поступила в редакцию 21.07.2020.*

УДК 574.5:591.524.12-045.52:627.8  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-68-73

**В.И. ПУНЕГОВ**

## **О ФОКУСИРОВКЕ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ КЛИНОВЫМИ МНОГОСЛОЙНЫМИ ЛАУЭ ЛИНЗАМИ**

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар*

*[vpunegov@ipm.komisc.ru](mailto:vpunegov@ipm.komisc.ru)*

**V.I. PUNEGOV**

## **ON X-RAY FOCUSING BY WEDGE MULTILAYER LAUE LENSES**

*Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre,  
Ural Branch, RAS,  
Syktывkar*

### **Аннотация**

На основе численного решения уравнений рентгеновской динамической дифракции исследована фокусировка клиновых многослойных Лауэ линз (МЛЛ). Показано, что опубликованные ранее результаты А. Андрейчуком и др. [A. Andrejczuk et al., Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B, 364 (2015) 60] не соответствуют условиям Лауэ дифракции, и следовательно, данные о фокусировке МЛЛ являются неправильными.

### **Ключевые слова:**

*клиновые многослойные Лауэ линзы, динамическая рентгеновская дифракция, рентгеновская фокусировка*

### **Abstract**

Focusing of wedge multilayer Laue lenses is studied based on the numerical solution of the X-ray dynamic diffraction equations. It is shown that the results published earlier by Andrejczuk et al. [Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B 364 (2015) 60] do not correspond to the Laue diffraction conditions, and, consequently, the data on MLL focusing are incorrect.

### **Keywords:**

*wedge multilayer Laue lenses, dynamic X-ray diffraction, X-ray focusing*

### **Introduction**

The paper [1] presents theoretical results on the focusing properties of a one-dimensional multilayer wedge Laue lens (MLL). The calculations were performed using the beam propagation method for a lens that focuses X-rays with an energy of 20 keV to a spot size of less than 5 nm. The method used by the authors and the results obtained on its basis are highly questionable. In [1], it is not shown how the beam propagation method is related to the multilayer Laue lens structure, how the X-ray Laue diffraction of an aperiodic multilayer structure is described using the beam propagation method, and finally, what is the distribution of the transmission and diffraction intensities inside the MLL at an angle of X-ray beam incidence  $\alpha = 8.5$  mrad. Moreover, the authors [1] consider the distribution of the dielectric constant  $D(X_i)$  in the lens as a periodic trapezoidal function, while this distribution should correspond to the configuration of the Fresnel zone plate. Therefore, the purpose of this paper is to provide an alternative description of the MLL focusing based on the dynamic Laue diffraction theory and to compare the results obtained with the data of the paper [1].

### **Diffraction equations**

Dynamical Laue X-ray diffraction in periodic media differs from diffraction in Bragg geometry [2]. One of the differences is the *Pendellösung* effect, when the intensities of the transmission and diffraction X-ray waves oscillate into the periodic medium. The period of such *Pendellösung* oscillations (*Pendellösung* distance) in the symmetrical Laue geometry is equal to  $\Lambda_0 = \lambda |\cos \theta_B| / (C |\chi_1|)$ , where  $\lambda$  is the X-ray wavelength,  $\theta_B$  is the Bragg angle,  $C$  is the polarization factor, and

$\chi_1$  is the Fourier component of the X-ray polarizability in the diffraction direction.

Direct calculations of the distribution of X-ray intensities inside the multilayer Laue lens have not yet been carried out. Such calculations, in contrast to the traditional dynamical theory [2], should be performed taking into account the spatial restriction of X-ray beams [3-7].

For a rigorous calculation of the intensity distribution inside the MLL, we use the Takagi - Taupin equations [8, 9] in an oblique coordinate system (Fig. 1):

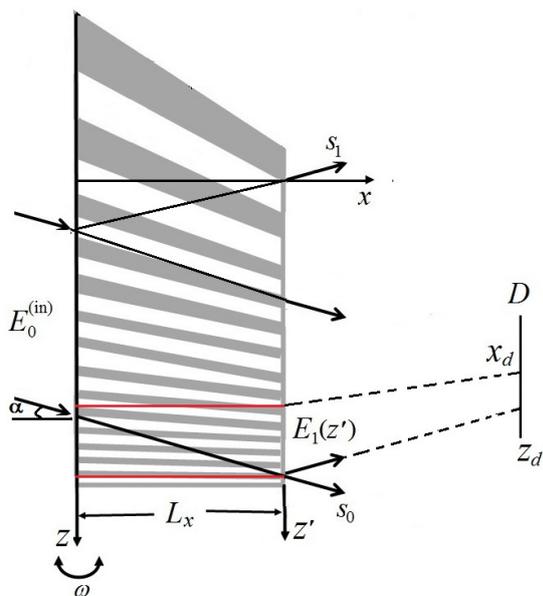


Fig. 1. Schematic representation of X-ray diffraction in a wedged multilayer Laue lens.

