УДК 517.977 + 62-50
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-5-15

В.Ф. СОКОЛОВ

АДАПТИВНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ПО ВЫХОДУ И СМЕЩЕННЫМ ВНЕШНИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

*Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар*

sokolov@dm.komisc.ru

V.F. SOKOLOV

ADAPTIVE OPTIMAL TRACKING FOR DISCRETE-TIME MINIMUM PHASE PLANT UNDER OUTPUT UNCERTAINTY AND EXTERNAL DISTURBANCE

*Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktyvkar*

Аннотация

Рассмотрена задача адаптивного оптимального робастного слежения для дискретного минимально-фазового объекта в детерминированной постановке. Предполагаются неизвестными коэффициенты передаточной функции номинальной модели, смещение и верхняя граница внешнего возмущения, а также коэффициент усиления нелинейной неопределенности по выходу. Решение оптимальной задачи с желаемой точностью в условиях неидентифицируемости неизвестных параметров получено с помощью полиэдральных оценок неизвестных параметров, согласованных с данными измерений, и использования показателя качества задачи слежения в качестве идентификационного критерия. Приведены результаты численного моделирования для системы с 10 неизвестными параметрами, иллюстрирующие эффективность предложенного метода синтеза. Для сравнения приведены также результаты моделирования адаптивного управления с использованием метода наименьших квадратов и проекционного алгоритма оценивания, иллюстрирующие их непригодность для решения рассмотренной оптимальной задачи.

Ключевые слова:
адаптивное управление, оптимальное управление, робастное управление, неопределенность, ограниченное возмущение, множественное оценивание

Abstract

This paper addresses the problem of adaptive optimal robust tracking for discrete-time minimum phase plant in deterministic setup. The transfer function coefficients of the nominal model, the bias and the upper bound of external disturbance, as well as the gain of nonlinear output uncertainty are unknown to controller designer and are non-identifiable. The solution of the optimal problem with the prespecified tolerance is based on the use of polyhedral estimates that are consistent with measeremement data and on treating the control criterion as the identification criterion. Simulations for a system with 10 unknown parameters illustrate the efficiency of the proposed adaptive control. For comparision, simulations of adaptive control based on the recurrent least squares and the projection estimation algorithms illustrate that conventional recurrent estimation algorithms are unsuitable for solving the optimal problem under consideration.

Keywords:
adaptive control, optimal control, robust control, uncertainty, bounded disturbance, set-membership estimation

Введение

Рекуррентные алгоритмы оценивания неизвестных параметров управляемого объекта в теории адаптивного управления с дискретным временем обычно базируются на минимизации идентификационного критерия в виде некоторого функционала от невязки модели объекта. Одним из двух наиболее распространенных функционалов являет-

ся средний квадрат невязки модели. Этому функционалу соответствуют различные модификации метода наименьших квадратов (МНК). На основе МНК была построена математически строгая стохастическая теория адаптивного оптимального управления для линейных стационарных объектов со случайными внешними возмущениями (см., например, [1–3]). При этом асимптотическая оптимальность адаптивного управления базировалась на сходимости оценок к неизвестному конструктору вектору параметров управляемого объекта. Однако обобщения этой оптимальной теории на робастный случай, т.е. для объектов с неопределенностью (немоделируемой динамикой), не появилось, поскольку неопределенность в различных разработанных вариантах теории робастного управления является детерминированной, а не стохастической. Второй распространенный тип идентификационных критериев базируется на минимизации функционала $|\theta_t - \theta|^2$, где $|\cdot|$ – евклидова норма вектора и θ_t – оценка неизвестного вектора оцениваемых параметров θ в момент времени t. Различные модификации градиентных алгоритмов, связанных с этим критерием, применялись для решения задач обеспечения глобальной устойчивости адаптивных систем управления со случайными или ограниченными внешними возмущениями и достаточно малыми неопределенностями. Следует отметить, что большая часть результатов в этом направлении имела условный характер, поскольку опиралась на дополнительное предположение постоянного возбуждения фазового вектора или задающего сигнала. В [4] было показано, что глобальная устойчивость робастных адаптивных систем на основе градиентных алгоритмов без привлечения дополнительных предположений достигается за счет взрывных эффектов, при которых фазовые переменные замкнутой системы принимают большие значения. Именно за счет этого обеспечивается улучшение оценок неизвестных параметров, в результате чего фазовые переменные возвращаются к желаемым значениям. Но ввиду наличия возмущений и неопределенностей оценки могут снова ухудшаться, что приводит к использованию дестабилизирующего регулятора и очередному всплеску фазовых переменных. Неприемлемость указанного эффекта в практических приложениях отмечалась в работе [5], посвященной анализу и обсуждению других недостатков адаптивного управления, основанного на описанных выше традиционных алгоритмах оценивания.

Во многих практических задачах управления цель управления формулируется в терминах допусков, которым должны удовлетворять выходные переменные во все моменты времени. В таких задачах внешние возмущения должны быть ограниченными, и основным сигнальным пространством является нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей ℓ_∞. С середины 1960-х задачи адаптивного управления объектами с ограниченными возмущениями решались в детерминированной постановке с помощью предложенного В.А. Якубовичем метода рекуррентных целевых неравенств и алгоритмов оценивания градиентного типа при предположении об известной верхней границе внешнего возмущения [6, 7]. Особенность систем с ограниченными возмущениями заключается в неидентифицируемости их параметров, т.к. для любого конечного набора измерений имеется множество параметров, согласованных с измерениями, и все усилия специалистов по идентификации таких систем были направлены на вычисление имеющих ограниченную сложность аппроксимаций этих множеств. Однако многочисленные публикации этого направления оставались в области идентификации и не нашли применения в адаптивном управлении.

В настоящей статье решается задача синтеза адаптивного регулятора, гарантирующего минимизацию установившейся ошибки отслеживания ограниченного задающего (командного) сигнала. Предполагается, что параметры передаточной функции линейной стационарной минимально-фазовой номинальной модели управляемого объекта неизвестны и лежат в известном компактном множестве пространства параметров. Также неизвестными предполагаются коэффициент усиления неопределенности по выходу, смещение и верхняя граница внешнего ограниченного детерминированного возмущения. Необходимость оценивать неизвестное смещение для улучшения качества управления многократно отмечалась в литературе по адаптивному управлению. Для оценки смещения предлагалось дополнить вектор регрессоров единичной компонентой, а вектор оцениваемых параметров – оценкой смещения. Однако автору неизвестны работы, где этот подход строго обоснован при детерминированной постановке задачи адаптивного управления.

Для решения рассматриваемой задачи применяется идентификационный подход, согласно которому по данным измерений вычисляются оценки неизвестных параметров и для управления в каждый текущий момент дискретного времени используется оптимальный регулятор, соответствующий вычисленным оценкам. В качестве идентификационного критерия используется показатель качества задачи слежения, равный наихудшей асимптотической ошибке слежения по всем допустимым возмущениям и неопределенностям. Теоретическая возможность синтеза адаптивного оптимального робастного управления на основе множественного оценивания неизвестных параметров и выборе идентификационного критерия в виде показателя качества задачи управления была предложена и обоснована в [8]. Этот подход требует в общем случае неприемлемо большого объема вычислений, и интерес представляют задачи, в которых эти вычисления возможно производить в режиме онлайн, благодаря высокой вычислительной мощности современных компьютеров. Одной из таких задач является рассматриваемая в статье задача с неопределенностью только в канале выхода, в которой показатель качества задачи слежения является дробно-рациональной функцией параметров модели. Благодаря этому вычисление текущих оптимальных оценок на полиэдральном множестве параметров, согласованных с данными измерений, сводится к задаче линейного программирования. Более того, то обстоятельство, что поверхностями уровня дробно-рациональных функций яв-

ляются гиперплоскости в пространстве параметров, позволяет использовать для оценки неизвестных параметров полиэдральные множественные оценки заданной сложности.

