

Научный журнал

Основан в 2010 г.
Выходит 6 раз в год

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
Федеральный исследовательский центр
«Коми научный центр УрО РАН»

ИЗВЕСТИЯ

КОМИ НАУЧНОГО ЦЕНТРА
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№6(52)

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

2021

Главный редактор:
академик *А.М. Асхабов*

Зам. главного редактора – чл.-корр. РАН *В.Н. Лажнецов*
Ответственный секретарь – к.х.н. *А.Я. Полле*

Редакционная коллегия серии «Физико-математические науки»:

д.ф.-м.н. *Н.А. Беляева*, д.ф.-м.н. *С.Г. Бобков*, д.ф.-м.н. *В.А. Бушуев*,
д.ф.-м.н. *В.П. Голубятников*, д.т.н. *А.П. Господариков*, д.ф.-м.н. *О.Н. Граничин*,
д.ф.-м.н. *Н.А. Громов* (ответственный редактор), д.ф.-м.н. *А.В. Жубр*,
д.ф.-м.н. *Ю.А. Курочкин*, д.ф.-м.н. *В.В. Мазалов*, д.ф.-м.н. *В.И. Манько*,
д.ф.-м.н. *В.М. Нежинский*, д.ф.-м.н. *А.Б. Певный*, д.ф.-м.н. *С.М. Полешиков*,
д.ф.-м.н. *В.И. Пунегов*, д.ф.-м.н. *В.М. Редьков*, д.ф.-м.н. *В.Н. Сивков*, д.ф.-м.н. *В.Ф. Соколов*,
к.ф.-м.н. *Д.А. Тимушев* (ответственный секретарь), д.ф.-м.н. *А.Н. Тихомиров*,
д.ф.-м.н. *В.В. Ульянов*, д.ф.-м.н. *С.М. Хрящев*, д.ф.-м.н. *П.С. Щербаков*

Редакционный совет:

акад. *В.В. Алексеев*, чл.-корр. РАН *В.Н. Анфилогов*, д.и.н. *Е.Т. Артемов*,
чл.-корр. РАН *А.А. Барях*, д.м.н. *Е.Р. Бойко*, акад. *В.И. Бердышев*,
акад. *В.Н. Большаков*, д.э.н. *Н.М. Большаков*, проф. *Т.М. Бречко*, д.б.н. *М.В. Гецен*,
акад. *А.Д. Гвишиани*, д.б.н. *С.В. Дёгтева*, д.и.н. *А.Е. Загребин*,
д.э.н. *В.А. Ильин*, акад. *В.А. Коротеев*, чл.-корр. РАН *С.В. Кривовичев*,
д.и.н. *Е.Ф. Кринко*, чл.-корр. РАН *А.В. Кучин*, чл.-корр. РАН *Ю.Б. Марин*,
акад. *В.П. Матвеев*, д.и.н. *В.И. Меньковский*, акад. *Г.А. Месяц*,
д.и.н. *П.Ю. Павлов*, к.г.-м.н. *А.М. Плякин*, чл.-корр. РАН *В.Н. Пучков*,
чл.-корр. РАН *И.М. Роцевская*, акад. *М.П. Роцевский*,
д.х.н. *С.А. Рубцова*, д.и.н. *Э.А. Савельева*, чл.-корр. РАН *А.Ф. Титов*,
д.филол.н. *Г.В. Федюнева*, акад. *В.Н. Чарушин*, д.т.н. *Ю.Я. Чукреев*,
д.б.н. *Е.В. Шамрикова*, акад. *В.С. Шацкий*, д.б.н. *Д.Н. Шмаков*, д.т.н. *Н.Д. Цхадая*

Адрес редакции:

167982, Республика Коми, Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24
Коми научный центр УрО РАН, каб. 317
Тел. (8212) 24-47-79, факс (8212) 24-22-64
E-mail: journal@frc.komisc.ru
www.izvestia.komisc.ru

Подписной индекс в каталоге «Почта России» 52047

ISSN 1994-5655

Журнал включен в перечень рецензируемых
научных изданий ВАК

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору за
соблюдением законодательства в сфере массовых ком-
муникаций и охране культурного наследия. Свид. о ре-
гистрации средств массовой информации ПИ № ФС 77-
26969 от 11 января 2007 г.

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр «Коми научный центр УрО РАН», 2021

Science Journal
Founded in 2010
Published 6 times a year

Established by
Federal State Budgetary
Institution of Science
Federal Research Centre
«Komi Science Centre, Ural Branch, RAS»

PROCEEDINGS

OF THE KOMI SCIENCE CENTRE
URAL BRANCH
RUSSIAN ACADEMY OF
SCIENCES

№6(52) «PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES» series 2021

Editor-in-chief:

academician *A.M. Askhabov*

Deputy editor-in-chief – RAS corresp. member *V.N. Lazhentsev*

Executive Secretary – Cand. Sci. (Chemistry) *A.Ya. Polle*

Editorial Board «Physical and Mathematical Sciences»:

Dr. Sci. (Phys.-Math.) *N.A. Belyaeva*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *S.G. Bobkov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.A. Bushuev*,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.P. Golubyatnikov*, Dr. Sci. (Tech.) *A.P. Gospodarikov*,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *O.N. Granichin*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *N.A. Gromov* (executive editor),
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *A.V. Zhubr*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *Yu.A. Kurochkin*,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.V. Mazalov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.I. Man'ko*,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.M. Nezhinskij*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *A.B. Pevnyi*,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *S.M. Poleshchikov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.I. Punegov*,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.M. Red'kov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.N. Sivkov*,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.F. Sokolov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.) *D.A. Timushev* (executive secretary),
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *A.N. Tikhomirov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *V.V. Ulyanov*,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) *S.M. Khryashchev*, Dr. Sci. (Phys.-Math.) *P.S. Shcherbakov*

Editorial Council:

acad. *V.V. Alekseev*, RAS corresp. member *V.N. Anfilogov*, Dr. Sci. (Hist.) *E.T. Artemov*,
RAS corresp. member *A.A. Baryakh*, Dr. Sci. (Med.) *E.R. Bojko*, acad. *V.I. Berdyshev*, acad. *V.N. Bolshakov*,
Dr. Sci. (Econ.) *N.M. Bolshakov*, Prof. *T.M. Brechko*, Dr. Sci. (Biol.) *M.V. Getsen*, acad. *A.D. Gvishiani*,
Dr. Sci. (Biol.) *S.V. Degteva*, Dr. Sci. (Hist.) *A.E. Zagrebin*, Dr. Sci. (Econ.) *V.A. Ilyin*, acad. *V.A. Koroteev*,
RAS corresp. member *S.V. Krivovichev*, Dr. Sci. (Hist.) *E.F. Krinko*, RAS corresp. member *A.V. Kuchin*,
RAS corresp. member *Yu.B. Marin*, acad. *V.P. Matveenko*, Dr. Sci. (Hist.) *V.I. Men'kovsky*, acad. *G.A. Mesyats*,
Dr. Sci. (Hist.) *P.Yu. Pavlov*, Cand. Sci. (Geol.&Mineral.) *A.M. Plyakin*, RAS corresp. member *V.N. Puchkov*,
RAS corresp. member *I.M. Roshchevskaya*, acad. *M.P. Roshchevsky*, Dr. Sci. (Chem.) *S.A. Rubtsova*,
Dr. Sci. (Hist.) *E.A. Savelyeva*, RAS corresp. member *A.F. Titov*, Dr. Sci. (Philol.) *G.V. Fedyuneva*,
acad. *V.N. Charushin*, Dr. Sci. (Tech.) *Yu.Ya. Chukreev*, Dr. Sci. (Biol.) *E.V. Shamrikova*, acad. *V.S. Shatsky*,
Dr. Sci. (Biol.) *D.N. Shmakov*, Dr. Sci. (Tech.) *N.D. Tskhadaya*

Editorial Office:

Office 317, Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS
24, Kommunisticheskaya st., Syktyvkar 167982, Komi Republic
Tel. +7 8212 244779 Fax +7 8212 242264
E-mail: journal@frc.komisc.ru
www.izvestia.komisc.ru

The "Russian Post" catalogue subscription index 52047

ISSN 1994-5655

Registered by the Russian Federal Surveillance Service
for Compliance with the Law in Mass Communications
and Cultural Heritage Protection. The certificate of mass
media registration — ПИ № ФС 77-26969 dated 11 January,
2007.

*The journal is included in the list of peer-reviewed
scientific publications
of the Higher Attestation Commission
of the Russian Federation*

© Federal State Budgetary Institution of Science Federal Research Centre
"Komi Science Centre, Ural Branch, RAS", 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Д.Б. Ефимов

Гафниан некоторых трехпараметрических теплицевых матриц
и совершенные паросочетания дуговых и хордовых диаграмм 5–13

А.О. Маргасов

О нейронных обыкновенных дифференциальных уравнениях
и их вероятностном расширении..... 14–19

С.М. Полещиков

Потенциалы, допускающие интегрирование возмущенной задачи двух тел
в регулярных координатах 20–35

И.В. Костяков, В.В. Куратов, Н.А. Громов

Контракции алгебр Ли и уравнение Линдблада 36–41

И.В. Костяков, В.В. Куратов, Н.А. Громов

Эволюция кутрита и контракция алгебры Ли $su(3)$ 42–48

А.А. Карабанов

Редукции симметрии уравнений Линдблада – простые примеры и приложения 49–52

Е.М. Овсюк, А.Д. Коральков, А.П. Сафронов

Частица со спином $1/2$ и двумя массовыми параметрами
во внешнем кулоновском поле 53–58

А.В. Ивашкевич

Структура плоских волн для частицы со спином $3/2$, безмассовый случай,
калибровочная симметрия..... 59–65

Н.А. Громов

Зависимость сечений электрослабых процессов от температуры Вселенной..... 66–72

В.Н. Тарасов, Н.О. Смолева

Задачи устойчивости круговых арок с неудерживающими связями 73–78

Н.А. Секушин

Решение обратной электротехнической задачи в материаловедении:
обобщенная модель Войта 79–85

C O N T E N T S

D.B. Efimov Hafnian of some three-parameter Toeplitz matrices and perfect matchings of arc and chord diagrams	5–13
A.O. Margasov Neural ordinary differential equations and their probabilistic extension.....	14–19
S.M. Poleshchikov Potentials allowing integration of the perturbed two-body problem in regular coordinates	20–35
I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov, N.A. Gromov Lie algebra contractions and the Lindblad equation	36–41
I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov, N.A. Gromov Qutrit evolution and contraction of Lie algebra $su(3)$	42–48
A.A. Karabanov Symmetry reductions of Lindblad equations – simple examples and applications.....	49–52
E.M. Ovsyuk, A.D. Koral'kov, A.P. Safronov A spin 1/2 Particle and two mass parameters in an external coulomb field.....	53–58
A.V. Ivashkevich The structure of the plane waves for a spin 3/2 particle, massless case, gauge symmetry	59–65
N.A. Gromov Dependence of cross sections of electroweak processes on the temperature of the Universe.....	66–72
V.N. Tarasov, N.O. Smoleva Sustainability problems of circular arcs with non-retaining links	73–78
N.A. Sekushin Solving the inverse electrical problem in materials science: generalized Voight model.....	79–85

УДК 512.64, 519.1
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-5-13

Д.Б. ЕФИМОВ

ГАФНИАН НЕКОТОРЫХ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ И СОВЕРШЕННЫЕ ПАРСОСЧЕТАНИЯ ДУГОВЫХ И ХОРДОВЫХ ДИАГРАММ

*Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар*

dmefim@mail.ru

D.B. EFIMOV

HAFNIAN OF SOME THREE-PARAMETER TOEPLITZ MATRICES AND PERFECT MATCHINGS OF ARC AND CHORD DIAGRAMS

*Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktvykar*

Аннотация

Получена явная формула для точного вычисления гафниана трехпараметрических теплицевых матриц специального вида за полиномиальное время. Дана асимптотическая оценка гафниана указанного типа матриц. Отдельно рассмотрен случай целочисленных неотрицательных параметров, когда вычисление гафниана равносильно перечислению совершенных паросочетаний дуговых и хордовых диаграмм.

Ключевые слова:

гафниан, теплицева матрица, совершенное паросочетание, дуговая диаграмма, хордовая диаграмма, многочлен Бесселя

Abstract

We obtain an explicit formula for exact calculating the hafnian of 3-parameter Toeplitz matrices of a special type in polynomial time. We also give an asymptotic estimate for the hafnian of this type of matrices. Separately, we consider a case of non-negative integer parameters, when calculating the hafnian is equivalent to enumerating perfect matchings of arc and chord diagrams.

Keywords:

hafnian, Toeplitz matrix, perfect matching, arc diagram, chord diagram, Bessel polynomial

Introduction

Let $A = (a_{ij})$ be a symmetric matrix of even order n over a commutative associative ring. The *hafnian* of A is defined as

$$\text{Hf}(A) = \sum_{(i_1 i_2 | \dots | i_{n-1} i_n)} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{n-1} i_n},$$

where the sum runs over all partitions of the set $\{1, 2, \dots, n\}$ into disjoint pairs $(i_1 i_2), \dots, (i_{n-1} i_n)$ up to the order of pairs, and the order of elements in each pair. So, if $n = 4$ then $\text{Hf}(A) = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$. The hafnian of the empty matrix is taken to be 1.

Recall that a matrix is called *Toeplitz* if all its diagonals parallel to the main diagonal consist of the same elements. A symmetric Toeplitz matrix is uniquely determined by its first row. Let a, b, c be real or complex numbers. We denote by $T_m(a, b, c)$ the symmetric Toeplitz matrix of order $2m$ with zero main diagonal whose first row has the form $(0, a, b, b, \dots, b, c)$ or $(0, a)$ if $m = 1$. For example (dots denote zeros),

$$T_3(a, b, c) = \begin{pmatrix} \cdot & a & b & b & b & c \\ a & \cdot & a & b & b & b \\ b & a & \cdot & a & b & b \\ b & b & a & \cdot & a & b \\ b & b & b & a & \cdot & b \\ c & b & b & b & a & \cdot \end{pmatrix}.$$

In the first part of our work, we obtain an explicit formula for exact calculating the hafnian of such matrices. Using this formula, we also give an asymptotic estimate. In the second part, we consider sequences of values $\text{Hf}(T_m(a, b, c))$ with respect to m for non-negative

integers a, b, c . Such sequences can be interpreted in the language of graph theory as follows. It is easy to see that if M is the adjacency matrix of an unordered multigraph with even number of vertices, then $\text{Hf}(M)$ equals the total number of perfect matchings of the multigraph. We denote by $G_m(a, b, c)$ the multigraph with $2m$ vertices whose adjacency matrix is $T_m(a, b, c)$. It is convenient to represent such a multigraph in the form of an arc or chord diagram. An *arc diagram* is a graph presentation method where all the vertices are located along a line in the plane, while all edges are drawn as arcs. The vertices of a *chord diagram* are located on a circle and edges are chords of the circle. However, if a pair of vertices of a chord diagram is joined by several edges, then to distinguish them in a figure, we will draw them not in the form of segments, but also in the form of arcs. By construction, the vertices 1 and $2m$ of the diagram $G_m(a, b, c)$ are joined by c edges, vertices with numbers differing by one are joined by a edges, and all other pairs of vertices are joined by b edges (see Figure 1).

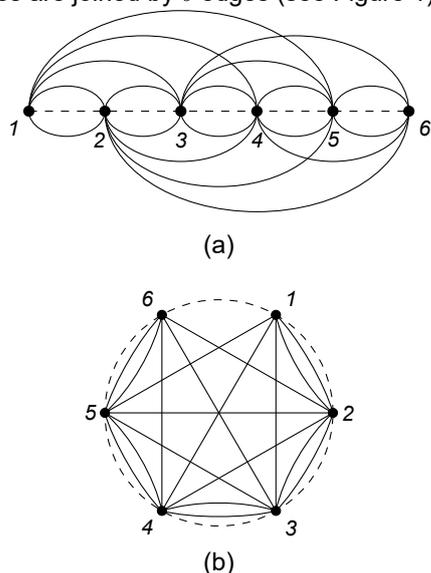


Fig. 1. Arc (a) and chord (b) diagrams $G_3(2, 1, 0)$.
Рис. 1. Дуговая (a) и хордовая (b) диаграммы $G_3(2, 1, 0)$.

Thus, in the second part of our work, we consider sequences of numbers of perfect matchings of the multigraphs $G_m(a, b, c)$ for some values of a, b, c .

