УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2020-4-58-67

А.Д. КОРАЛЬКОВ*, Е.М. ОВСИЮК*, В.В. КИСЕЛЬ, Я.А. ВОЙНОВА***, В.М. РЕДЬКОВ*****

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ ОПИСАНИЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1 В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

* *Мозырский государственный педагогический университет, г. Мозырь, Беларусь*
** *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск, Беларусь*
*** *Институт физики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь*

artemkoralkov@gmail.com
e.ovsiyuk@mail.ru
vasiliy_bspu@mail.ru
voinovayanina@mail.ru
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

A.D. KORAL'KOV*, E.M. OVSIYUK*, V.V. KISEL, YA.A. VOYNOVA***, V.M. RED'KOV*****

ON SOME METHODS TO DESCRIBE BOUND STATES FOR A SPIN 1 PARTICLE IN THE COULOMB FIELD

* *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*
** *Belarus State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*
***Institute of Physics, NAS of Belarus, Minsk, Belarus*

Аннотация

Выполнен анализ системы из 6 радиальных уравнений, описывающей состояния с четностью $P = (-1)^j$ для векторной частицы в кулоновском поле. С учетом обобщенного условия Лоренца показано, что одна функция из 6 обязана обращаться в нуль. Показывается, что в качестве независимой можно выбирать одну любую функцию из этих пяти, при этом для выбранной функции получаем два разных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Эти уравнения 2-го порядка найдены в явном виде,построены их решения Фробениуса, исследована сходимость вовлеченных в решения степенных рядов. Для получения правила квантования используется условие трансцендентности решений Фробениуса. Для обоих типов уравнений они дают разумные с физической точки зрения формулы для спектров энергии, причем эти спектры различаются между собой.

Ключевые слова:
частица со спином 1, кулоновское поле, точные решения, условие трансцендентности, связанные состояния

Abstract

We have studied the system of 6 equations which describes quantum states of a spin 1 particle with parity $P = (-1)^j$ in external Coulomb field. It is shown that due to the Lorentz condition one of the radial functions must be equal to zero. Any of 5 remaining functions may be taken as a primary one. For such a primary function we derive two different 2-nd order differential equations. Their Frobenius solutions are constructed, and convergence of the involved power series is studied. As a quantization rule, we apply the so called transcendency condition of Frobenius solutions. In this way, for both equations we have found diferent reasonable from physical point of view energy spectra.

Keywords:
spin 1 particle, Coulomb field, exact solutions, transcendency condition, bound states

Введение

До сих пор не решенной полностью является квантово-механическая задача о поведении частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле [1–12]. Первый из трех ожидаемых подклассов решений и соответствующий ему дискретный спектр энергий был установлен еще И.Е. Таммом [1]. Незавершенность анализа относится к двум другим подклассам решений, описываемых системой из шести зацепляющихся между собой уравнений. Основной вывод работы [1] заключается в утверждении, что в этих состояниях векторная частица должна падать на кулоновский центр, не образуя устойчивых стационарных состояний в кулоновском поле. Однако исследование нерелятивистского предела в уравнениях для векторной частицы в кулоновском поле показало [2–7], что существуют три подкласса решений, отвечающих связанным состояниям, с соответствующими спектрами энергии, модифицирующими известную шредингеровскую формулу для нерелятивистской скалярной частицы. Выполненный в работах [8,9] анализ также показал, что есть возможность

получать для некоторых радиальных функций дифференциальные уравнения второго порядка вместо уравнений 4-го порядка.

Исходя из уравнения Даффина–Кеммера для векторной частицы во внешнем кулоновском поле, можно вывести систему из 10 радиальных уравнений. С использованием оператора пространственной четности систему можно разбить на две подсистемы, состоящие из 4 и 6 уравнений. Решение системы из 4 уравнений известно и выражается через гипергеометрические функции, при этом найденный спектр энергий совпадает с известным для скалярной частицы в кулоновском поле. Также можно легко найти точные решения при нулевом значении квантового числа полного момента.

В настоящей работе внимание сосредоточено на плохо изученной подсистеме из 6 уравнений при значениях квантового числа полного момента $j = 1, 2, 3, ...$ Содержание сводится к следующему. На основе использования уравнения Даффина–Кеммера исследуется квантово-механическая задача о векторной частице во внешнем кулоновском поле притяжения. Выполнен анализ системы из 6 радиальных уравнений, описывающей состояния частицы с четностью $P = (-1)^j$. С учетом обобщенного условия Лоренца показано, что одна функция из 6 обязана обращаться в нуль; следовательно, имеем систему из 6 уравнений для 5 неизвестных функций. Показывается, что в качестве независимой можно выбирать любую одну функцию из пяти, при этом для данной функции получаем два разных дифференциальных уравнения 2-го порядка, которые можно связывать с двумя подклассами состояний частицы с четностью $P = (-1)^j$. Эти независимые уравнения 2-го порядка найдены в явном виде, построены их решения Фробениуса, методом Пуанкаре–Перрона исследована сходимость вовлеченных в эти решения степенных рядов. Для получения некоторого правила квантования используется условие трансцендентности решений Фробениуса. Для обоих типов уравнений они дают разумные с физической точки зрения формулы для спектров энергии, причем эти спектры различаются между собой.

1. Условие Лоренца во внешнем кулоновском поле

Состояния векторной частицы с четностью $P = (-1)^j$ описываются системой из 6 радиальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1 + m\Phi_0 = 0,\\
+i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})\, E_1 + i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})H_1 - m\Phi_1 = 0,\\
+i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 - m\Phi_2 = 0,\\
-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})\, \Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_1 = 0,\\
i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})\Phi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 + mE_2 = 0,\\
i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})\Phi_1 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 + mH_1 = 0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Известно, что для частицы со спином 1 во внешнем поле должно существовать обобщенное условие Лоренца. Это условие дает для состояний с четностью $P = (-1)^j$ следующее [2]:

$$
-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})\Phi_0 - (\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\Phi_2 - \frac{2\nu}{r}\Phi_1 = \\
= \frac{i\alpha}{2mr^2}E_2. \qquad (2)
$$

С использованием (2) из системы (1) можно вывести важное соотношение. Для этого из уравнения (2) исключим функцию Φ_2 с помощью третьего уравнения в (1):

$$
-i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})m\Phi_0 - (\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\left[i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_2 - \frac{2i\nu}{r}H_1\right] - \\
-\frac{2m\nu}{r}\Phi_1 = \frac{i\alpha}{2r^2}E_2.
$$

