УДК 530.145, 512.81
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-36-41

И.В. КОСТЯКОВ*, В.В. КУРАТОВ*, Н.А. ГРОМОВ

КОНТРАКЦИИ АЛГЕБР ЛИ И УРАВНЕНИЕ ЛИНДБЛАДА

**Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар*

kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru
gromovna48@gmail.com

Аннотация

Динамика открытой квантовой системы приводит к декогеренции, что сопровождается предельными переходами в алгебре Ли наблюдаемых и появлению абелевых подалгебр. Возможно поставить и обратную задачу – по заданной контракции алгебры Ли найти динамику открытой квантовой системы, задаваемой уравнением Линдблада. В работе предложены примеры нахождения уравнения Линдблада по известным контракциям алгебры $su(3)$.

Ключевые слова:
открытые квантовые системы, алгебра наблюдаемых, контракции алгебр Ли

Abstract

The dynamics of an open quantum system leads to decoherence, which is accompanied by limiting transitions in the Lie algebra of observables and appearance of abelian subalgebras. It is possible to set an inverse problem as well – by a given Lie algebra contraction to find the dynamics of an open quantum system given by the Lindblad equation. The paper proposes examples of finding the Lindblad equation by the known contractions of algebra $su(3)$.

Keywords:
open quantum systems, algebra of observables, contractions of Lie algebras

I.V. KOSTYAKOV*, V.V. KURATOV*, N.A. GROMOV

LIE ALGEBRA CONTRACTIONS AND THE LINDBLAD EQUATION

**Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktyvkar*

Введение

Первой фундаментальной физической теорией, хорошо описывающей большой круг явлений, была классическая механика. Квантовая механика значительно расширила этот круг. Одним из способов описания квантового мира является матрица плотности. Ее элементам удобно сопоставлять некоторую многомерную фигуру. Например, с помощью сферы Блоха можно описывать состояния кубита. Тогда классический мир будет соответствовать отрезку вдоль оси z внутри сферы Блоха между ее полюсами или диагональным элементам матрицы плотности, а квантовый – всей остальной части внутри этой сферы. Характерными особенностями квантовой теории являются возможность суперпозиции разных состояний, которая описывается недиагональными элементами матрицы плотности, и принцип неопределенности, связанный с некоммутативностью наблюдаемых.

В физике более общая новая теория всегда должна содержать в себе старую в качестве предельного случая. Помимо предела, когда постоянная Планка стремится к нулю, существуют и другие предельные переходы, связывающие математический аппарат квантовой и классической механики, которые могут быть описаны с помощью контракций алгебр Ли.

Для замкнутой системы эволюция матрицы плотности в шредингеровском представлении определяется уравнением фон Неймана или квантовым уравнением Лиувилля [1–5]

$$\dot{\rho}(t) = \frac{i}{\hbar}[\rho(t), H] = \mathcal{L}(t)\rho(t), \tag{1}$$

которое сохраняет все квантовые свойства системы, в том числе суперпозицию и некоммутативность.

$\mathcal{L}(t)$ часто называют супероператором Лиувилля. Если гамильтониан H не зависит от времени, то решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{\dagger}(t) = \Lambda_t\rho(0) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}\rho(0), \qquad (2)$$

где $U(t) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, $\Lambda_t = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}$.

Если перенести зависимость от времени матрицы плотности к наблюдаемым, то получим динамику наблюдаемых в представлении Гейзенберга

$$\dot{A}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)] = \mathcal{L}^{\sharp}(t)A(t), \qquad (3)$$

$$A(t) = U^{\dagger}(t)A(0)U(t) = \Lambda^{\sharp}(t)A(0) = \\ = \mathrm{e}^{\mathcal{L}^{\sharp}t}A(0). \qquad (4)$$

Унитарная эволюция (3), (4) не меняет тип алгебры Ли наблюдаемых.

В случае слабого взаимодействия с окружением динамика открытых квантовых систем с хорошей точностью может быть представлена уравнением Линдблада [3–5]

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H] + \sum_k \gamma_k \left(V_k\rho V_k^{+} - \frac{1}{2}\left\{V_k^{+}V_k, \rho\right\}\right) = \\ = \mathcal{L}(t)\rho(t), \qquad (5)$$

в котором к правой части уравнения (1), описывающего унитарную часть динамики, добавляется слагаемое, описывающее диссипативную часть. Операторы V_k обычно называют операторами Линдблада, $\mathcal{L}$ в этом случае называют супероператором Линдблада, γ_k – скорости релаксации для различных видов затухания открытой квантовой системы.