Note that in many papers (see, for example, [1, 2]), chord diagrams are understood to be perfect matchings of chord diagrams in our terminology, and perfect matchings of arc diagrams are called *linear chord diagrams*. In the same papers, one can find references to extensive applications of these structures.

1. The hafnian of three-parameter Toeplitz matrices

Let $Q_{k,n}$ denote the set of all unordered k -element subsets of the set $\{1, 2, \dots, n\}$. Let A be a matrix of order n and $\alpha \in Q_{k,n}$. We denote the submatrix of A formed by the rows and columns of A with numbers in α by $A[\alpha]$, and the submatrix of A formed from A by removing the rows and columns with numbers in α by $A\{\alpha\}$. The following property proved in [3]:

Proposition 1. Let A, B be symmetric matrices of even

order n . Then

$$\text{Hf}(A + B) = \sum_{k=0}^{n/2} \sum_{\alpha \in Q_{2k,n}} \text{Hf}(A[\alpha])\text{Hf}(B\{\alpha\}). \quad (1)$$

Consider the matrix $T_m(a, b, c)$, $m \geq 2$. For brevity, we denote it now by A_m :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & \dots & b & c \\ a & \ddots & \ddots & \ddots & & b \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ c & b & \dots & b & a & 0 \end{pmatrix}, \quad m \geq 2.$$

This matrix can be represented as the sum of the following two matrices:

$$B_m = \begin{pmatrix} 0 & a & b & \dots & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & \dots & b & a & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_m = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c-b \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & \vdots \\ c-b & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

It has shown in [4], that if we put $0^0 = 1$ then the hafnian of B_m can be calculated by the following formula:

$$\text{Hf}(B_m) = \sum_{k=0}^m (a-b)^{m-k} b^k \frac{(m+k)!}{k!(m-k)!2^k}. \quad (2)$$

In other words, the value of the hafnian of such a matrix is equal to the value of the polynomial

$$p_m(x, y) = \sum_{k=0}^m \frac{(m+k)!}{k!(m-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^k y^{m-k}$$

in two variables x, y at $x = b$ and $y = a - b$. Note that for $y = 1$ this polynomial coincides with the Bessel polynomial of degree m [5]. Using (1), we find

$$\text{Hf}(A_m) = \sum_{k=0}^m \sum_{\alpha \in Q_{2k,2m}} \text{Hf}(B_m[\alpha])\text{Hf}(C_m\{\alpha\}).$$

If $\alpha = (1, 2, \dots, 2m)$, then $C_m\{\alpha\}$ is the empty matrix and $\text{Hf}(C_m\{\alpha\}) = 1$. If $\alpha = (2, 3, \dots, 2m - 1)$, then $\text{Hf}(C_m\{\alpha\}) = \text{Hf}(C_m[1, 2m]) = c - b$. In all other

cases, $\text{Hf}(C_m\{\alpha\}) = 0$. It follows that

$$\begin{aligned} \text{Hf}(A_m) &= \text{Hf}(B_m) + (c - b)\text{Hf}(B_{m-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^m (a - b)^{m-k} b^k \frac{(m+k)!}{k!(m-k)!2^k} + \\ &+ (c - b) \sum_{l=0}^{m-1} (a - b)^{m-l-1} b^l \frac{(m+l-1)!}{l!(m-l-1)!2^l}. \end{aligned} \quad (3)$$

Performing simple transformations, we finally obtain

$$\begin{aligned} \text{Hf}(A_m) &= \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{b}{2}\right)^m + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(a-b)^{m-k-1}}{k!} \left(\frac{b}{2}\right)^k \left((a-b) \frac{(m+k)!}{(m-k)!} + \right. \\ &\left. + (c-b) \frac{(m+k-1)!}{(m-k-1)!} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

If $a \neq b$, then the first summand can also be entered under the sum sign:

$$\begin{aligned} \text{Hf}(A_m) &= \sum_{k=0}^m \frac{(a-b)^{m-k-1}}{k!} \left(\frac{b}{2}\right)^k \times \\ &\times \left(\frac{(m+k-1)!}{(m-k)!} (m(a+c-2b) + k(a-c)) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Remark 1. Using (4) and (5), one can compute $\text{Hf}(A_m)$ in time $O(m)$.

The obtained formulas allow us to give an asymptotic estimate for $\text{Hf}(A_m)$.

Proposition 2. If $b = 0$, then $\text{Hf}(A_m) = a^{m-1}(a+c)$. If $b \neq 0$, then

$$\text{Hf}(A_m) \sim \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{b}{2}\right)^m e^{(a-b)/b}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Proof. If $b = 0$, then nonzero summands in (3) correspond only to the values $k = 0$ and $l = 0$. Therefore, in this case $\text{Hf}(A_m) = a^{m-1}(a+c)$.

In the case $b \neq 0$, the proof is similar, with slight modifications, to the proof of the asymptotic formula for Bessel polynomials in [6]. We introduce for convenience the notation

$$f_m(x, y) = \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m e^{y/x}.$$

Our task is to show that $\text{Hf}(A_m) \sim f_m(b, a-b)$ as $m \rightarrow \infty$. In the course of the proof, for the sake of convenience, we also denote $\text{Hf}(B_m)$ by S_m . If we replace k by $m-k$ under the summation sign in (2), and then take out the first summand as a common factor, we get:

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{k=0}^m (a-b)^k b^{m-k} \frac{(2m-k)!}{k!(m-k)!2^{m-k}} = \\ &= \frac{b^m(2m)!}{m!2^m} \sum_{k=0}^m \frac{(a-b)^k 2^k m!(2m-k)!}{b^k k!(2m)!(m-k)!}. \end{aligned}$$

By induction on k , it can be proved that

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{2^k m!(2m-k)!}{(2m)!(m-k)!} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2(k-2)!(2m-1)}, \quad 2 \leq k \leq m. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \left| S_m - \frac{b^m(2m)!}{m!2^m} \sum_{k=0}^m \frac{(a-b)^k}{b^k k!} \right| &\leq \\ &\leq \frac{|b|^m(2m)!}{m!2^m} \sum_{k=2}^m \frac{|a-b|^k}{|b|^k k!} \left(1 - \frac{2^k m!(2m-k)!}{(2m)!(m-k)!} \right) \leq \\ &\leq \frac{|b|^m(2m)!}{m!2^{m+1}(2m-1)} \sum_{k=2}^m \frac{|a-b|^k}{|b|^k (k-2)!} \leq \\ &\leq \frac{|b|^{m-2}(2m)!|a-b|^2}{m!2^{m+1}(2m-1)} e^{|a-b|/|b|}. \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned} S_{m-1} &= \sum_{k=0}^{m-1} (a-b)^k \frac{b^{m-k-1}(2m-k-2)!}{k!(m-k-1)!2^{m-k-1}} = \\ &= \frac{b^m(2m)!}{m!2^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(a-b)^k 2^{k+1} m!(2m-k-2)!}{b^{k+1} k!(2m)!(m-k-1)!} = \\ &= \frac{b^m(2m)!}{m!2^m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{(a-b)^k}{b^{k+1} k!(2m-k-1)} \prod_{i=1}^k \frac{2m-2i}{2m-i} \right). \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} |S_{m-1}| &\leq \frac{|b|^{m-1}(2m)!}{m!2^m m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|a-b|^k}{|b|^k k!} \leq \\ &\leq \frac{|b|^{m-1}(2m)!}{m!2^m m} e^{|a-b|/|b|}. \end{aligned}$$

Now we can write the following chain of inequalities:

$$\begin{aligned} |\text{Hf}(A_m) - f_m(b, a-b)| &= \\ &= \left| S_m + (c-b)S_{m-1} - \frac{b^m(2m)!}{m!2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-b)^k}{b^k k!} \right| \leq \\ &\leq \left| S_m - \frac{b^m(2m)!}{m!2^m} \sum_{k=0}^m \frac{(a-b)^k}{b^k k!} \right| + \\ &+ |c-b| |S_{m-1}| + \frac{|b|^m(2m)!}{m!2^m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|a-b|^k}{|b|^k k!} \leq \\ &\leq f_m(|b|, |a-b|) \left(\frac{|a-b|^2}{2(2m-1)|b|^2} + \frac{|c-b|}{m|b|} + 1 \right). \end{aligned}$$

Hence,

$$\left| \frac{\text{Hf}(A_m)}{f_m(b, a - b)} - 1 \right| = \frac{|\text{Hf}(A_n) - f_m(b, a - b)|}{|f_m(b, a - b)|} \leq \frac{f_m(|b|, |a - b|)}{|f_m(b, a - b)|} \left(\frac{|a - b|^2}{2(2m - 1)|b|^2} + \frac{|c - b|}{m|b|} + 1 \right). \quad (6)$$

The ratio $f_m(|b|, |a - b|)/|f_m(b, a - b)|$ is a constant, and the expression in brackets approaches zero as m increases. This completes the proof. \square

Remark 2. The inequality (6) guarantees fast convergence only for small values of the ratios $|c - b|/|b|$ and $|a - b|/|b|$.

Remark 3. The value of the parameter c affects only the convergence rate, but does not affect the form of the asymptotic behavior of $\text{Hf}(A_m)$. This is not surprising, since the parameter c , in contrast to the parameters a and b , corresponds to only two elements of a matrix.

For non-negative integers a, b, c , formulas obtained in this section allow us to calculate exactly and approximately the values of the number of perfect matchings of arc and chord diagrams $G_m(a, b, c)$. Further we will consider some concrete examples.

2. Perfect matchings of some diagrams $G_m(a, b, c)$

2.1. The arc diagram $G_m(2, 1, 1)$

Let us consider the arc diagram $G_m(2, 1, 1)$. Neighboring vertices are joined in it by two arcs (we call them conditionally «upper» and «lower» arc), and any other pair of vertices is joined by one arc (see Fig. 2). Let a_m denote the number of perfect matchings of $G_m(2, 1, 1)$. From (5) we get

$$a_m = \text{Hf}(T_m(2, 1, 1)) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!2^k} \frac{(m+k)!}{(m-k)!}. \quad (7)$$

Applying (7) for consecutive m , we get the sequence A001515 from [7]. Thus, we have a new interpretation of this sequence.

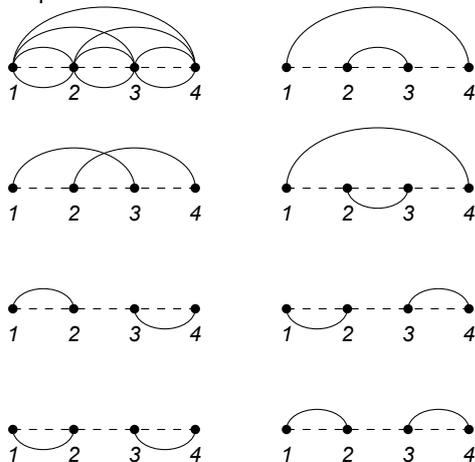


Fig. 2. The arc diagram $G_2(2, 1, 1)$ and its perfect matchings.

Рис. 2. Дуговая диаграмма $G_2(2, 1, 1)$ и ее совершенные паросочетания.

By Proposition 2

$$a_m \sim \frac{(2m)!}{m!2^m} e. \quad (8)$$

If we remove «lower» arcs in the diagram $G_m(2, 1, 1)$, then we get the complete graph K_{2m} . The number of perfect matchings of K_{2m} equals $(2m)!/m!2^m$. So, it follows from (8) that adding «lower» arcs joining neighboring vertices to the arc diagram of the complete graph increases the number of perfect matchings by approximately e times.

It is known from the description of the sequence A001515 in [7] that its m -th term is equal to the number of partitions of the sets $\{1, 2, \dots, k\}$, $m \leq k \leq 2m$, into m non-empty blocks with no more than two elements per block. For example, if $m = 2$, then we get partitions: $\{1, 2\}$, $\{13, 2\}$, $\{13, 24\}$, $\{1, 23\}$, $\{14, 23\}$, $\{12, 3\}$, $\{12, 34\}$ — 7 in total. We establish now the correspondence between the given interpretation of this sequence and its interpretation through the number of perfect matchings of the arc diagram $G_m(2, 1, 1)$ obtained above. As an example, Figure 2 illustrates the arc diagram $G_2(2, 1, 1)$ and all its perfect matchings.

We assign a partition to each perfect matching by the following rule. If two vertices are joined by an «upper» arc, then we put down their numbers to the same block. If two neighboring vertices are joined by an «lower» arc, then we «glue» them into one, renumber vertices of the obtained graph from left to right and put down the number of a single vertex to a separate block (see Fig. 3). Carrying out this procedure in the opposite direction, we will uniquely restore the perfect matching of the diagram for a given partition. The given scheme obviously works for an arbitrary m .

2.2. The chord diagram $G_m(2, 1, 2)$

Consider the chord diagram $G_m(2, 1, 2)$. Neighboring vertices are joined in it by two chords, and any other pair of vertices is joined by one chord (see Fig. 4).

Let b_m denote the number of perfect matchings of $G_m(2, 1, 2)$. It follows from the above that

$$b_m = \text{Hf}(T_m(2, 1, 2)) = m \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!2^{k-1}} \frac{(m+k-1)!}{(m-k)!}. \quad (9)$$

By Proposition 2

$$b_m \sim \frac{(2m)!}{m!2^m} e.$$

Setting $b_1 = 2$ and using (9) for consecutive $m \geq 2$, we get the sequence A336400 from [7]. This sequence is also presented in the second column of Table 1. It is easy to see, that sequences (a_m) and (b_m) are connected to each other by the following relation:

$$b_m = a_m + a_{m-1}. \quad (10)$$

Indeed, the diagram $G_m(2, 1, 2)$ differs from $G_m(2, 1, 1)$ by only one edge joining the vertices 1 and $2m$. For $G_m(2, 1, 2)$, the number of perfect matchings, in which vertices 1 and $2m$ are joined by an edge, equals a_{m-1} . Hence, b_m is greater than a_m by a_{m-1} .

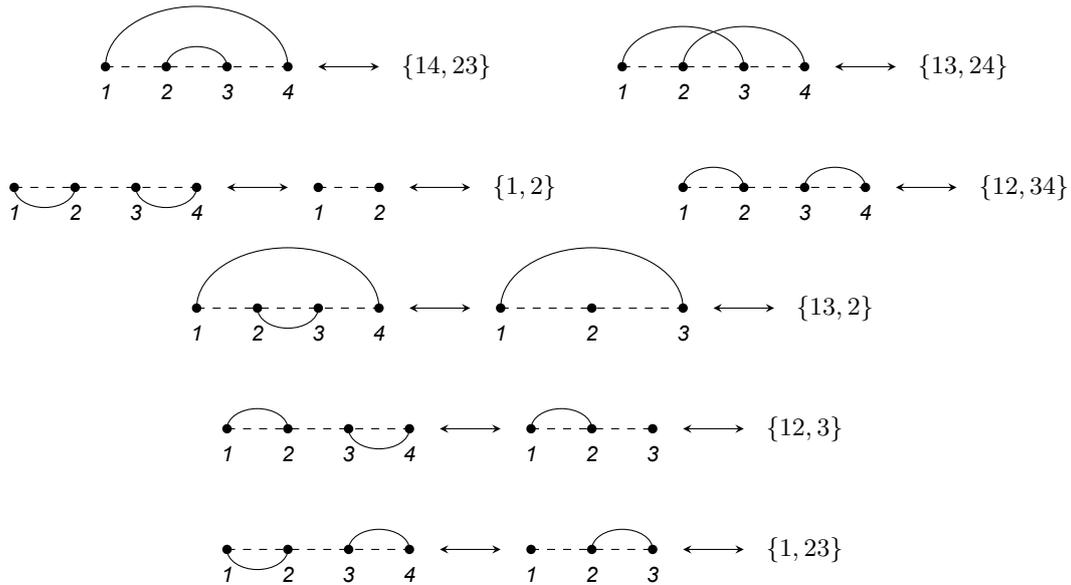


Fig. 3. The correspondence of two interpretations of the sequence A001515.
 Рис. 3. Соответствие двух интерпретаций последовательности A001515.