Рис. 1. Схематическое изображение рентгеновской дифракции в МЛЛ.

$$\begin{cases} \frac{\delta E_0(\eta; s_0, s_1)}{\delta s_0} = i a_1 f_{DW} E_1(\eta; s_0, s_1), \\ \frac{\delta E_1(\eta; s_0, s_1)}{\delta s_1} = i (\eta + \Phi(s_0, s_1)) E_0(\eta; s_0, s_1) + \\ + i a_1 f_{DW} E_0(\eta; s_0, s_1), \end{cases} \quad (1)$$

where  $E_{0,1}(\eta; s_0, s_1)$  are the amplitudes of the transmission  $E_0$  and diffraction  $E_1$  of X-ray wave,  $\Phi(s_0, s_1) = 2\pi\varepsilon(s_0, s_1) \sin \theta_B/d$ ,  $\varepsilon(s_0, s_1) = \Delta(s_0, s_1)/d$  is the relative mismatch of the MLL period,  $d$  is the average MLL period,  $a_0 = \pi\chi_0/\lambda$ ,  $a_1 = C\pi\chi_1/\lambda$ ,  $\eta = 2\pi\omega \sin(2\theta_B)/\lambda$  is the angular parameter,  $\omega$  is the deviation of the X-ray beam from the Bragg angle  $\theta_B$ ,  $f_{DW}$  is the statistic Debye-Waller factor. The Fourier coefficients of X-ray polarizability for a structure with a two-layer period in the direction of transmission  $\chi_0$  and diffraction  $\chi_1$  are written as

$$\chi_0 = \frac{\chi_t d_t + \chi_b d_b}{d}, \quad \chi_1 = \frac{\chi_t - \chi_b}{\pi} \sin\left(\frac{\pi d_t}{d}\right).$$

Here  $\chi_{t,b}$  and  $d_{t,b}$  the Fourier coefficients of polarizability and thicknesses of the upper ( $t$ ) and lower ( $b$ ) layers of the period of the multilayer structure. X-ray polarizabilities of chemical elements are calculated using table values of optical constants:  $\chi_j = 2(\delta_j + i\beta_j)$ ,

$\delta_j = r_0 \frac{N_j \lambda^2}{2\pi} (Z_j + \Delta f_j')$ ,  $\beta_j = -r_0 \frac{N_j \lambda^2}{2\pi} \Delta f_j''$ ,  $j = t, b$  indicates the corresponding layer in the period of the multilayer structure,  $r_0 = e^2/(mc^2)$  is the classical electron radius,  $e$  and  $m$  are the electron charge and mass,  $N_j$  is the atomic density,  $Z$  is the number of electrons in an atom,  $\Delta f_j'$  and  $\Delta f_j''$  are the dispersion corrections to the atomic amplitude.

The structure of MLL corresponds to the design of periodically alternating layers of heavy and light material according to the law of the Fresnel zone plate [1].

$$r_n(x) = G(x) \sqrt{n\lambda f + \frac{n^2 \lambda^2}{4}},$$

where  $n$  is the layer number,  $f$  is the focal length of the zone plate,  $\lambda$  is the wavelength of the incident X-ray radiation,  $G(x) = 1 - g x$ ,  $g = 0.5f^{-1}$ . The width of the  $n$ -th zone is defined as

$$\Delta r_n(x) = G(x) \frac{\lambda f}{2r_n} \sqrt{1 + \frac{r_n^2}{f^2}}.$$

Therefore, MLL is a multilayer structure with variable period

$$d_m(x) = 2\Delta r_m(x) = d + \Delta d_m(x),$$

where  $d$  is the average MLL period,  $\Delta d_m(x)$  is the mismatch of the period with the number  $m$  ( $m = 2n$ ) relative to the average period. The relative mismatch of the MLL period can be written as

$$\varepsilon_m(x) = \frac{\Delta d_m(x)}{d} = \varepsilon(x, z)G(x).$$

The structure of MLL, the geometry of X-ray diffraction, and the characteristics of X-ray radiation in numerical simulation corresponded to the parameters used in [1]. The total number of MLL layers is  $N = 5822$ , the number of layers illuminated by the X-ray beam was 5500 ( $M_z = 2750$  is the number of periods) [1]. For hard X-ray radiation (wavelength is  $0.062 \text{ nm}$ ) according to the law of the Fresnel zone plate, the focal length corresponds to  $f = 1.25 \text{ mm}$ . The size of the first zone is  $\Delta r_1 = 13.9 \text{ nm}$ , the last zone is  $\Delta r_{2N_z} = 1.8 \text{ nm}$ . For the width  $L_z = 16.7 \mu\text{m}$  of the incident X-ray beam on the MLL, the minimum illuminated Laue lens period is  $3.65 \text{ nm}$ , and the maximum one is  $17 \text{ nm}$ . The average MLL period is  $d = L_z/M_z = 6 \text{ nm}$ , which corresponds to a Bragg angle of  $5.2 \text{ mrad}$ . The maximum mismatch of the MLL period is  $11 \text{ nm}$ , the minimum mismatch is  $2.3 \text{ nm}$ . The parameter  $g = 0.4 \text{ mm}^{-1}$ , the coefficient  $G(x)$  varies from 1 to 0.994. The map of relative mismatches of the MLL period is shown in Fig. 2.

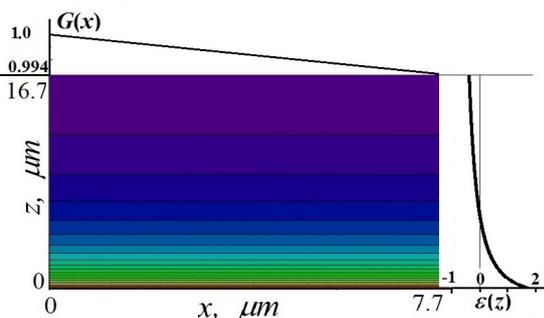


Fig. 2. Map of the relative mismatch of the MLL period  $\varepsilon(x, z)$  on a linear scale. The ratio of  $\varepsilon(x, z)$  values between adjacent lines is 0.1. The maximum value of the relative period mismatch is  $\varepsilon_{max}(x, z) = 1.833$  (red color) and the minimum value is  $\varepsilon_{min}(x, z) = -0.394$  (purple color).