Статья структурирована следующим образом. В 1 разделе дана постановка задачи. Во 2 – поясняется неидентифицируемость параметров рассматриваемой модели и поясняется необходимость использования показателя качества задачи слежения в качестве идентификационного критерия. Алгоритм полиэдрального оценивания заданной сложности описан в разделе 3. Основной результат об оптимальности построенного адаптивного управления изложен в разделе 4. В замечании 2 в конце раздела 4 поясняются важные отличительные достоинства предложенного адаптивного управления, заключающиеся в обеспечении онлайн верификации модели и в онлайн оценке гарантируемого качества слежения, согласованной с измерениями и априорной информацией. Раздел 5 содержит описание и результаты численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность предложенного метода синтеза адаптивного оптимального управления. В подразделе 5.3 иллюстрируются описанные выше отличительные достоинства предложенного адаптивного управления. Также приведены результаты численного моделирования адаптивных систем, основанных на "чистом"методе наименьших квадратов и "чистом" проекционном алгоритме, иллюстрирующие непригодность традиционных алгоритмов оценивания для решения задач адаптивного оптимального робастного управления в детерминированной постановке с минимаксными показателями качества. Раздел 6 содержит заключительные комментарии.

Обозначения:
$|\varphi|$ – евклидова норма вектора $\varphi \in \mathbb{R}^n$,
$\dim \varphi := n$ – размерность вектора φ;
ℓ_∞ – нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup_t |x_t|$;
$\|x\|_{ss} = \limsup_{t\to+\infty} |x_t|$;
$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k|$ – индуцированная норма линейной стационарной системы $G : \ell_\infty \to \ell_\infty$ с устойчивой передаточной функцией $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$.

1. Постановка задачи

Рассматривается динамический объект управления, описываемый моделью

$$a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}\,,\ t = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{1}$$

где $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$, соответственно, выход объекта, управление и суммарное возмущение в момент времени t, q^{-1} – оператор сдвига назад ($q^{-1}x_t := x_{t-1}$) и

$$a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n\,,$$
$$b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \ldots + b_m\lambda^{m-1}\,.$$

Неизвестное *суммарное возмущение* v в модели (1) имеет вид

$$v_t = c_w + \delta_w w_t + \delta_y(\Delta y)_t\,,\ \ \delta_w \geqslant 0\,,\ \delta_y \geqslant 0\,, \tag{2}$$

где последовательность $w \in \ell_\infty$ описывает нормализованное внешнее возмущение,

$$\|w\|_\infty = \sup_{t>0} |w_t| \leqslant 1\,, \tag{3}$$

c_w и δ_w, соответственно, – смещение и норма (верхняя граница) *внешнего возмущения*

$$d_t = c_w + \delta_w w_t\,,$$

нелинейный (стационарный или нестационарный) оператор $\Delta : \ell_\infty \to \ell_\infty$ удовлетворяет ограничению

$$|(\Delta y)_t| \leqslant p_t\,,\quad p_t := \max_{t-\mu\leqslant s<t} |y_s| \tag{4}$$

и описывает нормализованную неопределенность в канале выхода с памятью μ, δ_y – коэффициент усиления *неопределенности по выходу* $\delta_y\Delta$. Параметр $\mu \in \mathbb{N}$ из определения p_t в (4) характеризует память неопределенности и без ущерба для гарантируемого качества управления может быть выбрана конструктором достаточно большой с учетом априорной информации о неопределенности.

Априорная информация об объекте управления состоит из предположений **П1, П2**:

П1. Неизвестный вектор коэффициентов

$$\xi := (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)^T$$

модели (1) лежит в ограниченном многограннике Ξ,

$$\xi \in \Xi = \{\, \hat{\xi} \mid A_{pr}\hat{\xi} \geqslant a_{pr} \,\} \subset \mathbb{R}^{n+m}\,,$$

с известными матрицей $A_{pr} \in \mathbb{R}^{l\times(n+m)}$ и вектором $a_{pr} \in \mathbb{R}^l$; $b_1 \neq 0$ и корни полинома $b(\lambda)$ лежат вне замкнутого единичного круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ для любого $\xi \in \Xi$.

П2. Внешнее возмущение d, его верхняя граница δ_w и смещение c_w, а также неопределенность по выходу $\delta_y\Delta$ и ее коэффициент усиления δ_y неизвестны, но известна верхняя граница $\bar{\delta}_y < 1$ коэффициента δ_y:

$$0 \leqslant \delta_y \leqslant \bar{\delta}_y < 1\,. \tag{5}$$

Обозначим через

$$\theta := (\xi^T, c_w, \delta_y, \delta_w)^T$$

вектор всех неизвестных параметров рассматриваемой модели.

В общих словах задача состоит в построении адаптивного регулятора, подстраиваемого по данным измерений и обеспечивающего при априорных предположениях **П1** и **П2** отслеживание заданного ограниченного сигнала y^* с как можно меньшей асимптотической (установившейся) ошибкой слежения:

$$J_\mu(\theta, y^*) := \sup_v \limsup_{t\to+\infty} |y_t - y_t^*| \to \min,$$

где супремум берется по всем возмущениям v, удовлетворяющим ограничениям (2)–(4). Для строгой формулировки задачи воспользуемся результатом из теории робастного управления в ℓ_1-постановке.

Если вектор коэффициентов ξ полиномов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ известен и известно смещение c_w внешнего возмущения, то при любых начальных данных $y_0, \dots, y_{-n+1}, u_0, \dots, u_{-m+1}$ регулятор

$$b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + y^*_{t+1} - c_w \quad (6)$$

обеспечивает при всех t равенство

$$y_{t+1} = v_{t+1} - c_w = \delta_w w_{t+1} + \delta_y (\Delta y)_{t+1}$$

и в силу непредсказуемости w_{t+1} и $(\Delta y)_{t+1}$ гарантирует минимизацию ошибки слежения $y_{t+1} - y^*_{t+1}$.

Для формулировки результата о значении показателя качества J_μ для замкнутой системы (1), (6) понадобится следующее определение.

Определение. Будем говорить, что последовательность $|y^*|$ равномерно часто попадает в окрестности своего верхнего предела $\|y^*\|_{ss}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют число N и подпоследовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности натуральных чисел такие, что

$$\forall j \quad (\, t_{j+1} - t_j \leqslant N \ \wedge \ |y^*_{t_j}| \geqslant \|y^*\|_{ss} - \varepsilon \,).$$

Теорема 1. Для замкнутой системы управления (1), (6) с суммарным возмущением v, удовлетворяющим ограничениям (2)–(4), и вектором параметров θ, в котором $\delta_y < 1$,

$$J_\mu(\theta, y^*) \leqslant J(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \|y^*\|_{ss}}{1 - \delta_y}$$

и

$$J_\mu(\theta, y^*) \nearrow J(\theta, y^*) \quad (\mu \to +\infty),$$

если последовательность $|y^*|$ равномерно часто попадает в окрестности своего верхнего предела (символ $\nearrow$ обозначает монотонную сходимость снизу).