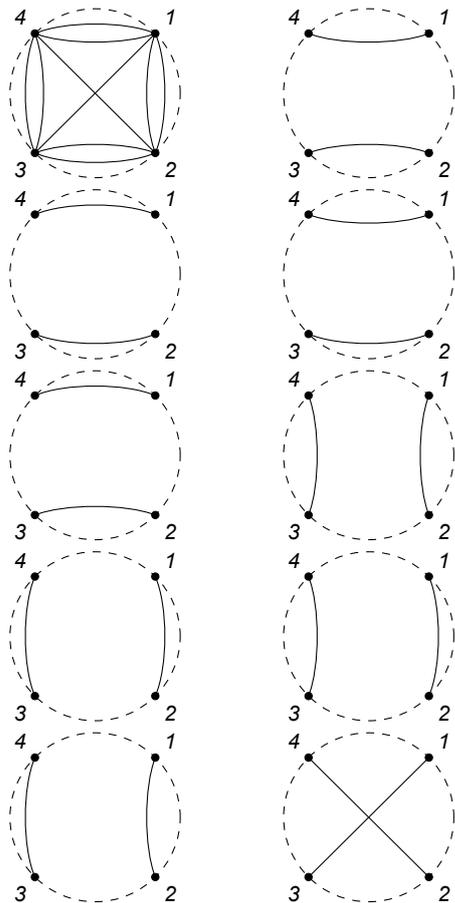


Fig. 4. The chord diagram $G_2(2, 1, 2)$ and its perfect matchings.
 Рис. 4. Хордовая диаграмма $G_2(2, 1, 2)$ и ее совершенные паросочетания.

It is known that the sequence (a_m) satisfies the following recurrence relation:

$$a_m = (2m - 1)a_{m-1} + a_{m-2}, \quad a_1 = 2, \quad a_0 = 1. \quad (11)$$

From the equalities (10) and (11), we can derive the following recurrence relation for terms b_m :

$$b_{m+1} = 2mb_m + (2m - 2)b_{m-1} + b_{m-2}, \quad m \geq 4.$$

and

$$b_{m+1} = \frac{(4m^2 - 3)b_m + (2m + 1)b_{m-1}}{2m - 1}, \quad m \geq 3.$$

2.3. The arc diagram $G_m(2, 1, 0)$

Let us consider the arc diagram $G_m(2, 1, 0)$. Neighboring vertices are joined in it by two arcs, the vertices 1 and $2m$ are not adjacent if $m \geq 2$, and all other pairs of vertices are joined by one arc (see Fig. 5).

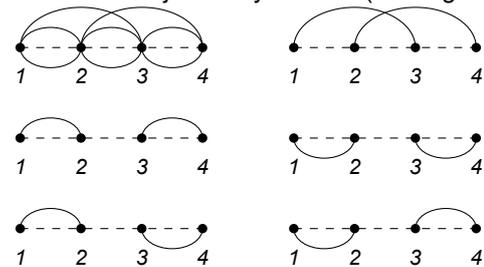


Fig. 5. The arc diagram $G_2(2, 1, 0)$ and its perfect matchings.
 Рис. 5. Дуговая диаграмма $G_2(2, 1, 0)$ и ее совершенные паросочетания.

Let c_m denote the number of perfect matchings of $G_m(2, 1, 0)$. From (5) we get

$$c_m = \text{Hf}(T_{2m}(2, 1, 0)) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k-1)!2^{k-1}} \frac{(m+k-1)!}{(m-k)!}. \quad (12)$$

By Proposition 2

$$c_m \sim \frac{(2m)!}{m!2^m} e.$$

Setting $c_1 = 2$ and using (12) for consecutive $m \geq 2$, we get the sequence presented in the third column of Table 1.

As in the case of (a_m) , the sequence (c_m) can be interpreted through partitions of finite sets of natural numbers into blocks. Namely, c_m is equal to the number of partitions of sets $\{1, 2, \dots, k\}$, $m \leq k \leq 2m$, into m non-empty blocks so that there are no more than two elements in each block and there is no block containing 1 and k simultaneously. For example, if $m = 2$ then we get partitions: $\{1, 2\}$, $\{13, 24\}$, $\{1, 23\}$, $\{12, 3\}$, $\{12, 34\}$ — 5 in total.

It is easy to see that sequences (a_m) and (c_m) are connected to each other by the following relation:

$$c_m = a_m - a_{m-1}. \tag{13}$$

Indeed, the diagram $G_m(2, 1, 1)$ differs from $G_m(2, 1, 0)$ by only one edge joining the vertices 1 and $2m$. For $G_m(2, 1, 1)$, the number of perfect matchings, in which vertices 1 and $2m$ are joined by an edge, equals a_{m-1} . Hence, a_m is greater than c_m by a_{m-1} . From the equalities (11) and (13), one can derive the following recurrence relation for terms c_m :

$$c_{m+1} = (2m+2)c_m - (2m-4)c_{m-1} - c_{m-2}, \quad m \geq 4.$$

and

$$c_{m+1} = \frac{(4m^2 + 1)c_m + (2m + 1)c_{m-1}}{2m - 1}, \quad m \geq 3.$$

Starting from $m = 2$, c_m coincides with the $(m - 1)$ -th term of the sequence A144498 from [7]. Thus, one can say that we get a new interpretation of A144498.

2.4. The arc diagram $G_m(1, 2, 2)$

Let us consider the arc diagram $G_m(1, 2, 2)$. Neighboring vertices are joined in it by one arc, and any other pair of vertices is joined by two arcs (see Fig. 6). Let u_m denote the number of perfect matchings of $G_m(1, 2, 2)$. From (5) we derive that

$$u_m = \text{Hf}(T_{2m}(1, 2, 2)) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k}}{k!} \frac{(m+k)!}{(m-k)!}. \tag{14}$$

Setting $u_1 = 1$ and using (14) for consecutive m , we get the sequence presented in the first column of Table 2. Elements of this sequence coincide in absolute value with the corresponding elements of the sequence A002119 from [7].

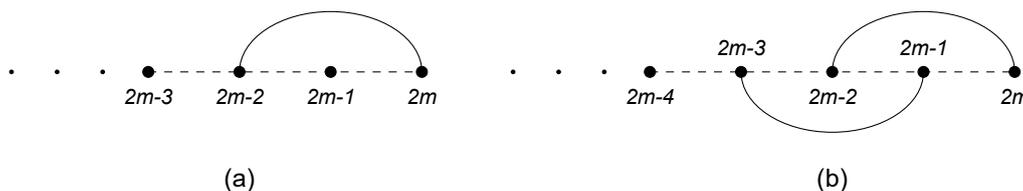


Fig. 7. A derivation of a recurrence for (u_m) .
Рис. 7. Вывод рекуррентного соотношения для (u_m) .

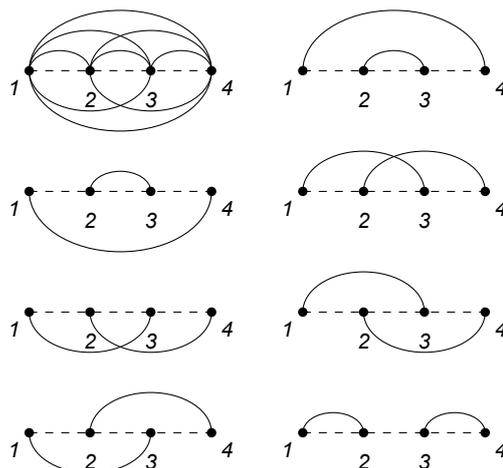


Fig. 6. The arc diagram $G_2(1, 2, 2)$ and its perfect matchings.

Рис. 6. Дуговая диаграмма $G_2(1, 2, 2)$ и ее совершенные паросочетания.

By Proposition 2

$$u_m \sim \frac{(2m)!}{\sqrt{e} m!}. \tag{15}$$

If one joins in the diagram $G_m(1, 2, 2)$ neighboring vertices by additional «lower» arcs, then we obtain the diagram $G_m(2, 2, 2)$. It is nothing more than a complete multigraph, each pair of vertices of which is joined by two edges. It is not difficult to calculate that the number of perfect matchings of such a graph equals $(2m)!/m!$. From (15) it follows that, by appending additional «lower» arcs joining neighboring vertices to the diagram $G_m(1, 2, 2)$, we get the number of perfect matchings increased by approximately \sqrt{e} times.

Now we derive a recurrence for the sequence (u_m) . For $G_m(1, 2, 2)$, consider perfect matchings, in which the vertex $2m$ is joined by an arc with the vertex $2m - 1$. It is obvious that the number of such perfect matchings equals u_{m-1} . Consider a perfect matching, in which the vertex $2m$ is joined by an «upper» arc with the vertex $2m - 2$ (see Fig. 7(a)). The remaining $2m - 2$ vertices can be paired in at least u_{m-1} ways. But the vertices $2m - 1$ and $2m - 3$ are considered here as neighboring, and therefore they assume only one variant of the connection (by an «upper» arc), although if we consider the diagram $G_{2m}(1, 2, 2)$ in general, this vertices can be joined by two different arcs. Thus, one must also take into account perfect matchings, in which the vertices $2m - 1$ and $2m - 3$ are joined by a «lower» arc (see Fig. 7(b)). The number of such matchings is obviously u_{m-2} .

Table 1

The number of perfect matchings of multigraphs $G_m(a, b, c)$

Таблица 1

Число совершенных паросочетаний мультиграфа $G_m(a, b, c)$

m	$G_m(2, 1, 1)$	$G_m(2, 1, 2)$	$G_m(2, 1, 0)$
1	2	2	2
2	7	9	5
3	37	44	30
4	266	303	229
5	2431	2697	2165
6	27007	29438	24576
7	353522	380529	326515
8	5329837	5683359	4976315
9	90960751	96290588	85630914
10	1733584106	1824544857	1642623355
11	36496226977	38229811083	34762642871
12	841146804577	877643031554	804650577600
13	21065166341402	21906313145979	20224019536825
14	569600638022431	590665804363833	548535471681029
15	16539483668991901	17109084307014332	15969883030969470
16	513293594376771362	529833078045763263	496754110707779461
17	16955228098102446847	17468521692479218209	16441934503725675485
18	593946277027962411007	610901505126064857854	576991048929859964160
19	21992967478132711654106	22586913755160674065113	21399021201104749243099
20	858319677924203716921141	880312645402336428575247	836326710446071005267035

Table 2

The number of perfect matchings of multigraphs $G_m(a, b, c)$

Таблица 2

Число совершенных паросочетаний мультиграфа $G_m(a, b, c)$

m	$G_m(1, 2, 2)$	$G_m(1, 2, 1)$	$G_m(1, 2, 0)$
1	1	1	1
2	7	6	5
3	71	64	57
4	1001	930	859
5	18089	17088	16087
6	398959	380870	362781
7	10391023	9992064	9593105
8	312129649	301738626	291347603
9	10622799089	10310669440	9998539791
10	403978495031	393355695942	382732896853
11	16977719590391	16573741095360	16169762600329
12	781379079653017	764401360062626	747423640472235
13	39085931702241241	38304552622588224	37523173542935207
14	2111421691000680031	2072335759298438790	2033249827596197549
15	122501544009741683039	120390122318741003008	118278700627740322977
16	7597207150294985028449	7474705606285243345410	7352204062275501662371
17	501538173463478753560673	493940966313183768532224	486343759162888783503775
18	35115269349593807734275559	34613731176130328980714886	34112193002666850227154213
19	2599031470043405251089952039	2563916200693811443355676480	2528800931344217635621400921
20	202759569932735203392750534601	200160538462691798141660582562	197561506992648392890570630523

The same is true for perfect matchings, in which the vertex $2m$ is joined with the vertex $2m - 2$ by a «lower» arc. Thus, the number of perfect matchings, in which vertices $2m$ and $2m - 2$ are joined by an arc, equals $2(u_{m-1} + u_{m-2})$. Continuing to reason in a similar way and summing over all possible variants of arcs incident to the vertex $2m$, we obtain

$$u_m + u_{m-1} = (4m - 2)u_{m-1} + (4m - 6)u_{m-2} + \dots + 10u_2 + 6.$$

On the other hand, applying the given formula to u_{m-1} , we arrive at the equality:

$$u_{m-1} + u_{m-2} = (4m - 6)u_{m-2} + (4m - 10)u_{m-3} + \dots + 10u_2 + 6.$$

Substituting this expression into the previous one, we finally obtain

$$u_m = (4m - 2)u_{m-1} + u_{m-2}, \quad u_1 = 1, \quad u_0 = 1. \quad (16)$$

2.5. The chord diagram $G_m(1, 2, 1)$

Let us consider the chord diagram $G_m(1, 2, 1)$. Neighboring vertices are joined in it by one chord, and any other pair of vertices is joined by two chords (see Fig. 8).

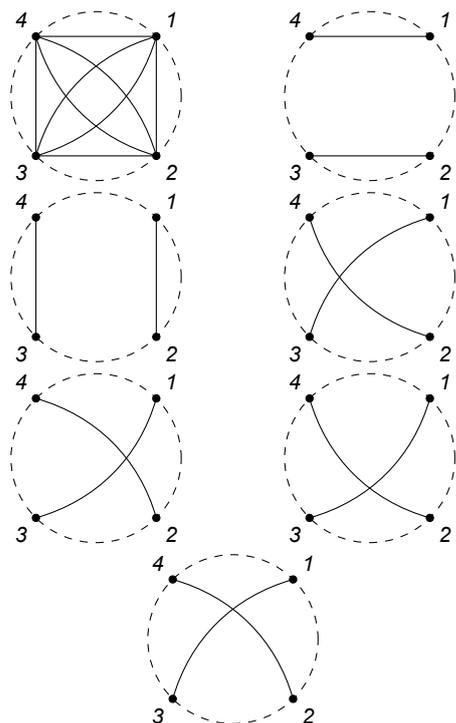


Fig. 8. The chord diagram $G_2(1, 2, 1)$ and its perfect matchings.

Рис. 8. Хордовая диаграмма $G_2(1, 2, 1)$ и ее совершенные паросочетания.

Let v_m denote the number of perfect matchings of $G_m(1, 2, 1)$. From (5) we get

$$v_m = \text{Hf}(T_{2m}(1, 2, 1)) = 2m \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k}}{k!} \frac{(m+k-1)!}{(m-k)!}. \quad (17)$$

By Proposition 2

$$v_m \sim \frac{(2m)!}{\sqrt{e} m!}.$$

Taking $v_1 = 1$ and using (17) for consecutive $m \geq 2$, we get the sequence A336114 from [7]. This sequence is also presented in the second column of Table 2.

It is easy to see that sequences (u_m) and (v_m) are connected by the following relation:

$$v_m = u_m - u_{m-1}. \quad (18)$$

Indeed, the diagram $G_m(1, 2, 2)$ differs from $G_m(1, 2, 1)$ only by one edge joining the vertices 1 and $2m$. Hence, u_m is greater than v_m by the number of perfect matchings of $G_m(1, 2, 2)$, in which the vertices 1 and $2m$ are joined by an edge, i.e., by u_{m-1} . From equalities (16) and (18), one can derive the following recurrence relations for terms v_m :

$$v_{m+1} = (4m+3)v_m - (4m-7)v_{m-1} - v_{m-2}, \quad m \geq 4.$$

and

$$v_{m+1} = \frac{8m^2 v_m + (2m+1)v_{m-1}}{2m-1}, \quad m \geq 3.$$

2.6. The arc diagram $G_m(1, 2, 0)$

Let us consider the arc diagram $G_m(1, 2, 0)$. Neighboring vertices are joined in it by one arc, the vertices 1 and $2m$ are not adjacent if $m \geq 2$, and all other pairs of vertices are joined by two arcs (see Fig. 9). Let w_m denote the number of perfect matchings of $G_m(1, 2, 0)$. From (5) we get

$$w_m = \text{Hf}(T_{2m}(1, 2, 0)) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k-1}}{k!} \left[\frac{(m+k-1)!}{(m-k)!} (-3m+k) \right]. \quad (19)$$

Putting $w_1 = 1$ and using (19) for consecutive $m \geq 2$, we get the sequence A336286 from [7]. This sequence is also represented in the third column of Table 2. By Proposition 2

$$w_m \sim \frac{(2m)!}{\sqrt{e} m!}.$$

It is not hard to see that sequences (u_m) and (w_m) are linked to each other by the following relationship:

$$w_m = u_m - 2u_{m-1}, \quad m \geq 2. \quad (20)$$

Indeed, the diagram $G_m(1, 2, 2)$ differs from $G_m(1, 2, 0)$ by two arcs joining the vertices 1 and $2m$. Hence, u_m is greater than w_m by twice the number of perfect matchings of $G_m(1, 2, 2)$, in which the vertices 1 and $2m$ are joined by an arc, i.e., by $2u_{m-1}$. From equalities (16) and (20), we can derive the following recurrence relations for w_m with $m \geq 4$:

$$w_{m+1} = (4m+4)w_m - (8m-13)w_{m-1} - 2w_{m-2},$$

and with $m \geq 3$:

$$w_{m+1} = \frac{(32m^2 - 12m + 2)w_m + (8m+1)w_{m-1}}{8m-7}.$$

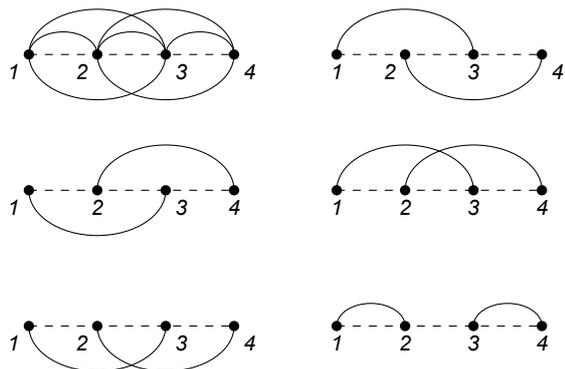


Fig. 9. The arc diagram $G_2(1,2,0)$ and its perfect matchings.

