УДК 515.1,514.74
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-34-39

А.В. ЖУБР

ПОЛУСПИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ, ЧАСТЬ 2

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

avzhubr@gmail.com

Аннотация

Данная статья – продолжение работы [1], в которой изучалось некоторое обобщение понятия спинорной структуры на векторном расслоении с нулевым классом Штифеля-Уитни w_2, позволяющее рассматривать произвольные ориентированные расслоения (не только с $w_2 = 0$). Такое обобщение было предложено много раньше в работе автора [2], где оно послужило одним из инструментов в доказательстве теоремы классификации для всех замкнутых односвязных шестимерных многообразий. В вышеупомянутой заметке [1] эта конструкция изучалась несколько более подробно, в настоящей же работе устанавливаются дальнейшие свойства таких структур, в частности, здесь рассматриваются соответствующие группы бордизмов (уже использовавшиеся в работе [2]) и выясняется их связь со «скрученными спинорными бордизмами» в работе М.Крека и С.Штольца [3].

Ключевые слова:
гомотопия, векторное расслоение, полуспинорная структура, различающий класс, группа бордизмов

A.V. ZHUBR

TWISTED SPIN STRUCTURES, PART 2

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

Abstract

This paper is a sequel to the note [1], where a certain generalization of the notion of spin structure on a vector bundle with zero w_2 Stiefel-Whitney class, to the case of all oriented vector bundles (with whatever w_2), has been given. This generalization was actually introduced much earlier in the author's work [2], where it served as one of the instruments in the proof of classification theorem for all closed simply connected 6-manifolds. In the above-mentioned note [1] this construction has been considered in more detail; the present paper gives further properties of such structures (functorial properties; difference class and its properties; twisted Spin structures and trivialisations on the 1-skeleton; etc.). In particular, we consider the corresponding bordism groups (having been used already in [1]), and establish their connection with «twisted spin bordism groups» used by M.Kreck and S.Stolz in [3].

Keywords:
homotopy, vector bundle, twisted Spin structure, difference class, bordism group

Введение

Как уже было сказано в аннотации, данный текст является продолжением и развитием заметки автора [1], поэтому вводимые ниже соглашения и обозначения в основном повторяют (с некоторыми модификациями) то, что было сказано там. То же относится и к вспомогательным результатам – мы приводим необходимые формулировки из работы [1], опуская соответствующие доказательства; общеизвестные факты приводятся без указания ссылок.

1. Обозначения и терминология

1.1. Пространства и отображения

Термин «пространство» всюду понимается в смысле «паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство»; во многих случаях это будет конечный CW-комплекс или многообразие. «Многообразие» означает «ориентированное компактное гладкое многообразие» (с краем или без края). «Отображение» означает «непрерывное отображение».

Для любых множеств X, Y проекции их декартова произведения $X \times Y$ на X и Y обозначаются как pr_1 и pr_2, соответственно.

1.2. Гомотопии и гомотопии гомотопий

Гомотопия между двумя отображениями $f, g: X \to Y$ (мы будем говорить «гомотопия из f в g») – это, как всегда, отображение

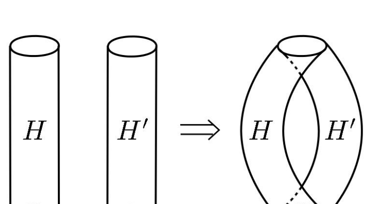
$$H : X \times [0,1] \to Y$$

с $H(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = g(x)$; все это будем коротко записывать в виде $H : f \to g$, а вместо $H(x,t)$ будем также писать $H_t(x)$. Если $H, H' : f \to g$ – две гомотопии, то ***гомотопией между*** H ***и*** H' называется отображение $G : X \times [0,1]^2$ с

$$G(x,t,s) = \begin{cases} H_t(x) & \text{при } s = 0; \\ H'_t(x) & \text{при } s = 1; \\ f(x) & \text{при } t = 0; \\ g(x) & \text{при } t = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Можно, таким образом, сказать, что гомотопия между двумя отображениями из пространства X в пространство Y – это путь в пространстве $C(X,Y)$ отображений из X в Y, а гомотопия гомотопий – это гомотопия такого рода пути с фиксированными началом и концом. Факт гомотопности как двух отображений f, g, так и двух гомотопий H, K мы будем обозначать одинаковым образом – соответственно, $f \sim g$ и $H \sim K$.