Теорема 1 является следствием теорем 3 и 8 [9] для замкнутой системы (1), (6).

Следует добавить, что условие $\delta_y < 1$ является необходимым и достаточным условием робастной стабилизируемости модели (1) в классе линейных стационарных регуляторов при $\mu \to +\infty$. Поэтому предположение (5) об известной верхней границе $\bar{\delta}_y$ коэффициента усиления неопределенности является не обременительным, а чисто техническим. Конструктор может выбрать любую верхнюю границу $\bar{\delta}_y < 1$, и этот выбор не влияет на качество адаптивного управления.

Таким образом, показатель качества $J(\theta, y^*)$, определенный в теореме 1, является точной верхней границей показателя качества $J_\mu(\theta, y^*)$ при $\mu \to +\infty$ и будет служить показателем качества адаптивного управления. Поскольку точное значение показателя J_μ неизвестно, выбор показателя $J(\theta, y^*)$ для оценки качества адаптивного управления не имеет альтернативы.

Задача. Для модели (1) с априорной информацией **П1, П2** требуется построить обратную связь, гарантирующую с наперед заданной точностью неравенство

$$\limsup_{t \to +\infty} |y_t - y^*_t| \leqslant J(\theta, y^*) \quad (7)$$

при любых начальных данных и любых возмущениях v, удовлетворяющих ограничениям (2)–(4).

Поставленная задача является задачей *адаптивного оптимального робастного слежения с показателем качества* $J(\theta, y^*)$.

2. Оптимальное оценивание в условиях неидентифицируемости модели

Решение поставленной задачи базируется на методе рекуррентных целевых неравенств, множественном оценивании неизвестных параметров модели и выборе показателя качества задачи слежения $J(\theta, y^*)$ в качестве идентификационного критерия. В этом подразделе поясняется необходимость такого подхода в условиях неидентифицируемости модели (1) при априорных предположениях **П1, П2**.

Для решения задачи будет использоваться идентификационный подход, согласно которому в каждый момент времени следует вычислять по данным измерений необходимые оценки неизвестных параметров модели (1) и применять оптимальный регулятор вида (6), соответствующий вычисленным оценкам.

Новая информация о векторе всех неизвестных параметрах θ модели (1), удовлетворяющей априорным предположениям **П1, П2**, получаемая в момент времени $t+1$ после измерения выхода y_{t+1}, заключается в неравенстве

$$|a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_t - c_w| \leqslant \delta_w + \delta_y p_{t+1}, \quad (8)$$

вытекающем из уравнений и ограничений (1)–(4).

Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления базируется на следующем простом утверждении.

Утверждение 1. Если для некоторой оценки

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}_w, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^T, \ \hat{\xi} \in \Xi, \ 0 \leqslant \hat{\delta}_y \leqslant \bar{\delta}_y, \ 0 \leqslant \bar{\delta}_w,$$

при всех достаточно больших t выполняются неравенства

$$|\hat{a}(q^{-1})y_{t+1} - \hat{b}(q^{-1})u_t - \hat{c}_w| \leqslant \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{t+1}, \quad (9)$$

то модель (1) с вектором параметров $\hat{\theta}$ удовлетворяет априорным предположениям **П1, П2** при всех достаточно больших t.

Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления заключается в построении алгоритма оценивания, гарантирующего сходимость оценок за конечное время к некоторой предельной оценке θ_∞, удовлетворяющей целевым неравенствам (9) с достаточной для решения задачи точностью. Если полученная оценка θ_∞ удовлетворяет неравенствам (9) при всех достаточно больших t, то применение соответствующего этой оценке оптимального регулятора вида (6) гарантирует, в силу теоремы 1, неравенство

$$\limsup_{t \to +\infty} |y_t - y^*_t| \leqslant J(\theta_\infty, y^*). \quad (10)$$

Неравенство (10) достаточно для решения задачи адаптивной стабилизации, но не поставленной оптимальной задачи, решение которой будет гарантировано, если дополнительно выполняется неравенство

$$J(\theta_\infty, y^*) \leqslant J(\theta, y^*).$$

Из (8) следует, что при любом управлении моделью (1) на интервале времени $[0, t-1]$ полная информация о неизвестном векторе параметров θ в момент времени t имеет вид

$$\theta \in P_t := \{\, \hat{\theta} \in P_0 \,\big|\, |\hat{a}(q^{-1})y_{k+1} - \hat{b}(q^{-1})u_k - \hat{c}_w| \leqslant \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{k+1}\,,\ \ k = 0, 1, \ldots, t-1 \,\}\,, \quad (11)$$

где

$$P_0 := \{\, \hat{\theta} \,\big|\, \hat{\xi} \in \Xi\,,\ 0 \leqslant \hat{\delta}_y \leqslant \overline{\delta}_y\,,\ \hat{\delta}_w \geqslant 0 \,\}$$

– априорное множество векторов θ, удовлетворяющих априорной информации **П1, П2**. Каждое множество P_t включает те и только те векторы $\hat{\theta}$ из априорного множества P_0, которые согласованы с уравнением модели (1), априорными предположениями **П1, П2** и с измерениями на промежутке $[0, t]$ и является неограниченным полиэдром (многогранником).

Утверждение 2. При любом управлении объектом (1) на любом промежутке $[0, t]$, для любого $\hat{\xi} \in \Xi$, любого $\hat{c}_w \in \mathbb{R}$ и любого $\hat{\delta}_y \geqslant 0$

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}_w, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^T \in P_t \quad (12)$$

при всех достаточно больших $\hat{\delta}_w$.

Справедливость утверждения 2 очевидно следует из того, что неравенства (9) на каждом конечном интервале времени выполняются при всех достаточно больших $\hat{\delta}_w$.

Утверждение 2 представляет собой строгое математическое утверждение о *неидентифицируемости неизвестного вектора параметров* θ при априорных предположениях **П1, П2**. При этом для любой пары $\hat{\xi}, \hat{c}_w$ имеется семейство пар $\hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w$ с любым $\hat{\delta}_y \in [0, \overline{\delta}_y]$ и соответствующим $\hat{\delta}_y$ минимальным значением $\hat{\delta}_w$, для которых на данном интервале $[0, t]$ выполнены неравенства (9).

Если мы хотим обеспечить решение задачи 1 с помощью какого-либо алгоритма оценивания, обеспечивающего сходимость оценок к некоторому предельному значению θ_∞, и использования оптимального регулятора для вычисляемых оценок, то задача 1 будет решена, если вектор θ_∞ будет удовлетворять неравенствам (9) при всех достаточно больших t и

$$J(\theta_\infty, y^*) \leqslant J(\theta, y^*)\,. \quad (13)$$

Поскольку в любой момент времени t вектором параметров θ управляемой модели может быть любой вектор из согласованного с измерениями и априорной информацией множества P_t, ключевое неравенство (13) диктует выбор текущих оптимальных оценок в виде

$$\theta_t = \operatorname*{argmin}_{\hat{\theta} \in P_t} J(\hat{\theta}, y^*)\,. \quad (14)$$

Таким образом, неидентифицируемость параметров модели (9) при априорных предположениях **П1, П2** диктует выбор показателя качества $J(\hat{\theta}, y^*)$ в качестве идентификационного критерия.

