УДК 539.3
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-73-78

В.Н. ТАРАСОВ, Н.О. СМОЛЕВА

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ АРОК С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

vntarasov@dm.komisc.ru
nataljafilipp5@gmail.com

V.N. TARASOV, N.O. SMOLEVA

SUSTAINABILITY PROBLEMS OF CIRCULAR ARCS WITH NON-RETAINING LINKS

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

Аннотация

В работе рассматриваются проблемы устойчивости арок и арочных систем, подкрепленных нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Эти вопросы относятся к контактным задачам упругих конструкций с неизвестной областью активного взаимодействия их элементов, и исследование сводится к поиску и анализу точек бифуркации решений вариационных проблем при наличии ограничений-неравенств на искомые функции. В работе рассматривается задача устойчивости арки, подкрепленной нитями, один конец которых прикреплен к некоторой точке арки, другой – к проекции этой точки на хорду, соединяющую ее концы. При численном решении проблема сводится к поиску параметра нагрузки, при которой задача невыпуклого квадратичного программирования с ограничениями на переменные в виде неравенств имеет неединственное решение. Численные расчеты показали, что даже при небольшом числе подкрепляющих нитей критическая нагрузка увеличивается примерно в два раза.

Ключевые слова:
устойчивость, критическая сила, арка, вариационная задача, нелинейное программирование, односторонние ограничения, бифуркация, квадратичная форма, собственные значения, нерастяжимые нити

Abstract

The work deals with the problems of stability of arches and arch systems supported by inextensible threads that cannot withstand compressive forces. These questions relate to contact problems of elastic structures with an unknown region of active interaction of their elements, and the study is reduced to the search and analysis of bifurcation points of solutions to variational problems in the presence of inequality constraints on the sought functions. The paper considers the problem of stability of an arch supported by threads, one end of which is attached to some point of the arch, the other to the projection of this point on the chord connecting its ends. In the numerical solution, the problem is reduced to finding a load parameter in which the nonconvex quadratic programming problem with constraints on variables in the form of inequalities has a non-unique solution. Numerical calculations have shown that even with a small number of reinforcing threads, the critical load approximately doubles.

Keywords:
stability, critical force, arch, variational problem, nonlinear programming, one-sided constraints, bifurcation, quadratic form, eigenvalues, inextensible threads

Введение

Использование новых высокопрочных материалов обуславливает появление все более сложных тонкостенных конструкций. Расчет на устойчивость становится все более важным, так как разрушение тонких конструкций связано с общей потерей устойчивости всей конструкции, либо ее отдельных элементов. Исследование устойчивости упругих систем берет свое начало с работ Л. Эйлера (см. обзор Е.А. Николаи [1] «О работах Эйлера по теории продольного изгиба»). Задачи упругой устойчивости стержней, пластин и оболочек в классическом случае сводятся к исследованию и отысканию точек бифуркации нелинейных уравнений или к отысканию параметров, при которых вариационная задача имеет несколько решений. Современное состояние теории упругой устойчивости изложено в монографии [2]. Общая концепция упругой бифуркационной устойчивости описана в работе В.В. Новожилова [3]. Устойчивость круговых арок подробно изучена в трудах [1–4]. Иногда упругая система переходит в сложное состояние равновесия и движения. В таких случаях статические методы неприменимы и необходимо интегрировать динамические уравнения. Сопоставление статического и динамического подходов приведено в монографии [5].

Рассматриваемые в работе задачи относятся к контактным задачам теории упругости с неизвестной областью активного взаимодействия элементов упругой конструкции. При математической формализации появляются неравенства или негладкие функционалы. Применению неравенств в физике и математике посвящена монография [6].

Исследования в задачах устойчивости арок не прекращаются и в настоящее время [7–11].

