УДК 530.145, 512.81
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-42-48

И.В. КОСТЯКОВ, В.В. КУРАТОВ, Н.А. ГРОМОВ

ЭВОЛЮЦИЯ КУТРИТА И КОНТРАКЦИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $SU(3)$

*Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар*

*kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru
gromov@ipm.komisc.ru*

I.V. KOSTYAKOV, V.V. KURATOV, N.A. GROMOV

QUTRIT EVOLUTION AND CONTRACTION OF LIE ALGEBRA $SU(3)$

*Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktyvkar*

Аннотация

Рассмотрена трехуровневая квантовая система с симметрией алгебры Ли $su(3)$ (кутрит). Получена эволюция кутрита при взаимодействии с окружающей средой. Изучена поперечная релаксация кутрита (за счет диагональных операторов Линдблада), приводящая к обнулению (с одинаковой скоростью для вещественной и мнимой частей) недиагональных элементов матрицы плотности. Получена динамика кутрита при наличии как поперечной, так и продольной релаксации, т.е. когда операторы Линдблада недиагональны и в системе имеются переходы между всеми уровнями энергии. Показано, что добавление продольной релаксации кутрита, помимо обращения в ноль недиагональных элементов, затрагивает также и диагональные элементы его матрицы плотности. В результате диссипации квантовая система с течением времени становится некогерентной. В обоих случаях первоначально некоммутирующие квантовые наблюдаемые в процессе эволюции приобретают свойства коммутирующих классических наблюдаемых, что алгебраически проявляется в контракции алгебры $su(3)$.

Ключевые слова:
диссипативные квантовые системы, алгебра наблюдаемых, кутрит, контракции алгебр Ли

Abstract

The evolution of a three-level quantum system interacting with the environment with the symmetry of the Lie algebra $su(3)$ (qutrit) is considered. The evolution of qutrit is obtained when interacting with the environment. The transverse relaxation of the qutrit (due to the diagonal Lindblad operators) has been studied, leading to zero (with the same speed for the real and imaginary parts) off-diagonal elements of the density matrix. The dynamics of qutrit is obtained in the presence of both transverse and longitudinal relaxation, i.e. when the Lindblad operators are off-diagonal and there are transitions in the system between all energy levels. It is shown that the addition of the longitudinal relaxation of the qutrit in addition to the conversion of the off-diagonal elements to zero, also affects the diagonal elements of its density matrix. As a result of dissipation, the quantum system becomes incoherent over time. In both cases, initially non-commuting quantum observables in the process of evolution acquire the properties of commuting classical observables, which algebraically manifests itself in the contraction of the algebra $su(3)$.

Keywords:
dissipative quantum systems, algebra of observables, qutrit, contractions of Lie algebras

Введение

Под описанием физической системы понимается построение ее математического образа, выраженного через наблюдаемые системы. В классической физике наблюдаемые системы – это вещественные бесконечно дифференцируемые функции координат и импульсов, образующие коммутативную алгебру вещественных гладких функций на фазовом пространстве [1]. В квантовой физике наблюдаемой сопоставляется линейный оператор, а сама система описывается, вообще говоря, некоммутативной алгеброй операторов в линейном пространстве [1, 2].

Для связи линейных операторов с экспериментальными данными, которые являются вещественными числами, служит матрица плотности ρ, $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$, описывающая состояние квантовомеханической системы. Среднее значение наблюдаемой A физической системы, находящейся в состоянии ρ, дается выражением $< A >= \mathrm{Tr}\,(A\rho)$.

Динамика замкнутой квантовой системы определяется унитарным оператором эволюции, поэтому ее алгебра наблюдаемых не изменяется в процессе эволюции системы. Другая картина имеет место для открытых квантовых систем, взаимодействующих с окружающей средой. Эволюция таких систем уже не описывается в терминах унитарной гамильтоновой динамики и, следовательно, алгебра наблюдаемых может изменяться в ходе ее эволюции. Изменение во времени матрицы плотности в общем случае описывается преобразованием Крауса

$$\rho(t) = \Lambda(t)\rho(0) = \sum_k B_k(t)\rho(0)B_k^+(t),$$
$$\sum_k B_k^+(t)B_k(t) = 1. \tag{1}$$

При малом времени взаимодействия с окружением можно пренебречь эффектами памяти (марковское приближение) и тогда эволюцию системы можно описать уравнением Линдблада [3–5]

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \rho\right] +$$
$$+\sum_k \gamma_k \left(V_k\rho V_k^+ - \frac{1}{2}\left\{V_k^+V_k, \rho\right\}\right). \tag{2}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения отвечает унитарной части динамики системы, генерируемой гамильтонианом $\hat{H}$, который в общем случае включает гамильтониан системы, а также содержит дополнительные слагаемые, относящиеся к взаимодействию с окружением. Второе слагаемое описывает диссипативную часть динамики. Операторы V_k обычно называют операторами Линдблада, а неотрицательные γ_k играют роль скоростей релаксации для различных видов затухания открытой квантовой системы.