Рис. 2. Карта относительного рассогласования периода МЛЛ  $\varepsilon(x, z)$  в линейном масштабе. Отношение значений  $\varepsilon(x, z)$  между соседними линиями 0.1. Максимальное значение относительного рассогласования периода  $\varepsilon_{max}(x, z) = 1.833$  (красный цвет) и минимальное значение  $\varepsilon_{min}(x, z) = -0.394$  (фиолетовый цвет).

### X-ray fields inside a wedge multilayer Laue lens

The calculations of the X-ray intensity distribution inside the MLL were performed using equations (1). The numerical algorithm of the “half-step derivative” was applied [7]. In addition, X-ray fields were calculated on the basis of the two-dimensional Takagi – Taupin equations in the Cartesian coordinate system using the Runge – Kutta method [10], as well as two-dimensional recurrence relations was employed [3, 4]. All these methods led to the same result, which ultimately was a guarantee of the correctness of the calculations.

X-ray diffraction was calculated in MLL, consisting of alternating layers of tungsten (W) and silicon carbide (SiC) [1]. In the calculations, we used the optical constants of tungsten  $\chi_W = (-1.596 + i 0.125) \cdot 10^{-3}$  and silicon carbide  $\chi_{SiC} = (-0.334 + i 0.00092) \cdot 10^{-3}$  for an X-ray energy of 20 keV [11–13].

The lateral size of the MLL is  $L_x = 7.7 \mu m$  (Fig. 1), which corresponds to half the *Pendellösung* distance. This length of the lens gives the maximum intensity of the diffraction beam at the exit from the right face of the MLL (Fig. 3). The intensity distribution of the transmission and diffraction X-ray beams inside the MLL is shown in Fig. 3.

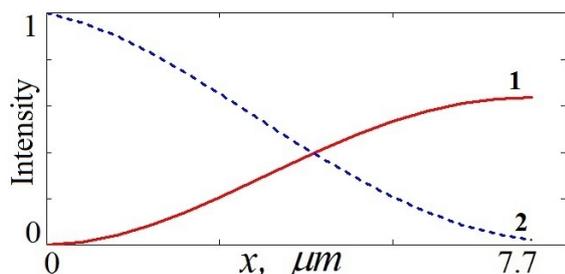


Fig. 3. The intensity distribution of the diffraction (1) and transmission (2) X-ray waves inside the W/SiC MLL for an X-ray wavelength of 0.062 nm.

Рис. 3. Распределение интенсивности дифракционной (1) и проходящей (2) рентгеновской волны внутри МЛЛ W/SiC для длины рентгеновской волны 0.062 nm.

The results of numerical simulation of the intensity distribution of the X-ray fields inside the MLL are shown in Fig. 4 — Fig. 7. The intensity maps of the X-ray wave fields are given on a linear scale, the ratio between adjacent lines is 0.1. Red color refers to the maximum value of intensity, purple color corresponds to the minimum intensity.

Fig. 4 and Fig. 5 shows the intensity distributions of the diffraction and transmission X-ray beam inside the MLL for angular deviation  $\omega = 0$ . The intensity incident on the left face of the MLL is  $I_0 = |E_0^{(in)}| = 1$  (Fig. 1). The maximum diffraction intensity  $I_d = 0.64$  is concentrated near the right face of the MLL (red spot in Fig. 4 and curve 1 in Fig. 8). In this region, the transmission intensity is  $I_t \approx 0$  (purple spot in Fig. 5, curve 2 in Fig. 8).

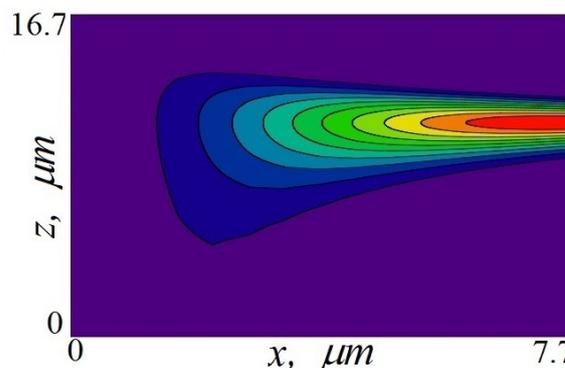


Fig. 4. The intensity distribution map of the diffraction X-ray beam inside the MLL for angular deviation  $\omega = 0$  (the X-ray incidence angle is  $\alpha = \theta_B = 5.2 \text{ mrad}$  for the average MLL period  $d = 6 \text{ nm}$ ).

Рис. 4. Карта распределения интенсивности дифракционного рентгеновского пучка внутри МЛЛ для  $\omega = 0$  (угол падения рентгеновского пучка  $\alpha = \theta_B = 5.2 \text{ mrad}$  для среднего периода МЛЛ  $d = 6 \text{ nm}$ ).

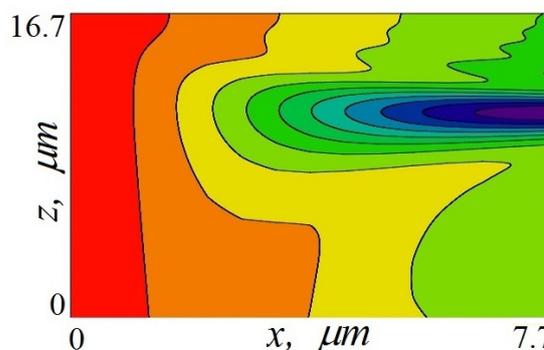


Fig. 5. The intensity distribution map of the transmission X-ray beam inside the MLL for angular deviation  $\omega = 0$  (the X-ray incidence angle is  $\alpha = \theta_B = 5.2 \text{ mrad}$  for the average MLL period  $d = 6 \text{ nm}$ ).