Рис. 9. Дуговая диаграмма $G_2(1,2,0)$ и ее совершенные паросочетания.

3. Conclusion

In this paper, we have considered the method for the explicit calculation of the hafnian of symmetric three-parameter Toeplitz matrices in polynomial time. In addition, in the case of non-negative integer parameters, this method allows us to calculate numbers of perfect matchings of various multigraphs represented in the form of arc and chord diagrams. Thus, we produce a certain class of integer sequences. Some sequences from this class have long been described in OEIS. But the method under consideration allows us to look at these sequences from the point of view of graph theory.

Литература—References

1. *Krasko E., Omelchenko A.* Enumeration of chord diagrams without loops and parallel chords // *Electron. J. Combin.* 2017. Vol. 24. Article 3.43.
2. *Sullivan E.* Linear chord diagrams with long chords // *Electron. J. Combin.* 2017. Vol. 24. Article 4.20.
3. *Efimov D.B.* The hafnian and a commutative analogue of the Grassmann algebra // *Electron. J. Linear Algebra.* 2018. Vol. 34. P. 54–60.
4. *Efimov D.B.* Гафниан теплицевых матриц специального вида, совершенные паросочетания и полиномы Бесселя [The hafnian of Toeplitz matrices of a special type, perfect matchings and Bessel polynomials] // *Bull. of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2018. No. 3(28). P. 56–64. Available at <https://arxiv.org/abs/1904.08651>.
Ефимов Д.Б. Гафниан теплицевых матриц специального вида, совершенные паросочетания и полиномы Бесселя // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 2018. № 3(28). С. 56–64.
5. *Grosswald E.* Bessel Polynomials. Springer, 1978.
6. *Grosswald E.* On some algebraic properties of the Bessel polynomials // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1951. Vol. 71. P. 197–210.
7. *Sloane N.J.A. et al.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2020. Available at <https://oeis.org/>.

Статья поступила в редакцию 11.10.2021.

УДК 519.24
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-14-19

А.О. МАРГАСОВ

О НЕЙРОННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНОМ РАСШИРЕНИИ

*Кафедра математической статистики,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
г. Москва*

margasovarsenij@gmail.com

A.O. MARGASOV

NEURAL ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR PROBABILISTIC EXTENSION

*Department of Mathematical Statistics,
Lomonosov Moscow State University,
Moscow*

Аннотация

В данной статье описывается переход от нейросетевой архитектуры к обыкновенным дифференциальным уравнениям и задаче Коши. Рассматривается сравнение двух нейросетевых архитектур: классическая RNN и ODE-RNN, в которой используются нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения. В работе предлагается новая архитектура p-ODE-RNN, позволяющая добиться качества, сопоставимого с ODE-RNN, но при этом обучается значительно быстрее. Кроме того, рассматривается вывод предложенной архитектуры с точки зрения теории случайных процессов.

Ключевые слова:

обыкновенные дифференциальные уравнения, нейронные сети, случайные процессы, вероятностные распределения

Abstract

This paper describes the transition from neural network architecture to ordinary differential equations and initial value problem. Two neural network architectures are compared: classical RNN and ODE-RNN, which uses neural ordinary differential equations. The paper proposes a new architecture of p-ODE-RNN, which allows you to achieve a quality comparable to ODE-RNN, but is trained much faster. Furthermore, the derivation of the proposed architecture in terms of random process theory is discussed.

Keywords:

ordinary differential equations, neural networks, stochastic processes, probability distributions

Введение

Ежедневно в современном мире появляется огромное количество новых данных, которые генерируются в различных областях человеческой деятельности: от сельского хозяйства до сервисов по заказу такси. Такие объёмы информации позволяют применять новые подходы к построению моделей, обработке и аналитике на основе полученных данных. Помимо классических алгоритмов машинного обучения, которые не всегда могут предложить необходимое качество решения вышеописанных задач, стоит отметить парадигму глубокого обучения (deep learning), поскольку модели, построенные в её рамках, позволяют решать многие востребованные и ранее недоступные задачи.

Стандартная методология решения новых задач в различных областях математики предполагает сведение новой задачи к старой и последующее рассмотрение в рамках ранее полученного алгоритма решения известной задачи. В связи с этим особый интерес представляют различные подходы рассмотрения методов глубокого обучения в рамках ранее хорошо изученных областей математики. Рассматриваемый в работе новый класс таких моделей (нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения (НОДУ)) позволяет использовать все возможности и гибкость парадигмы глубокого обучения [1], опираясь на достаточно изученную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наиболее известной нейросетевой архитектурой, естественно трансформирующейся к нейронному дифференциальному уравнению, является

ResNet [2]. Эти преобразования и формализация НОДУ описаны в статье [3], которая стала началом развития указанной тематики в сообществе исследователей и аналитиков данных. В этой же работе используется метод, позволяющий уменьшить затраты оперативной памяти для обучения НОДУ. Дальнейшее развитие идеи о применении гибкости дифференциальных уравнений в рамках НОДУ реализовано в модели ODE-RNN, которая позволяет работать с данными, полученными через разные промежутки времени, и описано в работе [5].

Далее, для векторных величин будет использоваться жирный шрифт, для скалярных – обычный, если не оговорено иного. Например: \mathbf{h}_t – вектор, а t – скаляр.

1. Нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения (Neural ODE)

1.1. Мотивация

Большинство моделей глубокого обучения представляют собой композиции сложных последовательных функциональных преобразований скрытого состояния \mathbf{h}_t (для нейронной сети – это скрытый слой с номером t), каждая из которых позволяет приблизить любую функцию из \mathcal{L}^p (при выполнении простых условий на функцию активации и число скрытых слоёв) [1].

Определение 1.1

Нейронная сеть – вычислительный граф, в котором: каждая вершина с выходящей из нее дугой – это или тензор, или матрица, или вектор, или скаляр; каждая вершина с входящим в неё ребром – функция, зависящая от вершин, дуги которых входят в неё; каждая дуга указывает функциональную зависимость.

Получается, что можно представить следующий скрытый слой в сети через некоторую функцию $F(\cdot)$:

$$\mathbf{h}_{t+1} = F(\mathbf{h}_t).$$

Архитектура остаточной нейронной сети (ResNet), предложенная в [2], позволяет представить скрытое состояние в таком виде:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{h}_t + f(\mathbf{h}_t, t, \theta), \quad (1)$$

где θ – параметры нейросети f . Можно заметить, что если переписать (1) в виде:

$$\frac{\mathbf{h}_{t+1} - \mathbf{h}_t}{(t+1) - t} = f(\mathbf{h}_t, t, \theta),$$

то полученное выражение является дискретизацией Эйлера для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} = f(\mathbf{h}(t), t, \theta), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2)$$

Полученное выражение является нейронным обыкновенным дифференциальным уравнением (НОДУ) [3]. Таким образом, увеличивая число слоёв в сети и уменьшая шаг дискретизации, можно получить функцию $\mathbf{h}(t)$, которая определяется (2) без привязки к конкретной архитектуре нейронной сети.

1.2. Задача Коши для НОДУ

Легко заметить, что $\mathbf{h}(t_0) = \mathbf{h}_0$ – вход нейронной сети, а $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{h}_1$ – её выход на последнем слое. Имея НОДУ (2) и начальное условие $\mathbf{h}(t_0) = \mathbf{h}_0$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} = f(\mathbf{h}(t), t, \theta), & t \in [t_0, t_1], \\ \mathbf{h}(t_0) = \mathbf{h}_0. \end{cases}$$

Обучение полученной модели заключается в минимизации дифференцируемой функции потерь $L(\cdot)$:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{h}(t_1)) &= L\left(\mathbf{h}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{h}(t), t, \theta) dt\right) \approx \\ &\approx L(\text{ODESolve}(t_0, t_1, \mathbf{h}(t_0), \theta, f)), \end{aligned}$$

где $\text{ODESolve}(\cdot)$ – численный метод решения обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Сравнение рекуррентной нейронной сети и производной от нее архитектуры ODE-RNN

2.1. RNN

Рассмотрим сначала стандартную модель рекуррентной нейронной сети (RNN), которая на вход получает набор данных $\{(x_{t_i}, t_i)\}$, и каждое её скрытое состояние \mathbf{h}_{t_i} описывается формулой (рис. 1):

$$\mathbf{h}_i = g(\mathbf{h}_{i-1}, \mathbf{x}_{t_i}).$$

Используя в виде функции активации гиперболический тангенс, положим g :

$$g(\mathbf{h}_{i-1}, \mathbf{x}_{t_i}) = \text{th}(\mathbf{W}_{ih}\mathbf{x}_{t_i} + \mathbf{b}_{ih} + \mathbf{W}_{hh}\mathbf{h}_{i-1} + \mathbf{b}_{hh}), \quad (3)$$

где $\mathbf{W}_{ih}, \mathbf{W}_{hh}$ – соответствующие матрицы весов, а $\mathbf{b}_{ih}, \mathbf{b}_{hh}$ – соответствующие векторы смещения.

Можно заметить, что в промежутке времени $[t_{i-1}, t_i]$ скрытое состояние сети остается константным. Данная архитектура эффективна для наблюдений, которые получены через равные промежутки времени.

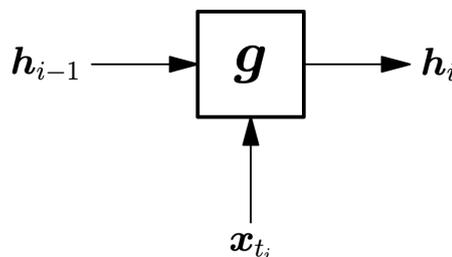


Рис. 1. Блок рекуррентной нейронной сети (RNNCell).

Fig. 1. RNNCell.

Нередко в реальных задачах промежутки времени между наблюдениями отличаются, и именно

это различие несет полезную информацию для обучения модели. Например: медицинские данные, промежутки времени получения которых могут отличаться значительно и при этом могут нести много полезной информации. Стандартная архитектура RNN не учитывает эту особенность.

В данной модели также используется НОДУ: g – нейронная сеть, которая параметризует динамику развития скрытой переменной во времени. Легко заметить, что полученная архитектура позволяет учесть интервалы получения данных, а также – находить скрытое состояние между промежутками получения данных, поскольку траектория состояния не является константной (вследствие того, что h'_i – решение НОДУ), как в случае с классической RNN. Этот подход позволяет увеличить обобщающую способность модели, но при этом для каждого шага обучения требуется намного больше как временных, так и вычислительных затрат, поскольку на каждой итерации обучения решается НОДУ.

2.2. ODE-RNN

Рассмотрим расширение [5] предыдущей архитектуры при помощи нейронных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сравним различия архитектур на примере алгоритмов обучения каждой из сетей.

Алгоритм 1 Обучение ODE-RNN. Единственное отличие, выделенное рамкой, от стандартной рекуррентной сети – предобработка скрытого состояния.

Вход: Наблюдения и промежутки времени, в которые они получены $\{(x_{t_i}, t_i)\}_{i=1..N}$

$$h_0 = 0$$

для $i = 1, 2, \dots, N$:

$$h'_i = \text{ODESolve}((t_{i-1}, t_i), h_{i-1}, \theta, g) \quad \triangleright$$

ODESolve – численный метод решения ОДУ.

$$h_i = \text{RNNCell}(h'_i, x_i) \triangleright \text{RNNCell} – \text{рекуррентный блок, аналогичный рис. 1.}$$

для $i = 1..N$:

$$o_i = \text{OutputNN}(h_i) \triangleright \text{OutputNN} – \text{полносвязная нейросеть}$$

Выход: $\{o_i\}_{i=1..N}; h_N$

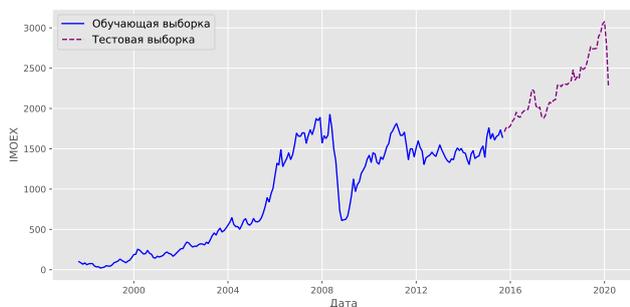


Рис. 2. Цена закрытия индекса Московской биржи с сентября 1997 г. по март 2020 г.

Fig. 2. The closing price of the Moscow Exchange index from September 1997 to March 2020.

2.3. Сравнение RNN и ODE-RNN

Далее ниже во всех экспериментах будут использоваться два набора данных: помесечные данные по ценам закрытия индекса Московской биржи (IMOEX, <https://moex.com/ru/index/IMOEX/archive/>) и среднемесячная температура в г. Москве (Kaggle, <https://www.kaggle.com/berkeleyearth/climate-change-earth-surface-temperature-data>) (рис. 2–4).

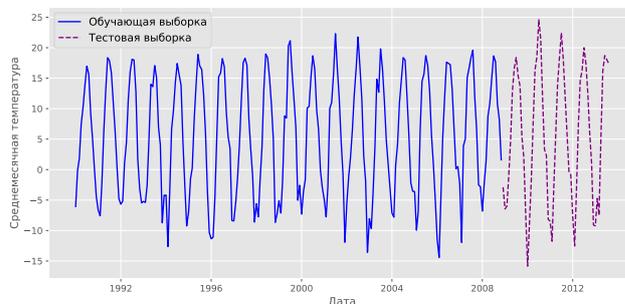


Рис. 3. Среднемесячная температура (°C) в г. Москве с января 1990 г. по август 2013 г.

Fig. 3. The average monthly temperature (°C) in Moscow from January 1990 to August 2013.

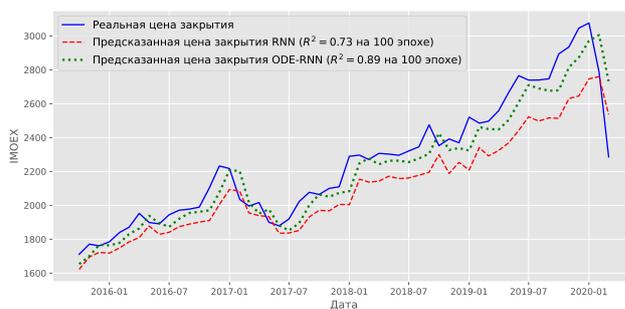


Рис. 4. Цена закрытия индекса Московской биржи (тестовая выборка).

Fig. 4. The closing price of the Moscow Exchange index (test data).

Для обучающей выборки использовалось 80% наблюдений, а для тестовой – оставшиеся 20%. Для каждой модели применялась одна и та же базовая архитектура RNN. Все эксперименты были реализованы с использованием фреймворка глубокого обучения PyTorch и библиотеки (PyTorch Implementation of Differentiable ODE Solvers, <https://github.com/rtqichen/torchdiffeq>) численного решения НОДУ. В качестве функции g из алгоритма 1 использовалась полносвязная нейронная сеть с одним слоем.

Определение 2.1

Коэффициентом детерминации, или R^2 , будем называть $R^2 = 1 - SS_{res}/SS_{tot}$, где y – вектор реальных значений, \hat{y} – вектор, предсказанных значений, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, $SS_{tot} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$, $SS_{res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$.

Сравним модели RNN и ODE-RNN по графикам, представленным ниже (рис. 5). Можно заметить, что ODE-RNN лучше приближает реальные цены закрытия индекса IMOEX.

Аналогично, ODE-RNN лучше приближает реальные данные температуры в г. Москве, чем RNN.

