

УДК 539.3  
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-45-49

**В.Н. ТАРАСОВ, Н.О. СМОЛЕВА**

## **КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОГО КОЛЬЦА И ЖЕСТКОГО ОСНОВАНИЯ**

*Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар*

*vntarasov@dm.komisc.ru  
nataljafilipp5@gmail.com*

### **Аннотация**

Работа посвящена исследованию контактной задачи находящегося под действием весовой нагрузки кругового кольца и жесткого основания. Проблема сводится к решению задачи выпуклого квадратичного программирования. Решение двойственной задачи позволяет определить силы реакции контактного взаимодействия.

### **Ключевые слова:**

*упругая энергия, квадратичное программирование, двойственная задача, контактные взаимодействия*

### **Abstract**

The work deals with the study of the contact problem of a circular ring under the influence of a weight load and a rigid base. The problem is reduced to solving the convex quadratic programming problem. Solving the dual problem allows one to determine the reaction forces of the contact interaction.

### **Keywords:**

*elastic energy, quadratic programming, dual problem, contact interactions*

### **Введение**

Решению контактных задач для гибких элементов конструкции в настоящее время уделяется большое внимание. Это вызвано, с одной стороны, необходимостью расчета все более сложных конструкций, а с другой, – с развитием современных методов решения задач, возникающих в теории стержней, пластин и оболочек с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции, развитием численных методов, теории оптимизации и вариационного исчисления. В настоящей работе рассматривается контактная задача кругового кольца, испытывающего весовую нагрузку и находящегося над жестким основанием. Определяются граница области активного взаимодействия (область контакта) и силы реакции связи, что может оказаться полезным для расчета износостойкости колец.

Некоторые контактные задачи, в том числе и задачи устойчивости упругих систем при наличии односторонних ограничений на перемещения, и методы их решений рассмотрены в работе [1-3].

### **1. Постановка задачи**

Представим, что тонкий упругий стержень находится под действием сил и нагрузки, распределенной по его оси. Введем в точке  $M$  на оси стержня систему координат  $(x, y, z)$ , ось  $z$  направлена по касательной к оси стержня, оси  $x$  и  $y$  – по главным осям инерции поперечного сечения,  $ds$  – элемент длины стержня,  $s$  – длина, отсчитываемая от некоторой точки  $M_0$ . Пусть точка  $M$  движется со скоростью, равной 1 ( $\frac{ds}{dt} = 1$ ), тогда система координат  $(x, y, z)$  будет вращаться с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ , проекции которой на оси  $(x, y, z)$  обозначим через  $(p, q, r)$ .

В точке  $M$  приложены силы  $(V_x, V_y, V_z)$  и моменты  $(M_x, M_y, M_z)$ , а также вектор внешней нагрузки  $(F_x, F_y, F_z)$ . Тогда уравнения равновесия Кирхго-

фа [4] имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{ds} - rV_y + qV_z + F_x = 0, \\ \frac{dV_y}{ds} - pV_z + rV_x + F_y = 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x + pV_y + F_z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{ds} - rL_y + qL_z - V_y = 0, \\ \frac{dL_y}{ds} - pL_z + rL_x + V_x = 0, \\ \frac{dL_z}{ds} - qL_x + pL_y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В недеформированном (первоначальном) состоянии оси  $x, y, z$  обозначим через  $x_0, y_0, z_0$ . Соответствующую угловую скорость – через  $\Omega_0$  с проекциями  $(p_0, q_0, r_0)$  на оси  $(x_0, y_0, z_0)$  соответственно.

В результате деформации стержня точка  $M$  получает перемещение, проекции которого на оси  $(x_0, y_0, z_0)$  обозначим через  $(u, v, w)$ . Векторы  $(p, q, r)$  и  $(p_0, q_0, r_0)$  характеризуют изменения кривизны стержня в результате деформации.