3. Алгоритм полиэдрального оценивания заданной сложности

Для решения поставленной задачи будет использован алгоритм оценивания, который в каждый момент времени t, наряду с оценками θ_t неизвестного вектора параметров θ, вычисляет полиэдральные верхние (по включению) оценки Θ_t полиэдров P_t, определенных в (11). Выберем натуральное число

$$N \geqslant \dim\theta = n + m + 3\,,$$

равное числу запоминаемых линейных неравенств для описания полиэдральных оценок Θ_t, и параметр мертвой зоны $\varepsilon > 0$, характеризующий желаемую точность выполнения неравенств (9) для оценок θ_t. Выберем в качестве начальных оценок

$$\Theta_0 = P_0\,, \quad \theta_0 = (\xi_0^T, 0, 0, 0)^T\,,$$

где ξ_0 – любой вектор из априорного множества Ξ. Пусть

$$\theta_t = (\xi_t^T, c_{w,t}, \delta_{y,t}, \delta_{w,t})^T \quad (15)$$

– оценка неизвестного вектора θ в момент t и в момент времени $t+1$ измерен выход y_{t+1}. Неравенство (9) относительно вектора θ_t представляет собой систему двух линейных неравенств (ввиду наличия модуля в левой части неравенства), только одно из которых может нарушаться. Для проверки наличия такого неравенства введем следующие обозначения. Положим

$$\varphi_t := (-y_t, -y_{t-1}, \ldots, -y_{t-n+1}, u_t, \ldots, u_{t-m+1})^T,$$
$$\eta_{t+1} := \mathrm{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^T \xi_t - c_{w,t})\,,$$
$$\psi_{t+1} := (\eta_{t+1}\varphi_t^T, \eta_{t+1}, p_{t+1}, 1)^T\,,$$
$$\zeta_{t+1} := \eta_{t+1} y_{t+1}\,.$$

В этих обозначениях неравенство (9) для вектора θ_t принимает вид

$$\psi_{t+1}^T \theta_t \geqslant \zeta_{t+1}\,, \quad (16)$$

а одно из двух линейных неравенств (9), которое может нарушаться, имеет вид

$$\psi_{t+1}^T \hat{\theta} \geqslant \zeta_{t+1}\,. \quad (17)$$

Каждая полиэдральная оценка Θ_t будет описываться системой N линейных неравенств вида (17) или неравенств из описания априорного множества Θ_0 (на некотором начальном отрезке число неравенств может быть меньше N, пока не достигнет этого значения). Положим

$$\theta_{t+1} := \theta_t\,,\ \Theta_{t+1} := \Theta_t,$$
$$\text{если}\ \ \psi_{t+1}^T \theta_t \geqslant \zeta_{t+1} - \varepsilon|\psi_{t+1}|\,. \quad (18)$$

В противном случае положим

$$\Omega_{t+1} := \{\, \hat{\theta} \,\big|\, \psi_{t+1}^T \hat{\theta} \geqslant \zeta_{t+1} \,\}\,,$$
$$\theta_{t+1} := \operatorname*{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*)\,, \quad (19)$$

где θ_{t+1} – вершина полиэдра $\Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}$, являющаяся решением задачи дробно-линейного программирования (19). Оценка Θ_t обновляется согласно алгоритму

$$\Theta_{t+1} = \mathcal{S}(\Theta_t, \Omega_{t+1}) , \qquad (20)$$

где алгоритм $\mathcal{S}$ дает $\Theta_t \cap \Omega_{t+1}$ (т.е. добавление к линейным неравенствам из описания Θ_t нового неравенства (17)), если число неравенств в описании Θ_t строго меньше N. Если же число неравенств в описании Θ_t равно N, то новое неравенство (17) включается в описание Θ_{t+1} вместо любого из неравенств в описании Θ_t, на границе которого не лежит θ_{t+1}.

Задача оптимального оценивания (19) является задачей дробно-линейного программирования с не более, чем $l+3+N+1$ линейными неравенствами ($l+3$ – число неравенств в описании априорного множества Θ_0). Известно (см., например, [10]), что задача дробно-линейного программирования стандартным образом сводится к задаче линейного программирования путем добавления одной переменной, одного линейного неравенства и одного линейного равенства. Таким образом, описанный алгоритм оценивания имеет ограниченную сложность, не растущую с ростом времени.

4. Адаптивное оптимальное слежение

Используя введенное в предыдущем разделе обозначение φ_t для фазового вектора, уравнение неизвестного конструктору оптимального регулятора (6) можно записать в виде

$$\varphi_t^T \xi = y^*_{t+1} - c_w .$$

Согласно описанному в начале раздела 2 идентификационному подходу, управление в момент t будет осуществляться *адаптивным регулятором*

$$\varphi_t^T \xi_t = y^*_{t+1} - c_{w,t} , \qquad (21)$$

где ξ_t и $c_{w,t}$ – компоненты вектора оценок (15).

Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению (1) и априорным предположениям **П1, П2** с неизвестным вектором параметров

$$\theta = (\xi^T, c_w, \delta_y, \delta_w)^T .$$

Пусть объект управляется адаптивным регулятором (21) с использованием алгоритма оценивания (18)–(20). Тогда для любого достаточно малого параметра мертвой зоны $\varepsilon > 0$ и для любых начальных данных в замкнутой системе управления (1), (21) справедливы утверждения:

1. Последовательность $J(\theta_t, y^*)$ возрастающая и

$$J(\theta_t, y^*) = \min_{\hat\theta \in \Theta_0 \cap \Theta_t} J(\hat\theta, y^*) \leqslant J(\theta, y^*) \quad \forall\, t . \qquad (22)$$

2. Если оценки Θ_t и θ_t не изменяются при всех достаточно больших t, то

$$\|y_t - y^*_t\|_{ss} \leqslant J(\theta_\infty, y^*) + K_{\theta_\infty}\varepsilon \leqslant J(\theta, y^*) + K_{\theta_\infty}\varepsilon , \qquad (23)$$

где $\theta_\infty = (\xi^T_\infty, c_{w,\infty}, \delta_{y,\infty}, \delta_{w,\infty})$ – финальное значение оценок θ_t и

$$K_{\theta_\infty} = \frac{4}{(1-\delta_{y,\infty})^2} \times [1 + 2\|y^*\|_{ss} + C_\infty + \\ + (\delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty}\|y^*\|_{ss})(2 + C_\infty)] ,$$

где $C_\infty = \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|$.