В предлагаемой вниманию читателя статье рассматриваются задачи устойчивости подкрепленных арок нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Проблемы, описанные в статье, приводят к необходимости исследовать точки бифуркации вариационных задач при наличии ограничений на искомые функции в виде неравенств. При конечномерной аппроксимации приходим к задаче нахождения точек бифуркации в задачах нелинейного программирования, что, в свою очередь, может быть сведено к поиску глобального минимума в некоторой невыпуклой задаче квадратичного программирования. Последняя заменой переменных преобразуется к задаче сепарабельного программирования, для решения которой имеется достаточно эффективный метод ветвей и границ [12]. Проблема поиска глобального минимума квадратичного функционала приводит к задаче идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. Аналитические критерии положительной определенности квадратичных форм на конусах в важном частном случае, когда конус представляет положительный ортант, предложены в работах [13, 14], но их применение связано с вычислением большого количества определителей и в вычислительном отношении крайне неэффективно. Влияние односторонних ограничений на перемещения изучалось в [15–18].

Работа [15] посвящена экспериментальному и численному исследованию устойчивости сжимаемой продольными силами цилиндрической оболочки односторонне взаимодействующих с упругой средой. В.И. Феодосьевым [16] решена задача устойчивости кольца, находящегося в жесткой оболочке, аналогичная задача рассматривалась в [17]. Задача устойчивости арок, односторонне взаимодействующих с упругой средой, разобрана в [18]. Другие задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения исследовались в работах авторов [19, 20]. В [20] аналитически решена задача устойчивости сжимаемого продольными силами цилиндрической оболочки, находящейся в жесткой обойме, при граничных условиях жесткой заделки и шарнирного опирания. В [19] рассматривалась аналитическая задача при граничных условиях свободного края. Так же в работах [19–21] приведены решения задач устойчивости упругих колец и арок, подкрепленных нерастяжимыми нитями при различных способах подкрепления.

1. Деформация круговых арок

Пусть тонкий упругий стержень, представляющий собой дугу окружности радиуса R , находится в равновесии, силы равномерно распределены по его длине. Предполагается, что сечение стержня постоянно, и одна из главных осей инерции поперечного сечения лежит в плоскости дуги. В некоторой точке M_0 проведем три взаимно перпендикулярные оси (x_0, y_0, z_0) : ось y_0 направлена по одной из главных осей инерции сечения, перпендикулярного плоскости дуги, ось x_0 , соответственно, направлена к центру кривизны дуги, ось z_0 – по касательной к дуге стержня. Пусть в результате деформации стержня оси (x_0, y_0, z_0) переходят в оси x, y, z, точка M_0 переходит в точку M, проекции перемещений точки M_0 на оси (x_0, y_0, z_0) обозначим через u, w, v. Система координат (x, y, z) получается из системы (x_0, y_0, z_0) путем переноса и поворота вокруг осей (x_0, y_0, z_0) на углы α, β, γ. Считаем деформации малыми, можем написать уравнения Клебша [1]

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{du}{ds} + \dfrac{1}{R}w, \\ -\alpha = \dfrac{dv}{ds}, \\ \dfrac{dw}{ds} - \dfrac{1}{R}u = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$ds = Rd\vartheta$, $\vartheta \in [\alpha_0, \alpha_1]$ – центральный угол дуги стержня.

Упругая энергия стержня в результате деформации определяется формулой

$$U = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (A\delta p^2 + B\delta q^2 + C\delta^2) Rd\vartheta, \tag{2}$$

где A, B – жесткости стержня на изгиб, C – жесткость стержня при кручении.

$$\begin{cases} \delta p = \dfrac{1}{R}(\alpha' + \gamma) = \dfrac{1}{R}\left(-\dfrac{1}{R}v' + \gamma\right), \\ \delta q = \dfrac{1}{R}\beta' = \dfrac{1}{R^2}(u'' + u), \\ \delta r = \dfrac{1}{R}(\gamma - \alpha) = \dfrac{1}{R}\left(\gamma + \dfrac{1}{R}v'\right). \end{cases} \tag{3}$$

Предположим, что арка нагружена давлением P, равномерно распределенным по ее оси. При любой величине давления возможна круговая (первоначальная) форма равновесия.