Отсюда получаем

$$
i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})m\Phi_0 + i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})E_2 - \\
-\frac{2i\nu}{r}(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})H_1 + \frac{2m\nu}{r}\Phi_1 = \frac{i\alpha}{2r^2}E_2.
$$

Преобразуя здесь второй и третий члены с помощью 1-го и 2-го уравнений системы (1), находим

$$
i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})m\Phi_0 - im(\epsilon + \frac{\alpha}{r})\Phi_0 = \frac{i\alpha}{2r^2}E_2.
$$

Таким образом, пришли к условию $E_2 = 0$, т.е. в (1) имеем 6 уравнений для 5 неизвестных функций. С учетом этого равенства система (1) примет вид

$$
\begin{aligned}
1)\ \ 2\frac{\nu}{r}E_1 + m\Phi_0 = 0,\\
2)\ \ +i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})E_1 + i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})H_1 - m\Phi_1 = 0,\\
3)\ \ -2i\frac{\nu}{r}H_1 - m\Phi_2 = 0,\\
4)\ \ -i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_1 = 0,\\
5)\ \ i(\epsilon + \frac{\alpha}{r})\Phi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 = 0,\\
6)\ \ i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})\Phi_1 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 + mH_1 = 0. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Исключим мнимую единицу, перейдя к новым переменным: $i\Phi_1 = \varphi_1,\ i\Phi_2 = \varphi_2$, тогда

$$
\begin{aligned}
1)\ \ mE_1 = -\frac{m^2}{2\nu}r\Phi_0,\\
2)\ \ (\epsilon + \frac{\alpha}{r})mE_1 + (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})mH_1 + m^2\varphi_1 = 0,\\
3)\ \ mH_1 = \frac{m^2}{2\nu}r\varphi_2,\\
4)\ \ (\epsilon + \frac{\alpha}{r})\varphi_1 - \frac{\nu}{r}\Phi_0 + mE_1 = 0,\\
5)\ \ (\epsilon + \frac{\alpha}{r})\varphi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 = 0,
\end{aligned}
$$

$$6)\ \ (\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\varphi_1+\frac{\nu}{r}\varphi_2+mH_1=0. \qquad (4)$$

С помощью уравнений 1) и 3) можно исключить функции E_1 и H_1, тогда остается четыре уравнения:

$$2)\ \ -(\epsilon+\frac{\alpha}{r})\frac{m^2}{2\nu}r\Phi_0+(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\frac{m^2}{2\nu}r\varphi_2+m^2\varphi_1=0,$$

$$4)\ \ (\epsilon+\frac{\alpha}{r})\varphi_1-\frac{\nu}{r}\Phi_0-\frac{m^2}{2\nu}r\Phi_0=0,$$

$$5)\ \ (\epsilon+\frac{\alpha}{r})\varphi_2+\frac{d}{dr}\Phi_0=0,$$

$$6)\ \ (\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\varphi_1+\frac{\nu}{r}\varphi_2+\frac{m^2}{2\nu}r\varphi_2=0. \qquad (5)$$

Легко увидеть две разные возможности для того, чтобы получить уравнения второго порядка для функций φ_1 и φ_2.

Первая возможность такая: из уравнения 2) с помощью уравнения 6) исключаем функцию φ_2 и с помощью уравнения 4) исключаем функцию Φ_0, тогда приходим к уравнению второго порядка для φ_1:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}+\left(\frac{4}{r}-\frac{2r}{r^2+2\nu^2/m^2}\right)\frac{d\varphi_1}{dr}+$$
$$+\left(-m^2+\epsilon^2+\frac{2\,\alpha\,\epsilon}{r}-\frac{2}{r^2+2\,\nu^2/m^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{-2\,\nu^2+\alpha^2+2}{r^2}\right)\varphi_1=0. \qquad (6)$$

Это уравнение имеет четыре сингулярные точки: три регулярные и точка $r=\infty$, которая является нерегулярной особенностью ранга 2. Только две особые точки лежат в физической области переменной r. Зная функцию φ_1, можно найти остальные: сначала функцию Φ_0 (см. (5)), затем – функцию φ_2 (см. (6)), и затем – функции E_1 и H_1 (см. (1) и (3)).

Вторая возможность следующая: из 4) выражаем Φ_0 через φ_1, затем из 2) выражаем φ_1 через φ_2 и подставляем это в уравнение 6. В результате находим уравнение для функции φ_2:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dr^2}+\left[\frac{4}{r}+\frac{2\,m^2r}{m^2r^2+2\,\nu^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\,(-m^2r+\epsilon^2r+\alpha\,\epsilon)}{m^2r^2-\epsilon^2r^2-2\,\alpha\epsilon\,r+2\,\nu^2-\alpha^2}\right]\frac{d\varphi_2}{dr}+$$
$$+\left[-m^2+\epsilon^2+\frac{2\,\alpha\,\epsilon\,\left(2\,\nu^2-\alpha^2+2\right)}{(2\,\nu^2-\alpha^2)\,r}+\right.$$
$$+\frac{4\,m^2}{m^2r^2+2\,\nu^2}+\frac{-2\,\nu^2+\alpha^2+2}{r^2}+$$
$$+\Big(-4\,m^2r\alpha\,\epsilon+4\,r\alpha\,\epsilon^3-8\,m^2\nu^2+$$
$$+4\,m^2\alpha^2+8\,\nu^2\epsilon^2+4\,\alpha^2\epsilon^2\Big)\times$$
$$\times\Big(m^2r^2-\epsilon^2r^2-2\,\alpha\epsilon\,r+2\,\nu^2-\alpha^2\Big)^{-1}\times$$
$$\left.\times\Big(2\,\nu^2-\alpha^2\Big)^{-1}\right]\varphi_2=0. \qquad (7)$$

Это уравнение имеет 6 особых точек, 5 из них регулярные, а точка $r=\infty$ является нерегулярной ранга 2. Зная φ_2, можно найти Φ_0 (см. (5)), затем можно найти φ_1 (см. (6)), и затем – выражения для E_1 и H_1.