Рис. 5. Карта распределения интенсивности проходящего рентгеновского пучка внутри МЛЛ для  $\omega = 0$  (угол падения рентгеновского пучка  $\alpha = \theta_B = 5.2 \text{ mrad}$  для среднего периода МЛЛ  $d = 6 \text{ nm}$ ).

By increasing the angular deviation ( $\omega = 1.7 \text{ mrad}$ ,  $\alpha = \theta_B + \omega = 6.8 \text{ mrad}$  (Fig. 1)), the maximum diffraction intensity  $I_d = 0.64$  does not change. The diffraction spot increases and shifts downward along the right face of the MLL (Fig. 6, Fig. 9, curve 1). The intensity of the transmission beam has a minimum value of  $I_t \approx 0$  (Fig. 9, curve 2).

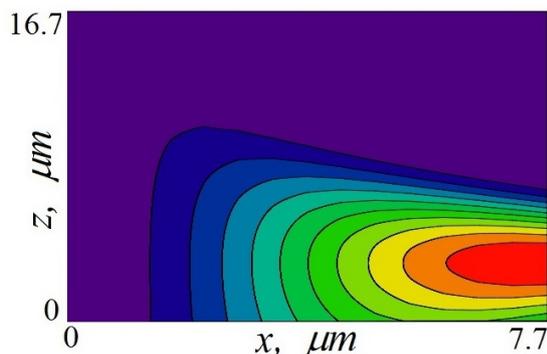


Fig. 6. The intensity distribution map of the X-ray diffraction beam inside the MLL for angular deviation  $\omega = 1.7 \text{ mrad}$ , the X-ray incidence angle is  $\alpha = \theta_B + \omega = 6.8 \text{ mrad}$ .

Рис. 6. Карта распределения интенсивности дифракционного рентгеновского пучка внутри МЛЛ для  $\omega = 1.7 \text{ mrad}$ , угол падения рентгеновского пучка  $\alpha = \theta_B + \omega = 6.8 \text{ mrad}$ .

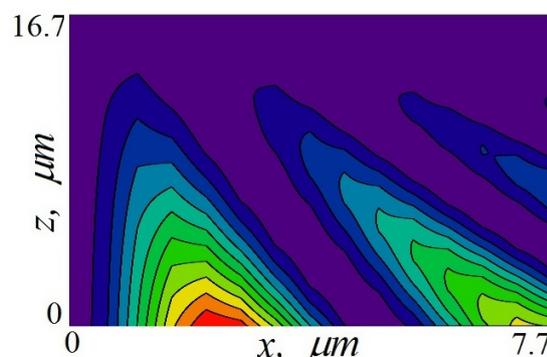


Fig. 7. The intensity distribution map of the X-ray diffraction beam inside the MLL for angular deviation  $\omega = 3.3 \text{ mrad}$ , the X-ray incidence angle is  $\alpha = \theta_B + \omega = 8.5 \text{ mrad}$ .

Рис. 7. Карта распределения интенсивности дифракционного рентгеновского пучка внутри МЛЛ для  $\omega = 3.3 \text{ mrad}$ , угол падения рентгеновского пучка  $\alpha = \theta_B + \omega = 8.5 \text{ mrad}$ .

However, a further increase in angular deviation to a value of  $3.3 \text{ mrad}$  (the X-ray incidence angle is  $\alpha = \theta + \omega = 8.5 \text{ mrad}$ ) disturbs the diffraction condition in the MLL (Fig. 7). The maximum value of the diffraction intensity  $I_d = 0.065$  decreased by 10 times and was not placed at the right face of the MLL, but located inside the lens. In this case, the *Pendellösung* effect is disturbed, X-ray diffraction is suppressed, and the maximum value of the reflected intensity is 0.04 at the bottom of the MLL

(Fig. 7). Thus, the information on focusing by the wedge multilayer Laue lens presented in [1] is incorrect. Focusing of the diffraction beam for the angle of incidence  $\alpha = 8.5 \text{ mrad}$ , as presented in [1], is not possible, since the Laue X-ray diffraction conditions are not satisfied at this incident angle.

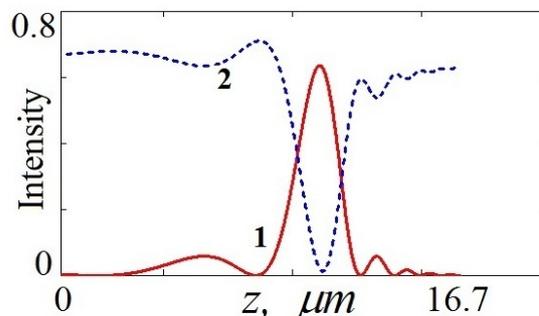


Fig. 8. The intensity distribution of the diffraction (1) and transmission (2) X-ray wave coming out of the W/SiC MLL. The angular deviation is  $\omega = 0 \text{ mrad}$ .

Рис. 8. Распределение интенсивности дифракционной (1) и проходящей (2) рентгеновской волны, выходящей из МЛЛ W/SiC с угловым отклонением  $\omega = 0 \text{ mrad}$ .

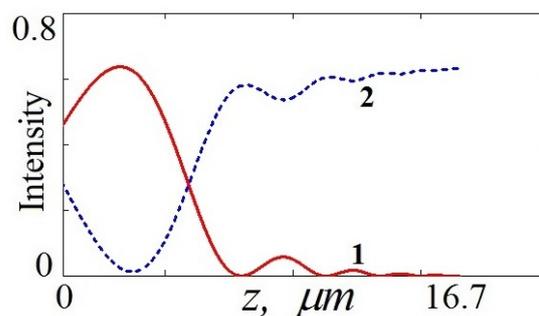


Fig. 9. The intensity distribution of the diffraction (1) and transmission (2) X-ray wave coming out of the W/SiC MLL. The angular deviation is  $\omega = 1.7 \text{ mrad}$ .