Считая деформации малыми, можно записать уравнение Клебша [4]:

$$p = p_0 + \delta p, \quad q = q_0 + \delta q, \quad r = r_0 + \delta r,$$

$$\begin{cases} \delta p = \frac{d\alpha}{ds} - r_0\beta + q_0\gamma, \\ \delta q = \frac{d\beta}{ds} - p_0\gamma + r_0\alpha, \\ \delta r = \frac{d\gamma}{ds} - q_0\alpha + p_0\beta, \end{cases} \quad (3)$$

где  $(\alpha, \beta, \gamma)$  – косинусы углов между осями  $(x, y, z)$  и  $(x_0, y_0, z_0)$ .

|       | $x$      | $y$       | $z$       |  |
|-------|----------|-----------|-----------|--|
| $x_0$ | 1        | $-\alpha$ | $\beta$   |  |
| $y_0$ | $\alpha$ | 1         | $-\alpha$ |  |
| $z_0$ | $-\beta$ | $\alpha$  | 1         |  |

(4)

Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  связаны с перемещением уравнениями:

$$\begin{cases} \beta = \frac{du}{ds} + q_0w - r_0v, \\ -\alpha = \frac{dv}{ds} + r_0u - p_0w, \\ 0 = \frac{dw}{ds} + p_0v - q_0u. \end{cases} \quad (5)$$

Считаем, что ось стержня в недеформированном состоянии представляет собой окружность радиуса  $R$ . Тогда  $p_0 = 0$ ,  $q_0 = \frac{1}{R}$ ,  $r_0 = 0$ , и предположим, что кольцо нагружено весовой нагрузкой:

$$F_y = 0, \quad ds = R d\vartheta,$$

$\vartheta$  – центральный угол, отсчитываемый от оси  $\xi$ ,  $(\xi, \zeta)$  – некоторая неподвижная система координат (рис. 1), так что координаты точки  $M$  кольца в недеформированном состоянии определяются формулами:

$$\xi = R \cos \vartheta, \quad \zeta = R \sin \vartheta.$$

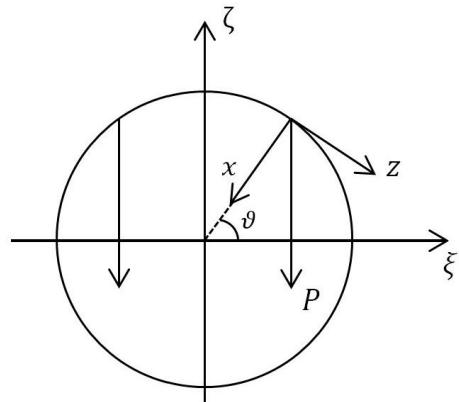


Рис. 1. Кольцо с весовой нагрузкой.

Fig. 1. Weighted ring.

В нашем случае деформация кольца плоская, таким образом, уравнения Кирхгофа-Клебша упрощаются.

Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{ds} + qV_z + F_x = 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x + F_z = 0, \\ \frac{dL_y}{ds} - V_y = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$p = 0, \quad q = q_0 + \delta q, \quad r = 0,$$

$$\delta q = \frac{d\beta}{ds}, \quad L_y = B\delta q, \quad q_0 = \frac{1}{R},$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{du}{ds} + q_0w, \\ 0 = \frac{dw}{ds} - q_0u, \end{cases} \quad (7)$$

$$ds = R d\theta, \quad \delta q = \frac{d\beta}{ds}, \quad (8)$$

где  $B$  – жесткость стержня при изгибе.

Координаты точек деформированного кольца определяются уравнениями

$$\begin{cases} \xi = (R - u) \cos \theta - w \sin \theta, \\ \zeta = (R - u) \sin \theta + w \cos \theta. \end{cases} \quad (9)$$

## 2. Алгоритм решения контактной задачи

Пусть кольцо находится под жестким препятствием так, что

$$\zeta = (R - u) \sin \theta + w \cos \theta \geq -R. \quad (10)$$

Наличие неравенства (10) приведет к тому, что силы  $F_x$  и  $F_z$  становятся неизвестными и подлежат определению. Поэтому перейдем к вариационной постановке задачи.