2. Анализ уравнения для функции φ_1

Обратимся к анализу уравнения (6) для функции φ_1. Преобразуем его к новым переменным:

$$x=mr=\frac{Mc}{\hbar}r=\frac{r}{\lambda},\quad \frac{\epsilon}{m}=E,\quad 2\nu^2=\Gamma^2.$$

В результате получим

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\left(\frac{4}{x}-\frac{2x}{x^2+\Gamma^2}\right)\frac{d\varphi_1}{dx}+\Big(E^2-1$$
$$+\frac{2\alpha E}{x}-\frac{2}{x^2+\Gamma^2}+\frac{\alpha^2+2-\Gamma^2}{x^2}\Big)\varphi_1=0, \qquad (8)$$

или

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{x+i\Gamma}-\frac{1}{x-i\Gamma}\right)\frac{d\varphi_1}{dx}+$$
$$+\Big(E^2-1+\frac{2\alpha E}{x}-\frac{i/\Gamma}{x+i\Gamma}+\frac{i/\Gamma}{x-i\Gamma}+$$
$$+\frac{\alpha^2+2-\Gamma^2}{x^2}\Big)\varphi_1=0. \qquad (9)$$

Здесь имеем три регулярные особые точки $x=0,-i\Gamma,+i\Gamma$ и одну нерегулярную особую точку $x=\infty$ ранга 2. Построим решения Фробениуса [10,11] для этого уравнения (пусть $\mu^2=\Gamma^2-2-\alpha^2$):

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{x+i\Gamma}-\frac{1}{x-i\Gamma}\right)\frac{d\varphi_1}{dx}+$$
$$+\Big(E^2-1+\frac{2\alpha E}{x}-\frac{i/\Gamma}{x+i\Gamma}+$$
$$+\frac{i/\Gamma}{x-i\Gamma}-\frac{\mu^2}{x^2}\Big)\varphi_1=0. \qquad (10)$$

Ищем их в виде $\varphi_1(x)=x^Ae^{Bx}f(x)$. Для функции $f(x)$ получаем уравнение

$$f''+\left(\frac{2A}{x}+2B+\frac{4}{x}-\frac{1}{x+i\Gamma}-\frac{1}{x-i\Gamma}\right)f'+$$
$$\left\{\frac{A(A-1)}{x^2}+\frac{2AB}{x}+B^2+\frac{4}{x}\frac{A}{x}-\right.$$
$$-\frac{1}{x+i\Gamma}\frac{A}{x}-\frac{1}{x-i\Gamma}\frac{A}{x}+\frac{4B}{x}-\frac{B}{x+i\Gamma}-\frac{B}{x-i\Gamma}+$$
$$\left.+E^2-1+\frac{2\alpha E}{x}-\frac{i/\Gamma}{x+i\Gamma}+\frac{i/\Gamma}{x-i\Gamma}-\frac{\mu^2}{x^2}\right\}f_1=0\,.$$

С учетом ограничений на параметры: $A = -3/2 \pm \sqrt{(3/2)^2 + \mu^2},\ B = \pm\sqrt{1-E^2}$, приходим к

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(2B + \frac{4+2A}{x} - \frac{1}{x-i\Gamma} - \frac{1}{x+i\Gamma}\right)\frac{df}{dx} + \\ + \left(\frac{2AB + 2E\alpha + 4B}{x} + \frac{iA - B\Gamma + i}{\Gamma(x-i\Gamma)} - \right. \\ \left. - \frac{iA + B\Gamma + i}{\Gamma(x+i\Gamma)}\right) f = 0. \quad (11)$$

Чтобы строить решения, пригодные для описания связанных состояний, выбираем

$$A = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \mu^2} > 0\ , \quad B = -\sqrt{1-E^2} < 0.$$

Удобно воспользоваться сокращающими обозначениями:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(K + \frac{L}{x} - \frac{1}{x-i\Gamma} - \frac{1}{x+i\Gamma}\right)\frac{df}{dx} + \\ + \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-i\Gamma} - \frac{c}{x+i\Gamma}\right) f = 0. \quad (12)$$

Строим решения последнего уравнения в виде степенных рядов: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$. После выполнения необходимых вычислений находим четырехчленное рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда:

$$[K(k-2) + (a+b-c)]d_{k-2} + \\ + [(k-1)(k-2) + (L-2)(k-1) + i\Gamma(b+c)]d_{k-1} + \\ + [K\Gamma^2 k + a\Gamma^2]d_k + \\ + [\Gamma^2(k+1)k + L\Gamma^2(k+1)]d_{k+1} = 0. \quad (13)$$

Исследуя сходимость ряда по методу Пуанкаре–Перрона, получаем два возможных радиуса сходимости: $R_{conv} = \Gamma,\ +\infty$. Гарантированный (минимальный) радиус сходимости – это Γ. Однако легко показать, что поведение решений около особых точек $\pm i\Gamma$ задается соотношениями $\varphi_1 \sim (x \pm i\Gamma)^D,\ D = 0, +2$, т.е. ряд $f(x)$ обязательно сходится в этих особых точках. Поэтому можно полагать, что радиус сходимости степенного ряда $f(x)$ равен ∞.

Пробуем получить правило квантования энергии, выделяя из всех построенных решений Фробениуса так называемые трансцендентные [10]. Условие трансцендентности имеет вид (см. (13)):

$$K(k-2) + (a+b-c) = 0, \quad k \geq 2. \quad (14)$$

Находим явный вид этого условия

$$\sqrt{1-E^2}N = E\alpha, \quad \text{где} \quad N \equiv (k-2) + A + 1. \quad (15)$$

Отсюда получаем формулу для уровней энергии (здесь $k-2 = n = 0, 1, 2, 3, ...$)

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/N^2}},$$

$$N = n - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \mu^2}. \quad (16)$$

Учитывая $\mu^2 = j(j+1) - 2 - \alpha^2$, перепишем формулу для энергий в следующем виде:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/N^2}},$$

$$N = n - \frac{1}{2} + \sqrt{j(j+1) + \frac{1}{4} - \alpha^2}, \quad (17)$$

где $j = 1, 2, 3, ...,\ \ n = 0, 1, 2, 3, ...$

3. Уравнение для функции φ_2

Обратимся к анализу уравнения (7) для φ_2. Преобразуем его к виду (напоминаем, что $x = mr, \epsilon/m = E, 2\nu^2 = \Gamma^2$)

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \left[\frac{4}{x} + \frac{2x}{x^2+\Gamma^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha E - 2(1-E^2)x}{x^2(1-E^2) - 2\alpha E x + \Gamma^2 - \alpha^2}\right]\frac{d\varphi_2}{dx} + \\ + \left[-(1-E^2) + \frac{2\alpha E(\Gamma^2 - \alpha^2 + 2)}{\Gamma^2 - \alpha^2}\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2+\Gamma^2} + \right. \\ + \frac{2 - (\Gamma^2 - \alpha^2)}{x^2} + \frac{1}{\Gamma^2 - \alpha^2} \cdot \\ \left. \cdot \frac{-4\alpha E(1-E^2)x - 4\Gamma^2(1-E^2) + 4\alpha^2(1+E^2)}{x^2(1-E^2) - 2x\alpha E + \Gamma^2 - \alpha^2}\right] \cdot \\ \cdot \varphi_2 = 0. \quad (18)$$