Решение уравнения (5) для супероператора Линдблада $\mathcal{L}$, не зависящего от времени, может быть представлено в виде, аналогичном (2)

$$\rho(t) = \Lambda_t\rho(0) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}\rho(0). \qquad (6)$$

Взаимодействие с окружением обычно приводит к потере квантовых свойств, и система начинает проявлять классическое поведение. Это влечет зануление недиагональных элементов матрицы плотности и отражается на алгебре наблюдаемых, в которой могут появиться дополнительные абелевы подалгебры.

Образно говоря, например, для двухуровневой системы уравнение (1) только вращает начальное состояние и не приближает его к оси z (классическому миру), а уравнение (5) может в асимптотике приблизить начальное квантовое состояние к оси z и сделать его классическим. Таким образом динамика, задаваемая уравнениями Линдблада (5), (6), сжимает квантовый мир (шар Блоха) до классического (отрезок на оси z). Контракция групп (алгебр) Ли представляет собой похожее сжатие в пространстве структурных констант группы, приводящее к обнулению коммутаторов. Все это наводит на мысль о возможности описать переходы из квантового мира в классический при взаимодействии с окружением на языке контракций.

В картине Гейзенберга для наблюдаемых A уравнение Линдблада имеет вид

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}[H, A] + \sum_k \gamma_k \Big(V_k^{+}AV_k - \frac{1}{2}\left\{V_k^{+}V_k, A\right\}\Big) = \\ = \mathcal{L}^{\sharp}(t)A(t), \qquad (7)$$

и зависимость от времени наблюдаемых $A(t)$ может быть представлена следующим образом

$$A(t) = \Lambda_t^{\sharp}(A) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}^{\sharp}t}A(0). \qquad (8)$$

При этом изменение во времени коммутационных соотношений при отображении (8)

$$\left[A_i, A_j\right]_t \equiv \left(\Lambda_t^{\sharp}\right)^{-1}\left[\Lambda_t^{\sharp}(A_i), \Lambda_t^{\sharp}(A_i)\right] \equiv \\ \equiv C_{ij}^{k}(t)A_k \qquad (9)$$

представляет собой типичное преобразование коммутационных соотношений при контракции групп (алгебр) Ли [6–8]. В пределе $t \to \infty$, при некоторых условиях, исходная алгебра переходит в новую, которая называется контракцией исходной алгебры Ли [6–8]

$$[A_i, A_j]_{\infty} = \lim_{t\to\infty}[A_i, A_j]_t = C_{ij}^{k}(\infty)A_k. \qquad (10)$$

В физике метод получения новых групп (алгебр) Ли с помощью контракций давно известен [6–8]. При этом в новой алгебре появляются абелевы подалгебры, что как раз и может использоваться для описания потери системой квантовых свойств. Это указывает на наличие связи между диссипативными процессами в открытых квантовых системах и контракциями групп (алгебр) Ли, которая анализируется в работах [9–11]. В трудах [12–14] приводятся примеры контракций алгебры $su(2)$ в квантовых каналах кубита, а в [15, 16] исследованы предельные переходы в алгебре $su(3)$ для трехуровневых систем. Высокоэнергетические пределы стандартной модели исследовались в [17] при предположении, что калибровочная группа при высоких температурах (энергиях) становится проще и может быть получена с помощью контракции, параметр которой обратно пропорционален температуре Вселенной.

В работе [18] предложены некоторые возможные контракции унитарной алгебры $su(3)$. В данной статье мы покажем, как каждой контракции из [18] можно сопоставить уравнение Линдблада.