Диссипативные процессы в открытых квантовых системах могут приводить к обнулению некоторых коммутаторов алгебры наблюдаемых, что интерпретируется как частичная потеря системой квантовых свойств, т.е. частичному переходу от квантового поведения к классическому. Появляющиеся при этом коммутирующие наборы наблюдаемых интерпретируются как классические переменные, возникающие в результате диссипации.

В картине Гейзенберга для наблюдаемых A уравнение Линдблада имеет вид

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, A\right] +$$
$$+\sum_k \gamma_k \left(V_k^+AV_k - \frac{1}{2}\left\{V_k^+V_k, A\right\}\right) = \mathcal{L}^\sharp(A). \tag{3}$$

Эволюция алгебры динамических переменных $A(t)$ тогда имеет вид

$$A(t) = \Lambda_t^\sharp(A) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}^\sharp t}A(0), \tag{4}$$

а изменение во времени коммутационных соотношений дается формулой

$$[A_i, A_j]_t \equiv \left(\Lambda_t^\sharp\right)^{-1}\left[\Lambda_t^\sharp(A_i), \Lambda_t^\sharp(A_i)\right] \equiv C_{ij}^k(t)A_k, \tag{5}$$

которая представляет собой типичное преобразование коммутационных соотношений между генераторами при контракции групп (алгебр) Ли [6–8]. Таким образом, имеется естественная связь между диссипативными процессами в открытых квантовых системах и контракциями групп (алгебр) Ли, которая анализируется в трудах [9–11]. В работах [12,13] подробно изучена связь квантовых каналов кубита с контракциями алгебры $su(2)$.

В данной статье мы продолжаем изучать Ли-алгебраический подход к исследованию открытых квантовых систем теперь на примере кутрита – трехуровневой системы с алгеброй симметрии $su(3)$. Трехуровневые системы появляются во многих областях. Например, частица спина 1 в магнитном поле, нейтринные осцилляции, три выделенных уровня в атоме, лазерной спектроскопии, квантовой электронике, КХД, в квантовых моделях фотосинтеза [14–17].

1. Поперечная релаксация кутрита

Матрица плотности ρ кутрита может быть представлена в виде линейной комбинации генераторов алгебры Ли $u(3)$

$$\rho = \frac{1}{3}\mathrm{I} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\lambda} =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} + a_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}a_8 & a_1 - ia_2 & a_4 - ia_5 \\ a_1 + ia_2 & \frac{2}{3} - a_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}a_8 & a_6 - ia_7 \\ a_4 + ia_5 & a_6 + ia_7 & \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}a_8 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_8)$ – вектор Блоха, $\vec{\lambda} = (\lambda_1 \ldots, \lambda_8)$ – матрицы Гелл-Манна вида

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В качестве базисных состояний кутрита мы используем обозначения

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Неунитарная эволюция кутрита, приводящая к его декогерентности [9–12], описывается преобразованием Крауса (1) с набором диагональных матриц вида

$$B_1 = \sqrt{p_1}\,\mathrm{I}, \quad B_2 = \sqrt{p_2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \sqrt{p_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \sqrt{p_4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$p_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_2\right),$$

$$p_3 = \frac{1}{4}\left(1 - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\right),$$

$$p_4 = \frac{1}{4}\left(1 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_2\right). \quad (10)$$

Оно приводит к матрице плотности кутрита

$$\rho' = \sum_k E_k \rho E_k^+ =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} + a_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}a_8 & \varepsilon_1\varepsilon_3(a_1 - ia_2) & \varepsilon_1\varepsilon_2(a_4 - ia_5) \\ \varepsilon_1\varepsilon_3(a_1 + ia_2) & \frac{2}{3} - a_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}a_8 & \varepsilon_2\varepsilon_3(a_6 - ia_7) \\ \varepsilon_1\varepsilon_2(a_4 + ia_5) & \varepsilon_2\varepsilon_3(a_6 + ia_7) & \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}a_8 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Эта же матрица плотности получается преобразованием генераторов

$$\lambda_i \to T_{ij}\lambda_j, \quad (12)$$

где T_{ij} – диагональная матрица с элементами $T_{11} = T_{22} = \varepsilon_1\varepsilon_3$, $T_{44} = T_{55} = \varepsilon_1\varepsilon_2$, $T_{66} = T_{77} = \varepsilon_2\varepsilon_3$, $T_{33} = T_{88} = 1$, которое имеет вид контракции Вигнера-Иненю [6, 8, 18]. При переходе к новому базису структурные константы в алгебре Ли преобразуются по правилу

$$C_{ij}^k(t) = T_{kl}^{-1} T_{im} T_{jn} C_{mn}^l. \quad (13)$$

В общем случае эволюция кутрита описывается уравнением (2), в котором сумма по k берется от единицы до восьми. В частных случаях диссипации кутрита можно обойтись меньшим числом слагаемых. Например, в случае декогеренции кутрита, приводящей к обнулению (с одинаковой скоростью для вещественной и мнимой частей) недиагональных элементов матрицы плотности, ее можно получить как решение уравнения (2) с операторами Линдблада