Корни полинома второй степени

$$x^2(1-E^2) - 2x\alpha E + \Gamma^2 - \alpha^2 = 0$$

равны

$$x_{1,2} = \frac{\alpha E \pm \sqrt{\alpha^2 E^2 - (\Gamma^2 - \alpha^2)(1-E^2)}}{1-E^2}\ . \quad (19)$$

Чтобы оба корня были положительными, необходимо выполнение неравенства

$$1 - E^2 < \frac{\alpha^2}{\Gamma^2} \quad \Longrightarrow \quad j(j+1) < \frac{\alpha^2}{1-E^2}. \quad (20)$$

Квантовое число j не может быть ограниченным, наоборот, оно может быть как угодно большим. Поэтому последнее неравенство невыполнимо. Это означает, что корни $x_{1,2}$ квадратного уравнения комплексные и сопряженные друг другу, т.е. лежат вне физической области изменения переменной $x = mr$.

Уравнение (18) можно представить в виде

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \left[\frac{4}{x} + \frac{1}{x+i\Gamma} + \frac{1}{x-i\Gamma} - \frac{1}{x-x_1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{x-x_2}\right]\frac{d\varphi_2}{dx} + \left[-(1-E^2) + \frac{2\alpha E(\Gamma^2 - \alpha^2 + 2)}{(\Gamma^2 - \alpha^2)}\frac{1}{x} + \right.$$

$$+\frac{\alpha^2-\Gamma^2+2}{x^2}+\frac{2i}{\Gamma}\frac{1}{x+i\Gamma}-\frac{2i}{\Gamma}\frac{1}{x-i\Gamma}+\frac{1}{\Gamma^2-\alpha^2}\cdot$$
$$\cdot\frac{-4\alpha E(1-E^2)x-4\Gamma^2(1-E^2)+4\alpha^2(1+E^2)}{x^2(1-E^2)-2x\alpha E+\Gamma^2-\alpha^2}\Bigg]\cdot$$
$$\cdot\varphi_2=0. \qquad (21)$$

Это уравнение имеет 5 регулярных особых точек (из них только две лежат в физической области переменной) и одну нерегулярную точку $x=\infty$ ранга 2:

$$0,\quad x_1,\quad x_2,\quad -i\Gamma,\quad +i\Gamma\,;\quad \infty_{[2]}\,.$$

В окрестности точек x_1, x_2 решения ведут себя так:

$$\varphi_2(x)=(x-x_1)^\rho,\quad \varphi_2(x)=(x-x_2)^\rho, \qquad (22)$$

где $\rho=0,2$. В окрестности точек $x=\pm i\Gamma$ решения ведут себя следующим образом:

$$\varphi_2(x)=(x\pm i\Gamma)^\sigma,\quad \sigma=0. \qquad (23)$$

В окрестности точки $x=0$ поведение решения описывается формулой $\varphi_2(x)=x^A$, где A является корнем уравнения

$$A(A-1)+4A=(\Gamma^2-\alpha^2)-2,$$

и имеет вид

$$A=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{3}{2})^2+\Gamma^2-2-\alpha^2}. \qquad (24)$$

Напомним, что $\Gamma^2=j(j+1)\geq 2$. На бесконечности поведение решений следующее:

$$\varphi_2(x)=e^{Bx},\quad B=\pm\sqrt{1-E^2}. \qquad (25)$$

Уравнение (21) удобно представлять символически как

$$\varphi_2''+\left(\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x-i\Gamma}+\frac{a_3}{x+i\Gamma}+\frac{a_4}{x-x_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_5}{x-x_2}\right)\varphi_2'+\left(D+\frac{b_1}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{b_2}{x-i\Gamma}+\right.$$
$$\left.+\frac{b_3}{x+i\Gamma}+\frac{b_4}{x-x_1}+\frac{b_5}{x-x_2}\right)\varphi_2=0. \qquad (26)$$

Строим решения Фробениуса в окрестности точки $x=0$ с помощью подстановки $\varphi_2(x)=x^Ae^{Bx}f(x)$. Для функции $f(x)$ имеем уравнение

$$f''+\left(2B+\frac{a_1+2A}{x}+\frac{a_2}{r-i\Gamma}+\frac{a_3}{r+i\Gamma}+\frac{a_4}{x-x_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_5}{x-x_2}\right)f'+\left((D+B^2)+\frac{a_1A+b+A(A-1)}{x^2}+\right.$$
$$+\frac{a_1B-\frac{a_2A}{i\Gamma}+\frac{a_3A}{i\Gamma}-\frac{a_4A}{x_1}-\frac{a_5A}{x_2}+b_1+2AB}{x}+$$
$$+\frac{\frac{a_2A}{i\Gamma}+a_2B+b_2}{x-i\Gamma}+\frac{-\frac{a_3A}{i\Gamma}+a_3B+b_3}{x+i\Gamma}+$$
$$\left.+\frac{\frac{a_4A}{x_1}+a_4B+b_4}{x-x_1}+\frac{\frac{a_5A}{x_2}+a_5B+b_5}{x-x_2}\right)f=0.$$

Чтобы следить за решениями, пригодными для описания связанных состояний, требуем выполнения условий

$$B=-\sqrt{1-E^2},$$
$$A=\frac{3+\sqrt{1+4(\Gamma^2-\alpha^2)}}{2}>0. \qquad (27)$$

Результирующее уравнение для функции $f(x)$ можно символически записать так:

$$f''+\left(2C+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x-i\Gamma}+\frac{C_3}{x+i\Gamma}+\frac{C_4}{x-x_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{C_5}{x-x_2}\right)f'+\left(\frac{D_1}{x}+\frac{D_2}{x-i\Gamma}+\frac{D_3}{x+i\Gamma}+\right.$$
$$\left.+\frac{D_4}{x-x_1}+\frac{D_5}{x-x_2}\right)f=0. \qquad (28)$$