Известно [5,6], что упругая энергия стержня в квадратичном приближении определяется изменением кривизны (замечая, что  $ds = R d\theta$ )

$$V = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} \delta q d\theta = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (u'' + u)^2 d\theta,$$

и второе уравнение в (7) принимает вид (условие несжимаемости оси стержня):

$$u = w'. \quad (11)$$

Предположим, что по ободу кольца равномерно распределена весовая нагрузка  $P$ , направленная как это показано на рис. 1. Проектируя эту силу на оси  $(x, z)$ , получим:  $P_x = P \sin \theta, P_z = P \cos \theta$ . Считая деформации малыми, работу внешних сил можно определить формулой

$$A = P \int_0^{2\pi} \zeta(\theta) d\theta = P \int_0^{2\pi} (-u \sin \theta + w \cos \theta) d\theta.$$

Таким образом, получаем задачу вариационного исчисления

$$V - A \rightarrow \min_{u, w} \quad (12)$$

при выполнении ограничений (10) и условия несжимаемости (11).

Для конечномерной аппроксимации представим  $w$  в виде частичной суммы ряда Фурье:

$$w = \sum_{k=1}^n y_k \sin k\theta + y_{k+n} \cos k\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (13)$$

Тогда из условия несжимаемости

$$u = \sum_{k=1}^n y_k k \cos k\theta - y_{k+n} k \sin k\theta. \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в выражения для упругой энергии и работы внешних сил, учитывая условие ортогональности тригонометрических функций, получим

$$\tilde{V} = \frac{B}{2R^3} \sum_{j=0}^n y_j^2 j^2 (j^2 - 1)^2 + \sum_{j=1}^n y_{j+n}^2 j^2 (j^2 - 1)^2, \quad (15)$$

$$A = 2\pi P R y_{n+1}. \quad (16)$$

Потребуем, чтобы ограничения (10) выполнялись в конечном числе точек  $\varphi_j$ :

$$\varphi_j = \left( \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{j\pi}{M}, \quad j \in 1 : M.$$

Тогда неравенства (10) запишем в виде:

$$\sum_{j=1}^n y_j a_j + \sum_{j=1}^n y_{j+n} a_{j+n} + b_j \leq 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a_j &= j \cos(j\varphi_j) \sin(\varphi_j) - \sin(j\varphi_j) \cos(\varphi_j), \\ a_{j+n} &= -j \sin(j\varphi_j) \sin(\varphi_j) - \cos(j\varphi_j) \cos(\varphi_j), \\ b_j &= -R(1 + \sin(\varphi_j)). \end{aligned}$$

Необходимо исключить перемещение кольца как жесткого целого в направлении оси  $\xi$ . Для этого потребуем, чтобы

$$\xi(0) + \xi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \xi(\pi) + \xi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

что приводит при  $n = 10$  к равенству:

$$\begin{aligned} 4z_1 + 4z_3 + 8z_5 + 8z_7 + 20z_9 + 20z_{11} + 28z_{13} + \\ + 28z_{15} + 36z_{17} + 36z_{19} = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

или  $(a_0, z) = 0$ .

Таким образом, получаем задачу выпуклого квадратичного программирования

$$V - 2\pi P R y_{n+1} \rightarrow \min_{y \in R^{2n}} \quad (19)$$

при ограничениях (17), (18). Без ограничения общности можно считать  $\frac{B}{R} = 1$ . Результаты вычислений представлены на рис. 2–5.

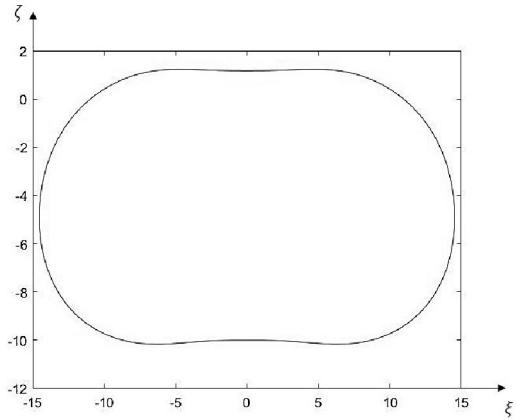


Рис. 2. Форма равновесия кольца при  $P = 20$ .  
Fig. 2. Ring equilibrium form at  $P = 20$ .