1. Контракции Иненю-Вигнера алгебр Ли

Напомним определение контракции Иненю-Вигнера. Рассмотрим алгебру Ли g и выделим в ней подалгебру g_0. Остальные генераторы образуют подмножество g_1. Коммутационные соотношения общего вида схематично можно представить так

$$[g_0, g_0] = g_0, \quad [g_0, g_1] = g_0 + g_1, \\ [g_1, g_1] = g_0 + g_1. \qquad (11)$$

Умножим все генераторы из g_1 на ε. Тогда коммутационные соотношения (11) изменятся так

$$[g_0, g_0]_{\varepsilon} = g_0, \quad [g_0, g_1]_{\varepsilon} = \varepsilon g_0 + g_1,$$

$$[g_1, g_1]_\varepsilon = \varepsilon^2 g_0 + \varepsilon g_1.$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ будем иметь новую алгебру Ли с новыми коммутационными соотношениями

$$[g_0, g_0]_0 \in g_0, \quad [g_0, g_1]_0 \in g_1, \quad [g_1, g_1]_0 = 0. \quad (12)$$

Таким образом, классификацию возможных контракций Иненю-Вигнера для алгебры g можно связать с возможными выборами инвариантной подалгебры g_0.

В работе [18] исследовались общие диагональные преобразования генераторов алгебры $su(3)$ в базисе матриц Гелл-Манна вида

$$\vec{\lambda}' = T_\varepsilon \vec{\lambda}, \quad (13)$$

где $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8)^t$, λ_i – матрицы Гелл-Манна, T_ε – диагональная матрица, у которой на диагонали стоят параметры ε_i. При определенных условиях на параметры ε_i возникают те или иные предельные переходы (контракции) алгебры Ли $su(3)$. В случае контракций Иненю-Вигнера на диагонали будут стоять либо 1, либо ε. Количество единиц равно размерности подалгебры g_0, а количество параметров ε – размерности g_1.

Далее мы приведем примеры, как заданным отображениям (13) можно сопоставить уравнение Линдблада, решения которых выражались бы отображением (13). Все примеры будут связаны с трехуровневыми системами и алгеброй $su(3)$. Наблюдаемые из множества g_1 при этом теряют свои квантовые свойства, образуя абелеву подалгебру. Наблюдаемые из подалгебры g_0 устойчивы по отношению к внешнему воздействию.

Как уже отмечалось выше, типы контракций (13) могут быть связаны с тем или иным выбором подалгебры g_0 и ее размерностью. Если размерность g_0 равна 0, то все $\varepsilon_i = \varepsilon$ – это приводит к контракции $su(3)$ до абелевой алгебры. Этому случаю будет соответствовать эволюция матрицы плотности трехуровневой системы (кутрита) до смешанной с равными вероятностями всех трех состояний (цвета кварков, значения спина, населенностей уровней и т.д.). Например, в работах [19, 20] была предложена интересная гипотеза, что конфайнмент кварков может быть описан как декогеренция цветового состояния частицы в смешанное квантовое состояние с равными вероятностями для разных цветов

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \frac{1}{3}\mathrm{I}. \quad (14)$$

Следующей возможностью является выбор одномерной подалгебры g_0 из $su(3)$. Этой контракции будет соответствовать эволюция матрицы плотности к стационарному состоянию, которое будет принадлежать этой подалгебре. Например, если эта одномерная подалгебра принадлежит подалгебре Картана и система при взаимодействии с окружением стремится к термодинамическому равновесию, то

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(\infty) & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(\infty) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}(\infty) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где для гиббсовского состояния

$$\rho_{ii}(\infty) = \frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{E_i}{kT}\right)}}{Z}, \qquad Z = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{e}^{-\left(\frac{E_i}{kT}\right)}, \quad (16)$$

E_i – энергия i-го уровня, T – температура.

Можно выбрать одномерную подалгебру в виде линейной комбинации генераторов подалгебры Картана и остальных генераторов. Этому будет соответствовать динамика матрицы плотности к состоянию, при котором сохраняется когерентность. Например, при включении внешнего поля, которое в гамильтониане взаимодействия пропорционально генератору λ_4, одномерная подалгебра будет представлять линейную комбинацию генераторов λ_4 и $[\lambda_4, \lambda_5]$, и матрица плотности будет стремиться к

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(\infty) & 0 & \rho_{13}(\infty) \\ 0 & \rho_{22}(\infty) & 0 \\ \rho_{31}(\infty) & 0 & \rho_{33}(\infty) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Третья возможность – выделить в качестве g_0 двумерную подалгебру Картана. Этому будут соответствовать, например, контракции Кэли-Клейна [8, 17], описывающие переход от $su(3)$ к более простой симметрии в КХД ранней Вселенной или предельные переходы в алгебре наблюдаемых при поперечной релаксации и декогеренции в трехуровневых системах. Матрица плотности в этом случае будет стремиться к (15), и $\rho_{ii}(\infty) = \rho_{ii}(0)$.