Ищем решения в виде степенного ряда $f=\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$. В результате приходим к шестичленным рекуррентным соотношениям:

$$[2C(n-4)+D_1+D_2+D_3+D_4+D_5]\,d_{n-4}+$$
$$[(n-3)(n-4)-2C(x_1+x_2)(n-3)+$$
$$+C_1(n-3)+C_2(n-3)+C_3(n-3)+C_4(n-3)+$$
$$C_5(n-3)-D_1(x_1+x_2)-D_2(x_1+x_2-i\Gamma)-$$
$$-D_3(x_1+x_2+i\Gamma)-D_4x_2-D_5x_1]d_{n-3}+$$
$$[-(x_1+x_2)(n-2)(n-3)+2C(x_1x_2+\Gamma^2)(n-2)-$$
$$-C_1(x_1+x_2)(n-2)-C_2(x_1+x_2-i\Gamma)(n-2)-$$
$$-C_3(x_1+x_2+i\Gamma)(n-2)-C_4x_2(n-2)-C_5x_1(n-2)+$$
$$+D_1(x_1x_2+\Gamma^2)-D_2(x_1i\Gamma+x_2i\Gamma-x_1x_2)+$$
$$+D_3(x_1i\Gamma+x_2i\Gamma+x_1x_2)+D_4\Gamma^2+D_5\Gamma^2]d_{n-2}+$$
$$[(x_1x_2+\Gamma^2)(n-1)(n-2)-2C(x_1+x_2)\Gamma^2(n-1)+$$
$$+C_1(x_1x_2+\Gamma^2)(n-1)-C_2(x_1i\Gamma+x_2i\Gamma-x_1x_2)(n-1)+$$
$$+C_3(x_1i\Gamma+x_2i\Gamma+x_1x_2)(n-1)+C_4\Gamma^2(n-1)+$$
$$+C_5\Gamma^2(n-1)-D_1(x_1+x_2)\Gamma^2+D_2i\Gamma x_1x_2-$$
$$-D_3i\Gamma x_1x_2-D_4\Gamma^2x_2-D_5\Gamma^2x_1]d_{n-1}+$$
$$+[-(x_1+x_2)\Gamma^2n(n-1)+2C\Gamma^2x_1x_2n-$$
$$-C_1(x_1+x_2)\Gamma^2n+C_2i\Gamma x_1x_2n-$$
$$-C_3i\Gamma x_1x_2n-C_4\Gamma^2x_2n-C_5\Gamma^2x_1n+D_1\Gamma^2x_1x_2]d_n+$$
$$+\Gamma^2x_1x_2(n+1)(n+C_1)d_{n+1}=0. \qquad (29)$$

Применяя метод Пуанкаре–Перрона, находим возможные радиусы сходимости:

$$R_{conv}=\infty,\ |\Gamma|,\ |x_1|,\ |x_2|. \qquad (30)$$

Получим правило квантования энергии, выделяя трансцендентные решения Фробениуса. Условие трансцендентности имеет вид (см. рекуррентные соотношения (29))

$$P_{k-4}=0,\quad k\geq 4,$$

$$2C(k-4)+D_1+D_2+D_3+D_4+D_5=0, \quad (31)$$

где

$$2C=-2\sqrt{1-E^2},$$

$$D_1=a_1B-a_2A/i\Gamma+a_3A/i\Gamma-a_4A/x_1-$$
$$-a_5A/x_2+b_1+2AB,$$

$$D_2=a_2A/i\Gamma+a_2B+b_2, \quad D_3=-a_3A/i\Gamma+a_3B+b_3,$$

$$D_4=a_4A/x_1+a_4B+b_4, \quad D_5=a_5A/x_2+a_5B+b_5.$$

Учтем явный вид параметров:

$$x_1=\frac{\alpha\,E-\sqrt{\alpha^2-\Gamma^2+E^2\Gamma^2}}{1-E^2},$$

$$x_2=\frac{\alpha\,E+\sqrt{\alpha^2-\Gamma^2+E^2\Gamma^2}}{1-E^2},$$

$$a_1=4, \quad a_2=1, \quad a_3=1, \quad a_4=-1, \quad a_5=-1,$$

$$b_1=\frac{2\alpha E\left(\Gamma^2-\alpha^2+2\right)}{\Gamma^2-\alpha^2}, \quad b_2=\frac{-2i}{\Gamma}, \quad b_3=\frac{2i}{\Gamma},$$

$$b_4=-\frac{2\left(\alpha E+\sqrt{\alpha^2-\Gamma^2+E^2\Gamma^2}\right)}{\Gamma^2-\alpha^2},$$

$$b_5=\frac{2\left(-\alpha E+\sqrt{\alpha^2-\Gamma^2+E^2\Gamma^2}\right)}{\Gamma^2-\alpha^2}.$$

В результате условие трансцендентности (31) дает уравнение (помним, что $k-4\geq 0$)

$$\sqrt{1-E^2}[(k-4)+(A+2)]=\alpha E. \quad (32)$$

Пусть $(k-4)+(A+2)=N$, тогда для уровней энергии получаем формулу

$$E=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2/N^2}}, \quad (33)$$

где

$$N=n+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+j(j+1)-\alpha^2},$$

$$k-4=n=0,1,2,...$$

Отметим, что формулы для энергий, полученные в двух последних разделах, фактически описывают один и тот же спектр. Это согласуется с тем, что в соответствии с уравнениями 4) и 5) из системы (3), функции φ_1 и φ_2 различаются на элементарный рациональный множитель.

4. Уравнение второго порядка для функции Φ_0

Есть простая возможность найти уравнение 2-го порядка для функции Φ_0. Для этого из уравнения 4) в (5) найдем следующее соотношение, связывающее функции Φ_0 и φ_1:

$$\frac{2\nu}{r}\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\varphi_1(r)=\left(\frac{2\nu^2}{r^2}+m^2\right)\Phi_0(r),$$

или в безразмерных переменных (множитель 2ν несущественен)

$$\Phi_0(x)=2\nu\frac{(Ex+\alpha)}{2\nu^2+x^2}\varphi_1(x)=F(x)\varphi_1(x). \quad (34)$$

Если воспользоваться известным уравнением 2-го порядка для функции φ_1

$$\Delta\varphi_1=0, \qquad \varphi_1=F^{-1}\Phi_0,$$

то можно получить и уравнение 2-го порядка для Φ_0

$$\Delta F^{-1}\Phi_0=0 \quad \Longrightarrow \quad F\Delta F^{-1}\Phi_0=0.$$

Таким образом, уравнение для функции Φ_0 таково:

$$\frac{Ex+\alpha}{2\nu^2+x^2}\Delta\frac{2\nu^2+x^2}{Ex+\alpha}\Phi_0=0, \quad (35)$$

где оператор Δ равен (см. (8))

$$\Delta=\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{4}{x}-\frac{2x}{x^2+\Gamma^2}\right)\frac{d}{dx}+E^2-1+$$
$$+\frac{2\alpha E}{x}+\frac{\alpha^2+2-\Gamma^2}{x^2}-\frac{2}{x^2+\Gamma^2}.$$