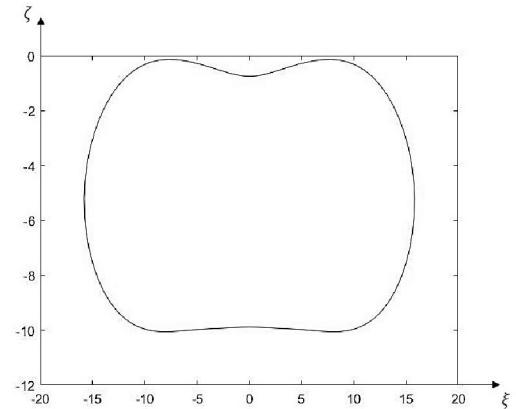


Рис. 3. Форма равновесия кольца при  $P = 30$ .  
Fig. 3. Ring equilibrium form at  $P = 30$ .

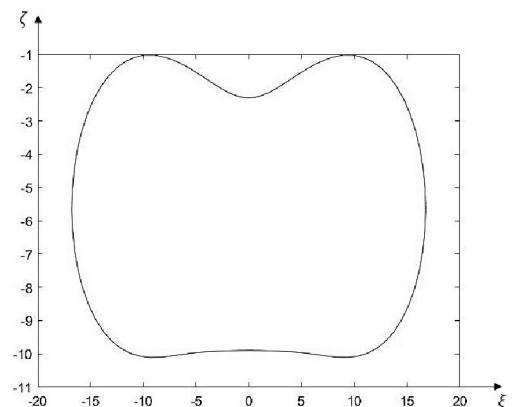


Рис. 4. Форма равновесия кольца при  $P = 40$ .  
Fig. 4. Ring equilibrium form at  $P = 40$ .

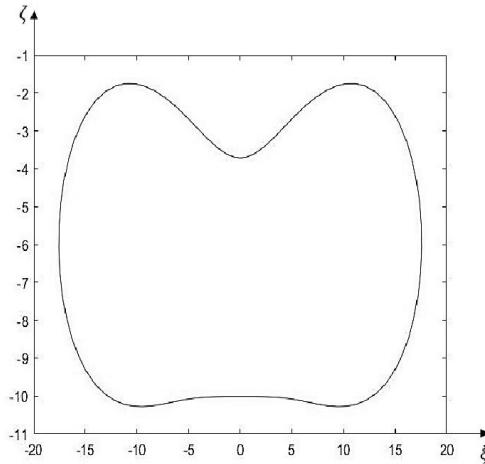


Рис. 5. Форма равновесия кольца при  $P = 50$ .  
Fig. 5. Ring equilibrium form at  $P = 50$ .

Интересной и практически важной является задача определения силы реакции контактного взаимодействия. Составим функцию Лагранжа для задачи (17)–(19) выпуклого квадратичного программирования

$$(\lambda; y) = V(y) - \pi PRy_{n+1} + \sum_{j=0}^M \lambda_j((a_j, y) + b_j) + (\lambda_0, a_0).$$

Обозначим через  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M) \in R^{M+1}$ .

Решение задачи (17)–(19) обозначим через  $y_*$ . Для того, чтобы точка  $y_*$  была решением задачи необходимо и достаточно, чтобы нашелся множитель Лагранжа  $\lambda_*$  такой, что точка  $(\lambda_*, y_*)$  была седловой точкой функции Лагранжа на множестве  $R^{2n} \times \Lambda$ ,

$$(\lambda, y_*) \leq (\lambda_*, y_*) \leq (\lambda_*, y) \quad (20)$$

$$\forall y \in R^{2n}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

$$\Lambda = \{(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M), \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in 1 : M.\}$$

Из (20) следует, что

$$(\lambda_*, y_*) = \max_{\lambda \in \Lambda} \min_{y \in R^{2n}} (\lambda, y) = \min_{y \in R^{2n}} \max_{\lambda \in \Lambda} (\lambda, y),$$

т.е. операции взятия max и min в данном случае перестановочны.