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

и гамильтонианом

$$\hat{H} = diag(E_1, E_2, E_3), \quad (15)$$

где E_i обозначает энергию i-го уровня. Действительно, диагональные элементы матрицы плотности стационарны $\dot{\rho}_{ii} = 0,\ i = 1, 2, 3$, а недиагональные элементы подчиняются простым уравнениям

$$\dot{\rho}_{12} = -\alpha_{12}\rho_{12}, \quad \dot{\rho}_{13} = -\alpha_{13}\rho_{13},$$

$$\dot{\rho}_{23} = -\alpha_{23}\rho_{23} \quad (16)$$

с параметрами

$$\alpha_{12} = 2(\gamma_1 + \gamma_2) + i\omega_{12},\ \alpha_{13} = 2(\gamma_1 + \gamma_3) + i\omega_{13},$$

$$\alpha_{23} = 2(\gamma_2 + \gamma_3) + i\omega_{23}, \quad (17)$$

где действительная часть α_{ij} есть скорость затухания интерференции между уровнями i и j, которая описывается элементом ρ_{ij} матрицы плотности кутрита, а мнимая часть есть разность энергий $\omega_{ij} = (E_j - E_i)/\hbar$. Решения уравнений имеют вид

$$\rho_{12}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{12}t}\rho_{12}(0), \quad \rho_{13}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{13}t}\rho_{13}(0),$$

$$\rho_{23}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{23}t}\rho_{23}(0). \quad (18)$$

Обозначая $\varepsilon_1\varepsilon_3 = \mathrm{e}^{-\alpha_{12}t}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \mathrm{e}^{-\alpha_{13}t}$, $\varepsilon_2\varepsilon_3 = \mathrm{e}^{-\alpha_{23}t}$, получаем для матрицы плотности $\rho(t)$ выражение (11).

Что касается эволюции наблюдаемых $\lambda_i(t)$ (одинаковой для их вещественных и мнимых частей), то из уравнения (3) имеем

$$\dot{\lambda}_{3,8} = 0, \quad \dot{\lambda}_{1,2} = -\alpha_{12}\lambda_{1,2}, \quad \dot{\lambda}_{4,5} = -\alpha_{13}\lambda_{4,5},$$

$$\dot{\lambda}_{6,7} = -\alpha_{23}\lambda_{6,7}. \quad (19)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\lambda_{3,8}(t) = \lambda_{3,8}, \quad \lambda_{1,2}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{12}t}\lambda_{1,2},$$

$$\lambda_{4,5}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{13}t}\lambda_{4,5}, \quad \lambda_{6,7}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{23}t}\lambda_{6,7} \quad (20)$$

и могут быть представлены в виде (12) как преобразования контракций. Преобразованные генераторы образуют алгебру $su(3, \varepsilon)$ с коммутационными соотношениями

$$[\lambda_1, \lambda_2]_t = 2i\varepsilon_1^2\varepsilon_3^2\lambda_3, \quad [\lambda_1, \lambda_3]_t = -2i\lambda_2,$$

$$[\lambda_1, \lambda_4]_t = i\varepsilon_1^2\lambda_7, \quad [\lambda_1, \lambda_5]_t = -i\varepsilon_1^2\lambda_6,$$

$$[\lambda_1, \lambda_6]_t = i\varepsilon_3^2\lambda_5, \quad [\lambda_1, \lambda_7]_t = -i\varepsilon_3^2\lambda_4,$$

$$
\begin{gathered}
[\lambda_1, \lambda_8]_t = 0, \quad [\lambda_2, \lambda_3]_t = 2i\lambda_1, \\
[\lambda_2, \lambda_4]_t = i\varepsilon_1^2\varepsilon_3^2\lambda_6, \quad [\lambda_2, \lambda_5]_t = i\varepsilon_1^2\varepsilon_3^2\lambda_7, \\
[\lambda_2, \lambda_6]_t = -i\varepsilon_3^2\lambda_4, \quad [\lambda_2, \lambda_7]_t = -i\varepsilon_3^2\lambda_5, \\
[\lambda_2, \lambda_8]_t = 0, \quad [\lambda_3, \lambda_4]_t = i\lambda_5, \\
[\lambda_3, \lambda_5]_t = -i\lambda_4, \quad [\lambda_3, \lambda_6]_t = -i\lambda_7, \\
[\lambda_3, \lambda_7]_t = i\lambda_6, \quad [\lambda_3, \lambda_8]_t = 0, \\
[\lambda_7, \lambda_8]_t = i\sqrt{3}\lambda_6, \quad [\lambda_4, \lambda_6]_t = -i\varepsilon_2^2\lambda_2, \\
[\lambda_4, \lambda_7]_t = i\varepsilon_2^2\lambda_1, \quad [\lambda_4, \lambda_8]_t = -i\sqrt{3}\lambda_5, \\
[\lambda_5, \lambda_6]_t = -i\varepsilon_2^2\lambda_1, \quad [\lambda_5, \lambda_7]_t = i\varepsilon_2^2\lambda_2, \\
[\lambda_5, \lambda_8]_t = i\sqrt{3}\lambda_4, \quad [\lambda_6, \lambda_8]_t = -i\sqrt{3}\lambda_7, \\
[\lambda_4, \lambda_5]_t = i\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\left(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8\right), \\
[\lambda_6, \lambda_7]_t = i\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\left(\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3\right). \qquad (21)
\end{gathered}
$$