Доказательство. Монотонность последовательности $J(\theta_t, y^*)$ доказывается индукцией по времени t. Пока число неравенств в полиэдральных оценках Θ_t не превосходит N, эти оценки убывают по включению, и возрастание последовательности $J(\theta_t, y^*)$ и равенство в (22) прямо следуют из (19) и равенств $\Theta_{t+1} = \Theta_t \cap \Omega_{t+1}$. Докажем индукционный переход. Пусть возрастание $J(\theta_t, y^*)$ имеет место до момента t включительно, справедливо равенство в (22) и число неравенств в описании Θ_t достигло N. В момент $t+1$ из включения $\Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1} \subset \Theta_t$, (22) и (19) следует

$$J(\theta_{t+1}, y^*) \geqslant J(\theta_t, y^*) .$$

Для доказательства первого утверждения теоремы остается показать, что после обновления Θ_t на Θ_{t+1} согласно (20) выполнено равенство

$$\min_{\hat\theta \in \Theta_0 \cap \Theta_{t+1}} J(\hat\theta, y^*) = \min_{\hat\theta \in \Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}} J(\hat\theta, y^*), \qquad (24)$$

несмотря на замену одного из неравенств полиэдра Θ_t на неравенство, задающее полупространство Ω_{t+1}. Для этого заметим, что линии уровня дробно-линейного показателя качества $J(\hat\theta, y^*)$ лежат на гиперплоскости в $\mathbb{R}^{\dim\theta}$:

$$J(\hat\theta, y^*) = C \quad \Leftrightarrow \quad \hat\delta_w + \hat\delta_y(\|y^*\|_{ss} + C) = C .$$

В силу этого весь полиэдр $\Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}$ лежит в полупространстве

$$\{\, \hat\theta \mid J(\hat\theta, y^*) \geqslant J(\theta_{t+1}, y^*) \,\} ,$$

а его вершина θ_{t+1} – на границе этого полупространства и задается $\dim\theta$ неравенствами из описания этого полиэдра. Согласно (20) из полиэдра Θ_t исключается неравенство, на границе которого не лежит точка минимума θ_{t+1}, при этом все добавленные при исключении неравенства векторы, если таковые имеются, могут находиться только в этом же полупространстве. Поэтому θ_{t+1} остается точкой минимума показателя качества J на "урезанном" полиэдре $\Theta_0 \cap \Theta_{t+1}$, что означает справедливость (24).

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Сходимость оценок к финальному значению θ_∞ за конечное время означает, что в силу (18) при всех достаточно больших t выполнены неравенства

$$\psi^T_{t+1}\theta_t \geqslant \zeta_{t+1} - \varepsilon|\psi_{t+1}| . \qquad (25)$$

Поскольку неравенства (16) эквивалентны неравенствам (9) для финальной оценки $\hat\theta = \theta_\infty$, то при всех

достаточно больших t из (25) следует

$$\begin{array}{l} |a_\infty(q^{-1})y_{t+1} - b_\infty(q^{-1})u_t - | \leqslant \\ \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty}p_{t+1} + \varepsilon|\psi_{t+1}| \leqslant \\ \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty}p_{t+1} + \\ +\varepsilon(|y^t_{t-n+1}| + |u^t_{t-m+1}| + p_{t+1} + 1) \leqslant \\ \delta_{w,\infty} + \varepsilon + (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon)p_{t+1} + \varepsilon|u^t_{t-m+1}|\,. \end{array} \tag{26}$$

Неравенства (26) позволяют рассматривать (см. утверждение 1) выход y_t для всех достаточно больших t как выход модели (1) с вектором параметров $(\xi^T_\infty, \delta_{y,\infty}+2\varepsilon, \delta_{w,\infty}+\varepsilon)^T$ вместо θ и с дополнительной неопределенностью $\varepsilon(\Delta_1 u)_{t+1}$ в канале управления, где ε – коэффициент усиления неопределенности, и нормированная неопределенность Δ_1 удовлетворяет ограничению

$$|(\Delta_1 u)_t| \leqslant \max_{t-\mu\leqslant s<t} |u_{t-s}|\,.$$

По теореме 8 [9] установившаяся ошибка слежения $\|y_t - y^*_t\|_{ss}$ для такой замкнутой системы управления не превосходит величины

$$\bar{J}_\infty := \\ = \frac{\delta_{w,\infty} + \varepsilon + (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon + \varepsilon\|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|)\|y^*\|_{ss}}{1 - (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon) - \varepsilon\|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|}\,. \tag{27}$$

Левое неравенство в (23) получается оценкой сверху разности $\bar{J}_\infty - J(\theta_\infty, y^*)$ с помощью ряда алгебраических преобразований, которые здесь не приводятся. Наконец, правое неравенство в (23) следует из ключевого неравенства (13), которое, в свою очередь, следует из определения (19) оптимальных оценок $\theta_t = \theta_\infty$ и включений $\theta \in \Theta_t$ при всех t. Теорема доказана. □

Замечание 1. Второе утверждение теоремы содержит предположение о сходимости алгоритма оценивания за конечное время. Такая конечная сходимость строго доказана в [11] для случая $\dim\theta \leqslant 3$ и является открытой проблемой для произвольной размерности вектора оцениваемых параметров. Однако сходимость множественных и векторных оценок за конечное время строго гарантирована, если искусственно не ограничивать число неравенств в множественных оценках Θ_t. Эта конечная сходимость следует из того, что в этом случае из монотонно убывающих по включению оценок Θ_t при каждом их обновлении выбрасывается по меньшей мере шар радиуса $\varepsilon/2$ (см. [8]). Однако очевидно вытекающая из этого обстоятельства экспоненциальная оценка числа возможных обновлений множественных оценок и, тем более, числа запоминаемых неравенств, является грубой и заведомо завышенной. Результаты моделирования адаптивного управления показывают, что число обновлений не растет экспоненциально с ростом размерности. Кроме того, численные эксперименты показывают, что конечная сходимость алгоритма оценивания (18)–(20) наблюдается в любых размерностях, и проблема состоит в получении доказательства конечной сходимости.

Замечание 2. Важным отличительным достоинством использованного для синтеза адаптивного управления метода рекуррентных целевых неравенств является *онлайн верификация* не только текущих оценок, но и априорных предположений об управляемом объекте. Традиционные градиентные и МНК алгоритмы не обеспечивают такой верификации, которая представляет собой отдельную проблему, не изучавшуюся в рамках теории адаптивного управления. Более того, постоянство оценок на длительном промежутке времени заведомо гарантирует неравенства (23), в которых роль θ_∞ играет текущая не обновляющаяся оценка θ_t. Таким образом, конструктор системы управления имеет не только оценку гарантируемого качества слежения (в условиях действия возмущения и неопределенности априори неизвестной амплитуды!), но и оценку точности $K_{\theta_t}\varepsilon$ адаптивного оптимального управления и может при необходимости уменьшить параметр мертвой зоны ε для повышения точности.

5. Моделирование

5.1. Проекционный и МНК алгоритмы оценивания

Одним из традиционных градиентных алгоритмов оценивания для решения задач адаптивной стабилизации является *проекционный алгоритм*, основанный на следующем идентификационном критерии. Для простоты изложения предположим сначала, что внешнее возмущение – несмещенное, т.е. $c_w = 0$. Тогда уравнение модели (1) можно записать в виде

$$y_{t+1} - \xi^T\varphi_t = v_{t+1}\,.$$

Пусть ξ_t – некоторая оценка неизвестного вектора коэффициентов ξ в момент t. Тогда оценка ξ_{t+1} проекционного алгоритма имеет вид

$$\xi_{t+1} = \operatorname*{argmin}_{\{\hat{\xi}\ |\ y_{t+1} - \hat{\xi}^T\varphi_t = 0\ \}} |\hat{\xi} - \xi_t|\,,$$

т.е. является проекцией вектора ξ_t на гиперплоскость $y_{t+1} - \hat{\xi}^T\varphi_t = 0$ в пространстве оценок $\hat{\xi}$. Если оценка ξ_{t+1} не попадает в априорное выпуклое множество Ξ, то она дополнительно проектируется на Ξ. Таким образом, цель проекционного алгоритма – вычислить ближайшую к вектору ξ_t оценку ξ_{t+1}, дающую нулевую невязку модели в момент $t+1$. Выбор ближайшей оценки гарантирует убывание функции Ляпунова $|\xi_t - \xi|^2$ при отсутствии возмущения v в модели (1). В случае ненулевого смещения c_w к вектору ξ следует добавить компоненту c_w, а к векторам оценок $\hat{\xi}$ – компоненту $\hat{c}_w$.