Если давление достаточно велико, то первоначальная круговая форма становится неустойчивой, и арка принимает другую, нетривиальную форму. Предположим, что деформация арки является плоской, т.е. $\vartheta = 0, \gamma = 0$. Тогда работа внешних сил определяется формулой

$$W = \frac{PR}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}(u^{'2} - bu^2)d\vartheta, \tag{4}$$

где $b = 2$ в случае центральных сил, т.е. нагрузка направлена к центру первоначальной кривизны арки, и $b = 1$ в случае нормальной нагрузки, т.е. давление направлено по нормали к деформированной линии арки. В положении равновесия функционал полной энергии

$$J = U - W = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{B}{R^2}(u'' + u)^2 - W \tag{5}$$

принимает минимальное значение. В (5) B – упругая постоянная.

Уравнение Эйлера для функционала (5) имеет вид

$$\frac{B}{R^3}(u^{IV} + 2u'' + u) + P(u'' + u) = 0. \tag{6}$$

2. Об устойчивости арки, подкрепленной нитями

Рассмотрим случай плоской деформации арки, подкрепленной нерастяжимыми нитями. Один конец нити прикреплен к некоторой точке арки, а другой – к хорде, соединяющей концы арки (рис. 1), при этом расстояние между концами нити не может увеличиваться. Число таких нитей обозначим через M. Далее $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1$.

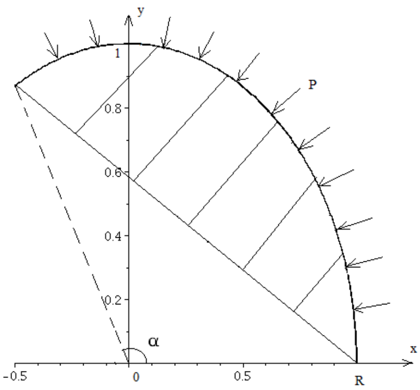

Рис. 1. Плоская деформация арки.
Fig. 1. Flat deformation of the arch.

$$\begin{cases} x = (R - u)\cos\vartheta - w\sin\vartheta, \\ y = (R - u)\sin\vartheta + w\cos\vartheta, \end{cases} \tag{7}$$

где $0 \le \vartheta \le \alpha$,,$0 < \alpha < 0$. Уравнение хорды имеет вид

$$y = k(x - R),\ k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}.$$

Один конец нити прикреплен к дуге арки в точке при $\vartheta = \epsilon_j$. Проекция точки $x_{0j} = R\cos\epsilon_j,\ y_{0j} = R\sin\epsilon_j$ определяется формулами

$$x_j = x_{oj} + \mu_j k,\ y_j = y_{oj} - \mu_j,$$

где $\mu_j = \dfrac{y_{0j} - kx_{0j} + kR}{1 + k^2}$. После деформации точка (x_{0j}, y_{0j}) перешла в точку с координатами (x, y), определяемыми уравнениями (2) при $\vartheta = \epsilon_j$. Введем функцию

$$f_j(u, w) = \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2},$$

$$g_j(u, w) = f_j(0, 0).$$

Разложим функции $g_j(u, w)$ в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка малости:

$$g_j(u, w) \approx a_j u + b_j w,\ j \in 1 : M,$$

где $a_j = \dfrac{\partial g_j(0,0)}{\partial u_j},\ b_j = \dfrac{\partial g_j(0,0)}{\partial w_j}$.

Обозначим через Γ конус, определяемый неравенствами

$$a_j u + b_j w \le 0,\ \ j \in 1 : M. \tag{8}$$

Используя систему Maple можно получить

$$a_j = Rc_0(\sin(\alpha - \epsilon_j) + \sin\epsilon_j),$$

$$b_j = Rc_0(\cos(\alpha - \epsilon_j) - \cos\epsilon_j),$$

$$c_0 = \text{signum}(\sin\alpha - \sin\epsilon_j - \sin(\epsilon_j - \alpha)).$$

Задача об устойчивости подкрепленной арки сводится к поиску минимального числа λ , при котором вариационная задача

$$J(u, w) = V - W = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (u'' + u)^2 d\vartheta -$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^\alpha (u^{'2} - bu^2)d\vartheta \to \min_{u,w\in\Gamma}$$

имеет нетривиальное решение. Здесь из (1) $w' = u$, и параметр b характеризует поведение нагрузки после потери устойчивости.