Мы рассмотрим один специальный случай, когда нетрудно сформулировать условие гомотопности двух гомотопий на языке стандартной теории препятствий. Пусть пространство X снабжено структурой CW-комплекса, а Y – пространство Эйленберга-Маклейна $K(\pi, n)$ с $n \geqslant 2$. Пара гомотопий H, H' между двумя отображениями $f, g: X \to K(\pi, n)$ – это, по существу, отображение пары «цилиндров» вида $X \times [0,1]$ со склеенными между собой верхними и нижними основаниями:



Иначе говоря, это отображение $X \times S^1 \to K(\pi, n)$ (наша пара «цилиндров» может быть представлена в виде $X \times S^1_l$ и $X \times S^1_r$, где S^1_l и S^1_r обозначают две взаимно дополнительные – «левую» и «правую» – полуокружности, см. еще раз рисунок выше). Теперь заметим, что «продеформировать гомотопию H в гомотопию H'» в таких терминах означает: продеформировать соответствующее отображение $\tilde{H}: X \times S^1 \to K(\pi, n)$ в отображение вида $\tilde{H} \circ P$, где $P: S^1 \to S^1_r$ – ортогональная проекция окружности на «правую полуокружность»; при этом предполагается, что «правая половина» отображения $\tilde{H}$ остается в процессе деформации постоянной. Стандартная теория препятствий говорит, что соответствующее (в данном случае единственное) препятствие к такой деформации – это относительный класс когомологий

$$o(\tilde{H}, \tilde{H} \circ P) \in H^n(X \times S^1, X \times S^1_r; \pi).$$

Остается лишь заметить, что факторпространство $X \times S^1 / X \times S^1_r$ или, что то же, $X \times [0,1] / X \times \{0,1\}$ – не что иное как надстройка ΣX над пространством X с двумя отождествлёнными точками (или, что гомотопически то же, букет $\Sigma X \vee S^1$). Пользуясь изоморфизмом надстройки, окончательно получаем

$$o(H, H') \in H^{n-1}(X; \pi). \quad (2)$$

1.3. Векторные расслоения

Векторное расслоение везде означает «ориентированное векторное расслоение». Таким образом, n-мерное векторное расслоение ξ – это пара пространств E_ξ, B_ξ и отображение $p_\xi: E_\xi \to B_\xi$, локально изоморфное (с сохранением ориентаций слоёв) проекции $U \times \mathbb{R}^n \to U$, где U – некоторая окрестность любой точки пространства B_ξ; как обычно, пространство B_ξ называется ***базой*** расслоения ξ, пространство E_ξ – ***тотальным пространством***, отображение p_ξ – ***проекцией***, а ориентированные векторные пространства $F_{\xi,x} = p_\xi^{-1}(x) \subset E_\xi$, $x \in B_\xi$, – ***слоями*** над соответствующими точками базы.

Пусть $\xi = (E_\xi, B_\xi, p_\xi)$ – векторное расслоение, $A \subset B_\xi$ – подпространство базы и Y – произвольное пространство. Мы обозначаем через $\xi|A$ «сужение» расслоения ξ на подпространство A – расслоение с базой A, тотальным пространством $E_1 = p_\xi^{-1} A$ и проекцией $p_1 = p_\xi | E_1$. Мы обозначаем через $\xi \times Y$ «произведение» расслоения ξ на пространство Y – расслоение с базой $B_\xi \times Y$, тотальным пространством $E_\xi \times Y$ и проекцией $p_\xi \circ \mathrm{pr}_1$.