Уравнение (35) легко приводится к следующему виду (учитываем $2\nu^2=\Gamma^2$):

$$\frac{d^2\Phi_0}{dx^2}+\left[\frac{4}{x}-\frac{2\,E}{Ex+\alpha}+\frac{2\,x}{x^2+2\,\nu^2}\right]\frac{d\Phi_0}{dx}+$$
$$+\left[\frac{2\,E\left(\alpha^2-2\right)}{x\alpha}+\frac{-2\,\nu^2+\alpha^2+2}{x^2}+\frac{8\nu^2}{\left(x^2+2\nu^2\right)^2}+\right.$$
$$+\frac{2\,\left(4\,E^2\nu^2+3\,\alpha^2\right)E^2}{\left(2\,E^2\nu^2+\alpha^2\right)(Ex+\alpha)\,\alpha}+E^2-1+\frac{2\,E^2}{(Ex+\alpha)^2}+$$
$$\left.+\frac{-2E\alpha x+4E^2\nu^2+4\alpha^2}{\left(x^2+2\nu^2\right)\left(2E^2\nu^2+\alpha^2\right)}\right]\Phi_0=0. \quad (36)$$

Исследовать это уравнение нет необходимости, поскольку оно должно приводить к спектру энергий, совпадающему со спектром, полученным выше из уравнений для функций φ_1 и φ_2, отличаясь от этих функций простыми множителями.

5. Анализ второго уравнения для функции Φ_0

Важным фактом является то, что для переменной $\Phi_0(x)$, комбинируя исходную систему уравнений из 6 переменных, можно вывести другое дифференциальное уравнение 2-го порядка для функции Φ_0, которое приводит к другому спектру энергий. Чтобы вывести это второе уравнение для $\Phi_0(x)$, с самого начала будем исходить из уравнений, записанных в безразмерных величинах:

$$1)\ E_1=-\frac{1}{2\nu}x\Phi_0,$$

$$2)\ (E+\frac{\alpha}{x})E_1+(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})H_1+\varphi_1=0,$$

$$3)\ \frac{2\nu}{x}H_1=\varphi_2, \quad 4)\ -(E+\frac{\alpha}{x})\varphi_1+\frac{\nu}{x}\Phi_0=E_1,$$

$$5)\ (E+\frac{\alpha}{x})\varphi_2+\frac{d}{dx}\Phi_0=0,$$

$$6)\ (\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})\varphi_1+\frac{\nu}{x}\varphi_2+H_1=0. \qquad (37)$$

Сначала с помощью уравнений 3) и 4) исключим функции φ_2 и E_1:

$$1)\ -\frac{2\nu}{x}(E+\frac{\alpha}{x})\varphi_1+(\frac{2\nu^2}{x^2}+1)\Phi_0=0,$$

$$2)\ (\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})H_1+(E+\frac{\alpha}{x})\frac{\nu}{x}\Phi_0+[1-(E+\frac{\alpha}{x})^2]\varphi_1=0,$$

$$5)\ \frac{d}{dx}\Phi_0+\frac{2\nu}{x}(E+\frac{\alpha}{x})H_1=0,$$

$$6)\ (\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})\varphi_1+[(1+\frac{2\nu^2}{x^2})H_1=0. \qquad (38)$$

Подействуем на уравнение 5) оператором $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi_0-\frac{2\nu}{x^2}(E+\frac{\alpha}{x})H_1-\frac{2\nu}{x}\frac{\alpha}{x^2}H_1+$$
$$+\frac{2\nu}{x}(E+\frac{\alpha}{x})\frac{d}{dx}H_1=0.$$

Затем с помощью уравнения 2)

$$\frac{d}{dx}H_1=$$
$$=-\left[\frac{1}{x}H_1+(E+\frac{\alpha}{x})\frac{\nu}{x}\Phi_0+[1-(E+\frac{\alpha}{x})^2]\varphi_1\right],$$

получим

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}-\frac{2\nu^2}{x^2}(E+\frac{\alpha}{x})^2\right]\Phi_0-$$
$$-\left[\frac{2\nu}{x^2}(E+\frac{\alpha}{x})+\frac{2\nu}{x}\frac{\alpha}{x^2}+\frac{2\nu}{x^2}(E+\frac{\alpha}{x})\right]H_1-$$
$$-\frac{2\nu}{x}(E+\frac{\alpha}{x})\left[1-(E+\frac{\alpha}{x})^2\right]\varphi_1=0.$$

Чтобы исключить отсюда функцию φ_1, воспользуемся уравнением 1) из (38):

$$\frac{2\nu}{x}(E+\frac{\alpha}{x})\varphi_1=(1+\frac{2\nu^2}{x^2})\Phi_0.$$

В результате приходим к

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+(E+\frac{\alpha}{x})^2-1-\frac{2\nu^2}{x^2}\right]\Phi_0-$$
$$-\frac{4\nu}{x^2}(E+\frac{\alpha}{x})H_1-\frac{2\nu}{x}\frac{\alpha}{x^2}H_1=0. \qquad (39)$$

Теперь воспользуемся уравнением 5) из (38)

$$\frac{d}{dx}\Phi_0+\frac{2\nu}{x}(E+\frac{\alpha}{x})H_1=0,$$

тогда получим

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+(E+\frac{\alpha}{x})^2-1-\frac{2\nu^2}{x^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}\right]\Phi_0-$$
$$-\frac{2\nu}{x}\frac{\alpha}{x^2}H_1=0.$$

Наконец, воспользовавшись еще раз уравнением 5) из (38):

$$-\frac{x}{2\nu}\frac{1}{(E+\frac{\alpha}{x})}\frac{d}{dx}\Phi_0=H_1\ ,$$

приходим к нужному уравнению второго порядка для функции Φ_0

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{3}{x}-\frac{E}{Ex+\alpha}\right)\frac{d}{dx}+E^2-1+\right.$$
$$\left.+\frac{2E\alpha}{x}+\frac{\alpha^2-2\nu^2}{x^2}\right]\Phi_0=0. \qquad (40)$$

Уравнение (40) при переходе к переменной z по формуле $x=-\frac{\alpha}{E}z$ принимает вид

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2}+\left(\frac{3}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\frac{d\Phi_0}{dz}+$$
$$+\left(\alpha^2-\frac{\alpha^2}{E^2}-\frac{2\alpha^2}{z}-\frac{2\nu^2-\alpha^2}{z^2}\right)\Phi_0=0. \qquad (41)$$

Далее будем пользоваться обозначениями

$$\gamma^2=2\nu^2-\alpha^2=j(j+1)-\alpha^2>0,$$

$$-\Lambda^2=-(-\alpha^2+\frac{\alpha^2}{E^2})=-\alpha^2\frac{1-E^2}{E^2}<0, \qquad (42)$$

тогда уравнение (41) запишется так:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2}+\left(\frac{3}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\frac{d\Phi_0}{dz}+$$
$$+\left(-\Lambda^2-\frac{2\alpha^2}{z}-\frac{\gamma^2}{z^2}\right)\Phi_0=0. \qquad (43)$$

Оно имеет две регулярные точки $z=0,1$ и одну нерегулярную точку $z=\infty$ ранга 2.