Поскольку функционал $J(u, w)$ положительно однороден, $(J(cu, cw) = c^2 J(u, w))$, то можно потребовать, чтобы

$$W = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (u^{'2} - bu^2)d\vartheta = 1.$$

Таким образом, исследование устойчивости подкрепленной арки сводится к вариационной проблеме изопериметрического типа

$$V = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (u'' + u)^2 d\vartheta \to \min_{u,w\in\Gamma}, \tag{9}$$

$$W(u) = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (u^{'2} - bu^2)d\vartheta = 1 \tag{10}$$

и выполнению неравенств (8). Задачу (8)–(10), по-видимому, можно исследовать лишь численными методами. В случае граничных условий жесткой заделки $u(0) = u(\alpha) = 0,\ u'(0) = u'(\alpha) = 0$ для конечномерной аппроксимации использовались ряды Фурье и интерполяционные кубические сплайны. При аппроксимации рядами Фурье

$$w(0) = \sum_{k=1}^{n} z_k \sin\frac{k\pi\vartheta}{\alpha},$$

граничные условия жесткой заделки будут выполнены, если потребовать выполнение равенств

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \frac{k\pi}{\alpha} = 0, \quad \sum (-1)^k z_k \frac{k\pi}{\alpha} = 0.$$

В случае граничных условий шарнирного опирания $u(0) = u(\alpha) = 0$, $u''(0) = u''(\alpha) = 0$, $w(0) = w(\alpha) = 0$ применялась аппроксимация интерполяционными сплайнами.

Наличие ограничений неравенств существенно усложняет решение задачи. В случае аппроксимации сплайнами условие несжимаемости $u = w'$ учитывается методом штрафных функций. Функционал U заменяется на

$$\widetilde{U} = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (u'' + u)^2 d\vartheta + \frac{D}{2}\int_0^\alpha (u - w')^2 d\vartheta,$$

где D – большое число. Таким образом, подставляя, например, ряды Фурье в (9),(10), получаем задачу нелинейного программирования

$$f(z) = \frac{1}{2}(Gz, z) \to \min, \tag{11}$$

$$g(z) = \frac{1}{2}(Qz, z) = 1, \tag{12}$$

$$(a_j z) \le 0, \quad j \in 1:m, \quad z \in R^n. \tag{13}$$

Для решения задачи (11)–(13) применяется метод последовательных приближений: пусть вектор $z_0 \in \Gamma$, $g(z_0) = 1$ – начальное приближение. Предположим, что уже получена точка $z_k \in \Gamma$, $g(z_k) = 1$. Введем множество $\Omega_k = \{z \in \Gamma, (Qz_k, z) = 1\}$. Найдем точку $y_k \in \Omega$ такую, что $f(y_k) = \min\limits_{z \in \Omega_k} f(z)$. Далее полагаем $z_{k+1} = \dfrac{1}{S_k} y_k$, $S_k = \sqrt{g(y_k)}$. Вопросы сходимости алгоритма обсуждаются [20].

3. Результаты вычислений

Приведем результаты вычислений.

Таблица 1. Значение безразмерного критического давления в зависимости от числа подкрепляющих нитей при граничных условиях жесткой заделки, нормальной и центральной нагрузок

Table 1. The value of the dimensionless critical pressure depending on the number of reinforcing threads under the boundary conditions of rigid embedding and normal and central loads

α/M	0	2	3	4
$b = 1$ сила направлена по нормали к оси арки				
π	8,0	12,94	21,7	29,5
$\frac{2\pi}{3}$	18,1	29,8	47,8	66,2
$b = 2$ сила направлена к центру кривизны арки				
π	10,6	14,0	22,8	30,6
$\frac{2\pi}{3}$	20,1	34,8	49,2	67,8

Таблица 2. Значение безразмерного критического давления PR^3/B в зависимости от числа подкрепляющих нитей при граничных условиях шарнирного опирания, нормальной и центральной нагрузок