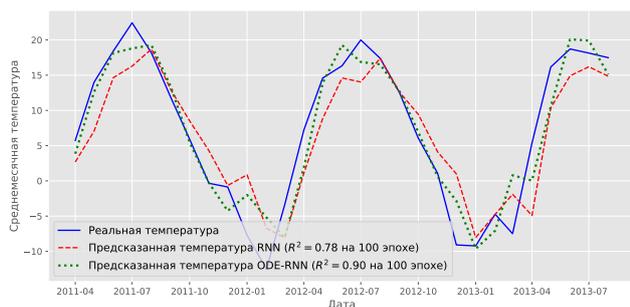


Рис. 5. Среднемесячная температура (°C) в г. Москве (тестовая выборка). Для наглядности показан период с апреля 2011 г. по август 2013 г.

Fig. 5. The average monthly temperature (°C) in Moscow (test sample). For clarity, the period from April 2011 to August 2013 is shown.

Определение 2.2

Эпоха (epoch) – одна полная (весь обучающий набор данных) итерация обучения модели.

Таблица 1. Среднее время, затраченное на обучение на 1 эпоху (цены закрытия индекса IMOEX)

Table 1. Average time spent on training for 1 epoch (closing price of IMOEX index)

Модель	RNN	ODE-RNN
Время	0.12 сек.	1.86 сек.

Таблица 2. Среднее время, затраченное на обучение на 1 эпоху (среднемесячная температура в г. Москве)

Модель	RNN	ODE-RNN
Время	0.18 сек.	2.64 сек.

Рассмотрим значение R^2 на каждой эпохе по рис. 6. Стоит отметить, что кривая R^2 для модели ODE-RNN круто растёт до 20 эпохи, а далее выходит на плато.

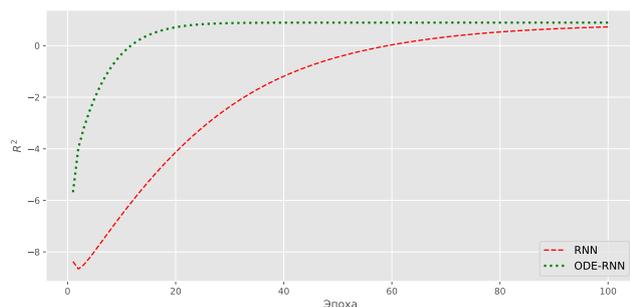


Рис. 6. R^2 моделей RNN и ODE-RNN (тестовая выборка, цены закрытия индекса IMOEX).

Fig. 6. R^2 of RNN and ODE-RNN (test data, closing price of IMOEX index).

На рис. 6 можно заметить, что разность между значением R^2 для ODE-RNN и RNN постепенно увеличивается до 20 эпохи, а далее ODE-RNN обучается уже не так быстро, и разрыв сокращается. Таким образом, к 100 эпохе R^2 у ODE-RNN больше на **0.16**, а время обучения больше на **174** сек. Стоит также отметить, что значения $R^2 = 0.72$ ODE-RNN достигает к 20 эпохе, а RNN – к 98, и затрачивает при этом на **25.44** сек. больше.

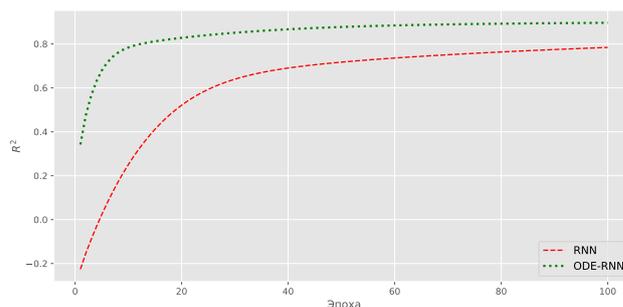


Рис. 7. R^2 моделей RNN и ODE-RNN (тестовая выборка, среднемесячная температура (°C) в г. Москве).

Fig. 7. R^2 of RNN and ODE-RNN (test data, average monthly temperature (°C) in Moscow).

На рис. 7 можно заметить, что разность между значением R^2 для ODE-RNN и RNN постепенно сокращается при довольно большой первоначальной разнице. Таким образом, к 100 эпохе R^2 у ODE-RNN больше на **0.12**, а время обучения – на **246** сек. Стоит также отметить, что значения $R^2 = 0.71$ ODE-RNN достигает к 6 эпохе, а RNN – к 48, и затрачивает при этом на **7.2** сек. больше.

3. p-ODE-RNN

3.1. Теоретическая часть

Для того, чтобы уменьшить вычислительные затраты каждой итерации обучения, предложим новую архитектуру **p-ODE-RNN**, для которой скрытое состояние h_i будет являться случайной величиной, принимающей значения $\text{RNNCell}(\text{ODESolve}((t_{i-1}, t_i), h_{i-1}, \theta, g), x_i)$ с вероятностью p и $\text{RNNCell}(h_{i-1}, x_i)$ с вероятностью $1 - p$.

Используя полученное вероятностное расширение скрытого состояния h_i , получаем схему Бернулли, в которой «успехом» будет считаться предобработка h_{i-1} .

Связь с геометрическим распределением. Пусть ν – случайная величина равная номеру первого «успеха» (обращения к численному методу решения НОДУ для предобработки скрытого состояния h_{i-1}). Тогда $\nu \sim \text{Geom}_1(p)$ и, следовательно, $\mathbb{P}(\nu = k) = (1 - p)^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$

Связь с биномиальным распределением. Пусть α – количество «успехов» в n испытаниях Бернулли, описанных выше, с вероятностью успеха p , тогда $\alpha \sim \text{Bin}(n, p)$ и $\mathbb{P}(\alpha = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

Связь с пуассоновским распределением. Возникает вопрос: как выбрать значение параметра p для получения наилучшей обобщающей способности модели при минимальных временных и вычислительных затратах?

Предложение 3.1

Рассмотрим $p = p(t)$ как функцию, зависящую от времени, причём выберём её так, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$, поскольку, исходя из рис. 6, 7, на первых эпохах ODE-RNN обучается быстрее чем RNN. Пусть $p(t) = 1/t$.

Используя это предложение, получаем удовлетворение всех условий теоремы Пуассона 1.

Теорема 1 (Пуассона)

Пусть $t \rightarrow \infty$ и $p(t) \rightarrow 0$ так, что $tp(t) \rightarrow \lambda > 0$. Тогда для любого $k \geq 0$ вероятность получить k успехов в t испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха $p(t)$ стремится к величине $e^{-\lambda} \lambda^k / k!$.

Таким образом, получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tp(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \frac{1}{t} = 1 = \lambda.$$

Скрытое состояние h_i как случайный процесс. Нетрудно заметить, что теперь можно рассматривать $\{h_i(\omega), i = 0, 1 \dots N\}$ как случайный процесс. Таким образом, данный факт позволяет использовать весь аппарат теории случайных процессов в рамках скрытого состояния в архитектуре p-ODE-RNN.

Определение 3.1

Случайный процесс $\{h_t(\omega), t = 0, 1 \dots N\}$ называется интегрируемым [6], если $E|h_t| < \infty$ для всех $t \in [0, N]$.

Теорема 2

Случайный процесс $\{h_i(\omega), i = 0, 1 \dots N\}$ является интегрируемым.

Доказательство. Пусть a – вектор такой же размерности, как и h_i , состоящий только из единиц. Распишем первый абсолютный момент через формулу (3):

$$\begin{aligned} E|h_i| &= p|th(W_{ih}x_i + b_{ih} + \\ &+ W_{hh}ODESolve((t_{i-1}, t_i), h_{i-1}, \theta, f), x_i) + b_{hh})| + \\ &+ (1-p)|th(W_{ih}x_i + b_{ih} + W_{hh}h_{i-1} + b_{hh})| \leq \\ &\leq pa + (1-p)a \leq 1 \leq \infty. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве было использовано соотношение $|th(x)| \leq 1$. □

3.2. Практическая часть

В этом разделе будет использоваться параметр $p = p(t) = 1/t$.

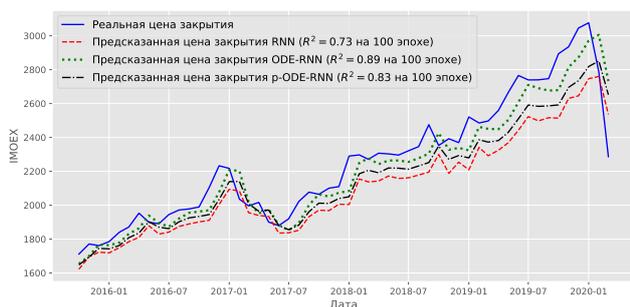


Рис. 8. Цена закрытия индекса Московской биржи (тестовая выборка).
Fig. 8. Closing price of IMOEX index (test data).

На рис. 8 представлено сравнение качества различных алгоритмов. Можно заметить, что кривая, сгенерированная p-ODE-RNN, находится между ODE-RNN и RNN.

Аналогично, можно заметить на рис. 9, что кривая, сгенерированная p-ODE-RNN, в случае другого датасета имеет схожее поведение.

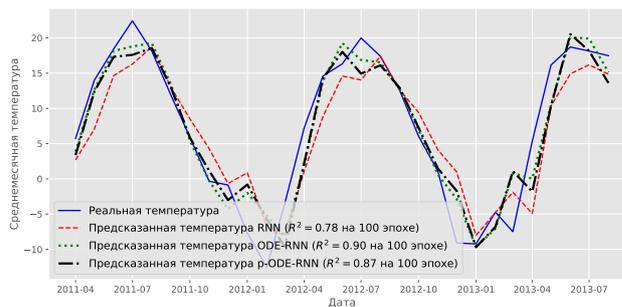


Рис. 9. Среднемесячная температура (°C) в г. Москве (тестовая выборка). Для наглядности показан период с апреля 2011 г. по август 2013 г.
Fig. 9. The average monthly temperature (°C) in Moscow (test data). For clarity, the period from April 2011 to August 2013 is shown.

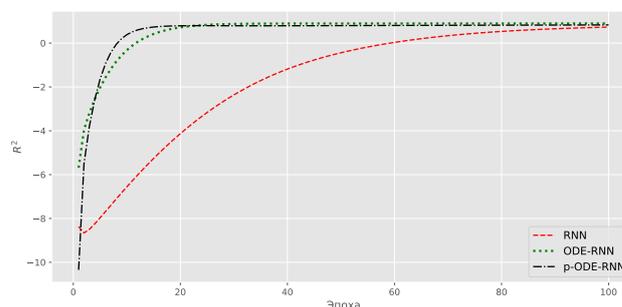


Рис. 10. R^2 моделей RNN, ODE-RNN, p-ODE-RNN (цены закрытия индекса IMOEX, тестовая выборка).
Fig. 10. R^2 of RNN, ODE-RNN, p-ODE-RNN (closing price of IMOEX index, test data).

На рис. 10 p-ODE-RNN быстрее всех моделей достигает уровня $R^2 = 0.77$ и далее обучается со скоростью, сопоставимой с ODE-RNN.

На рис. 11 кривая R^2 для p-ODE-RNN находится между RNN и ODE-RNN на протяжении всего обучения.

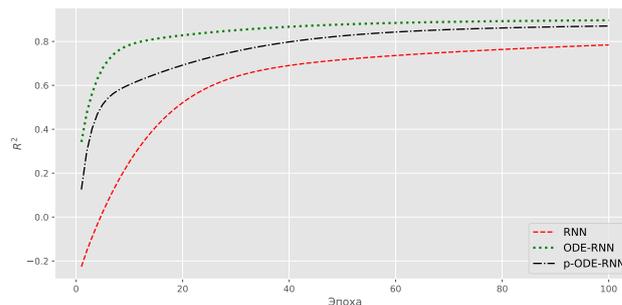


Рис. 11. R^2 моделей RNN, ODE-RNN, p-ODE-RNN (среднемесячная температура (°C) в г. Москве, тестовая выборка).
Fig. 11. R^2 of RNN, ODE-RNN, p-ODE-RNN (average monthly temperature (°C) in Moscow, test data).

Определение 3.2

NFE (number of function evaluations) – количество вычислений функции f (нейронной сети) при численном решении НОДУ.

Количество вычислений нейронной сети при численном решении НОДУ сопоставимо для каждого набора данных и при этом для p-ODE-RNN оно значительно меньше, поскольку $p(t)$ выбрано одним и

тем же и равно $1/t$. Этот факт сильно снижает время обучения p -ODE-RNN.

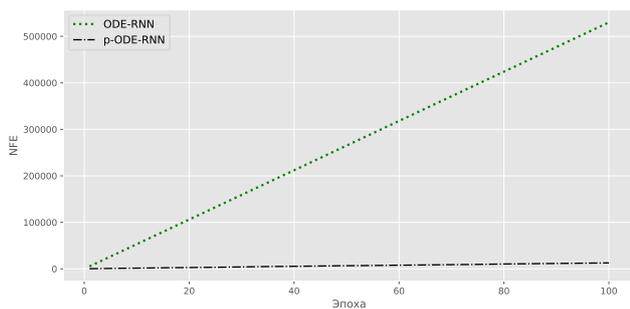


Рис. 12. Кумулятивное значение NFE для ODE-RNN и p -ODE-RNN (цены закрытия индекса IMOEX).
Fig. 12. Cumulative NFE value of ODE-RNN and p -ODE-RNN (closing price of IMOEX index).

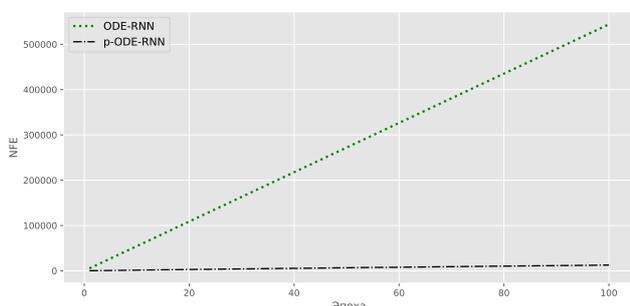


Рис. 13. Кумулятивное значение NFE для ODE-RNN и p -ODE-RNN (среднемесячная температура (°C) в г. Москве).
Fig. 13. Cumulative NFE value of ODE-RNN and p -ODE-RNN (average monthly temperature (°C) in Moscow).

Количество вычислений нейронной сети при численном решении НОДУ сопоставимо для каждого набора данных, и при этом для p -ODE-RNN оно значительно меньше, поскольку $p(t)$ выбрано одним и тем же и равно $1/t$. Этот факт сильно снижает время обучения p -ODE-RNN.

Таблица 3. Среднее время, затраченное на обучение на 1 эпоху (цены закрытия индекса IMOEX)
Table 3. Average time spent on training for 1 epoch (closing price of IMOEX index)

Модель	RNN	ODE-RNN	p -ODE-RNN
Время	0.12 сек.	1.86 сек.	0.20 сек.

Таким образом, на данных цен закрытия индекса IMOEX к 100 эпохе R^2 у p -ODE-RNN меньше на **0.06** (рис. 8), чем у ODE-RNN, а время обучения меньше на **166** сек. Получается, что p -ODE-RNN позволяет получать сопоставимую с ODE-RNN обобщающую способность, при этом затрачивая значительно меньшее время.

Таблица 4. Среднее время, затраченное на обучение на 1 эпоху (среднемесячная температура (°C) в г. Москве)

Table 4. Average time spent on training for 1 epoch (average monthly temperature (°C) in Moscow)

Модель	RNN	ODE-RNN	p -ODE-RNN
Время	0.18 сек.	2.64 сек.	0.28 сек.

Если же использовать набор данных о среднемесячной температуре в г. Москве, то к 100 эпохе R^2 у p -ODE-RNN меньше на **0.03** (рис. 9), чем у ODE-RNN, а время обучения меньше на **236** сек. Аналогично предыдущему набору данных в этом случае обобщающая способность, получаемая при помощи p -ODE-RNN, сопоставима с ODE-RNN при значительно меньших временных затратах.

Из вышеописанных сравнений следует, что нейросетевая архитектура p -ODE-RNN позволяет получать схожее с ODE-RNN и лучше, чем у RNN, качество, затрачивая при этом значительно меньшие временные ресурсы, нежели ODE-RNN.