1.4. Послойные изоморфизмы и индуцированные расслоения

Пусть ξ, η – два расслоения. ***Послойный изоморфизм*** $f: \xi \to \eta$ – это любое отображение $E_\xi \to E_\eta$, переводящее каждый слой $F_{\xi,x}$ в некоторый слой $F_{\eta,y}$, при этом каждое сужение $f|F_{\xi,x}$ представляет собой сохраняющий ориентации линейный изоморфизм; мы будем использовать выражения «послойный изоморфизм $f: \xi \to \eta$» и «послойный изоморфизм $f: E_\xi \to E_\eta$» как синонимы. Ясно, что всякий послойный изоморфизм $f: E_\xi \to E_\eta$ определяет отображение $g: B_\xi \to B_\eta$; мы будем говорить, что f – «изоморфизм над g». Если при этом $B_\xi = B_\eta = B$ и g – тождественное отображение, то f называется «изоморфизмом над B», или же просто изоморфизмом. В дальнейшем мы будем систематически использовать для отображения $B_\xi \to B_\eta$, соответствующего послойному изоморфизму $f: \xi \to \eta$, обозначение f_B.

Пусть ξ – векторное расслоение и $g: X \to B_\xi$ – некоторое отображение. В этом случае возникает новое расслоение $g^*\xi$ с базой X – расслоение, *индуцированное* посредством отображения g – чье тотальное пространство определяется как подмножество декартова произведения $X \times E_\xi$, заданное уравнением $g(x) = p_\xi(y)$ для любых $(x, y) \in X \times E_\xi$. При этом имеется канонический послойный изоморфизм $g_E : g^*\xi \to \xi$ над g, действующий по формуле $g_E(x, y) = (g(x), y)$.

Пусть, наконец, мы имеем опять послойный изоморфизм $f : \xi \to \eta$. Согласно сказанному выше, в этой ситуации возникает третье расслоение, а именно расслоение $f_B^*\eta$ над B_ξ, и мы получаем «тавтологический» изоморфизм $s : \xi \to f_B^*\eta$. Обратно, для любых расслоений ξ, η, отображения $g : B_\xi \to B_\eta$ и изоморфизма $s : \xi \to g^*\eta$ формула $f = g_E \circ s$ дает послойный изоморфизм $\xi \to \eta$ над g. Таким образом, мы можем сказать, что всякий послойный изоморфизм $\xi \to \eta$ – не что иное как пара (g, s), состоящая из отображения $g : B_\xi \to B_\eta$ и изоморфизма $s : \xi \to g^*\eta$.

Замечание. Полезно иметь в виду, что всякий изоморфизм $\xi \to \eta$ над пространством B можно рассматривать как сечение (нелинейного) расслоения $\mathrm{Iso}(\xi, \eta)$, слой которого над каждой точкой $x \in B$ – множество всех сохраняющих ориентации изоморфизмов $F_{\xi,x} \to F_{\eta,x}$, что при выборе каких-нибудь базисов в ориентированных векторных пространствах $F_{\xi,x}$ и $F_{\eta,x}$ превращается в $GL^+(n)$ – группу невырожденных квадратных матриц порядка n. Как хорошо известно, всякое (конечномерное) расслоение может быть снабжено евклидовой метрикой, вследствие чего можно рассматривать «евклидов» вариант расслоения $\mathrm{Iso}(\xi, \eta)$ – со слоем $SO(n)$.

1.5. Классифицирующие пространства для векторных расслоений

Через $B_{SO(n)}$ обозначается классифицирующее пространство для n-мерных векторных расслоений (пространство Грассмана ориентированных n-мерных плоскостей в бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\infty$), а через $\gamma_{SO(n)}$ – соответствующее универсальное векторное расслоение над $B_{SO(n)}$. Таким образом, для любого n-мерного векторного расслоения ξ найдется послойный изоморфизм $f : \xi \to \gamma_{SO(n)}$, имеющий в некотором гомотопическом смысле «контролируемую неоднозначность» (см. ниже пункт 3).

Предполагается, что размерности всех рассматриваемых далее векторных расслоений не менее трех, и что базы этих расслоений являются конечными CW-комплексами (последнее, конечно, не относится к универсальным расслоениям, таким как $B_{SO(n)}$). Мы будем часто опускать обозначение размерности расслоения, если эта размерность подразумевается, и писать просто B_{SO}, γ_{SO} и т. д.