Рис. 9. Распределение интенсивности дифракционной (1) и проходящей (2) рентгеновской волны, выходящей из МЛЛ W/SiC с угловым отклонением  $\omega = 1.7 \text{ mrad}$ .

### Focusing of diffraction intensity

The amplitude  $E_1(z')$  of X-ray wave exiting from the right face of the MLL propagates outside the multilayer structure according to the Fresnel-Kirchhoff law [14]

$$E_1(x_d, z_d) = \cos \theta_B \int dz' P(x_d, z_d - \cos \theta_B z') E_1(z'),$$

where  $E_1(x_d, z_d)$  is the amplitude of the diffraction X-ray wave in the plane of the detector (Fig. 1),  $P(x, z) = (i\lambda x)^{-1/2} \exp(i\pi z^2 / (\lambda x))$  is the propagator of X-ray wavefield [14].

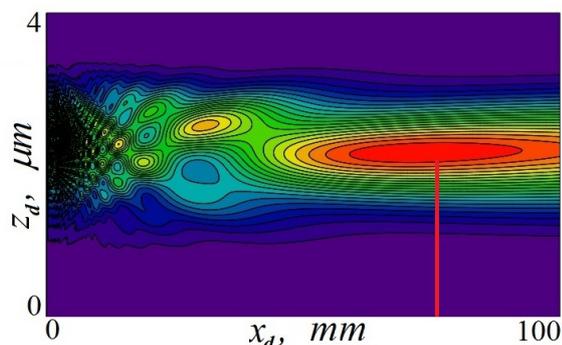


Fig. 10. The distribution map of the focused intensity of a diffraction beam coming out of the MLL in the case of  $\omega = 0$ .

Рис. 10. Карта распределения сфокусированной интенсивности дифракционного пучка, вышедшего из МЛЛ в случае  $\omega = 0$ .

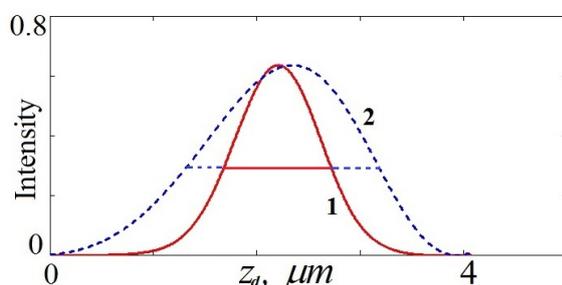


Fig. 11. The normalized intensity distribution of the focal spot (1) and the outgoing X-ray beam from the MLL (2).

Рис. 11. Нормированное распределение интенсивности фокусного пятна (1) и выходящего рентгеновского пучка из МЛЛ (2).

In Fig. 8 the map of the focused intensity of diffraction beam exiting from the MLL at  $\omega = 0$  depending on the position of the detector  $x_d$  is represented. The distance to the middle of the focal spot shown in Fig. 8 by the red line is  $73 \text{ mm}$ , while according to the law of the Fresnel zone plate it should be  $1.25 \text{ mm}$ . Fig. 9 shows the normalized intensity distributions of the focal spot (curve 1) and the exiting X-ray beam from the MLL (curve 2). The focal spot size at half full intensity is  $960 \text{ nm}$ , which does not agree with the value of  $5 \text{ nm}$  [1].

### Features of X-ray diffraction by aperiodic structures

Calculations performed using rigorous equations of the dynamical theory show that diffraction focusing by multilayer structures is very different from focusing by Fresnel zone plates. The supposition that wedged multilayer Laue lens is more effective than flat MLL is rather controversial [15]. Wedge-shaped layers create inhomogeneity not only in thickness  $z$ , but also in width  $x$  of the multilayer structure (Fig. 1), thereby leading to a disturbance of the *Pendellösung* effect in MLL. In the diffraction equations (1), the phase changes caused by the mismatch of the MLL period are determined by the parameter  $\eta + \Phi(s_0, s_1)$ . In papers [16, 17], X-ray diffraction in a structure with the linear lattice period variation was considered, and the optical principle of "phase layers" was developed to describe diffraction. According to

this optical principle, in the aperiodic structure, the Bragg diffraction condition will be satisfied in a layer of thickness  $l_1$ , if in the equations (1)  $\eta + \Phi(s_0, s_1) < \pi/l_1$  or from here,  $l_1 \approx 0.5 d / (\cos \theta_B \omega + \bar{\varepsilon} \sin \theta_B)$ , where  $\bar{\varepsilon}$  is the average relative mismatch of the period in the layer  $l_1$ . If the mismatch of the layers is zero, that is, the period of the multilayer structure is constant, then  $l_1 \rightarrow \infty$ . In other words, diffraction will be observed if Bragg's law is satisfied:

$$2(d \pm \Delta d) \sin(\theta_B \mp \omega) = \lambda.$$

Even when the angular deviation  $\omega = 0$ , X-ray diffraction is performed in a narrow area of the MLL with a period  $d + \Delta d_m = d(1 + \varepsilon_m)$  until the phase changes of the X-ray waves remove the beam from the diffraction condition. The width of this area is equal to the thickness of the phase layer  $l_1$ . In our case, at  $\omega = 0$ ,  $\bar{\varepsilon} = 0.148$ , the size of the diffraction area  $l_1 \approx d / (2\bar{\varepsilon} \sin \theta_B) = 3.9 \mu\text{m}$ , which is consistent with the width of the diffraction beam  $3.8 \mu\text{m}$  (Fig. 11). By changing the diffraction angle by  $\omega = 1.7 \text{ mrad}$ , the size of the diffraction area is  $l_1 = 8.6 \mu\text{m}$ , however, the size of the exiting diffraction beam is  $7.7 \mu\text{m}$  (Fig. 9). This is due to the fact that not all MLL periods of the "phase layer"  $l_1 = 8.6 \mu\text{m}$  participate in diffraction. At the angle of the incident beam  $\alpha = 8.5 \text{ mrad}$  [1], under diffraction conditions there is only one, the smallest MLL period, and diffraction from the  $l_1/2$  layer is extinguished by the "antiphase layer"  $l_2$  [16, 17].