Рассмотрим поведение функций $\Phi_0(z)$ около точки $z=0$

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2}+\frac{3}{z}\frac{d\Phi_0}{dz}-\frac{\gamma^2}{z^2}\Phi_0=0,$$

$$\Phi_0\sim z^A,\quad A=-1+\sqrt{1+\gamma^2}>0. \qquad (44)$$

Связанным состояниям соответствуют положительные значения для A.

В области $z=+\infty$ решения ведут себя так:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{d\Phi_0}{dz}-\Lambda^2\Phi_0=0,$$

$$\Phi_0=e^{+\sqrt{\Lambda^2}z}=e^{-\sqrt{M^2c^4-E^2}r/\hbar c}. \qquad (45)$$

Выберем решения, затухающие на бесконечности. Будем строить решения уравнения (41) в следующем виде $\Phi_0(z)=z^Ae^{Bz}f(z)$, тогда уравнение для функции f таково

$$f''+\left(2B+\frac{2A+3}{z}-\frac{1}{z-1}\right)f'+$$

$$+\left((B^2-\Lambda^2)+\frac{A^2+2A-\gamma^2}{z^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2AB+A+3B-2\alpha^2}{z}-\frac{A+B}{z-1}\right)f=0.$$

Выбрав A и B в виде $A=-1+\sqrt{1+\gamma^2}$, $B=+\sqrt{\Lambda^2}$, приводим уравнение к более простому виду

$$f''+\left(2B+\frac{2A+3}{z}-\frac{1}{z-1}\right)f'+$$

$$+\left(\frac{2AB+A+3B-2\alpha^2}{z}-\frac{A+B}{z-1}\right)f=0. \quad (46)$$

Оно может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна [10, 11]:

$$f''+\left(-t+\frac{c}{z}+\frac{d}{z-1}\right)f'+\frac{\lambda-taz}{z(z-1)}f=0, \quad (47)$$

где параметры заданы равенствами

$$t=-2B, \quad c=2A+3, \quad d=-1,$$

$$-\lambda=2AB+3B+A-2\alpha^2,$$

$$-ta=2BA+2B-2\alpha^2. \quad (48)$$

Для параметра a находим следующее выражение:

$$a=A+1-\frac{\alpha^2}{B}=+\sqrt{1+\gamma^2}-\frac{\alpha^2}{\Lambda}. \quad (49)$$

Решения уравнения для $f(z)$ в окрестности точки $z=0$ будем строить в форме степенных рядов: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^k$, что приводит к трехчленным рекуррентным соотношениям

$$cd_1+\lambda d_0=0,$$

$$t(k-1+a)d_{k-1}-[k(k-1+t+d+c)+\lambda]d_k+$$

$$+(k+1)(k+c)d_{k+1}=0, \quad k=1,2,3,\dots. \quad (50)$$

Рекуррентную формулу можно переписать так:

$$P_kd_k-(Q_k+\lambda)d_{k+1}+R_kd_{k+2}=0,$$

$$P_k=t(k-1+a), \quad Q_k=k(k-1+t+d+c),$$

$$R_k=(k+1)(k+c), \quad k=1,2,\dots. \quad (51)$$

Соотношение (51) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{k^2}P_k-\frac{1}{k^2}(Q_k+\lambda)\,\frac{d_{k+1}}{d_k}+\frac{1}{k^2}R_k\,\frac{d_{k+2}}{d_{k+1}}\frac{d_{k+1}}{d_k}=0.$$

Отсюда при $k\to\infty$ находим простое алгебраическое соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d_{k+1}}{d_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{d_{k+2}}{d_{k+1}}=r, \quad r^2-r=0.$$

Согласно методу Пуанкаре–Перрона, заключаем, что минимальный радиус сходимости равен $R_{conv}=1$. Поведение решений около точки $z=1$ следующее: $\Phi_0\sim(z-1)^\rho, \rho=0,2$. Другая возможность для радиуса сходимости – это $R_{conv}=\infty$.

Если наложить условие $P_n=0$, то приходим к классу трансцендентных вырожденных функций Гойна [10]:

$$P_k=0, \quad -a=k-1=n, \quad n=0,1,2,\dots \quad (52)$$

Это условие дает следующее правило квантования:

$$n+\sqrt{1+\gamma^2}=\frac{\alpha^2}{\Lambda}\equiv\alpha\sqrt{\frac{E^2}{1-E^2}},$$

откуда следует формула для уровней энергии

$$E=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2/N^2}},$$

$$N=n+\sqrt{j(j+1)+1-\alpha^2}. \quad (53)$$

Обращаем внимание на то, что она отличается от формулы для энергий (33). Последнее означает, что выведенное уравнение 2-го порядка для функции Φ_0 описывает класс состояний, отличных от состояний, определяемых как решения уравнения для φ_1, а также для связанной с ней простым множителем функции φ_2. Из общих соображений и следует ожидать, что система из 6 уравнений описывает два класса состояний векторной частицы в кулоновском поле.

Нужно обратить внимание на то, что согласно уравнениям 1) и 4) в (37), две функции связаны простым множителем:

$$\Phi_0(x)=2\nu\,\frac{\alpha+Ex}{2\nu^2+x^2}\,\varphi_1(x). \quad (54)$$

Если подставить это выражение для Φ_0 в уравнение (40), то для функции $\varphi_1(x)$ получим уравнение, отличное из решенного выше уравнения (9),(10). Убедимся в этом. Исходим из соотношения связи

$$\Phi_0(x)=f(x)\varphi_1(x), \quad f(x)=\frac{xE+\alpha}{2\nu^2+x^2}$$

и из уравнения (40) для Φ_0

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{3}{x}-\frac{E}{Ex+\alpha}\right)\frac{d}{dx}+E^2-1+\right.$$

$$\left.+\frac{2E\alpha}{x}+\frac{\alpha^2-2\nu^2}{r^2}\right]\Phi_0=0. \quad (55)$$