Через $K(\mathbb{Z}_2, 2)$ обозначается универсальное пространство Эйленберга-Маклейна типа $(\mathbb{Z}_2, 2)$ и через $\varkappa$ – соответствующий универсальный $(\mathbb{Z}_2, 2)$-когомологический класс. Пусть

$$\pi : B_{SO} \to K(\mathbb{Z}_2, 2) \qquad (3)$$

– отображение, индуцирующее изоморфизм 2-мерных гомотопических групп (фактически отображение (3) – то, что называется «гомотопическая 3-эквивалентность», поскольку индуцирует изоморфизмы гомотопических групп в размерностях $1, 2$ и 3). Очевидно, $\pi^*(\varkappa) = w_2(\gamma_{SO})$ – «универсальный» двумерный класс Штифеля-Уитни. Пользуясь хорошо известной конструкцией, мы можем превратить отображение (3) в расслоение Серра, заменив пространство B_{SO} на ему гомотопически эквивалентное (и сохранив при этом те же обозначения); будем считать это расслоение раз навсегда фиксированным. Слой расслоения (3) будет обозначаться далее через B_{Spin}, расслоение $i^*\gamma_{SO}$ над пространством B_{Spin}, индуцированное естественным вложением $i : B_{Spin} \to B_{SO}$ – через γ_{Spin}, и соответствующее тотальное пространство – через E_{Spin}. Как известно, $B_{Spin(n)}$ – это классифицирующее пространство для n-мерных спинорных расслоений, и соответственно $\gamma_{Spin(n)}$ – универсальное n-мерное спинорное расслоение.

2. $Spin(\theta)$-структуры: определение

Пусть имеется векторное расслоение ξ и отображение $\theta : B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$. Мы называем *$Spin(\theta)$-структурой* на расслоении ξ (варианты – *спинорной структурой над θ, полуспинорной структурой*) гомотопический класс послойных изоморфизмов $f : \xi \to \gamma_{SO}$, удовлетворяющих коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} B_\xi \arrow[rr, "f_B"] \arrow[dr, "\theta"'] & & B_{SO} \arrow[dl, "\pi"] \\ & K(\mathbb{Z}_2, 2) & \end{tikzcd} \qquad (4)$$

Мы будем далее называть отображения $B_\xi \to B_{SO}$, удовлетворяющие вышеприведённой коммутативной диаграмме, и гомотопии таких отображений, соответственно отображениями и гомотопиями «над θ».

Замечание. Подчеркнем, что в вышеприведенном определении диаграмма (4) должна быть *строго коммутативной* (а не «гомотопически коммутативной»).

Замечание. В случае, когда $\theta : B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$ – постоянное отображение (отображение в точку), мы, очевидно, получаем гомотопический класс послойных изоморфизмов $f : \xi \to \gamma_{Spin}$ – одно из стандартных определений классической $Spin$-структуры.

3. Некоторые вспомогательные результаты

Приведенные здесь формулировки частично хорошо известны или повторяют имеющиеся в работе [1] (в этих случаях мы ограничиваемся краткими пояснениями).

Теорема 1. *Для любого пространства X, расслоения ξ и гомотопных друг другу отображений $f, g : X \to B_\xi$ индуцированные расслоения $f^*\xi$ и $g^*\xi$ изоморфны между собой; более того, каждой гомотопии $H : f \to g$ соответствует однозначно определенный гомотопический класс изоморфизмов из $f^*\xi$ в $g^*\xi$, зависящий только от гомотопического класса этой гомотопии.*

Это утверждение – легкое следствие теоремы о структуре векторных расслоений над цилиндрами [4, Теорема 3.4.3]. На «неформальном» уровне можно сказать, что изоморфизмы индуцированных расслоений, о которых идёт речь в этой теореме, получаются в результате «продолжения по непрерывности».