При $\varepsilon_3 = 1$ получаем контракции Кэли-Клейна [8]. Контракции алгебры Ли $su(3,\varepsilon)$ при предельных переходах $t \to \infty$ ($\varepsilon_i \to 0$) подробно разобраны в работе [18]. Таким образом, мы показали, что эволюция кутрита при наличии поперечной релаксации приводит к диагональной контракции ее алгебры симметрии $su(3)$.

2. Поперечная и продольная релаксации кутрита

К рассмотренной поперечной релаксации кутрита можно добавить продольную с переходами между всеми уровнями. При наличии продольной релаксации динамика кутрита затронет также и диагональные элементы его матрицы плотности. Обозначим γ_{ij} вероятность перехода с j -го уровня на i -й (рис. 1). Тогда в уравнении Линдблада к операторам (14) добавятся операторы $V_{ij} = |i\rangle\langle j|$ $(i \neq j)$

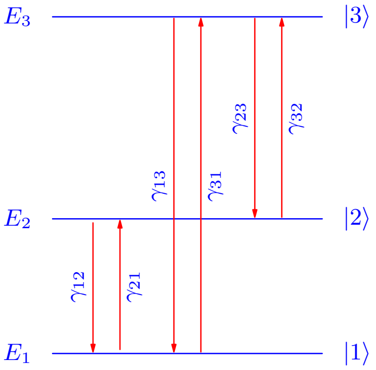

Рис. 1. Схема переходов между уровнями кутрита.
Fig. 1. The scheme of transitions between the qutrit levels.

$$
V_{12} = |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
V_{21} = |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
V_{13} = |1\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
V_{31} = |3\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
V_{23} = |2\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
V_{32} = |3\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (22)
$$

и уравнение (2) в этом случае будет иметь вид [19]

$$
\begin{gathered}
\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \rho\right] + \\
+ \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \left(V_k \rho V_k^+ - \frac{1}{2}\left\{V_k^+ V_k, \rho\right\}\right) + \\
+ \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} \left(V_{ij} \rho V_{ij}^+ - \frac{1}{2}\left\{V_{ij}^+ V_{ij}, \rho\right\}\right). \qquad (23)
\end{gathered}
$$

Выпишем эти уравнения отдельно для диагональных и недиагональных элементов матрицы плотности

$$
\dot{\rho}_{mm} = \sum_n \gamma_{mn}\rho_{nn} - \Gamma_m \rho_{mm}, \qquad (24)
$$

$$
\dot{\rho}_{mn} = -\alpha_{mn}\rho_{mn}, \; m \neq n, \; \alpha_{mn} = \alpha_{nm}, \qquad (25)
$$

где $\Gamma_n = \sum_m \gamma_{mn}$ – общая ширина уровня n, $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_i + \Gamma_j\right) + 2\left(\gamma_i + \gamma_j\right) + i\omega_{ij}$, $\operatorname{Re}\alpha_{ij}$ – скорость релаксации недиагональных элементов матрицы плотности ρ_{ij}. Мнимая часть α_{ij} для нас не существенна и мы будем ее опускать (или подразумевать, что работаем в представлении взаимодействия). Эволюция недиагональных элементов ρ_{mn}, как это видно из (25), независима друг от друга. В матричной форме уравнения (24), (25)

$$
\dot{\rho}(t) = \begin{pmatrix}
\gamma_{12}\rho_{22} + \gamma_{13}\rho_{33} - \Gamma_1\rho_{11} & -\alpha_{12}\rho_{12} & -\alpha_{13}\rho_{13} \\
-\alpha_{12}\rho_{21} & \gamma_{21}\rho_{11} + \gamma_{23}\rho_{33} - \Gamma_2\rho_{22} & -\alpha_{23}\rho_{23} \\
-\alpha_{13}\rho_{31} & -\alpha_{23}\rho_{32} & \gamma_{31}\rho_{11} + \gamma_{23}\rho_{22} - \Gamma_3\rho_{33}
\end{pmatrix}. \qquad (26)
$$