Еще одна возможность – взять трехмерную подалгебру $so(3)$ или $su(2)$, как g_0. Например, для случая $so(3)$ это будет описывать сохранение когерентности

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} 1/3 & -ia_2(0) & -ia_5(0) \\ ia_2(0) & 1/3 & -ia_7(0) \\ ia_5(0) & ia_7(0) & 1/3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

На возможность контракции к алгебре $su(2)$ или $so(3)$ с сохранением когерентности и соответствующую этой контракции спиновую динамику указал А.А. Карабанов. Он же предложил еще одну интересную контракцию от алгебры $su(2^m)$ к $so(2m)$ для цепочки спинов (кубитов), в которой майорановский спинор, устойчивый к декогеренции, связан с подалгеброй $so(2m)$ [21].

2. Примеры

Собственные значения l_i супероператора Лиувилля $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}^\sharp$) содержат информацию о скоростях релаксации, процессах диссипации и декогеренции и, следовательно, определяют ключевые физические свойства системы [22].

Если l_i – собственные значения $\mathcal{L}^\sharp$, то соответствующие собственные значения отображения $\Lambda_t^\sharp = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}^\sharp}$ равны $\lambda_i = \mathrm{e}^{l_i t}$ и лежат внутри единичного круга комплексной плоскости, $|\lambda_i| \leqslant 1$, так как $\mathrm{Re}\, l_i < 0$. Это квантовый аналог теоремы Фробениуса-Перрона. Собственные значения $l_i = 0$ соответствуют собственным состояниям, принадлежащим инвариантной подалгебре g_0, $\Lambda_t^\sharp(g_0) = g_0$.

Покажем теперь, как можно по заданному преобразованию контракции (13) построить уравнение Линдблада (5) для матрицы плотности или (7) для наблюдаемых.

Пусть $\varepsilon = \mathrm{e}^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$. Тогда $\Lambda_t = T_\varepsilon$. Собственные значения $\mathcal{L}^\sharp$ равны нулю для генераторов λ_i из подалгебры g_0 и равны – γ для генераторов $\lambda_i \in g_1$. Тогда в базисе наблюдаемых λ_i, которые в этом случае будут собственными векторами для $\mathcal{L}^\sharp$, уравнения Линдблада (7) для наблюдаемых выглядят очень просто

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= 0, && \lambda_i \in g_0, \\ \dot{\lambda}_i &= -\gamma\lambda_i, && \lambda_i \in g_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Нам осталось только найти гамильтониан H и операторы Линдблада V_k, чтобы представить уравнения (19) в виде (7). Далее мы приведем несколько частных примеров решения этой задачи.

Пример 1 [10]. Рассмотрим алгебру $su(3)$ и ее контракцию Иненю-Вигнера, в которой в качестве g_0 выберем 4-мерную подалгебру $g_0 = u(1) + su(2)$ с базисом из $\lambda_3, \lambda_8, \lambda_6, \lambda_7$, а генераторами из g_1 являются матрицы Гелл-Манна $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5$. Преобразование контракции T_ε

$$T_\varepsilon g = g_0 + \varepsilon g_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23}^* & a_{33} \end{pmatrix} + \\ + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12}^* & 0 & 0 \\ a_{13}^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Это частный случай контракций Кэли-Клейна (пример 1 из [18]) и случая поперечной релаксации.

Приведем частное решение, когда гамильтониан и операторы Линдблада принадлежат подалгебре Картана $su(3)$ – диагональным бесследовым матрицам или линейной комбинации λ_3 и λ_8. В этом случае гамильтониан можно положить равным нулю, а V взять в виде

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Уравнение Линдблада для матрицы плотности

$$\dot{\rho} = \gamma \left(V\rho V^+ - \frac{1}{2}\{V^+V, \rho\} \right) = \\ = -\gamma \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 0 & 0 \\ \rho_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

и его решение

$$\rho(t) = \Lambda_t\rho(0) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}\rho(0) = \\ = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{12}(0) & \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{13}(0) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) & \rho_{23}(0) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{31}(0) & \rho_{32}(0) & \rho_{33}(0) \end{pmatrix} \tag{23}$$

как раз соответствуют преобразованию T_ε (20). В асимптотике на больших временах матрица плотности сожмется до области $g_0 = u(1) + su(2)$, которая будет устойчивой к воздействию окружения.