Если обозначить множество гомотопических классов изоморфизмов $\xi \to \eta$ (с $B_\xi = B_\eta$) через $\mathrm{Iso}_h(\xi, \eta)$, а множество гомотопических классов гомотопий из f в g (пустое множество, если отображения f, g не гомотопны) – через $[f, g]$, то утверждение теоремы 1 можно переформулировать следующим образом:

Для любого расслоения ξ, пространства X и отображений $f, g : X \to B_\xi$ определено отображение

$$[f, g] \to \mathrm{Iso}_h(f^*\xi, g^*\xi). \tag{5}$$

Для конкретной гомотопии $H : f \to g$ мы будем обозначать сооответствующий изоморфизм $f^*\xi \to g^*\xi$ (точнее соответствующий класс изоморфизмов) через $\tilde{H}$.

Теорема 2. *Всякое n-мерное векторное расслоение над пространством X изоморфно расслоению $f^*\gamma_{SO(n)}$ для некоторого отображения $f : X \to B_{SO(n)}$.*

Это, конечно, хорошо известно. Доказательство см., например, в [4, глава 3, следствие 5.6].

Теорема 3. *(а) Для отображений $f, g : X \to B_{SO}$ и изоморфизма $s : f^*\gamma_{SO} \to g^*\gamma_{SO}$ найдется гомотопия из f в g, индуцирующая гомотопический класс $[s] \in \mathrm{Iso}_h(f^*\gamma_{SO}, g^*\gamma_{SO})$.*

(б) Если две гомотопии между отображениями $f, g : X \to B_{SO}$ индуцируют одинаковые (или гомотопные) изоморфизмы $f^*\gamma_{SO} \to g^*\gamma_{SO}$, то эти две гомотопии гомотопны между собой.

Доказательство см. [1, теоремы 4 и 6].

Замечание. Теорему 3 можно сформулировать так:

Для любых (гомотопных друг другу) отображений $f, g : X \to B_{SO}$ отображение (5) *биективно.*

4. $Spin(\theta)$-структуры: классификация

4.1. Существование $Spin(\theta)$-структуры

Очевидно, что из коммутативной диаграммы (4) с необходимостью вытекает соотношение

$$\theta^*(\varkappa) = w_2(\xi), \tag{6}$$

что и является необходимым условием существования $Spin(\theta)$-структуры на расслоении ξ. Обратно, пусть выполнено соотношение (6). Выберем отображение $g : B_\xi \to B_{SO}$, накрываемое послойным изоморфизмом $\xi \to \gamma_{SO}$ (см. п. 1.5). Тогда мы можем написать

$$\theta^*(\varkappa) = w_2(\xi) = f_B^*(w_2) = g^*\pi^*(\varkappa) = (\pi \circ g)^*(\varkappa).$$

Равенство $\theta^*(\varkappa) = (\pi \circ g)^*(\varkappa)$ означает, что отображения θ и $\pi \circ g$ гомотопны друг другу. Применив к отображению g «принцип накрывающей гомотопии», получим отображение $g' : B\xi \to B_{SO}$ с $\pi \circ g' = f$, а вследствие теоремы 1 отображение g' также накрывается послойным изоморфизмом $\xi \to \gamma_{SO}$.

4.2. Условие совпадения двух $Spin(\theta)$-структур

Пусть $g_i : B_\xi \to B_{SO}$, $s_i : \xi \to g_i^*\gamma_{SO}$, $i = 1, 2$ – представители двух $Spin(\theta)$-структур на заданном расслоении ξ. Напомним, что пара отображений

$$\begin{cases} g : B_\xi \to B_{SO} \\ s : \xi \to g^*\gamma_{SO} \end{cases},$$

– то же, что послойный изоморфизм $\xi \to \gamma_{SO}$ (см. п.1.4). Мы будем $Spin(\theta)$-структуру, представленную парой (g, s) такого вида, т.е. соответствующий гомотопический класс диаграмм (4), обозначать через $[g, s]$. Заметим, что отображения g_1 и g_2 здесь заведомо гомотопны между собой в силу теоремы 3 и, более того, согласно этой же теореме такая гомотопия между g_1 и g_2 определена, в свою очередь с точностью до гомотопии, условием

$$\tilde{H} \circ s_1 \sim s_2 \tag{7}$$

(если угодно, это условие можно записать и в виде $s_2 \circ s_1^{-1} \in \tilde{H}$).