### Conclusion remarks

Thus, in the present work, for the first time, the results of numerical simulation of X-ray wave fields inside a wedge multilayer Laue lens are presented. Due to the mismatches of the MLL period, the diffraction condition will not cover the entire volume of the lens, but only its insignificant area. This area in Fig. 1 is schematically restricted by red lines. The size of this area depends on the average relative mismatch  $\bar{\varepsilon}$  of the mismatch period and the incidence angle of the X-ray beam  $\alpha$ . Consequently, the intensity distribution of the X-ray wavefields inside the MLL is more likely related to the "collimation" of the X-ray beam, and not to its focusing. Moreover, such "collimation" is not connected to the configuration of the Fresnel zone plate [15]. Also it was shown that for the incidence angle of the X-ray beam  $\alpha = 8.5 \text{ mrad}$  on the MLL, the Laue diffraction condition is not satisfied, therefore, the results of [1] are erroneous.

### References

1. *Andrejczuk A., Krzywinski J., Bajt S.* Influence of imperfections in a wedged multilayer Laue lens for the focusing of X-rays investigated by beam propagation method // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B. 2015. Vol. 364. P. 60–64.
2. *Authier A.* Dynamical Theory of X-Ray Diffraction // Oxford University Press. New York. 2001.
3. *Punegov V.I., Kolosov S.I., Pavlov K.M.* Darwin's approach to X-ray diffraction on lateral crystalline structures // Acta Cryst. A. 2014. Vol.70. P. 64–71.

4. *Punegov V.I., Kolosov S.I., Pavlov K.M.* Bragg-Laue X-ray dynamical diffraction on perfect and deformed lateral crystalline structures // *J. Appl. Cryst.* Vol.49. P. 1190–1202.
5. *Punegov V.I., Pavlov K.M., Karpov A.V., Faleev N.N.* Applications of dynamical theory of X-ray diffraction by perfect crystals to reciprocal space mapping // *J. Appl. Cryst.* 2017. Vol. 50. P. 1256–1266.
6. *Punegov V.I.* Dynamical Theory of X-Ray Diffraction for Restricted Beams: I. Coherent Scattering by a Porous Crystal // *JETP*, 2018. Vol. 127. P. 210–220.
7. *Epelboin Y.* Simulation of X-ray topographs // *Mater. Sci. Eng.* 1985. Vol. 73. P. 1–43.
8. *Takagi S.* Dynamical theory of diffraction applicable to crystals with any kind of small distortion // *Acta Cryst.* 1962. Vol. 15. P. 1311–1312.
9. *Taupin D.* Theorie dynamique de la diffraction des rayons x par les cristaux deformes // *Bull. Soc. Franc. Mineral. Crist.*, 1964. Vol. 87. P. 469–511.
10. *Kolosov S.I., Punegov V.I.* Numerical integration methods for the Takagi-Taupin equations for crystals of rectangular cross section // *Crystallography Reports.* 2005. Vol. 50. P. 375–362.
11. *Stepanov S.* X-ray server: an online resource for simulations of X-ray diffraction and scattering. *Proceedings // SPIE*, 2004. Vol. 5536. P. 16–26.
12. *Stepanov S., Forrest R.* Fitting dynamical X-ray diffraction data over the World Wide Web // *J. Appl. Cryst.* 2008. Vol. 41. P. 958–962.
13. *Stepanov S.* Cybersecurity, massive data processing, community interaction, and other developments at WWW-based computational X-ray Server // *J. of Physics: Conference Series*, 2013. Vol. 425. P. 162006.
14. *Kohn V.G., Snigireva I., Snigirev A.* Theory of imagine a perfect crystal under the conditions of X-ray spherical wave dynamical diffraction // *Phys. Status Solidi B*, 2000. Vol. 222. P. 407–423.
15. *Punegov V.I.* Effect of the Mismatch of Layer Thicknesses on the Focusing of X Rays by Multilayer Laue Lens // *JETP Letters*, 2020. Vol. 111. P. 376–382.
16. *Kolpakov A.V., Punegov V.I.* X-ray Diffraction in a Crystal with a Linear Lattice Parameter Variation // *Solid State Communications.* 1985. Vol.54. P. 573–578.
17. *Kolpakov A.V., Punegov V.I.* Development of optical principles of diffraction of X-rays in continuously layered crystals // *Moscow University Physics Bull.* 1986. Vol. 41. P. 115–118.

Статья поступила в редакцию 10.09.2020.

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**  
**журнала «Известия Коми НЦ УрО РАН»**  
**серии «Физико-математические науки»**

Журнал публикует научно-аналитические обзоры (объем до 1,5 п.л.), оригинальные статьи (до 0,8 п.л) и краткие сообщения (до 0,3 п.л.) по различным направлениям Физико-математических наук.