Несложно убедиться, что уравнения (19) для наблюдаемых могут быть записаны в виде уравнений Линдблада

$$\dot{A} = \mathcal{L}^\sharp\rho = \gamma \left(V^+AV - \frac{1}{2}\left\{V^+V, A\right\} \right). \tag{24}$$

Такая динамика сохраняет частичную когерентность (возможность суперпозиции между вторым и третьим уровнями). Интерес представляет более общий выбор гамильтониана и операторов Линдблада из g_0.

Пример 2 [11]. Рассмотрим алгебру $su(3)$ и выберем в качестве g_0 подалгебру Картана $\alpha\lambda_3 + \beta\lambda_8 \in g_0$. Это частный случай контракций Кэли-Клейна и частный вариант полной декогеренции (поперечной релаксации), когда скорости релаксаций γ_i равны. В g_1 теперь входят все генераторы, отвечающие за квантовые особенности системы и недиагональные элементы матрицы плотности – $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7) \in g_1$. Преобразование контракции T_ε в этом случае равно

$$T_\varepsilon g = g_0 + \varepsilon g_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \\ + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12}^* & 0 & a_{23} \\ a_{13}^* & a_{23}^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Гамильтониан и операторы Линдблада принадлежат подалгебре Картана $su(3)$. Возьмем $H = 0$, так как он не влияет существенным образом на динамику, а в качестве операторов Линдблада выберем

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad V_2 = V_1^*, \quad \alpha = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Уравнение Линдблада для матрицы плотности

$$\dot{\rho} = -\gamma \sum_{k=1}^{2} \left(V_k\rho V_k^+ - \frac{1}{2}\{V_k^+V_k, \rho\} \right) = \\ = -\gamma \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 0 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

приводит к решению

$$\rho(t) = \Lambda_t\rho(0) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}\rho(0) = \\ = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{12}(0) & \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{13}(0) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) & \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{23}(0) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{31}(0) & \mathrm{e}^{-\gamma t}\rho_{32}(0) & \rho_{33}(0) \end{pmatrix},$$

которое на больших временах стремится к

$$\lim_{t\to\infty} \rho = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(0) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}(0) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

что описывает полную декогеренцию системы.

Уравнение Линдблада (7)

$$\dot{A} = \mathcal{L}^\sharp A = \gamma \sum_{k=1}^{2} \left(V_k^+AV_k - \frac{1}{2}\left\{V_k^+V_k, A\right\} \right) \tag{28}$$

для наблюдаемых λ_i также примет вид (19).

Итак, по заданной однопараметрической контракции Иненю-Вигнера в определенном базисе по преобразованию (13) можно сразу написать уравнения (19), а затем искать их представление в виде уравнений Линдблада (7). Важную роль в сохранении когерентных свойств при этом может играть определенный выбор гамильтониана. Уравнения Линдблада можно находить для обобщенных контракций Иненю-Вигнера (в этом случае скорости релаксаций будут иметь вид $\gamma_k = k\gamma$, а параметры контракций $\varepsilon_k = \varepsilon^k = \mathrm{e}^{-k\gamma t}$), многопараметрических контракций (они будут связаны с разными скростями релаксации $\gamma_k, \varepsilon_k = \mathrm{e}^{-\gamma_k t}$), градуированных контракций и т.д.