В результате получим следующее уравнение для φ_1:

$$\varphi_1''+\left(\frac{3}{x}-\frac{E}{Ex+\alpha}+\frac{2E}{Ex+\alpha}-\frac{4x}{2\nu^2+x^2}\right)\varphi_1'+$$

$$+\left[\left(\frac{E}{Ex+\alpha}-\frac{2x}{2\nu^2+x^2}\right)^2-\frac{E^2}{(Ex+\alpha)^2}-\right.$$

$$-\frac{2}{2\nu^2+x^2}+\frac{4x^2}{(2\nu^2+x^2)^2}+$$

$$+\left(\frac{3}{x}-\frac{E}{Ex+\alpha}\right)\left(\frac{E}{Ex+\alpha}-\frac{2x}{2\nu^2+x^2}\right)+$$

$$\left.+E^2-1+\frac{2E\alpha}{x}+\frac{\alpha^2-2\nu^2}{x^2}\right]\varphi_1=0. \quad (56)$$

Формальная сложность этого уравнения для $\varphi_1(x)$ в сравнении с уравнением (40) для $\Phi_0(x)$ иллюзорная, поскольку обратной подстановкой эти лишние сингулярности можно убрать из уравнения, в результате придем к (40). Отметим, что выведенное уравнение (56) для φ_1 отличается от решенного выше уравнения (10). Это означает, что классы решений, определяемые двумя разными уравнениями для $\varphi_1(x)$, различны.

6. Заключение

Выполнен анализ системы из шести радиальных уравнений, описывающей состояния с четностью $P = (-1)^j$ для векторной частицы в кулоновском поле. С учетом обобщенного условия Лоренца показано, что одна функция из шести обязана обращаться в нуль, следовательно, имеем систему из шести уравнений для пяти неизвестных функций. Показано, что в качестве независимой можно выбирать одну любую функцию из этих пяти, при этом для нее получаем два разных дифференциальных уравнения 2-го порядка, которые можно связать с двумя подклассами состояний. Эти независимые уравнения 2-го порядка найдены в явном виде, построены их решения Фробениуса, методом Пуанкаре–Перрона исследована сходимость вовлеченных в эти решения степенных рядов. Для получения правила квантования используется условие трансцендентности решений Фробениуса. В обоих случаях условия трансцендентности дают разумные с физической точки зрения формулы для спектров энергии, причем эти спектры различаются между собой.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф20РА-007 в рамках сотрудничества НАН Беларуси и Румынской Академии.

Литература

1. *Тамм И.Е.* Движение мезонов в электромагнитных полях // Докл. АН СССР. 1940. Т. 29. С. 551–554.
2. *Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M.* On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2010. Vol. 13. No. 4. P. 352–367.
3. *Кисель В.В., Редьков В.М., Овсиюк Е.М.* Волновые функции и спектр энергии для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле // ДАН Беларуси. 2011. Т. 55. № 1. С. 50–55.
4. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid, Lobachevsky, and Riemann: nonrelativistic approximation / *E. Ovsiyuk, O. Veko, K. Kazmerchuk, V. Kisel, V. Red'kov* // Ukraine Phys. J. 2013. Vol. 58. No. 11. P. 1073–1083.
5. Spin 1 particle in the magnetic monopole potential for Minkowski and Lobachevsky spaces: nonrelativistic approximation / *O.M. Veko, K.M. Kazmerchuk, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, A.M. Ishkhanyan, V.M. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2015. Vol. 18. No. 2. P. 243–258.
6. From quantum dynamics of spin 1 particle in Coulomb field to jet geometric-physical objects / *M. Neagu, O. Florea, O. Veko, E. Ovsiyuk, V. Red'kov* // Applied Sciences. 2014. Vol. 16. P. 73–99.
7. *Krylova N.G., Ovsiyuk E.M., Balan V., Red'kov V.M.* Geometrization for a Quantum-Mechanical Problem of a Vector Particle in External Coulomb Field // NPCS. 2018. Vol. 21. No. 4. P. 309–325.
8. Об описании связанных состояний для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле / *Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, Я.А. Войнова, А.Д. Коральков, В.В. Кисель, В.М. Редьков* // Проблемы физики, информатики и техники. 2018. № 2(35). С. 21–33.
9. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / *E.M. Ovsiyuk, O.M. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Balkan Society of Geometers Proceedings. 2018. Vol. 25. P. 59–78.
10. *Ronveaux A.* Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.
11. *Slavyanov S.Yu., Lay W.* Special functions. A unified theory based on singularities. Oxford: Oxford University Press, 2000.

References

1. *Tamm I.E.* Motion of mesons in electromagnetic fields // Dokl. USSR Ac. Sci. 1940. Vol. 29. P. 551–554.
2. *Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M.* On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2010. Vol. 13, № 4. P. 352–367.
3. *Kisel V.V., Red'kov V.M., Ovsiyuk E.M.* Wave functions and energy spectrum for spin 1 particle in external Coulomb field // Dokl. Ac. Sci. of Belarus. 2011. Vol. 55. No. 1. P. 50–55.
4. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid, Lobachevsky, and Riemann: nonrelativistic approximation / *E. Ovsiyuk, O. Veko, K. Kazmerchuk, V. Kisel, V. Red'kov* // Ukraine Phys. J. 2013. Vol. 58. No. 11. P. 1073–1083.
5. Spin 1 particle in the magnetic monopole potential for Minkowski and Lobachevsky spaces: nonrelativistic approximation / *O.M. Veko, K.M. Kazmerchuk, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, A.M. Ishkhanyan, V.M. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2015. Vol. 18. No. 2. P. 243–258.
6. From quantum dynamics of spin 1 particle in Coulomb field to jet geometric-physical objects / *M. Neagu, O. Florea, O. Veko, E. Ovsiyuk, V. Red'kov* // Applied Sciences. 2014. Vol. 16. P. 73–99.
7. *Krylova N.G., Ovsiyuk E.M., Balan V., Red'kov V.M.* Geometrization for a Quantum-Mechanical Problem of a Vector Particle in External Coulomb Field // NPCS. 2018. Vol. 21. No. 4. P. 309–325.
8. On desctribing the bound states for spin 1 particle in external Coulomb field / *E.M. Ovsiyuk,*

O.M. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Problems of Physics, Informatics and Technics. 2018. № 2 (35). P. 21–33.

9. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / *E.M. Ovsiyuk, O.M. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Balkan Society of Geometers Proceedings. 2018. Vol. 25. P. 59–78.
10. *Ronveaux A.* Heun's differential equation. Oxford: Oxford University Press, 1995.
11. *Slavyanov S.Yu., Lay W.* Special functions. A unified theory based on singularities. Oxford: Oxford University Press, 2000.

Статья поступила в редакцию 21.07.2020.