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление  
01.01.03 Математическая физика  
01.01.04 Геометрия и топология  
01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика  
01.02.04 Механика деформируемого твердого тела  
01.04.02 Теоретическая физика  
01.04.07 Физика конденсированного состояния  
05.13.01 Системный анализ, управление и обработка информации

Статьи должны отражать результаты законченных и методически корректно выполненных исследований. Изложение материала должно быть ясным, лаконичным и последовательным.

Направляя статью в наш журнал, Вы соглашаетесь с нашим **Положением о публикационной этике журнала** (приведено на сайте журнала). Решение о публикации принимается редакционной коллегией журнала после рецензирования, с учетом новизны, научной значимости и актуальности представленных материалов. Статьи, отклоненные редакционной коллегией, повторно не рассматриваются.

К публикации также принимаются комментарии к ранее опубликованным работам, информация о научных конференциях, рецензии на книги, хроника событий научной жизни.

**Общие требования к оформлению рукописей**

Статьи должны сопровождаться направлением того научного учреждения, где была выполнена работа, а также экспертным заключением о возможности опубликования в открытой печати. В случае отсутствия возможности представить экспертное заключение, автор (авторы) статьи могут подать заявление на проведение экспертизы в ФИЦ Коми НЦ УрО РАН. Статья должна быть подписана всеми авторами (автором) с указанием (полностью) фамилии, имени, отчества, места работы, служебного телефона и e-mail. Рекомендуется указать автора, который будет вести переписку с журналом.

В редакцию подается рукопись статьи в двух экземплярах — в печатном и электронном вариантах. При подготовке электронного варианта предпочтительнее использовать издательский пакет **ЮТХ** со стилевым файлом серии (выложен на сайте журнала). Электронная и бумажная версии статьи должны быть идентичны. Электронный вариант рукописи может быть прислан по электронной почте или ответственному редактору серии [gromov@ipm.komisc.ru](mailto:gromov@ipm.komisc.ru) или на адрес редакционной коллегии: [journal@frc.komisc.ru](mailto:journal@frc.komisc.ru). В случае использования текстового редактора Microsoft Word for Windows, текст набирается шрифтом Times New Roman, кегль 14, в одну колонку через 1,5 интервала, на странице форматом А4. По всей статье шрифт должен быть одинаковым. Поля страниц оригинала устанавливаются следующими: левое — 25 мм, верхнее — 20 мм, правое — 10 мм, нижнее — 25 мм. Текст статьи набирается без принудительных переносов, разрядки слов не допускаются. В числовых значениях десятичные разряды отделяются запятой (например, 102,5). Для специальных символов, таких как греческие буквы, степень, умножение и т. д., используется стандартная кодировка, которая обеспечивается сочетанием клавиш в программе Word [Вставка | Символ].

Сокращение следует проводить по ключевым буквам слов в русском написании. При первом упоминании терминов, неоднократно используемых в статье, необходимо давать их полное наименование, и сокращение в скобках, в последующем применяя только сокращение. В заголовке статьи и аннотации сокращения не используются.

Все используемые, включая общепринятые, аббревиатуры должны быть расшифрованы при первом упоминании. Не допускаются сокращения, кроме стандартных. Необходимо использовать исключительно единицы СИ. Объем иллюстраций (таблицы, рисунки, фото) в статье не должен превышать 5–7 шт. Количество иллюстраций в кратких сообщениях не должно превышать 2–3 шт.

**Первая страница рукописи оформляется следующим образом:** в начале статьи указывается индекс Универсальной десятичной классификации (УДК); затем прописными буквами печата-

ется название статьи, которое должно быть максимально кратким, информационно ёмким и не содержать сокращений; далее следуют инициалы и фамилии авторов. Отдельной строкой дается название учреждения и города (для иностранных авторов — также страны). Далее приводится электронный адрес для переписки. При наличии авторов из нескольких организаций необходимо арабскими цифрами указать их принадлежность. Через один полуторный интервал далее следует краткая аннотация (8–10 строк), в которой кратко описываются основные результаты работы. После аннотации через полуторный интервал приводятся ключевые слова (до 10). Далее идут название статьи, аннотация и ключевые слова на английском языке. Английская аннотация объемом (до 2000 печатных знаков или 1 машинописная страница) для читателей, не владеющих русским языком, должна стать независимым источником информации (пересказом статьи). В тех случаях, когда текст статьи поделен на разделы, автор может подобным образом разделить и текст аннотации. Редколлегия проверяет качество английского текста и вносит необходимые правки. Во избежание разночтений автор в отдельном файле представляет русский текст, по которому был произведен перевод расширенной аннотации.

**Таблицы** должны быть составлены в соответствии с принятым стандартом, без включения в них легко вычисляемых величин. Таблицы должны быть отформатированы одинаковым образом, пронумерованы в порядке их появления в тексте, иметь тематический заголовок. Каждая таблица предоставляется на отдельной странице. Ширина таблицы должна быть либо 90 мм (на одну колонку), либо 185 мм (на две колонки). Текст в таблице набирается шрифтом Times New Roman, кегль 9–10, через два интервала. Сокращение слов в шапке таблиц не допускается. Пустые графы должны быть заменены условными знаками, которые объясняются в примечании. Единицы измерения даются через запятую: масса, г. Если таблица в статье одна, то порядковый номер не ставится и слово «Таблица» не пишется.

**Рисунки** представляются пригодными для непосредственного воспроизведения, пояснения к ним выносятся в подрисуночные подписи (за исключением кратких цифровых или буквенных обозначений), отдельные фрагменты обозначаются арабскими цифрами или буквами русского алфавита, которые расшифровываются в подрисуночных подписях. Подрисуночные подписи прилагаются отдельно. Каждый рисунок должен сопровождаться подписью на русском и английском языках (английская подпись должна соответствовать русской).