Теорема 4. *$Spin(\theta)$-структуры $[g_1, s_1]$ и $[g_2, s_2]$ совпадают в том и только том случае, если существует гомотопия $H : g_1 \to g_2$ (не обязательно «гомотопия над θ»), удовлетворяющая следующим двум условиям:*

(1) $\tilde{H} \circ s_1 \sim s_2$;

(2) $H \sim H'$, где H' – некоторая гомотопия «над θ».

Доказательство. 1. Необходимость условий 1 и 2 – это прямое следствие определений. Действительно, утверждение «$[g_1, s_1] = [g_2, s_2]$», в силу определения $Spin(\theta)$-структуры (§ 2), означает, что существует гомотопия $H : g_1 \to g_2$ «над θ», накрываемая гомотопией $s_1 \to s_2$; соотношение (1) – просто другой способ это записать. Что касается соотношения (2), то мы просто полагаем $H' = H$.

2. Доказательство достаточности столь же элементарно. Пусть условия 1 и 2 выполнены. Тогда мы имеем $\tilde{H}' \circ s_1 \sim \tilde{H} \circ s_1$ ввиду условия (2), и дальнейшее очевидно. □

4.3. Различающий класс для $Spin(\theta)$-структур

Мы будем предполагать с этого момента, что пространство B_ξ линейно связно (общий случай будет получаться как очевидное «покомпонентное» объединение). Пусть $A = [g_1, s_1]$ и $B = [g_2, s_2]$ – пара $Spin(\theta)$-структур на расслоении ξ. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} B_\xi \arrow[rr, shift left, "g_1"] \arrow[rr, shift right, "g_2"'] \arrow[dr, "\theta"'] & & B_{SO(k)} \arrow[dl, "\pi"] \\ & K(\mathbb{Z}_2, 2) & \end{tikzcd} \tag{8}$$

и изоморфизмы $s_i : \xi \to g_i^*\gamma_{SO}$.

Как мы видели в п.4.2, существует гомотопически однозначно определенная гомотопия $H : g_1 \to g_2$, заданная условием (7). Взяв композицию этой гомотопии с отображением π, мы получаем гомотопию

$$D = \pi \circ H : B \times [0,1] \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$$

с $D_0 = D_1 = \theta$. Ясно, что H является «гомотопией над θ» в том и только том случае, когда ее «проекция» D – постоянная гомотопия

$$D_\theta = \theta \circ \mathrm{pr}_1 : B \times [0,1] \to K(\mathbb{Z}_2, 2).$$

Мы назовём препятствие $o(D, D_\theta) \in H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$ для деформации гомотопии D в постоянную гомотопию D_θ (см. п.1.2) *различающим классом* для $Spin(\theta)$-структур A, B и обозначаем этот класс через $\delta(A, B)$.

Следующая теорема без труда доказывается с помощью результатов п. 4.2 и «принципа накрывающей гомотопии».

Теорема 5. *1) Для любых $Spin(\theta)$-структур A, B из $\delta(A, B) = 0$ следует $A = B$;*

2) Для любой $Spin(\theta)$-структуры A и любого класса $d \in H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$ найдется такая $Spin(\theta)$-структура B, что $\delta(A, B) = d$;

3) Для любых $Spin(\theta)$-структур A, B, C имеет место равенство $\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C)$.

Введем следующее обозначение: для всякого расслоения ξ над пространством X, и всякого отображения $\theta : X \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$, множество всех $Spin(\theta)$-структур на ξ обозначается $\mathrm{SPIN}(\xi, \theta)$. Из доказанной выше теоремы вытекает:

Следствие 1. *Множество $\mathrm{SPIN}(\xi, \theta)$ является аффинным пространством над группой $H^1(B_\xi; \mathbb{Z}_2)$; в частности, мощность этого множества равна 2^b, где b – одномерное $\mathbb{Z}_2$-число Бетти пространства B_ξ.*