Введем в рассмотрение матрицу  $A$ , строками которой являются векторы  $(a_0, a_1, \dots, a_M)$ , диагональную матрицу  $Q$ , элементы  $q_{ij}$  которой имеют вид  $q_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ,  $q_{jj} = q_{j+n, j+n} = j^2(j^2 - 1)^2$ , вектор  $b_{0j} = 0$ ,  $j \neq n + 1$ ,  $b_{0, n+1} = -2\pi RPy_{n+1}$ ,  $b = (b_0, b_1, \dots, b_M)$ .

Функция Лагранжа в этих обозначениях определяется формулой

$$(\lambda, y) = \frac{1}{2}(Qy, y) + (g, y) + (Ay, \lambda) + (\lambda, b),$$

где  $g_{n+1} = -2\pi PR$ ,  $g_i = 0$  при  $i \neq n + 1$ .

Решение задачи

$$\min_{y \in R^{2n}} (\lambda, y)$$

имеет вид:

$$y = y(\lambda) = -(Q^{-1}g + Q^{-1}A^T\lambda).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\phi(\lambda) = \min_{y \in R^{2n}} (\lambda, y). \quad (21)$$

Тогда и поиск седловой функции Лагранжа сводится к задаче квадратичного программирования

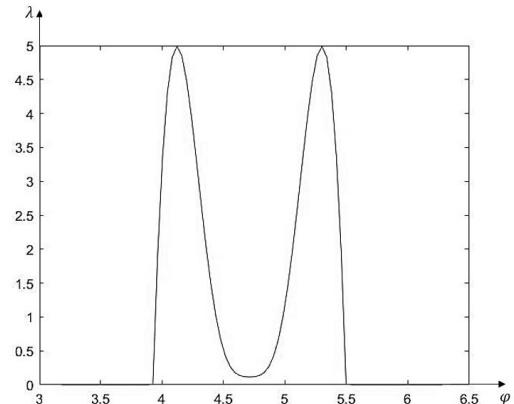
$$\phi(\lambda_*) = \max_{\lambda \in \Lambda} \phi(\lambda).$$

Подставляя  $y(\lambda)$  в функцию  $(\lambda, y(\lambda))$ , находим

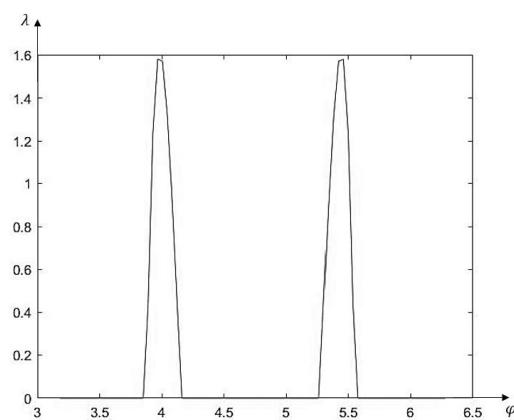
$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \frac{1}{2}(Q^{-1}(A^T\lambda + g), A^T\lambda + g) - \\ &- (Q^{-1}(A^T\lambda + g), g) - (Q^{-1}(A^T\lambda + g), A^T\lambda) + \\ &+ (\lambda, b) = \frac{1}{2}(Q^{-1}A^T\lambda, A^T\lambda) + (Q^{-1}A^T\lambda, g) + \\ &+ \frac{1}{2}(Q^{-1}g, g) - (Q^{-1}A^T\lambda, g) - (Q^{-1}g, g) - \\ &- (Q^{-1}A^T\lambda, A^T\lambda) - (AQ^{-1}g, \lambda) + (\lambda, b). \end{aligned} \quad (22)$$

### 3. Результаты численных экспериментов

Компоненты вектора  $\tilde{\Lambda}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$  и являются силой реакции контактного взаимодействия кольца и жесткого основания. Графики сил реакции приведены на рис. 6.