Недиагональные элементы удовлетворяют уравнениям

$$
\dot{\rho}_{ij} = -\alpha_{ij}\rho_{ij}, \quad i < j, \; \alpha_{ji} = \alpha_{ij}, \qquad (27)
$$

с решениями

$$
\rho_{ij}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{ij}t}\rho_{ij}(0). \qquad (28)
$$

Решения уравнений (24) для диагональных элементов имеют вид

$$
\rho_{11}(t) = C_0 + C_1\mathrm{e}^{-\alpha_- t} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha_+ t},
$$

$$\rho_{22}(t) = C_3 + C_4 \mathrm{e}^{-\alpha_- t} + C_5 \mathrm{e}^{-\alpha_+ t},$$
$$\rho_{33}(t) = C_6 + C_7 \mathrm{e}^{-\alpha_- t} + C_8 \mathrm{e}^{-\alpha_+ t}, \quad (29)$$

где

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4D}, \quad B = \sum_{i=1}^{3}\Gamma_i = \sum_{i\neq j}\gamma_{ij},$$
$$D = \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{21}\gamma_{23} + \gamma_{12}\gamma_{31} +$$
$$+\gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{23}\gamma_{31} + \gamma_{12}\gamma_{13} + \gamma_{12}\gamma_{23} + \gamma_{13}\gamma_{32},$$
$$C_3 = (\gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{23}\Gamma_1)\, D_0,$$
$$C_0 = (\gamma_{23}\gamma_{12} + \gamma_{13}\Gamma_2)\, D_0,$$
$$C_6 = (\Gamma_1\Gamma_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})\, D_0,$$
$$C_4 = (\gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{23}(\Gamma_1 - \alpha_-))\, D_1,$$
$$C_1 = (\gamma_{23}\gamma_{12} + \gamma_{13}(\Gamma_2 - \alpha_-))\, D_1,$$
$$C_7 = ((\alpha_- - \Gamma_1)(\alpha_- - \Gamma_2) - \gamma_{12}\gamma_{21})\, D_1,$$
$$C_5 = (\gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{23}(\Gamma_1 - \alpha_+))\, D_2,$$
$$C_2 = (\gamma_{23}\gamma_{12} + \gamma_{13}(\Gamma_2 - \alpha_+))\, D_2,$$
$$C_8 = ((\alpha_+ - \Gamma_1)(\alpha_+ - \Gamma_2) - \gamma_{12}\gamma_{21})\, D_2. \quad (30)$$

Здесь D_i – константы, зависящие от начальных условий.

Таким образом, эволюция матрицы плотности кутрита при наличии как поперечной, так и продольной релаксации описывается матрицей плотности

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} C_0 + C_1\mathrm{e}^{-\alpha_- t} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha_+ t} & \mathrm{e}^{-\alpha_{12}t}\rho_{12}(0) & \mathrm{e}^{-\alpha_{13}t}\rho_{13}(0) \\ \mathrm{e}^{-\alpha_{12}t}\rho_{21}(0) & C_3 + C_4\mathrm{e}^{-\alpha_- t} + C_5\mathrm{e}^{-\alpha_+ t} & \mathrm{e}^{-\alpha_{23}t}\rho_{23}(0) \\ \mathrm{e}^{-\alpha_{13}t}\rho_{31}(0) & \mathrm{e}^{-\alpha_{23}t}\rho_{32}(0) & C_6 + C_7\mathrm{e}^{-\alpha_- t} + C_8\mathrm{e}^{-\alpha_+ t} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

При $t \to \infty$ происходит релаксация диагональных элементов матрицы плотности со скоростями $\alpha_\pm$ и декогеренция недиагональных элементов со скоростями α_{ij}. В целом система стремится к полностью декогерентному стационарному состоянию

$$\rho(\infty) = \begin{pmatrix} C_0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_6 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Выше мы рассмотрели эволюцию матрицы плотности в картине Шредингера. В картине Гейзенберга от времени зависят наблюдаемые, и уравнение Линдблада в этом случае примет вид

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, A\right] +$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\left(V_k^+ A V_k - \frac{1}{2}\left\{V_k^+ V_k, A\right\}\right) +$$
$$\sum_{i\neq j}\gamma_{ij}\left(V_{ij}^+ A V_{ij} - \frac{1}{2}\left\{V_{ij}^+ V_{ij}, A\right\}\right) =$$
$$= \mathcal{L}^\sharp(A). \quad (33)$$

Генераторы λ_i $(i = 1, 2, 4, 5, 6, 7)$ алгебры $su(3)$ являются наблюдаемыми для кутрита и собственными векторами оператора $\mathcal{L}^\sharp$. Их динамика описывается уравнениями

$$\dot{\lambda}_{1,2} = -\alpha_{12}\lambda_{1,2}, \quad \dot{\lambda}_{4,5} = -\alpha_{13}\lambda_{4,5},$$
$$\dot{\lambda}_{6,7} = -\alpha_{23}\lambda_{6,7}, \quad (34)$$