Литература—References

1. *Hornik K.* Approximation Capabilities of Multilayer Feedforward Networks // *Neural Networks*. 1991. Vol. 4. P. 251–257.
2. Deep Residual Learning for Image Recognition / *K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun* // *The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2016. P. 770–778.
3. *Neural Ordinary Differential Equations / R.T.Q. Chen, Yu. Rubanova, J. Bettencourt, D. Duvenaud* // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2018. Vol. 31. P. 6571–6583.
4. Математическая теория оптимальных процессов / *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко*. М.: Наука, 1983. 392 с.
Matematičeskaja teorija optimal'nyh processov [Mathematical theory of optimal processes] / *L.S. Pontryagin, V.G. Boltyansky, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko*. Moscow: Nauka, 1983. 392 p.
5. *Rubanova Yu., Chen R.T.Q., Duvenaud D.* Latent ODEs for Irregularly-Sampled Time Series // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2019. Vol. 32. P. 5320–5330.
6. *Круглов В.М.* Случайные процессы. М.: Юрайт, 2016. 280 с.
Kruglov V.M. Sluchajnye processy [Random processes]. Moscow: Yurait, 2016. 280 p.

Статья поступила в редакцию 08.11.2021.

УДК 521.1
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-20-35

С.М. ПОЛЕЩИКОВ

**ПОТЕНЦИАЛЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ
ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ В РЕГУЛЯРНЫХ
КООРДИНАТАХ**

г. Сыктывкар

polism@list.ru

S.M. POLESHCHIKOV

**POTENTIALS ALLOWING INTEGRATION OF
THE PERTURBED TWO-BODY PROBLEM IN
REGULAR COORDINATES**

Syktывkar

Аннотация

Изучается задача разделения переменных в некоторых системах координат, полученных с помощью L -преобразований. Даны потенциалы, допускающие разделение регулярных переменных в возмущенной задаче двух тел. Потенциалы содержат произвольные гладкие функции. Рассмотрен пример потенциала, приводящий к построению явного решения задачи в эллиптических функциях. Выделены случаи ограниченного и неограниченного движения. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова:

возмущенная задача двух тел, L -матрицы, интегрируемость, эллиптические функции

Abstract

The problem of separation of variables in some coordinate systems obtained with the use of L -transformations is studied. Potentials are shown that allow separation of regular variables in a perturbed two-body problem. The potential contains two arbitrary smooth functions. An example of a potential is considered allowing explicit solution of the problem in terms of elliptic functions. The cases of bounded and unbounded motion are shown. The results of numerical experiments are given.

Keywords:

perturbed two-body problem, L -matrices, integrability, elliptic functions

Introduction

The integrable cases of motion equations have great practical value. Their significance is determined by the fact that with the help of their solutions one can analyze the motion. In a number of cases integrable problems are used to construct intermediate orbits [1,2]. One of non-trivial examples of integrated systems is the particle motion in a Newtonian field with additional constant acceleration vector. This had been investigated earlier by a number of authors [3–5] and applied to analysis of space flights with constant jet acceleration. In 1970, this problem was studied using regular coordinates obtained from the KS-matrix [6]. In contrast to [6], in [7] integration of the same problem was performed in regular coordinates obtained with the use of L -transformations.

In the present work we consider a problem of constructing potentials allowing integration of the equations of motion. The idea of our approach consists in the following. First, a new dynamic system is constructed, having more degrees of freedom than the original one. To do this, an L -transformation is applied. The theory of L -matrices and their applications is given in [8,9]. Using new coordinates, a general potential is selected, allowing separation of variables in the Hamilton - Jacobi equation. After this, an inverse transform to original coordinates is performed, using explicit formulas. As a basis for selecting general potential with the required integrability property, a well known Stackel theorem is used [10]. This theorem gives necessary and sufficient conditions for separation of variables for orthogonal Hamilton systems, i.e. systems whose Hamiltonian contains only squares of generalized momentums.

Note that separation of variables depends on a choice of a coordinate system. We consider here three

kinds of coordinate systems: regular, bipolar and spherical. The last two systems are introduced in regular coordinates. Canonical equations in regular coordinates are constructed using arbitrary L -transformations from the initial canonical motion equations of the perturbed two-body problem. The new equations have also orthogonal form and are invariant with respect to L -similarity transforms. In the nonperturbed case these equations do not have singularity at the attracting center. Due to invariance with respect to some perturbing potentials allowing integrability, one can introduce two additional angular parameters.

As a result of this approach the general solution of original system is represented in parametric form, where fictitious time plays the role of parameter, while the physical time depends on this fictitious time and initial data. This sort of integrability is sometimes called 'Sundman integrability' [11].

As an example of integrable case of the perturbed two-body problem the special kind of potential is given. In this example the explicit solution of the problem in terms of elliptic functions is expressed, and the criterion of bounded motion is formulated.

Notation. Everywhere below vectors are regarded as column vectors, and are given in bold letters. The sign T placed over the vector or matrix symbol denotes transposition. A quantity evaluated at the initial moment of physical or fictitious time is denoted by zero superscript: $f(0) \equiv f^0$.

1. The separation of variables

Let us consider the Hamiltonian function of the perturbed two-body problem

$$H = H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}|\mathbf{y}|^2 - \frac{\mu}{r} + V, \quad (1)$$

$$\mu = \gamma(m + m_0), \quad r = |\mathbf{x}|,$$

where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ is the position vector of the point of mass m with respect to the point of mass m_0 ; $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ is the generalized impulses ($y_i = \dot{x}_i, i = 1, 2, 3$); γ is the gravitational constant; $V = V(\mathbf{x})$ is the perturbed potential.

For construction of the equations of motion in regular coordinates we will need the L -transformation $\mathbf{z} = L(\mathbf{q})\mathbf{q}$ generated by the L -matrix of the fourth order that has the following properties:

$$L(\mathbf{q})L^T(\mathbf{q}) = L^T(\mathbf{q})L(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}|^2 E \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{R}^4, \quad (2)$$

$$(L(\mathbf{q})\mathbf{p})_i = (L(\mathbf{p})\mathbf{q})_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (3)$$

$$(L(\mathbf{q})\mathbf{p})_i = -(L(\mathbf{p})\mathbf{q})_i, \quad i = p + 1, \dots, 4 \quad (4)$$

$$\forall \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^4.$$

Here E is the unitary matrix. The conditions (2) – (4) simultaneously hold only for $p = 1$ or $p = 3$. The quantity p is the rank of L -transformation. The following theorem can be proved [8, 9].

Theorem 1

An arbitrary L -matrix generating L -transformation of rank three, has the form

$$L(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^T K_1 K_4 \\ \mathbf{q}^T K_2 K_4 \\ \mathbf{q}^T K_3 K_4 \\ \mathbf{q}^T K_4 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

where orthogonal skew-symmetric matrices K_1, K_2, K_3, K_4 are equal to either

$$\begin{aligned} K_i &= a_{1i}\mathcal{U} + a_{2i}\mathcal{V} + a_{3i}\mathcal{W}, \quad i = 1, 2, 3, \\ K_4 &= a_1\mathcal{X} + a_2\mathcal{Y} + a_3\mathcal{Z}, \end{aligned} \quad (6)$$

or

$$\begin{aligned} K_i &= a_{1i}\mathcal{X} + a_{2i}\mathcal{Y} + a_{3i}\mathcal{Z}, \quad i = 1, 2, 3, \\ K_4 &= a_1\mathcal{U} + a_2\mathcal{V} + a_3\mathcal{W}. \end{aligned} \quad (7)$$

The triplet of vectors $\mathbf{e}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})^T, i = 1, 2, 3$, forms an orthonormal basis in \mathbf{R}^3 , and $\mathbf{e} = (a_1, a_2, a_3)^T$ is an arbitrary unitary vector.

Conversely, the arbitrary four skew-symmetric matrices in the form (6) or (7) define the L -matrix by the formula (5).

In the formulae (6) and (7) there are the so-called basic skew-symmetric orthogonal matrices

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The matrices K_i are called *generators* of the L -matrix. If K_1, K_2, K_3, K_4 are calculated by the formulae (6) then $L(\mathbf{q})$ is called *the L -matrix of the first type*, otherwise *the L -matrix of the second type*.

We transfer from variables t, x_i, y_i to the new variables τ, q_j, p_j by the formulae

$$dt = r d\tau,$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \Lambda(\mathbf{q})\mathbf{q}, \\ \mathbf{y} = \frac{1}{2|\mathbf{q}|^2}\Lambda(\mathbf{q})\mathbf{p}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^4 \end{cases} \quad (8)$$

where the matrix $\Lambda(\mathbf{q})$ is found from (5) by rejection of the fourth line:

$$\Lambda(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^T K_1 K_4 \\ \mathbf{q}^T K_2 K_4 \\ \mathbf{q}^T K_3 K_4 \end{pmatrix}.$$

Consider the equations of motion in new variables q_i, p_i

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (9)$$

with the Hamiltonian

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{8}|\mathbf{p}|^2 + p_0|\mathbf{q}|^2 + |\mathbf{q}|^2 V_c(\mathbf{q}), \\ V_c(\mathbf{q}) &= V(\mathbf{x}(\mathbf{q})). \end{aligned} \quad (10)$$

In this system the first equation with $j = 0$ corresponds to transformation of time: $dq_0 = |\mathbf{q}|^2 d\tau$. The variable p_0 is conjugate to q_0 and has a constant value.

If
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0 \quad (11)$$

are initial conditions for the variables of the system with the Hamiltonian (1), then, as it is proved in [12, 13], with the initial values defined by formulae

$$\begin{cases} q_0(0) = 0, & \mathbf{x}^0 = \Lambda(\mathbf{q}^0)\mathbf{q}^0, \\ p_0(0) = -H(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0), & \mathbf{p}^0 = 2\Lambda^T(\mathbf{q}^0)\mathbf{y}^0, \end{cases} \quad (12)$$

the solution of (9) becomes, under the transformation (8), a solution of the system with the Hamiltonian (1) satisfying the initial conditions (11). The function $\mathbf{q}^T K_4 \mathbf{p}$ preserves a constant value along solutions of (9), and with the initial conditions from (12), this value is zero [13]. Hence, the equality $\mathbf{q}^T K_4 \mathbf{p} = 0$ is the first integral of this system. The variable q_0 coincides with physical time t .

Note that the systems with Hamiltonian (1) and (10) have different orders. The choice of initial values by the formulae (12) means that there is a special construction of the system (9) for each trajectory of the system with Hamiltonian (1).

Let's pick up the form of potential V , admitting division of variables. For this purpose we shall take advantage of the theorem proved by Stackel [10].

Theorem 2

The system with Hamiltonian

$$H = \sum_{i=1}^n c_i(q_1, \dots, q_n) \left(\frac{1}{2} p_i^2 + V_i(q_i) \right),$$

admits separation of variables in the Hamilton - Jacobi equation if and only if there is a nonspecial matrix Φ of order n which elements φ_{si} depend only on q_i , such as

$$\Phi \mathbf{c} = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad (13)$$

where $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$.

In this case the integrals of motion will be

$$\begin{aligned} t - \beta_1 &= \sum_{i=1}^n \int_{q_i^0}^{q_i} \frac{\varphi_{1i}(q_i) dq_i}{\sqrt{f_i(q_i)}}, \\ -\beta_s &= \sum_{i=1}^n \int_{q_i^0}^{q_i} \frac{\varphi_{si}(q_i) dq_i}{\sqrt{f_i(q_i)}}, \quad s = 2, \dots, n, \\ p_i &= \sqrt{f_i(q_i)}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (14)$$

where $f_i(q_i) = 2(\alpha_1 \varphi_{1i}(q_i) + \dots + \alpha_n \varphi_{ni}(q_i) - V_i(q_i))$; α_i, β_i ($i = 1, \dots, n$) is constant. As q_i^0 a simple root of the function $f_i(q_i)$ is taken.

Consider again the separation of variables in regular coordinates q_i . The Hamiltonian looks like (10). In this case we have

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = c_3 = c_4 &= \frac{1}{4}, \\ |\mathbf{q}|^2(p_0 + V_c(\mathbf{q})) &= \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 V_s(q_s). \end{aligned}$$

The solution of system (13) will be, for example, the matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

The potential is defined up to a constant. As p_0 is a constant, we obtain

$$\begin{aligned} V_c(\mathbf{q}) &= \frac{1}{4|\mathbf{q}|^2} (V_1(q_1) + V_2(q_2) + \\ &+ V_3(q_3) + V_4(q_4)). \end{aligned} \quad (15)$$

Let's find expression for the potential $V_c(\mathbf{q})$ in original coordinates \mathbf{x} . We notice that variables x_i and r are quadratic forms of the variables q_1, q_2, q_3, q_4 . Using the L -similarity transformation it is possible to choose an L -matrix such as a linear combination $B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3$ that will be equal to the sum of squares of q_i with some coefficients. Note that for any L -matrix we have $r = |\mathbf{q}|^2$. As $V_c(\mathbf{q})$ is to be of the form (15), the required potential in x -coordinates will be the function of the form

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} (Ar + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3). \quad (16)$$

Let's specify a choice of L -matrix with the required property. Introduce the notation

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}, \quad b_i = \frac{B_i}{B}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Suppose that the L -matrix is of the first type. That is, K_1, K_2, K_3 are calculated by the formula (6); for simplicity we assume that $K_4 = -\mathcal{Y}$. Then

$$\begin{aligned} Ar + B(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) &= \\ &= Ar - B\mathbf{q}^T \left[(b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + b_3 a_{13}) \mathcal{U} + \right. \\ &+ (b_1 a_{21} + b_2 a_{22} + b_3 a_{23}) \mathcal{V} + \\ &+ (b_1 a_{31} + b_2 a_{32} + b_3 a_{33}) \mathcal{W} \left. \right] \mathcal{Y} \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Choose the parameters a_{ij} of L -matrix in such a way that the following equalities hold:

$$\begin{cases} b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + b_3 a_{13} = 1, \\ b_1 a_{21} + b_2 a_{22} + b_3 a_{23} = 0, \\ b_1 a_{31} + b_2 a_{32} + b_3 a_{33} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Geometrically, the solution to this system means that the vector $\mathbf{i}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$ coincides with $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, and the vectors $\mathbf{i}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T$, $\mathbf{i}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$ are orthogonal to \mathbf{b} . Moreover, it follows from the structure of the L -matrix that vectors $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$, and \mathbf{i}_3 form a frame. It is evident that the system (17) has infinite number of solutions. We write its general solution. For the first vector we have

$$\mathbf{i}_1 = (b_1, b_2, b_3)^T.$$

For \mathbf{i}_2 and \mathbf{i}_3 we assume, in the case $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$, that

$$\mathbf{i}_2 = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \left(b_2 \cos \alpha + b_1 b_3 \sin \alpha, -b_1 \cos \alpha + b_2 b_3 \sin \alpha, -(b_1^2 + b_2^2) \sin \alpha \right)^T,$$

$$\mathbf{i}_3 = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \left(-b_2 \sin \alpha + b_1 b_3 \cos \alpha, b_1 \sin \alpha + b_2 b_3 \cos \alpha, -(b_1^2 + b_2^2) \cos \alpha \right)^T.$$

If $b_1^2 + b_2^2 = 0$, then $\mathbf{b} = (0, 0, b_3)^T$, $b_3 = \pm 1$. Therefore, we can take the following vectors as the general solution of the system (17):

$$\mathbf{i}_1 = (0, 0, b_3)^T, \quad \mathbf{i}_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)^T, \\ \mathbf{i}_3 = b_3 (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)^T.$$

The quantity $\alpha \in [0, 2\pi]$ plays the role of an arbitrary parameter of the general solution.

After choosing the parameters a_{ij} , the matrix $\Lambda(\mathbf{q})$ is determined uniquely. The solution of (17) gives

$$V_c(\mathbf{q}) = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} (A|\mathbf{q}|^2 - B\mathbf{q}^T \mathcal{U} \mathcal{Y} \mathbf{q}) = \\ = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \left((A+B)q_1^2 + (A+B)q_2^2 + (A-B)q_3^2 + (A-B)q_4^2 \right).$$

Hamiltonian in q -coordinates corresponding to this potential becomes

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} p_i^2 + 4p_0 q_i^2 + 4D_i q_i^2 \right),$$

where $D_1 = D_2 = A + B$, $D_3 = D_4 = A - B$. The canonical system of the equations falls into four subsystems

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{1}{4} p_i, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -2(p_0 + D_i) q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (18)$$

These systems are equivalent to four harmonious oscillators. Integrals of motion are obtained either from (14), or directly from solving (18). Thus, separation of variables for potential (16) is carried out.