(a)



(b)

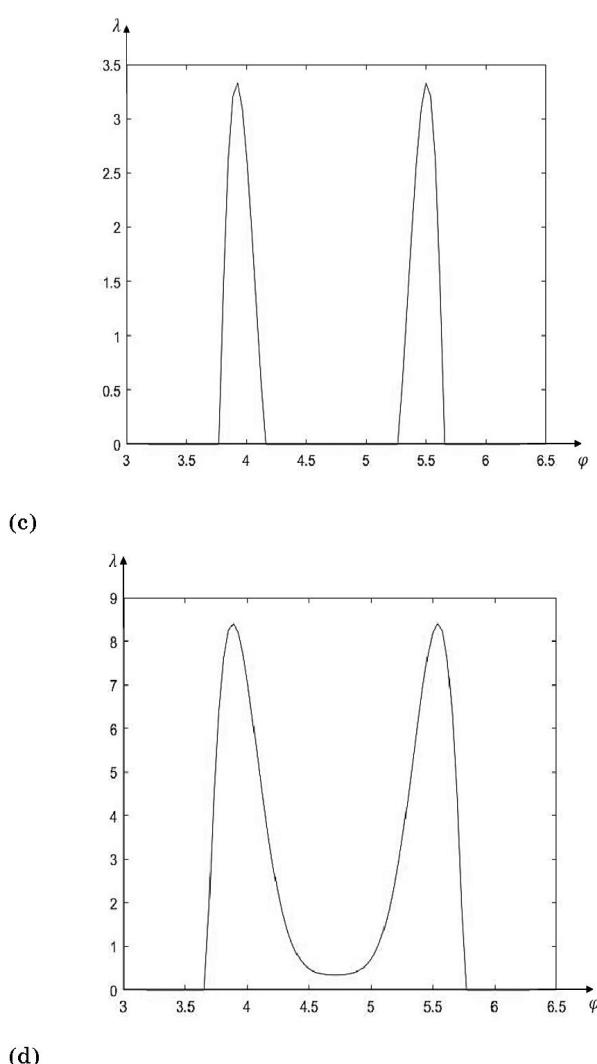


Рис. 6. Графики силы реакции: (а) – при  $P = 20$ ; (б) – при  $P = 30$ ; (с) – при  $P = 40$ ; (д) – при  $P = 50$ .

Fig. 6. Reaction force graphs: (a) – at  $P = 20$ ; (b) – at  $P = 30$ ; (c) – at  $P = 40$ ; (d) – at  $P = 50$ .

Интересной особенностью задачи является то, что силы реакции контактного взаимодействия носят сосредоточенный характер, т.е. кольцо в окрестности точки  $Q = \frac{3\pi}{2}$  отходит от препятствий.

### Заключение

В данной работе рассмотрена контактная задача кругового кольца и жесткого основания. Ее решение сводится к решению задачи квадратичного программирования. При решении двойственной задачи были определены силы реакции контактного взаимодействия.

### Литература

- Михайловский Е. И., Тарасов В. Н. О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.
- Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
- Тарасов В. Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2013. 238 с.
- Николаи Е. Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 583 с.
- Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения // Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана. М.: Мир, 1974. 254 с.
- Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М., Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1946. 532 с.

### References

- Mikhailovshy E.I., Tarasov V.N. O skhodimosti metoda obobshennoi reaktsii v kontaktnykh zadachakh so svobodnoi granitsei [On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary] // Applied mathematics and mechanics. 1993. Vol. 57. Issue 1. P. 128–136.
- Panagiotopoulos P. Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevypuklyye funktsii energii [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy function]. Moscow: Mir. 1989. 494 p.
- Tarasov V.N. Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem [Optimization methods in the study of constructive-nonlinear problems of elastic systems mechanics]. Syktyvkar: Komi Science Centre, Ural Branch, RAS, 2013. 238 p.
- Nikolai E.L. Trudy po mekhanike [Transactions on mechanics]. Moscow: Gostekhizdat. 1955. 583 p.
- Teoriya vetyleniya i nelineynyye zadachi na sobstvennyye znacheniya [Branching theory and nonlinear eigenvalue problems] // Ed. J.B. Keller and S. Antman. Moscow: Mir, 1974. 254 p.
- Timoshenko S.P. Ustoichivost uprugih sistem [Stability of elastic systems]. Moscow, Leningrad: OGIZ. State Publ. House of Techn. and Theoret. Liter., 1946. 532 p.

Статья поступила в редакцию 16.09.2020.