Авторы выражают благодарность А.А. Карабанову за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 200 с.
2. *Bohm A.* Quantum mechanics: foundations and applications. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
3. *Nielsen M.A., Chuang I.L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
4. *Preskill J.* Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
5. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.
6. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
7. *Saletan E.J.* Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 1–21.
8. *Громов Н.А.* Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.
9. *Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al.* The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. Physica Scripta. 2016. Vol. 91, No. 4. P. 045201.
10. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems / *S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani* // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.
11. The Observables of a Dissipative Quantum System / *D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio* // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19, No. 01. P. 1250001.
12. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Диссипация кубита и контракции алгебр Ли // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. № 4(40). С. 7–14.
13. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Когерентность в открытой квантовой системе // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2020. № 4(44). С. 30–33.
14. *Костяков И.В., Куратов В.В.* Квантовые вычисления и контракции алгебр Ли // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика, механика, информатика. 2018. Вып. 2(27). С. 32–39.
15. *Костяков И.В., Куратов В.В., Громов Н.А.* Эволюция кутрита и контракция алгебры Ли $su(3)$ // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2021. № 6(52). С. 42–48.
16. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Когерентная эволюция кутрита // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(40). С. 20–38.
17. *Gromov N.A.* Particles in the early Universe. World Scientific: Singapore, 2020. 160 p.
18. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Диагональные контракции унитарных алгебр малой размерности // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2020. № 4(44). С. 23–29.
19. *Kuvshinov V.I., Bagashov E.G.* Confinement of color states in a stochastic vacuum of quantum chromodynamics // Theor. Math. Phys. 2015. Vol. 184. P. 1304–1310.
20. *Кувшинов В.И., Багашов Е.Г.* Декогеренция квантовых состояний в вакууме КХД // ФЭЧАЯ. 2017. Т. 48. № 5. С.736–739.
21. *Karabanov A.A.* Symmetry reductions of Lindblad equations – simple examples and applications // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2021. No. 6(52). P. 49–52.
22. On the universal constraints for relaxation rates for quantum dynamical semigroup / *D. Chruściński, G. Kimura, A. Kossakowski, Y. Shishido* // arXiv:2011.10159 [quant-ph].

References

1. *Faddeev L.D., Yakubovsky O.A.* Lektsii po kvantovoj mekhanike dlya studentov-matematikov [Lectures on quantum mechanics for mathematics students]. Leningrad: Leningrad Univ. Publ., 1980. 200 p.
2. *Bohm A.* Quantum mechanics: foundations and applications. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
3. *Nielsen M.A., Chuang I.L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
4. *Preskill J.* Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
5. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.
6. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
7. *Saletan E.J.* Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 1–21.
8. *Gromov N.A.* Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups]. Moscow: FIZMATLIT, 2012. 318 p.
9. *Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al.* The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. Physica Scripta. 2016. Vol. 91, No. 4. P. 045201.
10. Dynamically algebra of observables in dis-

sipative quantum systems / *S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani* // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.

11. The Observables of a Dissipative Quantum System / *D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio* // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19, No. 01. P. 1250001.
12. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Dissipaciya qubita i kontraktsii algebr Lie [Qubit dissipation and contractions of Lie algebras] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2019. No. 4(40). P. 7–14.
13. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Kogerentnost v otkrytoy kvantovoy sisteme [Coherence in an open quantum system] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2020. No. 4(44). P. 30–33.
14. *Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Kvantovye vychislenija i kontrakcii algebr Li [Quantum computation and contraction of Lie algebras] // Bull. of Syktyvkar Univ. Series 1: Mathematics, mechanics, computer science. 2018. Issue 2(27). P. 32–39.
15. *Kostyakov I.V., Kuratov V.V., Gromov N.A.* Evoluciya kutrita i kontrakciya algebr Li su(3) [Qutrit evolution and contraction of Lie algebra $su(3)$] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2021. No. 6(52). P. 42–48.
16. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Kogerentnaya evoluciya kutrita [Qutrit coherent evolution] // Bull. of Syktyvkar Univ. Series 1: Mathematics, mechanics, computer science. 2021. Issue 3(40). P. 20–38.
17. *Gromov N.A.* Particles in the early Universe. World Scientific: Singapore, 2020. 160 p.
18. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Diagonal'nye kontrakcii unitarnyh algebr maloj razmernosti [Diagonal contractions of small-dimensional unitary algebras] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2020. No. 4(44). P. 23–29.
19. *Kuvshinov V.I., Bagashov E.G.* Confinement of color states in a stochastic vacuum of quantum chromodynamics // Theor. Math. Phys. 2015. Vol. 184. P. 1304–1310.
20. *Kuvshinov V.I., Bagashov E.G.* Dekogerenciya kvantovyh sostoyanij v vakuume KHD [Decoherence of quantum states in QCD vacuum] // PEPAN. 2017. Vol. 48. No. 5. P.736–739.
21. *Karabanov A.A.* Symmetry reductions of Lindblad equations – simple examples and applications // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2021. No. 6(52). P. 49–52.
22. On the universal constraints for relaxation rates for quantum dynamical semigroup / *D. Chruściński, G. Kimura, A. Kossakowski, Y. Shishido* // arXiv:2011.10159 [quant-ph].

Статья поступила в редакцию 27.10.2021.