с решениями

$$\lambda_{1,2}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{12}t}\lambda_{1,2}(0), \quad \lambda_{4,5}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{13}t}\lambda_{4,5}(0),$$
$$\lambda_{6,7}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_{23}t}\lambda_{6,7}(0). \quad (35)$$

Для генераторов подалгебры Картана удобно перейти к новому базису e_0, $\mathrm{e}_\pm$

$$\mathrm{e}_0 = \mathrm{I}, \quad \mathrm{e}_\pm = a_\pm|1\rangle\langle 1| + b_\pm|2\rangle\langle 2| + c_\pm|3\rangle\langle 3|,$$
$$a_\pm = \frac{1}{\Delta}\left(\gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{31}(\Gamma_2 - \alpha_\pm)\right),$$
$$b_\pm = \frac{1}{\Delta}\left(\gamma_{12}\gamma_{31} + \gamma_{32}(\Gamma_1 - \alpha_\pm)\right),$$
$$c_\pm = \frac{1}{\Delta}\left((\Gamma_1 - \alpha_\pm)(\Gamma_2 - \alpha_\pm) - \gamma_{12}\gamma_{21}\right), \quad (36)$$

(Δ – нормировочный множитель), в котором уравнения Линдблада принимают простой вид

$$\dot{\mathrm{e}}_0 = 0, \qquad \dot{\mathrm{e}}_\pm = -\alpha_\pm \mathrm{e}_\pm, \quad (37)$$

с решениями

$$\mathrm{e}_0(t) = \mathrm{I}, \quad \mathrm{e}_\pm(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_\pm t}\mathrm{e}_\pm(0). \quad (38)$$

Воспользовавшись обратным к (36) преобразованием, которое запишем в виде

$$|1\rangle\langle 1| = f_1\mathrm{e}_0 + g_1\mathrm{e}_+ + h_1\mathrm{e}_-,$$
$$|2\rangle\langle 2| = f_2\mathrm{e}_0 + g_2\mathrm{e}_+ + h_2\mathrm{e}_-,$$
$$|3\rangle\langle 3| = f_3\mathrm{e}_0 + g_3\mathrm{e}_+ + h_3\mathrm{e}_-,$$

получим описание динамики наблюдаемых λ_3 и λ_8

$$\lambda_3(t) = (f_1 - f_2)\mathrm{I} + (g_1 - g_2)\,\mathrm{e}^{-\alpha_+ t}\mathrm{e}_+(0) +$$
$$+ (h_1 - h_2)\,\mathrm{e}^{-\alpha_- t}\mathrm{e}_-(0),$$
$$\lambda_8(t) = (f_1 + f_2 - 2f_3)\mathrm{I} + (g_1 + g_2 - 2g_3)\,\mathrm{e}^{-\alpha_+ t}\mathrm{e}_+(0) +$$
$$+ (h_1 + h_2 - 2h_3)\,\mathrm{e}^{-\alpha_- t}\mathrm{e}_-(0). \quad (39)$$

Таким образом, преобразования контракции наблюдаемых кутрита в новом базисе принимают вид (35), (38), а зависящие от времени коммутационные соотношения этих наблюдаемых даются формулами

$$[\lambda_1, \lambda_4]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_1 t}\lambda_7, \quad [\lambda_5, \lambda_1]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_1 t}\lambda_6,$$
$$[\lambda_1, \lambda_6]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_2 t}\lambda_5, \quad [\lambda_7, \lambda_1]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_2 t}\lambda_4,$$
$$[\lambda_6, \lambda_4]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_3 t}\lambda_2, \quad [\lambda_2, \lambda_4]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_1 t}\lambda_6,$$
$$[\lambda_2, \lambda_5]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_1 t}\lambda_7, \quad [\lambda_6, \lambda_2]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_2 t}\lambda_4,$$