For regular q -coordinates, we introduce a new coordinate system. To preserve the canonical form of equations of motion, we use the canonical transformation with generating function

$$\Psi = p_1 \sqrt{Q_1} \cos Q_2 + p_2 \sqrt{Q_1} \sin Q_2 + \\ + p_3 \sqrt{Q_3} \cos Q_4 + p_4 \sqrt{Q_3} \sin Q_4.$$

We obtain

$$q_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} = \sqrt{Q_1} \cos Q_2, \\ q_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} = \sqrt{Q_1} \sin Q_2, \\ q_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial p_3} = \sqrt{Q_3} \cos Q_4, \\ q_4 = \frac{\partial \Psi}{\partial p_4} = \sqrt{Q_3} \sin Q_4, \\ P_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial Q_1} = \frac{1}{2\sqrt{Q_1}} (p_1 \cos Q_2 + p_2 \sin Q_2), \\ P_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial Q_2} = \sqrt{Q_1} (-p_1 \sin Q_2 + p_2 \cos Q_2), \\ P_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial Q_3} = \frac{1}{2\sqrt{Q_3}} (p_3 \cos Q_4 + p_4 \sin Q_4), \\ P_4 = \frac{\partial \Psi}{\partial Q_4} = \sqrt{Q_3} (-p_3 \sin Q_4 + p_4 \cos Q_4). \quad (19)$$

The coordinates Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , obtained from (19), will be called bipolar. From the last four equations we find p_1, p_2, p_3, p_4 :

$$p_1 = 2P_1 \sqrt{Q_1} \cos Q_2 - \frac{P_2}{\sqrt{Q_1}} \sin Q_2, \\ p_2 = 2P_1 \sqrt{Q_1} \sin Q_2 + \frac{P_2}{\sqrt{Q_1}} \cos Q_2, \\ p_3 = 2P_3 \sqrt{Q_3} \cos Q_4 - \frac{P_4}{\sqrt{Q_3}} \sin Q_4, \\ p_4 = 2P_3 \sqrt{Q_3} \sin Q_4 + \frac{P_4}{\sqrt{Q_3}} \cos Q_4. \quad (20)$$

In the new variables the Hamiltonian \mathcal{K} becomes

$$\bar{\mathcal{K}} = \frac{1}{8} \left(4Q_1 P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1} + 4Q_3 P_3^2 + \frac{P_4^2}{Q_3} \right) + \\ + p_0 (Q_1 + Q_3) + (Q_1 + Q_3) \bar{V},$$

where function \bar{V} is expressed in terms of Q_i .

Similar to the above, consider separation of variables in bipolar coordinates. In the notations of theorem 2 we now have

$$c_1 = Q_1, \quad c_2 = \frac{1}{4Q_1}, \quad c_3 = Q_3, \quad c_4 = \frac{1}{4Q_3}.$$

As a solution to (13) one can take the matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{Q_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4Q_1^2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{Q_1} & 0 & \frac{1}{Q_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4Q_3^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

For the potential \bar{V} admitting separation of variables, we

find

$$\bar{V} = \frac{1}{Q_1 + Q_3} \left(Q_1 \bar{V}_1(Q_1) + \frac{1}{4Q_1} \bar{V}_2(Q_2) + Q_3 \bar{V}_3(Q_3) + \frac{1}{4Q_3} \bar{V}_4(Q_4) \right).$$

In q -coordinates we obtain the form

$$V_c = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \left((q_1^2 + q_2^2) \bar{V}_1(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\bar{V}_2(\arctan \frac{q_2}{q_1})}{4(q_1^2 + q_2^2)} + (q_3^2 + q_4^2) \bar{V}_3(q_3^2 + q_4^2) + \frac{\bar{V}_4(\arctan \frac{q_4}{q_3})}{4(q_3^2 + q_4^2)} \right).$$

Passing to x -coordinates, we use the concrete L -transformation

$$\begin{cases} x_1 = 2q_1q_4 + 2q_2q_3, \\ x_2 = -2q_1q_3 + 2q_2q_4, \\ x_3 = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2, \end{cases} \quad (22)$$

which follows from (5), (6) with $K_1 = \mathcal{V}$, $K_2 = \mathcal{W}$, $K_3 = \mathcal{U}$, $K_4 = -\mathcal{Y}$. Taking into account that for any L -matrix the equality $r = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$ holds, we obtain

$$q_3^2 + q_4^2 = \frac{1}{2}(r - x_3), \quad q_1^2 + q_2^2 = \frac{1}{2}(r + x_3).$$

The general solution of the first equation is

$$q_3 = \sqrt{\frac{r - x_3}{2}} \cos \psi, \quad q_4 = \sqrt{\frac{r - x_3}{2}} \sin \psi, \\ \psi \in [0, 2\pi].$$

Then

$$q_1 = \frac{x_1 \sin \psi - x_2 \cos \psi}{\sqrt{2}\sqrt{r - x_3}}, \quad q_2 = \frac{x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi}{\sqrt{2}\sqrt{r - x_3}}.$$

In a similar way we may introduce a parameter, using the second equation,

$$q_1 = \sqrt{\frac{r + x_3}{2}} \cos \psi_1, \quad q_2 = \sqrt{\frac{r + x_3}{2}} \sin \psi_1, \\ \psi_1 \in [0, 2\pi].$$

As is well known [12], with L -transformation for a point in \mathbf{R}^3 at a distance r from the origin, there corresponds a point of some circle of radius \sqrt{r} in \mathbf{R}^4 . The variables q_i contain an arbitrary parameter ψ (or ψ_1), giving parametrization of the given circle. In the original coordinates x_i this parameter disappears. Note that

$$\frac{q_2}{q_1} = \tan \psi_1, \quad \frac{q_4}{q_3} = \tan \psi.$$

We therefore assume functions V_2, V_4 to be constant. Then we arrive at a potential of the form

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \left[G_1((r + x_3)/2) + G_2((r - x_3)/2) \right], \quad (23)$$

where G_1, G_2 are arbitrary smooth functions. The Hamiltonian in bipolar coordinates for this potential takes

the form

$$\bar{K} = Q_1 \left(\frac{P_1^2}{2} + p_0 + \frac{G_1(Q_1)}{Q_1} \right) + \frac{1}{4Q_1} \frac{P_2^2}{2} + Q_3 \left(\frac{P_3^2}{2} + p_0 + \frac{G_2(Q_3)}{Q_3} \right) + \frac{1}{4Q_3} \frac{P_4^2}{2}.$$

In view of the solution (21) for f_i from the theorem 2 we have

$$f_1(Q_1) = 2 \left(\frac{\alpha_1}{Q_1} - \frac{\alpha_2}{4Q_1^2} - \frac{\alpha_3}{Q_1} - p_0 - \frac{G_1(Q_1)}{Q_1} \right), \\ f_2(Q_2) = 2\alpha_2,$$

$$f_3(Q_3) = 2 \left(\frac{\alpha_3}{Q_3} - \frac{\alpha_4}{4Q_3^2} - p_0 - \frac{G_2(Q_3)}{Q_3} \right), \\ f_4(Q_4) = 2\alpha_4.$$

Then integrals of motion are obtained by formulas (14).

Let's consider one more case of separation of variables. Introduce the spherical coordinates in q -coordinates

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{Q_1} \cos Q_2 \cos Q_4, \\ q_2 &= \sqrt{Q_1} \sin Q_2 \cos Q_4, \\ q_3 &= \sqrt{Q_1} \cos Q_3 \sin Q_4, \\ q_4 &= \sqrt{Q_1} \sin Q_3 \sin Q_4. \end{aligned} \quad (24)$$

We supplement the transformation (24) to obtain a canonical transformation of impulses

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\sqrt{Q_1} \cos Q_2 \cos Q_4 P_1 - \\ &\quad - \frac{\sin Q_2}{\sqrt{Q_1} \cos Q_4} P_2 - \frac{\cos Q_2 \sin Q_4}{\sqrt{Q_1}} P_4, \\ p_2 &= 2\sqrt{Q_1} \sin Q_2 \cos Q_4 P_1 + \\ &\quad + \frac{\cos Q_2}{\sqrt{Q_1} \cos Q_4} P_2 - \frac{\sin Q_2 \sin Q_4}{\sqrt{Q_1}} P_4, \\ p_3 &= 2\sqrt{Q_1} \cos Q_3 \sin Q_4 P_1 - \\ &\quad - \frac{\sin Q_3}{\sqrt{Q_1} \sin Q_4} P_3 + \frac{\cos Q_3 \cos Q_4}{\sqrt{Q_1}} P_4, \\ p_4 &= 2\sqrt{Q_1} \sin Q_3 \sin Q_4 P_1 + \\ &\quad + \frac{\cos Q_3}{\sqrt{Q_1} \sin Q_4} P_3 + \frac{\sin Q_3 \cos Q_4}{\sqrt{Q_1}} P_4. \end{aligned} \quad (25)$$

Then in new variables the Hamiltonian will be

$$\bar{K} = \frac{1}{8} \left(4Q_1 P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1 \cos^2 Q_4} + \frac{P_3^2}{Q_1 \sin^2 Q_4} + \frac{P_4^2}{Q_1} \right) + p_0 Q_1 + Q_1 \bar{V}.$$

In the notations of Stackel theorem we have

$$c_1 = Q_1, \quad c_2 = \frac{1}{4Q_1 \cos^2 Q_4}, \\ c_3 = \frac{1}{4Q_1 \sin^2 Q_4}, \quad c_4 = \frac{1}{4Q_1}.$$

In this case the solution of (13) will be the matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{Q_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\cos^2 Q_4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sin^2 Q_4} \\ \frac{1}{4Q_1^2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

The potential \bar{V} , admitting separation of variables, can be written as

$$\bar{V} = \frac{1}{Q_1} \left(Q_1 \bar{V}_1(Q_1) + \frac{1}{4Q_1 \cos^2 Q_4} \bar{V}_2(Q_2) + \frac{1}{4Q_1 \sin^2 Q_4} \bar{V}_3(Q_3) + \frac{1}{4Q_1} \bar{V}_4(Q_4) \right).$$

In view of relations

$$Q_1 \cos^2 Q_4 = q_1^2 + q_2^2 = \frac{r + x_3}{2},$$

$$Q_1 \sin^2 Q_4 = q_3^2 + q_4^2 = \frac{r - x_3}{2},$$

$$Q_1 = |\mathbf{q}|^2 = r,$$

$$\tan^2 Q_4 = \frac{q_3^2 + q_4^2}{q_1^2 + q_2^2} = \frac{1 - x_3/r}{1 + x_3/r},$$

$$Q_2 = \arctan \frac{q_2}{q_1}, \quad Q_3 = \arctan \frac{q_4}{q_3}$$

following from (22), (24), and the remarks above, we obtain the required form of potential in x -coordinates

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \left[G_1(r) + \frac{2A}{r + x_3} + \frac{2B}{r - x_3} + \frac{1}{r} G_2\left(\frac{x_3}{r}\right) \right], \quad (27)$$

where G_1, G_2 are arbitrary smooth functions and A, B arbitrary constants.

Now assume that a Hamiltonian (1) with the potential (27) is given. Applying L -transformation (22), we write the new Hamiltonian in q -coordinates as

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{8} |\mathbf{p}|^2 + p_0 |\mathbf{q}|^2 + G_1(|\mathbf{q}|^2) + \\ & + \frac{A}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{B}{q_3^2 + q_4^2} + \\ & + \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} G_2\left(\frac{q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}{|\mathbf{q}|^2}\right). \end{aligned}$$

Fulfilling canonical transformation (24), (25), we have

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}} = & Q_1 \left(\frac{P_1^2}{2} + p_0 + \frac{G_1(Q_1)}{Q_1} \right) + \\ & + \frac{1}{4Q_1 \cos^2 Q_4} \left(\frac{P_2^2}{2} + 4A \right) + \\ & + \frac{1}{4Q_1 \sin^2 Q_4} \left(\frac{P_3^2}{2} + 4B \right) + \\ & + \frac{1}{4Q_1} \left(\frac{P_4^2}{2} + 4G_2(\cos 2Q_4) \right). \end{aligned}$$

Taking into consideration matrix (26), we then obtain

$$\begin{aligned} f_1(Q_1) &= 2 \left(\frac{\alpha_1}{Q_1} + \frac{\alpha_4}{4Q_1^2} - p_0 - \frac{G_1(Q_1)}{Q_1} \right), \\ f_2(Q_2) &= 2(\alpha_2 - 4A), \quad f_3(Q_3) = 2(\alpha_3 - 4B), \\ f_4(Q_4) &= 2 \left(-\frac{\alpha_2}{\cos^2 Q_4} - \frac{\alpha_3}{\sin^2 Q_4} - \right. \\ & \left. - \alpha_4 - 4G_2(\cos 2Q_4) \right). \end{aligned}$$

The integrals of motion follow from (14).

Note that using an arbitrary L -transformations allows one to introduce two parameters into the potentials obtained. These two parameters are determined by some constant unit vector \mathbf{b} . For example, instead of (27) one can write

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \left[G_1(r) + \frac{2A}{r + \mathbf{b}^T \mathbf{x}} + \frac{2B}{r - \mathbf{b}^T \mathbf{x}} + \frac{1}{r} G_2\left(\frac{\mathbf{b}^T \mathbf{x}}{r}\right) \right].$$

2. Integration of the system of equations in a special case

In this section we perform straightforward integration of a system with potential of the form (23) having additional parameters. Namely, consider the potential

$$V = V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{r} \left(G_1((r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2) + G_2((r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2) \right), \quad (28)$$

where G_1, G_2 are some smooth functions, and $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ an arbitrary unit vector. Note that the vector \mathbf{b} provides two parameters in explicit form. Having in mind only theoretical investigation (integrability problem), one can take \mathbf{b} to be the ort along the x_1 -axis. On the other hand, from the more practical point of view, introducing vector \mathbf{b} gives us additional degree of freedom necessary for applied problems of celestial mechanics. In such problems, the axes are usually connected with some special directions (equinox or zenith). Therefore the presence of the vector \mathbf{b} in potential (28) allows one to turn the coordinate system at one's will.

As G_1, G_2 , one can take, for example, functions of the form

$$\frac{1}{r} (r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})^k, \quad \frac{1}{r} (r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

We consider a finite linear combination

$$V = -\frac{1}{r} \sum_{k=1}^N \left(A_k (r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})^k + B_k (r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})^k \right). \quad (29)$$

Here A_k, B_k are constants. Such a potential was considered in [16]. This case leads in general to hyperelliptic integrals.

For an interested reader there is a problem: find a real perturbing potential which can be approximated by functions of the form (29). Note that the combination

$$-\frac{B}{4r} (r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})^2 + \frac{B}{4r} (r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})^2 = -B \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

gives potential corresponding to a constant force. Applications of such potential were considered in [3–5].

The canonical equations of motion have the form

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= y_i, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{\mu}{r^3}x_i - \frac{x_i}{r^3}\left(G_1((r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2) + \right. \\ &\quad \left. + G_2((r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2r}\left(G_1'((r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2)\left(\frac{x_i}{r} + b_i\right) + \right. \\ &\quad \left. + G_2'(r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2)\left(\frac{x_i}{r} - b_i\right)\right), \end{aligned} \quad (30)$$

where $i = 1, 2, 3$ and the sign prime indicates the derivative.

This system is the same as the equation of the perturbed two-body problem

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} &= \frac{1}{2r}\left(G_1'((r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2) - \right. \\ &\quad \left. - G_2'((r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2)\right)\mathbf{b} + \\ &\quad + \frac{1}{2r^2}\left(G_1'((r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2) + \right. \\ &\quad \left. + G_2'((r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2)\right)\mathbf{x} - \\ &\quad - \frac{1}{r^3}\left(G_1((r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2) + \right. \\ &\quad \left. + G_2((r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})/2)\right)\mathbf{x}. \end{aligned}$$

From this one can see that the perturbation is defined by two forces. The first force is collinear to the fixed vector \mathbf{b} , and its module varies in dependence on vector \mathbf{x} . The second force is the central one.

We are going to show that the system (30) is integrable in regular variables found by L -transformations. Transformation (8) contains an arbitrary L -matrix. A special choice of this matrix allows one to separate the variables in the case of an arbitrary constant unitary vector \mathbf{b} .