Графика должна быть подготовлена в форматах EPS, PNG, PDF или JPG и представлена отдельными файлами. Расширения файлов должны соответствовать их типу. Рисунки в тексте упоминаются как „рис.“ с указанием номера (рис.1).

Растровые рисунки должны сохраняться с разрешением не менее 300 dpi (точек на дюйм) для фотографий и не менее 600 dpi (точек на дюйм) для остальных рисунков (черно-белый).

Ширина рисунков должна быть либо 90 мм, либо 185 мм, а высота — не более 240 мм. Шрифт буквенных и цифровых обозначений на рисунках — Times New Roman, кегль — 9–10. Линии должны быть яркими (4–5 pixel). Следует избегать оттеночных заливок серого и черного цветов.

Каждый рисунок должен быть выполнен на отдельной странице. На обратной стороне рисунка простым карандашом или ручкой указывается фамилия первого автора статьи и номер рисунка.

**В тексте цитированную литературу** следует приводить только цифрами в квадратных скобках. Список литературы должен быть представлен на отдельной странице и составлен в порядке упоминания источников в тексте в соответствии с примером (см. ниже). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

После Списка литературы размещается References — пристатейный список литературы в транслите (на латинице) и в квадратных скобках перевод названия статьи и журнала на английский язык. References повторяет в полном объеме, с той же нумерацией Список Литературы на русском языке, независимо от того, имеются ли в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются как в Списке литературы, так и в References.

Список литературы и References оформляется по нижеприведенным примерам (следует обратить особое внимание на знаки препинания):

Список литературы:

1. *Иванов И.И.* Название статьи // Название журнала. 2005. Т. 41. № 4. С. 18–26.
2. *Петров П.П.* Название книги. М.: Наука, 2007. Общее число страниц в книге (например, 180 с.) или конкретная страница (например, С. 75).
3. *Казаков К.К.* Название диссертации: Дис. канд. биол. наук / Название института. М.: 2002. 164 с.

References:

1. *Ivanov I.I.* Nazvanie stat'i [Article title] // Nazvanie zhurnala [Journal title]. 2005. T. 41. No. 4. S. 18–26.
2. *Petrov P.P.* Nazvanie knigi [Book title]. M.: Nauka, 2007. Общее число страниц в книге (например, 180 р.) или конкретная страница (например, р. 75).
3. *Kazakov K.K.* Kazakov K.K. Nazvanie dissertatsii [Dissertation title]: Dis. kand. biol. nauk/ Nazvanie instituta. M.: 2002. 164 p.

При наличии большого количества авторов в списке литературы указываются все.

Для транслитерации списка литературы удобно использовать интернет-ресурс <http://translit-online.ru/>.

**При несоблюдении этих перечисленных правил, статья не рассматривается редакционной коллегией, а возвращается авторам на доработку.**

Редакция принимает для опубликования статьи на английском языке (оригинальные, либо переведенные на английский язык профессиональным переводчиком). Такие рукописи следует сопровождать аннотацией, подписями к рисункам и названиям таблиц на русском языке.

Все статьи проходят рецензирование и, в случае необходимости, возвращаются авторам на доработку. Рецензирование статьи закрытое. Возможно повторное и параллельное рецензирование. Редакционная коллегия оставляет за собой право редактирования статьи. Статьи публикуются в порядке очередности, но при этом учитывается их тематика и актуальность. Редакционная коллегия сохраняет первоначальную дату поступления статьи, а, следовательно, и очередность публикации, при условии возвращения ее в редакционную коллегию не позднее, чем через 1 месяц. Корректуру принятой в печать статьи редакционная коллегия иногородним авторам рассылает по e-mail. Автор в течение 5–7 дней должен вернуть ее в редакционную коллегию или передать правку по указанному телефону или электронному адресу (e-mail) редакционной коллегии.

Материалы, опубликованные в журнале «Известия Коми НЦ УрО РАН» серии «Физико-математические науки», размещаются в РИНЦ, а также на сайте ФМИ Коми НЦ УрО РАН <http://www.ipm.komisc.ru>

Статьям, опубликованным в журнале «Известия Коми НЦ УрО РАН» серии «Физико-математические науки», присваивается DOI.

В случае отклонения материала рукописи, приложения и диски не возвращаются.

Рукописи статей простым письмом направлять по адресу:

Ответственному редактору серии «Физико-математические науки»

журнала «Известия Коми НЦ УрО РАН»

Громову Николаю Алексеевичу

167982, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, д. 24,

ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

E-mail: [gromov@ipm.komisc.ru](mailto:gromov@ipm.komisc.ru)

*Научный журнал*

**ИЗВЕСТИЯ**

Коми научного центра  
Уральского отделения РАН  
Серия «Физико-математические науки»

**Вып. 4(44)**

Выпуск подготовили:

Ответственный редактор серии д.ф.-м.н. Н.А. Громов  
Ответственный секретарь серии к.ф.-м.н. Д.А. Тимушев  
Редактор Т.В. Цветкова  
Корректурa английского перевода Т.А. Искакова

Лицензия № 0047 от 10.01.1999.  
Компьютерный набор. Подписано в печать 18.10.2020.  
Формат бумаги 60x84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Печать офсетная.  
Усл.-печ.л. 9,75. Уч.-изд.л. 9,75. Тираж 300. Заказ № 34.  
Свободная цена.

---

Подготовлено к изданию редакцией журнала «Известия Коми НЦ УрО РАН».  
167982, ГСП, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24.  
Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФИЦ Коми НЦ УрО РАН.  
167982, ГСП, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Первомайская, 48.

Адрес учредителя, издателя: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр «Коми научный центр УрО РАН».  
167982, ГСП, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24.