$$[\lambda_7, \lambda_2]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_2 t}\lambda_5, \quad [\lambda_6, \lambda_5]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_3 t}\lambda_1,$$
$$[\lambda_5, \lambda_7]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_3 t}\lambda_2, \quad [\lambda_4, \lambda_7]_t = i\mathrm{e}^{-\Delta_3 t}\lambda_1,$$
$$[\lambda_1, \lambda_2]_t = 2i\left((f_1 - f_2)\,\mathrm{e}^{-2\alpha_{12}t}\mathrm{I} + \right.$$
$$\left. + (g_1 - g_2)\,\mathrm{e}^{-\Delta_4 t}\mathrm{e}_+ + (h_1 - h_2)\,\mathrm{e}^{-\Delta_5 t}\mathrm{e}_-\right),$$
$$[\lambda_4, \lambda_5]_t = 2i\left((f_1 - f_3)\,\mathrm{e}^{-2\alpha_{13}t}\mathrm{I} + \right.$$
$$\left. + (g_1 - g_3)\,\mathrm{e}^{-\Delta_6 t}\mathrm{e}_+ + (h_1 - h_3)\,\mathrm{e}^{-\Delta_7 t}\mathrm{e}_-\right),$$
$$[\lambda_6, \lambda_7]_t = 2i\left((f_2 - f_3)\,\mathrm{e}^{-2\alpha_{12}t}\mathrm{I} + \right.$$
$$\left. + (g_2 - g_3)\,\mathrm{e}^{-\Delta_8 t}\mathrm{e}_+ + (h_2 - h_3)\,\mathrm{e}^{-\Delta_9 t}\mathrm{e}_-\right),$$
$$[\lambda_1, \mathrm{e}_\pm]_t = i\,(b_\pm - a_\pm)\,\mathrm{e}^{-\alpha_\pm t}\lambda_2,$$
$$[\lambda_2, \mathrm{e}_\pm]_t = i\,(a_\pm - b_\pm)\,\mathrm{e}^{-\alpha_\pm t}\lambda_1,$$
$$[\lambda_4, \mathrm{e}_\pm]_t = i\mathrm{e}^{-\alpha_\pm t}\,(c_\pm - a_\pm)\,\lambda_5,$$
$$[\lambda_5, \mathrm{e}_\pm]_t = i\mathrm{e}^{-\alpha_\pm t}\,(a_\pm - c_\pm)\,\lambda_4,$$
$$[\lambda_6, \mathrm{e}_\pm]_t = i\mathrm{e}^{-\alpha_\pm t}\,(c_\pm - b_\pm)\,\lambda_5,$$
$$[\lambda_7, \mathrm{e}_\pm]_t = i\mathrm{e}^{-\alpha_\pm t}\,(b_\pm - c_\pm)\,\lambda_6,$$
$$[\mathrm{e}_+, \mathrm{e}_-]_t = 0, \tag{40}$$

где введены обозначения

$$\Delta_1 = \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{23} = \gamma_{21} + \gamma_{31} + \gamma_1 > 0,$$
$$\Delta_2 = \alpha_{12} + \alpha_{23} - \alpha_{13} = \gamma_{12} + \gamma_{32} + \gamma_2 > 0,$$
$$\Delta_3 = \alpha_{13} + \alpha_{23} - \alpha_{12} = \gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_3 > 0,$$
$$\Delta_4 = 2\alpha_{12} - \alpha_+, \quad \Delta_5 = 2\alpha_{12} - \alpha_-,$$
$$\Delta_6 = 2\alpha_{13} - \alpha_+, \quad \Delta_7 = 2\alpha_{13} - \alpha_-,$$
$$\Delta_8 = 2\alpha_{23} - \alpha_+, \quad \Delta_9 = 2\alpha_{23} - \alpha_-. \tag{41}$$

Параметры $\Delta_i,\ i = 1, 2, 3$ положительны, а $\Delta_k,\ k = 4, \ldots, 9$ могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Именно они определяют предельное поведение кутрита и коммутационные соотношения его алгебры симметрии в пределе $t \to \infty$.

При $\Delta_k > 0,\ k = 4, \ldots, 9$, т.е. $2\alpha_{ij} > \alpha_\pm$ все коммутационные соотношения обращаются в нуль, и алгебра становится абелевой. При $\Delta_{4,6,8} = 0$, т.е. $2\alpha_{ij} = \alpha_+, i \neq j$, добавляются три ненулевых коммутатора

$$[\lambda_1, \lambda_2]_\infty = 2i(g_1 - g_2)\mathrm{e}_+(t),$$
$$[\lambda_4, \lambda_5]_\infty = 2i(g_1 - g_3)\mathrm{e}_+(t),$$
$$[\lambda_6, \lambda_7]_\infty = 2i(g_2 - g_3)\mathrm{e}_+(t). \tag{42}$$

Если какой-то из параметров $\Delta_k,\ k = 4, \ldots, 9$ отрицателен, то появляются сингулярные коммутаторы, что свидетельствует о разрушении кутрита как физической системы.

В обзоре [20] приведен пример, где для двухуровневой системы в оптическом диапазоне скорости поперечной и продольной релаксации относятся, как один к двум, и отмечено, что для подавляющего большинства оптических систем наблюдается существенное превышение скорости дефазировки (поперечной релаксации) над скоростью релаксации энергии (продольной скоростью). В реальных системах это отношение может достигать пяти порядков.

Таким образом, в процессе эволюции трехуровневой квантовой системы с унитарной симметрией $SU(3)$ при наличии взаимодействия с окружающей средой, приводящего к диссипации и декогеренции матрицы плотности, происходит обнуление коммутационных соотношений наблюдаемых кутрита, что математически отвечает контракции алгебры симметрии системы. Физически такое поведение свидетельствует о частичной (или полной) потере кутритом квантовых свойств.