С самого начала развития теории адаптивного управления в 1960-х гг. предлагались и исследовались различные модификации проекционного алгоритма с целью обеспечения стабилизации адаптивных систем без возмущений или при ограниченных возмущениях. Однако только относительно недавно в [12, 13] были получены, без каких-либо дополнительных искусственных предположений, строгие результаты в задаче адаптивного слежения для дискретных систем с помощью проекционного алгоритма. Было доказано, что ошибка слежения в адаптивной системе с чистым проекционным алгоритмом пропорциональна взвешенной по времени сумме суммарного возмущения v и задающего сигнала

y^*. В разделе 5.2 приводятся результаты моделирования, иллюстрирующие на примере проекционного алгоритма непригодность традиционных градиентных алгоритмов оценивания для решения задач адаптивного оптимального управления в детерминированной постановке.

МНК базируется на идентификационном критерии в виде суммы квадратов невязок модели

$$I(\hat{\xi}, \hat{c}_w) = \sum_{k=1}^{k=t} (y_{k+1} - \hat{\xi}^T \varphi_k - \hat{c}_w)^2 .$$

Как отмечалось во введении, МНК нашел широкое применение в теории адаптивного оптимального управления для систем со случайными внешними возмущениями. Но стохастическая теория робастного управления до настоящего времени не разработана и поэтому нет и теории адаптивного оптимального робастного управления. В этом разделе приводятся результаты моделирования адаптивной системы с МНК алгоритмом оценивания, показывающие, что при наличии даже случайной, а не детерминированной неопределенности по выходу, поведение адаптивной системы, приемлемое для большинства реализаций случайных возмущений и неопределенностей, может быть не только далеко не оптимальным, но и практически неприемлемым для некоторых реализаций.

5.2. Описание и результаты численного моделирования

Для численного моделирования выбран неустойчивый минимально-фазовый объект (1) с полюсами (корнями $a(\lambda)$) $0,8$ и $0,9$, каждый кратности 2, и нулями (корнями $b(\lambda)$) $1,1$ и $1,2$ и с $b_1 = 2$. Этим полюсам и нулям соответствует вектор коэффициентов

$$\xi = (-4,2222;\ 6,9290;\ -5,2469;\ 1,5432;\ 2,0000;\ -3,4848;\ 1,5152)^T .$$

Суммарное возмущение v моделируется в виде

$$v_t = 1 + w_t + 0.5\,\varkappa_t\, p_t\,, \qquad (28)$$

где $w_t, \varkappa_t$ – последовательности независимых равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$ случайных величин. Таким образом, неизвестные конструктору смещение и норма внешнего возмущения равны, соответственно, $c_w = 1$ и $\delta_w = 1$. Память неопределенности $\mu = 10$, а коэффициент усиления неопределенности δ_y в приводимых численных результатах принимал значения 0,2 и 0,5.

Априорное множество P_0 векторов θ описывается ограничениями

$$|a_i| \leqslant 10,\ |b_i| \leqslant 10,\ i = 1, 2, 3,$$
$$b_1 \geqslant 0,1,\ 0,8 \geqslant \delta_y \geqslant 0,\ \delta_w \geqslant 0,$$
$$b_1 - b_3 \geqslant 0,01,\ b_1 \pm b_2 + b_3 \geqslant 0,01 .$$

Неравенства в последней строке эквивалентны условию минимальной фазовости модели, если в правых частях этих неравенств вместо 0.01 поставить нули. Сколь угодно малый отступ, в данном случае 0.01, необходим во избежание сингулярности. Параметр мертвой зоны алгоритма оценивания выбран равным $0,001$, начальные значения y_1, y_2, y_3, y_4 – случайные из отрезка $[-1, 1]$, u_1, u_2, u_3, u_4 – нули.

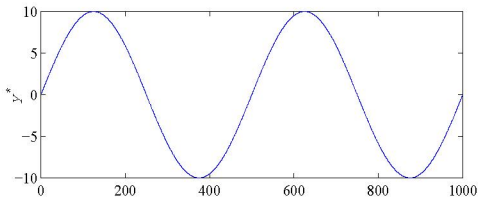

Рис. 1. График задающего сигнала y^*.
Fig. 1. Plot of the reference signal y^*.

График периодического задающего сигнала $y_t^* = 10\,\sin(0.002\,t)$ с $\|y_t^*\|_{ss} = 10$ представлен на рис. 1.

Для иллюстрации поведения адаптивных систем с различными алгоритмами оценивания при неблагоприятных возмущениях, значения внешнего возмущения и неопределенности на промежутке [500, 700] выбирались так, чтобы максимизировать абсолютную величину выхода в следующий момент времени:

$$v_{t+1} = (\delta_w + \delta_y p_{t+1})\,\mathrm{sign}(\xi_t^T \varphi_t)\,.$$

При моделировании адаптивного управления с оптимальным алгоритмом оценивания (18)–(20) использовалось $N = 2\dim\theta = 20$ запоминаемых неравенств. Этому числу неравенств соответствует сохранение информации о текущей оптимальной оценке θ_t и всех ее 10 смежных вершинах.

Пунктирные линии на всех приводимых далее графиках ошибки слежения соответствуют неизвестным конструктору адаптивной системы оптимальным границам для ошибки слежения $\pm J(\theta, y^*)$.

На рис. 2, 3 и 4 приведены графики выхода установившейся ошибки слежения соответственно для адаптивного управления с проекционным, МНК и оптимальными алгоритмами оценивания (18)–(20) при одинаковых реализациях случайных величин w_t и $\varkappa_t$ и относительно малом коэффициенте усиления неопределенности $\delta_y = 0.2$, которому соответствует оптимальное значение $J(\theta, y^*) = 3,75$. Рис. 2 иллюстрирует неприемлемое качество, доставляемое проекционным алгоритмом оценивания уже при относительно малом значении δ_y. Рис. 3 иллюстрирует, как изменение задающего сигнала нежелательным образом отражается на выходе адаптивной системы с МНК алгоритмом оценивания.