4.4. Множества $\mathrm{SPIN}(\xi, \theta)$ как функторы

Предположим, что в дополнение к диаграмме (4), задающей $Spin(\theta)$-структуру $A = [g, s]$, мы имеем еще одно отображение $\theta' : B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$, плюс некоторую гомотопию $H : \theta \to \theta'$:

$$\begin{tikzcd}
B_\xi \arrow[rr, shift left, "?"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\theta"', shift right] \arrow[dr, "\theta'", shift left] & & B_{SO(k)} \arrow[dl, "\pi"] \\
& K(\mathbb{Z}_2, 2) &
\end{tikzcd} .$$

Согласно «принципу накрывающей гомотопии», уже много раз здесь применявшемуся, мы можем взять некоторую (конечно, неединственную) «накрывающую гомотопию» $H' : g \to g'$. При этом отображение g', как нетрудно видеть, оказывается определенным с точностью до гомотопии «над θ'» и, таким образом, мы получаем корректно определенную $Spin(\theta')$-структуру $A' = [g', s']$.

Полученное отображение

$$H_* : \mathrm{SPIN}(\xi, \theta) \to \mathrm{SPIN}(\xi, \theta') \tag{9}$$

зависит только от гомотопического класса гомотопии $H : \theta \to \theta'$. Таким образом, мы имеем (для всякого расслоения ξ) гомотопически инвариантный функтор из категории отображений $B_\xi \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$ (с гомотопиями в качестве морфизмов) в категорию конечных множеств; при этом все морфизмы как в одной категории, так и в другой, оказываются изоморфизмами (все гомотопии, очевидно, обратимы, а значит, все индуцированные отображения (9) – биекции).

5. $Spin(\theta)$-структуры на полиэдрах

5.1. Сужения $Spin(\theta)$-структур на двумерные остовы

Хорошо известно, что обычная $Spin$-структура на расслоении, базой которого является полиэдр (или CW-комплекс), может быть задана как гомотопический класс тривиализаций расслоения на одномерном остове, продолжаемых на двумерный остов. Отсюда следует, что $Spin$-структура однозначно определяется своим сужением на двумерный остов. Оказывается, что аналогичное утверждение верно и для рассматриваемых здесь $Spin(\theta)$-структур.

Теорема 6. *Пусть имеется векторное расслоение ξ над полиэдром (или CW-комплексом) X, и некоторое отображение $\theta : X \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$. Всякая $Spin(\theta)$-структура на ξ определяется своим сужением на $X^{(2)}$ – двумерный остов пространства X.*

Доказательство. Пусть $A = [g_1, s_1]$, $B = [g_2, s_2]$ – две $Spin(\theta)$-структуры на расслоении ξ (см. п. 4.2). Пусть A', B' – естественные сужения A и B на расслоение $\xi' = \xi | X^{(2)}$. Предположим, что имеет место равенство $A' = B'$. Нетрудно убедиться, что в этом случае оказывается и $A = B$. В самом деле, в силу естественности определения различающего класса (п. 4.3), мы имеем равенство

$$\delta(A', B') = i^* \delta(A, B),$$

где $i : X^{(2)} \to X$ – отображение включения. Но очевидно, что гомоморфизм $i^* : H^1(X) \to H^1(X^{(2)})$ является для любых X изоморфизмом, поэтому из $\delta(A', B') = 0$ следует, что и $\delta(A, B) = 0$. $\square$

Следствие 2. *Отображение сужения*

$$\mathrm{SPIN}(\xi, \theta) \to \mathrm{SPIN}(\xi', \theta')$$

является биекцией.

Доказательство. Данные множества равномощны (следствие 1), поэтому всякая инъекция – автоматически биекция. $\square$

6. $Spin(\theta)$-структуры и группы бордизмов

6.1. Группы $Spin(\theta)$-бордизмов

Для отображения $\theta : X \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$ мы введем категорию объектов вида (M, f, A), где M – некоторое многообразие, $f : M \to X$ – отображение и A – $Spin(\theta \circ f)$-структура на «стабильном» нормальном расслоении νM многообразия M. В данном случае слово «стабильный» в применении к нормальному расслоению означает, что размерность расслоения достаточно велика, а именно не менее чем размерность многообразия M (а также не менее трёх).