Авторы выражают глубокую благодарность А.А. Карабанову за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 200 с.
2. *Bohm A.* Quantum mechanics: foundations and applications. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
3. *Nielsen M.A., Chuang I.L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
4. *Preskill J.* Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
5. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.
6. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
7. *Saletan E.J.* Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 1–21.
8. *Громов Н.А.* Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.
9. *Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al.* The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. Physica Scripta. 2016. Vol. 91, No. 4. P. 045201.
10. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems / *S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani* // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.
11. The Observables of a Dissipative Quantum System / *D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio* // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19, No. 01. P. 1250001.
12. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Диссипация кубита и контракции алгебр Ли // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. № 4(40). С. 7–14.
13. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Когерентность в открытой квантовой системе // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2020. № 4(44). С. 30–33.

14. *Арефьева И.Я., Волович И.В., Козырев С.В.* Метод стохастического предела и интерференция в квантовых многочастичных системах. ТМФ. 2015. Т. 183, № 3. С. 388–408.
15. *Aref'eva I.Y., Volovich I.V.* Holographic Photosynthesis. arXiv:1603.09107 [hep-th].
16. *Ohya M., Volovich I.* Mathematical Foundations of Quantum Information and Computation and Its Applications to Nano- and Bio-systems. Springer, 2011. 759 p.
17. Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis / *S.V. Kozyrev, A.A. Mironov, A.E. Teretenkov, I.V. Volovich* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2017. Vol. 20, No. 4. P. 1750021.
18. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Диагональные контракции унитарных алгебр малой размерности // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2020. № 4(44). С. 23–29.
19. Релаксация квантовых систем с эквидистантным спектром / *А.А. Белавин, Б.Я. Зельдович, А.М. Переломов, В.С. Попов* // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 1. С. 264–274.
20. Релаксация взаимодействующих открытых квантовых систем / *В.Ю. Шишков, Е.С. Андрианов, А.А. Пухов, А.П. Виноградов, А.А. Лисянский* // УФН. 2019. Т. 189. С. 544–558.

References

1. *Faddeev L.D., Yakubovsky O.A.* Lektsii po kvantovoj mekhanike dlya studentov-matematikov [Lectures on quantum mechanics for mathematics students]. Leningrad: Leningrad Univ. Publ., 1980. 200 p.
2. *Bohm A.* Quantum mechanics: foundations and applications. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
3. *Nielsen M.A., Chuang I.L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
4. *Preskill J.* Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
5. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.
6. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
7. *Saletan E.J.* Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 1–21.
8. *Gromov N.A.* Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups]. Moscow: FIZMATLIT, 2012. 318 p.
9. *Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al.* The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. Physica Scripta. 2016. Vol. 91, No. 4. P. 045201.
10. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems / *S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani* // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.
11. The Observables of a Dissipative Quantum System / *D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio* // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19, No. 01. P. 1250001.
12. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Dissipaciya qubita i kontraktsii algebr Lie [Qubit dissipation and contractions of Lie algebras] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2019. No. 4(40). P. 7–14.
13. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Kogerentnost v otkrytoy kvantovoy sisteme [Coherence in an open quantum system] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2019. No. 4(44). P. 30–33.
14. *Arefyeva I.Ya., Volovich I.V., Kozyrev S.V.* Metod stokhasticheskogo predela i interferentsiya v kvantovykh mnogochastichnykh sistemakh [Stochastic limit method and interference in quantum multiparticle systems] // Theoret. and Math. Phys. 2015. Vol. 183, No. 3. P. 388–408.
15. *Arefyeva I.Ya., Volovich I.V.* Holographic Photosynthesis. arXiv:1603.09107 [hep-th].
16. *Ohya M., Volovich I.* Mathematical Foundations of Quantum Information and Computation and Its Applications to Nano- and Bio-systems. Springer, 2011. 759 p.
17. Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis / *S.V. Kozyrev, A.A. Mironov, A.E. Teretenkov, I.V. Volovich* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2017. Vol. 20, No. 4. P. 1750021.
18. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Diagonal'nye kontrakcii unitarnyh algebr maloj razmernosti [Diagonal contractions of small-dimensional unitary algebras] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2020. No. 4(44). P. 23–29.
19. Relaksatsiya kvantovykh sistem s ekvidistantnym spektrom [Relaxation of quantum systems with equidistant spectrum] / *A.A. Belavin, B.Ya. Zel'dovich, A.M. Perelomov, V.S. Popov* // JETF. 1969. Vol. 56(1). P. 264–274.
20. Relaksatsiya vzaimodeystvuyushchikh otkrytykh kvantovykh sistem [Relaxation of interacting open quantum systems] / *V.Yu. Shishkov, E.S. Andrianov, A.A. Pukhov, A.P. Vinogradov, A.A. Lisyanskiy* // Physics–Uspekhi. 2019. Vol. 189. P. 544–558.

Статья поступила в редакцию 25.06.2021.