Table 2. Dimensionless critical pressure value PR^3/B depending on the number of reinforcing threads under the boundary conditions of the hinge support for normal and central loads

α/M	0	2	3	4
$b = 1$ сила направлена по нормали к оси арки				
π	3,0	3,0	5,6	13,6
$\frac{2\pi}{3}$	8,0	8,0	12,1	34,1
$b = 2$ сила направлена к центру кривизны арки				
π	4,5	4,5	7,4	15,2
$\frac{2\pi}{3}$	9,2	8,0	13,47	35,2

Результаты численных экспериментов показывают, что даже небольшое число вертикальных нитей значительно увеличивает критическую нагрузку примерно в два раза.

Заключение

Таким образом, численные расчеты показали, что даже при небольшом числе подкрепляющих нитей критическая нагрузка увеличивается примерно в два раза. При сравнении результатов, приведенных в табл. 1, 2, можно сделать вывод, что на величину критической нагрузки существенно влияет вид граничных условий.

Литература

1. *Николаи Е.Л.* Труды по механике. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 584 с.
2. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т. 1. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010–2011. 686 с.
3. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
4. *Динник А.Н.* Устойчивость арок. М., 1946. 128 с.
5. *Ziegler H.* Principles of Structural Stability. Waltham, Massachusetts, Toronto, London: Blaisdell publishing company, 1968. 194 c.
6. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
7. In-plane elastic stability of arches under a radial concentrated load / *Yongjun Xu, Xiaoming Gui, Bin Zhao, Ruiqi Zhao* // Engineering. 2014. No. 6. P. 572–583.
8. *Pi Y.-L., Bradford A.* Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load // J. of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331. P. 4199–4217.
9. *Pi Y.-L., Bradford A.* A new analytical solution for lateral-torsional buckling of arches under axial uniform compression // Engineering Structures. 2012. Vol. 41. P. 14–23.

10. *Pi Y.-L., Bradford A.* Dynamic buckling of shallow pin-ended arches under a sudden central concentrated load // J. of Sound and Vibration. 2008. Vol. 317. P. 898–917.
11. *Lalin V.V., Dmitriev A.N., Diakov S.F.* Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches // Magazine of Civil Engineering. 2019. Vol. 89, No. 5. P. 39–51.
12. *Сухарев А.Г.* Глобальный экстремум и методы его отыскания // Математические методы и исследования операций. М.: Изд-во МГУ, 1983. 193 с.
13. *Рапопорт Л.Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе // ПММ. 1986. Т. 50, № 4. С. 674–679.
14. *Крепс В.Л.* О квадратичных формах неотрицательных на ортанте // ЖВМиМФ. 1984. Т. 24, № 14. С. 497–503.
15. *Алфутов Н.А., Еремичев А.Н.* Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Расчеты на прочность. М.:Машиностроение, 1989. С. 179–180.
16. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
17. *Zhaochao Li, Junxing Zheng, Yizheng Chen.* Nonlinear buckling of thin-walled FGM arch encased in rigid confinement subjected to external pressure // Engineering Structures. 2019. Vol. 186. P. 86–95.
18. *Ricardo A.M. Silveria, Christianne L. Nogueira, Paulo B. Goncalves.* A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints // International Journal of Solids and Structures. 2013. No. 50. P. 147–159.
19. *Andryukova V., Tarasov V.* Nonsmooth problem of stability for elastic rings // Abstracts of the Intern. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Prof. V.F. Demyanov. Part I. St. Petersburg: Inst. of Electrical and Electronic Engineers, 2017. P. 268.
20. *Tarasov V.* Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Intern. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Prof. V.F. Demyanov. Part I. St. Petersburg: Inst. of Electrical and Electronic Engineers, 2017. P. 268.
21. *Андрюкова В.Ю.* Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 412–422.