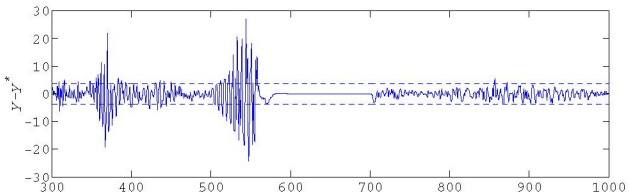

Рис. 2. Проекционный алгоритм, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.
Fig. 2. Projection algorithm, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

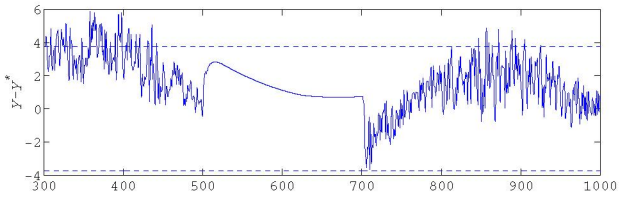

Рис. 3. МНК алгоритм, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

Fig. 3. Least squares algorithm, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

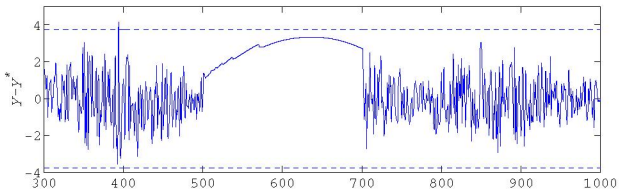

Рис. 4. Оптимальный алгоритм, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

Fig. 4. Optimal algorithm, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

На рис. 5 приведен пример всплеска ошибки слежения при МНК оценивании и другой реализации случайных величин w_t и $\varkappa_t$. Отметим, что в установившемся режиме до момента $t = 500$ начала возмущений максимальной амплитуды ошибка слежения значительно смещена относительно гарантируемого адаптивным оптимальным управлением интервала, а при возмущениях максимальной амплитуды превысила оптимальную верхнюю границу более чем на порядок. Для этих же реализаций случайных величин w_t и $\varkappa_t$ на рис. 6 представлен график ошибки слежения при оптимальном алгоритме оценивания.

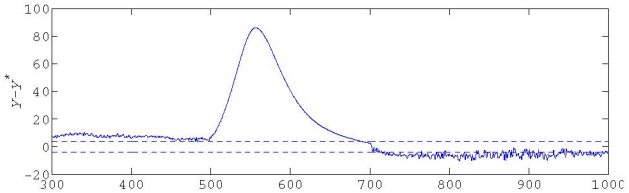

Рис. 5. МНК алгоритм, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

Fig. 5. Least squares algorithm, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

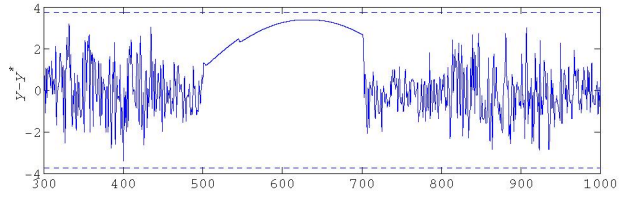

Рис. 6. Оптимальный алгоритм, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

Fig. 6. Optimal algorithm, $\delta_y = 0.2$, $J(\theta, y^*) = 3,75$.

На рис. 7, 8 и 9 приведены графики выхода установившейся ошибки слежения соответственно для адаптивного управления с проекционным, МНК и оптимальным алгоритмами оценивания при одинаковых реализациях случайных величин w_t и $\varkappa_t$ и коэффициенте усиления неопределенности $\delta_y = 0.5$, которому соответствует оптимальное значение $J(\theta, y^*) = 12$. При таком коэффициенте усиления адаптивное управление с проекционным алгоритмом демонстрирует неприемлемое качество при почти всех реализациях возмущения и неопределенности. Адаптивное управление с МНК алгоритмом на большинстве реализаций возмущений и неопределенности демонстрирует хорошее качество слежения, но не может гарантировать его для всех допустимых возмущений и неопределенности. На рис. 8 проиллюстрировано неприемлемое качество адаптивного управления с МНК алгоритмом в установившемся режиме до момента $t = 500$, начала промежутка возмущения и неопределенности максимальной амплитуды, которые помогли МНК улучшить оценки и, как следствие, ошибку слежения.

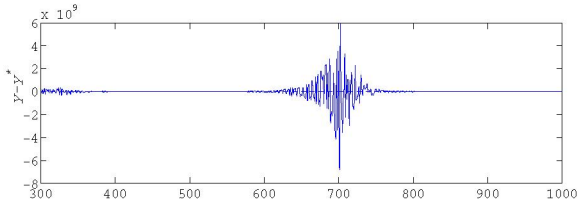

Рис. 7. Проекционный алгоритм, $\delta_y = 0,5$, $J(\theta, y^*) = 12$.

Fig. 7. Projection algorithm, $\delta_y = 0,5$, $J(\theta, y^*) = 12$.

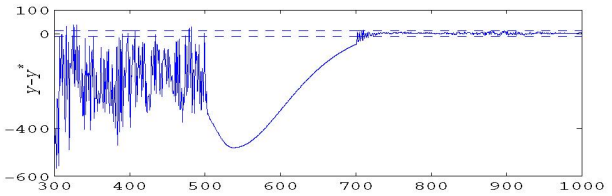

Рис. 8. МНК алгоритм, $\delta_y = 0.5$, $J(\theta, y^*) = 12$.

Fig. 8. Least squares algorithm, $\delta_y = 0.5$, $J(\theta, y^*) = 12$.

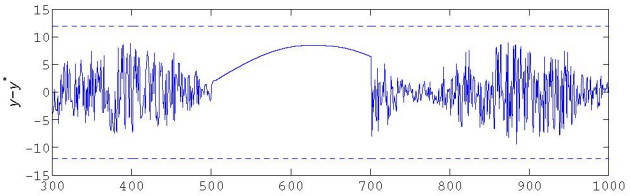

Рис. 9. Оптимальный алгоритм, $\delta_y = 0,5$, $J(\theta, y^*) = 12$.

Fig. 9. Optimal algorithm, $\delta_y = 0,5$, $J(\theta, y^*) = 12$.

Для адаптивного управления с алгоритмом оценивания (18)–(20) асимптотическая оптимальность слежения наблюдалась абсолютно во всех многочисленных экспериментах. Число обновлений оценок алгоритмом (18)–(20) при случайных и детерминированных w_t и $\varkappa_t$ находилось в промежутке [65, 90], а время счета на ноутбуке с процессором 4xIntelCore i5-7200U CPU@2.50GHz колебалось в промежутке от 2,5 до 4,7 сек. При моделировании адаптивного оптимального управления, в котором количество запоминаемых линейных неравенств не ограничивалось и для которого гарантирована сходимость оценок за конечное время, число обновлений оценок возрастает на единицы, а время счета

примерно на 0,5 сек. Следует отметить, что оценки, доставляемые алгоритмом (18)–(20) к моменту $t = 1000$, настолько близки к вектору θ, что при увеличении времени моделирования до $t = 10^4$ оценки θ_t испытывают единицы обновлений.