Как хорошо известно, такое нормальное расслоение можно считать корректно определенным (во всяком случае с точностью до некоторого «гомотопически тривиального» класса послойных изоморфизмов) и во всяком случае мы имеем определенный с точностью до гомотопии послойный изоморфизм $\nu M \to \gamma_{SO}$.

Для любого объекта (M, f, A) можно определить его «край» $\partial(M, f, A)$ – объект вида $(\partial M, f', A')$, где f' и A' обозначают соответствующие сужения. Возникающие в результате этого группы бордизмов мы обозначаем $\Omega_n^{spin}(X;\theta)$; класс бордизмов объекта (M, f, A) обозначается $[M, f, A]$.

Пусть θ' – другое отображение $X \to K(\mathbb{Z}_2, 2)$ в том же гомотопическом классе, что и θ. Как следствие сказанного в п. 4.4, мы имеем изоморфизм

$$\Omega_n^{spin}(X;\theta) \to \Omega_n^{spin}(X;\theta'),$$

зависящий от выбора гомотопии $H:\theta \to \theta'$. Можно сказать, таким образом, что группы $\Omega_n^{spin}(X;\theta)$ с точностью до автоморфизма не зависят от выбора отображения θ в его гомотопическом классе; иначе говоря, они зависят только от класса $w = \theta^*(\varkappa) \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$. По этой причине в работе [2] было принято обозначение $\Omega_n^{spin}(X;w)$.

6.2. О работе М.Крека и С.Штольца [3]

Авторы данной работы вводят, в качестве технического средства, другой способ определения «скрученных $Spin$-бордизмов», формально отличный от изложенного выше. Именно, пусть имеется пространство X и расслоение α над X. В этой ситуации рассматриваются группы бордизмов, образованные тройками (M, f, A), где $f: M \to X$ – произвольное отображение и A – спинорная структура на расслоении $\nu M \ominus f^*\alpha$; эти группы обозначаются через $\Omega_n^{spin}(X;\alpha)$.

Напомним теперь, что $Spin$-структура определяется своим сужением на 2-мерный остов базы расслоения (в данном случае расслоения $\nu M \ominus f^*\alpha$ над M). Но, как нетрудно видеть, расслоение над 2-мерным пространством определяется, с точностью до изоморфизма, отображением в пространство $K(\mathbb{Z}_2, 2)$ (являющееся «гомотопической аппроксимацией» для пространства B_{SO} до размерности 3). Это позволяет отождествить группы $\Omega_n^{spin}(X;\alpha)$ с нашими группами $\Omega_n^{spin}(X;w)$ с $w = w_2(\alpha) \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$.

Литература

1. *Жубр А.В.* Полуспинорные структуры // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. № 3(39). С. 8–12.
2. *Zhubr A.V.* Closed simply connected 6-manifolds: the proofs of classification theorems // St.Petersburg Math. J. 2001. Vol. 12. No. 4. P. 605–680.
3. *Kreck M., Stolz S.* Some nondiffeomorphic homeomorphic homogeneous 7-manifolds with positive sectional curvature // J. Differential Geometry. 1991. Vol. 33. P. 465–486.
4. *Husemoller D.* Fibre bundles // Springer–Verlag, 1993 (3^{rd} edition). 356 p.

References

1. *Zhubr A.V.* Poluspinornyye struktury [Semispinal structures] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2019. No. 3(39). P. 8–12.
2. *Zhubr A.V.* Closed simply connected 6-manifolds: the proofs of classification theorems // St.Petersburg Math. J. 2001. Vol. 12. No. 4. P. 605–680.
3. *Kreck M., Stolz S.* Some nondiffeomorphic homeomorphic homogeneous 7-manifolds with positive sectional curvature // J. Differential Geometry. 1991. Vol. 33. P. 465–486.
4. *Husemoller D.* Fibre bundles // Springer–Verlag, 1993 (3^{rd} edition). 356 p.

Статья поступила в редакцию 05.10.2020.