References

1. *Nikolai E.L.* Trudy po mekhanike [Transactions on mechanics]. Moscow: Publishing house of technical and theoretical literature, 1955. 584 p.
2. *Perelmuter A.V., Slivker V.I.* Ustojchivost' ravnovesiya konstrukcij i rodstvennye problemy [Equilibrium stability of structures and related problems]. Vol. 1. Moscow: Publishing house SKAD SOFT, 2010–2011. 686 p.
3. *Novozhilov V.V.* Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti [Foundations of the nonlinear theory of elasticity]. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 211 p.
4. *Dinnik A.N.* Ustojchivost' arok [Stability of arches]. Moscow, 1946. 128 p.
5. *Ziegler H.* Principles of Structural Stability. Waltham, Massachusetts, Toronto, London: Blaisdell publishing company, 1968. 194 c.
6. *Panagiotopulos P.* Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevypuklyye funktsii energii [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy functions]. Moscow: Mir, 1989. 494 p.
7. In-plane elastic stability of arches under a radial concentrated load / *Yongjun Xu, Xiaoming Gui, Bin Zhao, Ruiqi Zhao* // Engineering. 2014. No. 6. P. 572–583.
8. *Pi Y.-L., Bradford A.* Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load // J. of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331. P. 4199–4217.
9. *Pi Y.-L., Bradford A.* A new analytical solution for lateral-torsional buckling of arches under axial uniform compression // Engineering Structures. 2012. Vol. 41. P. 14–23.
10. *Pi Y.-L., Bradford A.* Dynamic buckling of shallow pin-ended arches under a sudden central concentrated load // J. of Sound and Vibration. 2008. Vol. 317. P. 898–917.
11. *Lalin V.V., Dmitriev A.N., Diakov S.F.* Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches // Magazine of Civil Engineering. 2019. Vol. 89, No. 5. P. 39–51.
12. *Sukharev A.G.* Global'nyj ekstremum i metody ego otyskaniya [Global extremum and methods of finding it] // Mathematical Methods and Operations Research. Moscow: Moscow State Univ. Publ. House, 1983. 193 p.
13. *Rapoport L.B.* Ustojchivost' po Lyapunovu i znakoopredelennost' kvadratichnoj formy na konuse [Lyapunov stability and definiteness of a quadratic form on a cone] // PMM. 1986. Vol. 50, No. 4. P. 674–679.
14. *Kreps V.L.* O kvadratichnyh formah neotricatel'nyh na ortante [Quadratic forms of nonnegative forms on the orthant] // ZhVMiMF. 1984. Vol. 24, No. 14. P. 497–503.
15. *Alfutov N.A., Eremichev A.N.* Vliyanie odnostoronnih svyazej na ustojchivost' cilindricheskih obolochek pri osevom szhatii [Influence of one-way bonds on the stability of cylindrical shells under axial compression] // Strength calculations. Mechanical engineering. 1989. P. 179–180.
16. *Feodosyev V.I.* Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected tasks and questions on the strength of materials]. Moscow: Nauka, 1967. 376 p.
17. *Zhaochao Li, Junxing Zheng, Yizheng Chen.* Nonlinear buckling of thin-walled FGM arch encased in rigid confinement subjected to external pressure // Engineering Structures. 2019. Vol. 186. P. 86–95.
18. *Ricardo A.M. Silveria, Christianne L. Nogueira, Paulo B. Goncalves.* A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender

arches and rings under contact constraints // International Journal of Solids and Structures. 2013. No. 50. P. 147–159.

19. *Andryukova V., Tarasov V.* Nonsmooth problem of stability for elastic rings // Abstracts of the Intern. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Prof. V.F. Demyanov. Part I. St. Petersburg: Inst. of Electrical and Electronic Engineers, 2017. P. 268.
20. *Tarasov V.* Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Intern. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Prof. V.F. Demyanov. Part I. St. Petersburg: Inst. of Electrical and Electronic Engineers, 2017. P. 268.
21. *Andryukova V.Yu.* Nekotorye konstruktivnononelinejnye zadachi ustojchivosti uprugih sistem pri odnostoronnih ogranicheniyah na peremeshcheniya [Some constructively nonlinear stability problems for elastic systems under one-sided constraints on displacements] // Computational Continuum Mechanics. 2014. Vol. 7, No. 4. P. 412–422.

Статья поступила в редакцию 21.10.2021.