5.3. Онлайн оценка качества слежения и верификация модели

В этом разделе иллюстрируется первое утверждение теоремы 2 и замечание 2 в конце предыдущего раздела. На рис. 10 показана динамика роста оптимальных значений показателя качества $J(\theta_t, y^*)$, согласованных с данными измерений к моменту t (за исключением моментов, соответствующих выбрасываемым из оценок Θ_t неравенствам) для реализаций возмущения и неопределенности, соответствующих рис. 9. Отметим, что последние 4 обновления оценок происходили в моменты времени 501, 507, 516, 854. Таким образом, к моменту $t = 500$ начала возмущений максимальной амплитуды, способствующих получению более точных оценок, алгоритм оптимального оценивания (18)–(20) уже предоставил достаточно хорошие оценки, которые всего трижды уточнялись при действии возмущений максимальной амплитуды и всего один раз после их окончания. Последнее согласованное с измерениями значение $J(\theta_{1000}, y^*) = J(\theta_{854}, y^*) = 10,2695 < J(\theta, y^*) = 12$. В заключение приведем последнюю оценку

$$\theta_{1000} = (-3.8640;\ 6.2783;\ -4.8115;\ 1.4014;\ 1.8285;\ 3.1815;\ 1,3846;\ 0,9459;\ 0,4378;\ 1,3961)^T$$

неизвестному конструктору вектора параметров

$$\theta = (-4,2222;\ 6,9290;\ -5,2469;\ 1,5432;\ 2;\ -3,4848;\ 1,5152;\ 1;\ 0.5;\ 1)^T.$$

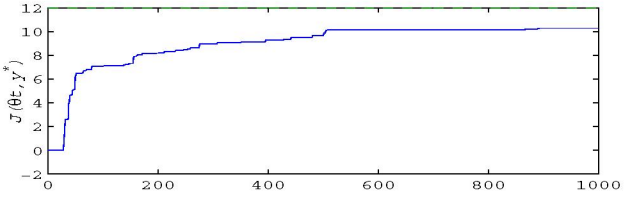

Рис. 10. График $J(\theta_t, y^*)$, $\delta_y = 0,5$, $J(\theta, y^*) = 12$.
Fig. 10. Plot of $J(\theta_t, y^*)$, $\delta_y = 0,5$, $J(\theta, y^*) = 12$.

Множественное оценивание неизвестных параметров в рамках теории идентификации систем традиционно базировалось на предположении об известных верхних границах возмущений и неопределенности и поэтому этот метод считался слишком консервативным [14]. Приведенные результаты наглядно опровергают широко распространенную точку зрения о неизбежном консерватизме множественного оценивания.

6. Заключение

В данной работе рассмотрена детерминированная задача адаптивного оптимального робастного слежения для относительно простого дискретного минимально-фазового объекта с одним входом и одним выходом в условиях сильной априорной неопределенности, при которой параметры номинальной модели, характеристики ограниченного внешнего возмущения и коэффициент усиления неопределенности по выходу не идентифицируемы. Традиционные алгоритмы синтеза адаптивного стабилизирующего управления, базирующиеся на методе наименьших квадратов или градиентных алгоритмах оценивания, непригодны для решения рассмотренной оптимальной задачи. Для решения оптимальной задачи необходимо, во-первых, задействовать множественные оценки неизвестных параметров, согласованные с данными измерений, и, во-вторых, использовать показатель качества задачи слежения в качестве идентификационного критерия. В рассматриваемой специальной задаче этот показатель качества является дробно-рациональной функцией неизвестных параметров, благодаря чему вычисление текущих оптимальных оценок сводится к задаче линейного программирования и может быть реализовано в режиме онлайн. Важными отличительными достоинствами предложенного адаптивного управления являются онлайн верификация модели управляемого объекта и оценка гарантируемого качества слежения, согласованная с данными измерений и априорной информацией.

Литература

1. *Goodwin G.C. and Sin K.S.* Adaptive Filtering, Prediction and Control. Prentice-Hall. Euglewood Cliffs. NJ. 1984.
2. *Chen H., Guo L.* Identification and Stochastic Adaptive Control // Boston. MA. Birkhauser. 1991.
3. *Guo L.* Self-Convergence of Weighted Least-Squares with Applications to Stochastic Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. Vol. 41. No. 1. P. 79–89.
4. *Radenkovich M., Michel A.* Stochastic adaptive control of nonminimum phase systems in the presence of unmodelled dynamics // Circuits, Systems, and Signal Processing. 1995. Vol. 14. No. 3. P. 317–349.
5. *Anderson B.* Failures of adaptive control theory and their resolution // Communications in Information and Systems. 2005. Vol. 5. No. 1. P. 1–20.
6. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
7. *Bondarko V.A. and Yakubovich V.A.* Method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 1992. Vol. 6. No. 3. P. 141–160.
8. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в ℓ_1-постановке // Автоматика и телемеханика. 1998. № 3. С. 107–131.
9. *Соколов В.Ф.* Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в ℓ_1-метрике // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 101–112.
10. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge University Press. NY. 2004.

11. *Соколов В.Ф.* Адаптивное минимаксное управление на основе рекуррентного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 1993. № 12. С. 127–139.
12. *Miller D.E.* A Parameter Adaptive Controller Which Provides Exponential Stability: The First Order Case // Systems and Control Letters. 2017. Vol. 103. No. 5. P. 23–31.
13. *Miller D.E., Shahab M.T.* Classical Pole Placement Adaptive Control Revisited: Linear-like Convolution Bounds and Exponential Stability // Mathematics of Control, Signals and Systems. 2018. Vol. 30. No. 4. P. 1–51.
14. *Ninnes B. and Goodwin G.* Estimation of model quality // Automatica. 1995. Vol. 31. No. 10. P. 1667–1682.

References

1. *Goodwin G.C., Sin K.S.* Adaptive Filtering, Prediction and Control // Prentice-Hall. Euglewood Cliffs. NJ. 1984.
2. *Chen H., Guo L.* Identification and Stochastic Adaptive Control // Boston. MA. Birkhauser. 1991.
3. *Guo L.* Self-Convergence of Weighted Least-Squares with Applications to Stochastic Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. Vol. 41. No. 1. P. 79–89.
4. *Radenkovich M., Michel A.* Stochastic adaptive control of nonminimum phase systems in the presence of unmodelled dynamics // Circuits, Systems, and Signal Processing. 1995. Vol. 14. No. 3. P. 317–349.
5. *Anderson B.* Failures of adaptive control theory and their resolution // Communications in Information and Systems. 2005. Vol. 5. No. 1. P. 1–20.
6. *Fomin V.N., Fradkov A.L., Yakubovich V.A.* Adaptivnoye upravleniye dinamicheskimi obyektami [Adaptive control of dynamic plants]. Moscow: Nauka, 1981.
7. *Bondarko V.A. and Yakubovich V.A.* Method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 1992. Vol.6. No. 3. P. 141–160.
8. *Sokolov V.F.* Adaptive Robust Control of a Discrete Scalar Object in the ℓ_1-statement // Autom. Remote Control. 1998. Vol. 59. No. 3. P. 392–411.
9. *Sokolov V.F.* Asymptotic robust performance of the discrete tracking system in the ℓ_1-metric // Autom. Remote Control. 1999. Vol. 60. No. 1 Part 2. P. 82–91.
10. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization // Cambridge University Press. NY. 2004.
11. *Sokolov V.F.* Adaptive minimax control based on recursive linear programming // Autom. Remote Control. 1993. Vol. 54. No. 12. P. 1835–1845.
12. *Miller D.E.* A Parameter Adaptive Controller Which Provides Exponential Stability: The First Order Case // Systems and Control Letters. 2017. Vol. 103. No. 5. P. 23–31.
13. *Miller D.E., Shahab M.T.* Classical Pole Placement Adaptive Control Revisited: Linear-like Convolution Bounds and Exponential Stability // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2018. Vol. 30. No. 4. P. 1–51.
14. *Ninnes B., Goodwin G.* Estimation of model quality // Automatica. 1995. Vol. 31. No. 10. P. 1667–1682.

Статья поступила в редакцию 09.09.2020.