Let us consider the term in (10) containing $V_c(\mathbf{q})$. In the new variables this becomes

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}|^2 V_c(\mathbf{q}) &= -G_1((|\mathbf{q}|^2 + \\ &\quad + \mathbf{q}^T(b_1 K_1 + b_2 K_2 + b_3 K_3)K_4 \mathbf{q})/2) - \\ &\quad - G_2((|\mathbf{q}|^2 - \mathbf{q}^T(b_1 K_1 + b_2 K_2 + b_3 K_3)K_4 \mathbf{q})/2). \end{aligned}$$

We assume that the L -matrix has the first type and $K_4 = -\mathcal{Y}$. Then

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}|^2 V_c(\mathbf{q}) &= -G_1((|\mathbf{q}|^2 - C)/2) - \\ &\quad - G_2((|\mathbf{q}|^2 + C)/2), \end{aligned} \quad (31)$$

where

$$\begin{aligned} C &= \mathbf{q}^T \left[(b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + b_3 a_{13})\mathcal{U} + \right. \\ &\quad \left. + (b_1 a_{21} + b_2 a_{22} + b_3 a_{23})\mathcal{V} + \right. \\ &\quad \left. + (b_1 a_{31} + b_2 a_{32} + b_3 a_{33})\mathcal{W} \right] \mathcal{Y} \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Let's select parameters of L -matrixes a_{ij} from a system (17). Then

$$C = \mathbf{q}^T \mathcal{U} \mathcal{Y} \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2.$$

Substituting the found value C in (31), we obtain

$$|\mathbf{q}|^2 V_c(\mathbf{q}) = -G_1(q_1^2 + q_2^2) - G_2(q_3^2 + q_4^2).$$

It follows that the Hamiltonian (10) is represented in the form of the sum

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2,$$

where

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{8}(p_1^2 + p_2^2) + p_0(q_1^2 + q_2^2) - G_1(q_1^2 + q_2^2),$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{8}(p_3^2 + p_4^2) + p_0(q_3^2 + q_4^2) - G_2(q_3^2 + q_4^2).$$

As the value of p_0 is constant, the system (9) splits into two independent subsystems

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial q_i}, \quad i = 3, 4. \quad (33)$$

We integrate the system (32) again. In the bipolar coordinates Hamiltonian \mathcal{K}_1 , and accordingly the system, have the form

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_1 &= \frac{1}{8}\left(4Q_1 P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1}\right) + p_0 Q_1 - G_1(Q_1), \\ \frac{dQ_1}{d\tau} &= Q_1 P_1, \quad \frac{dQ_2}{d\tau} = \frac{P_2}{4Q_1}, \\ \frac{dP_1}{d\tau} &= -\frac{1}{2}P_1^2 + \frac{P_2^2}{8Q_1^2} - p_0 + G_1'(Q_1), \\ \frac{dP_2}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Since the Hamiltonian $\bar{\mathcal{K}}_1$ does not explicitly depend on τ and Q_2 , the system (34) has two integrals,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Q_1 P_1^2 + \frac{P_2^2}{8Q_1} + p_0 Q_1 - G_1(Q_1) &= \frac{E_1}{8}, \\ P_2 &= c_1. \end{aligned} \quad (35)$$

Here, E_1 and c_1 are the constants of integration. Taking these integrals into account, the equation for P_1 may be written in the following form

$$\frac{dP_1}{d\tau} = \frac{c_1^2}{4Q_1^2} - \frac{E_1}{8Q_1} + G_1'(Q_1) - \frac{G_1(Q_1)}{Q_1}.$$

Eliminating $d\tau$ from equations for P_1 , Q_1 and integrating the resulting equation, we find

$$P_1 = \frac{\delta_1}{2Q_1} \sqrt{\Phi_1(Q_1)}, \quad \delta_1 = \pm 1,$$

where

$$\Phi_1(Q_1) = -c_1^2 + E_1 Q_1 + c_2 Q_1^2 + 8Q_1 G_1(Q_1)$$

and c_2 is integration constant defined by

$$c_2 = 4(P_1^0)^2 + \frac{c_1^2}{(Q_1^0)^2} - \frac{E_1}{Q_1^0} - 8 \frac{G_1(Q_1^0)}{Q_1^0}.$$

Due to nonnegativity of Q_1 , from the first equation of the system (34) it follows that

$$\delta_1 = \text{sign } Q_1'.$$

Substituting the derived P_1 to the first equation of (34) we find

$$\tau + c_3 = 2\delta_1 \int_{\xi}^{Q_1} \frac{dQ_1}{\sqrt{\Phi_1(Q_1)}}. \quad (36)$$

Using the continuity principle, the sign before the integral (36) cannot change when $\Phi_1(Q_1)$ is non-zero. Therefore, the function $\tau(Q_1)$ in this case behaves monotonically. Inverting the integral (36), we obtain Q_1 as a function of τ ; we substitute this function in the second equation of the system (34). Then we get

$$Q_2 = \frac{c_1}{4} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{Q_1(\tau)} + c_4, \quad c_4 = Q_2^0.$$

Here c_3 and c_4 are the integration constants. Thus, the values Q_1, Q_2, P_1 are represented as functions of τ . If $\Phi_1(Q_1)$ is a polynomial, the integral (36) is, in general, hyperelliptic.

The integration of the system (33) is done similarly. As a result we find

$$Q_4 = \frac{c_5}{4} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{Q_3(\tau)} + c_8, \quad c_8 = Q_4^0,$$

$$P_3 = \frac{\delta_2}{2Q_3} \sqrt{\Phi_2(Q_3)}, \quad \delta_2 = \text{sign } Q_3', \quad P_4 = c_5,$$

where

$$\Phi_2(Q_3) = -c_5^2 + E_2 Q_3 + c_6 Q_3^2 + 8Q_3 G_2(Q_3).$$

Here c_6 and E_2 are the integration constants defined by the equalities

$$c_6 = 4(P_3^0)^2 + \frac{c_5^2}{(Q_3^0)^2} - \frac{E_2}{Q_3^0} - 8 \frac{G_2(Q_3^0)}{Q_3^0},$$

$$\frac{E_2}{8} = \frac{1}{2} Q_3 P_3^2 + \frac{P_4^2}{8Q_3} + p_0 Q_3 - G_2(Q_3). \quad (37)$$

The function $Q_3(\tau)$ is found by a reversion of the integral

$$\tau + c_7 = 2\delta_2 \int_{\eta}^{Q_3} \frac{dQ_3}{\sqrt{\Phi_2(Q_3)}}. \quad (38)$$

Thus, the values $Q_3, Q_4,$ and P_3 are also determined as functions of the variable τ . The lower limits ξ and η in integrals (36) and (38) are chosen according to the location of Q_1 and Q_3 with respect to the roots of functions $\Phi_1(Q_1)$ and $\Phi_2(Q_3)$, respectively.

The formulae of inverse transformation

$$Q_1 = q_1^2 + q_2^2, \quad \tan Q_2 = \frac{q_2}{q_1},$$

$$Q_3 = q_3^2 + q_4^2, \quad \tan Q_4 = \frac{q_4}{q_3},$$

$$P_1 = \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}, \quad P_2 = -q_2 p_1 + q_1 p_2,$$

$$P_3 = \frac{q_3 p_3 + q_4 p_4}{2(q_3^2 + q_4^2)}, \quad P_4 = -q_4 p_3 + q_3 p_4$$

allow to define initial values of the variables Q_i and P_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

The values of integration constants $c_1, c_2, c_3, c_4,$ and E_1 are determined by the initial values of Q_1, Q_2, P_1, P_2 . These five constant values are connected with each other by the integral (35). In the same way, the constant values $c_5, c_6, c_7, c_8,$ and E_2 are connected by the integral (37) and are defined by initial values of $Q_3, Q_4, P_3,$ and P_4 . From $p_0 = -H(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ we also find relation $E_1 + E_2 = 8\mu$. One has to add the above relations for c_2 and c_6 to these connections. Besides, as the bilinear relation $\mathbf{q}^T K_4 \mathbf{p} = 0$ is the integral of (9), in our case we have

$$\mathbf{q}^T (-Y) \mathbf{p} = -q_2 p_1 + q_1 p_2 + q_4 p_3 - q_3 p_4 = 0.$$

Therefore the equality $P_2 = P_4$, or equivalently $c_1 = c_5$, also holds.

Applying further the first four formulas (19) and (20), we find q_i, p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) as functions of τ . Finally, integrating the two remaining equations of (9), we obtain $p_0 = -H(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ and physical time expressed through τ ,

$$t = q_0 = \int_0^{\tau} |\mathbf{q}|^2 d\tau + c_9 = t_1 + t_2, \quad (39)$$

where

$$t_1 = \int_0^{\tau} Q_1(\tau) d\tau, \quad t_2 = \int_0^{\tau} Q_3(\tau) d\tau, \quad c_9 = 0.$$

Thus, the system (9) is completely integrated and we can, at least locally, find a required trajectory. Here it is necessary to note, that if perturbing potentials G_1, G_2 in (30) are analytic, then, as it is known from a course of the differential equations, the solution of the problem will also be analytic. Let us suppose that the local inversion of integrals (36), (38) appeared to be a globally determined function. In this case we can conclude, by uniqueness of analytic continuation, that this inversion gives not only local, but also global solution of the problem (30). This is the case when functions G_1, G_2 are polynomials of degree two or three. In this case (36) and (38) are the elliptic integrals, for which inversion we have the well developed technique of elliptic functions at our disposal; thus, we have found the solution of (30) in explicit form.

3. Inversion of the integral in elliptic case

In this section we consider one case of functions G_1 and G_2 , which reduces to elliptic integrals. Other cases have been studied in [7, 14, 16, 17]. Let us take the functions G_1 and G_2

$$G_1 = \frac{A_{-1}}{r + \mathbf{b}^T \mathbf{x}} + A_1(r + \mathbf{b}^T \mathbf{x}) + A_2(r + \mathbf{b}^T \mathbf{x})^2, \quad (40)$$

$$G_2 = \frac{B_{-1}}{r - \mathbf{b}^T \mathbf{x}} + B_1(r - \mathbf{b}^T \mathbf{x}) + B_2(r - \mathbf{b}^T \mathbf{x})^2, \quad (41)$$

where $A_{-1}, A_1, A_2, B_{-1}, B_1,$ and B_2 are the parameters of the potential. Then for the functions $\Phi_1(Q_1)$ and $\Phi_2(Q_3)$ in (36) and (38) we have the expressions

$$\Phi_1(Q_1) = \hat{c}_1 + E_1 Q_1 + c_2 Q_1^2 + 32A_2 Q_1^3,$$

$$\Phi_2(Q_3) = \hat{c}_5 + E_2 Q_3 + c_6 Q_3^2 + 32B_2 Q_3^3.$$

Here $\hat{c}_1 = -c_1^2 + 4A_{-1}, c_2 = 16A_1 - 8p_0, \hat{c}_5 = -c_5^2 + 4B_{-1}, c_6 = 16B_1 - 8p_0.$

Firstly, let us note that the variables Q_1 and Q_3 are non-negative by definition, and that from integrals (36) and (38) it follows that the ranges of these variables are determined by the inequalities

$$\Phi_1(Q_1) \geq 0, \quad \Phi_2(Q_3) \geq 0. \quad (42)$$

Let us reverse the integral (36). The number of roots of the polynomial Φ_1 and their positions depend on the value of A_2 . With $A_2 = 0$ the degree of $\Phi_1(Q_1)$ equals to two. The integral (36) is found in elementary functions, so this case is not considered here. We distinguish two cases: $A_2 < 0, A_2 > 0$. Let's note the roots of $\Phi_1(Q_1)$ as ξ_1, ξ_2, ξ_3 . The cases under consideration will be sequentially numbered by parameter i_A .

I. Assume that $A_2 < 0$. In this case $\Phi_1(-\infty) > 0, \Phi_1(+\infty) < 0$. The value $\Phi_1(0) = \hat{c}_1$ may be both positive and negative. For actual motion there should be at least one positive root. The qualitatively different cases of the graph of $\Phi_1(Q_1)$ are shown in Fig. 1 and 2. In the case of three real roots (Fig. 2), the axis of ordinates goes between ξ_1, ξ_2 if $\hat{c}_1 < 0$, and left with respect to ξ_1 or between ξ_2, ξ_3 if $\hat{c}_1 > 0$.

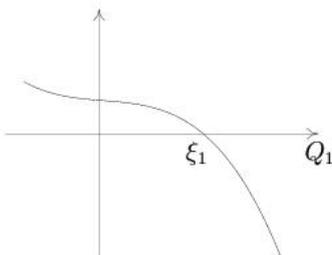


Fig. 1. The graph of $\Phi_1(Q_1)$. The case $A_2 < 0$.
Рис. 1. График $\Phi_1(Q_1)$. Случай $A_2 < 0$.

The case $i_A = 1$. Suppose that Φ_1 has one real root ξ_1 , and that $Q_1^0 \in (0, \xi_1)$ (Fig. 1). Let's write the integral (36) in the form

$$\tau + c_3 = \frac{\delta_1}{2\sqrt{-2A_2}} \int_{\xi_1}^{Q_1} \frac{dz}{\sqrt{(\xi_1 - z)(z^2 + bz + c)}},$$

where the square trinomial $z^2 + bz + c$ has no real roots and is positive for all z , and

$$b = \xi_1 + \frac{c_2}{32A_2}, \quad c = b\xi_1 + \frac{E_1}{32A_2} \quad (c > 0). \quad (43)$$

Apply the substitution

$$z = \xi_1 - a \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad a = \sqrt{\xi_1^2 + b\xi_1 + c}$$

in the integral and put the notations

$$\varphi_1 = 2 \arctan \sqrt{\frac{\xi_1 - Q_1}{a}}, \quad k_1^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_1 + b/2}{a} \right),$$

$$l_1 = 2\sqrt{-2aA_2}.$$

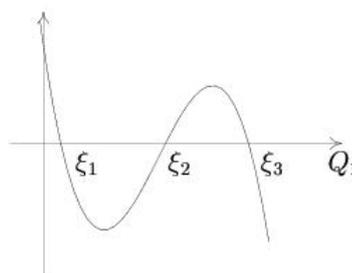


Fig. 2. The graph of $\Phi_1(Q_1)$. The case $A_2 < 0$.
Рис. 2. График $\Phi_1(Q_1)$. Случай $A_2 < 0$.

Then we derive

$$\tau + c_3 = -\frac{\delta_1}{l_1} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (44)$$

Putting here $\tau = 0$, we find an integration constant c_3 :

$$c_3 = -\frac{\text{sign } P_1^0}{l_1} \int_0^{\varphi_1^0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\varphi_1^0 = 2 \arctan \sqrt{\frac{\xi_1 - Q_1^0}{a}}.$$

Check that $k_1^2 < 1$. As $z^2 + bz + c$ has no real roots, we have $b^2 - 4c < 0$. Therefore,

$$\left(\xi_1 + \frac{b}{2} \right)^2 < \xi_1^2 + b\xi_1 + c = a^2 \Rightarrow \left| \frac{\xi_1 + b/2}{a} \right| < 1.$$

Hence, $|k_1| < 1$. Reversing the integral (44) derived above, we come to the function

$$Q_1 = \xi_1 + a - \frac{2a}{1 + \text{cn}(l_1(\tau + c_3); k_1)}.$$

It is easy to see that for $Q_1 \in (0, \xi_1)$ the denominator $\text{cn}(u) + 1 \neq 0$. Calculating the derivative of Q_1 , we get $\delta_1 = -\text{sign } \text{sn}(l_1(\tau + c_3); k_1)$. For the variable Q_2 we

find

$$Q_2 = \frac{c_1\tau}{4(\xi_1 + a)} + \frac{ac_1}{2l_1(\xi_1^2 - a^2)} \left[\int_0^{l_1(\tau+c_3)} \frac{du}{1 + n_1 \operatorname{cn}(u; k_1)} - \int_0^{l_1c_3} \frac{du}{1 + n_1 \operatorname{cn}(u; k_1)} \right] + Q_2^0,$$

$$n_1 = 1 + \frac{2a}{\xi_1 - a}.$$

Note that

$$\frac{n_1^2}{n_1^2 - 1} - k_1^2 = \frac{c}{4a\xi_1} > 0.$$

Therefore for calculating the integral of $(1 + n_1 \operatorname{cn}(u; k_1))^{-1}$ we apply the formula (341.03) [15]

$$\int_0^u \frac{du}{1 + n \operatorname{cn}(u; k)} = \frac{1}{1 - n^2} \left[\Pi\left(u, \frac{n^2}{n^2 - 1}; k\right) - ng_1 \right],$$

$$n^2 \neq 1, \quad (45)$$

with

$$g_1(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k^2 + k'^2 n^2}} \times \ln \left| \frac{\sqrt{k^2 + k'^2 n^2} \operatorname{sn}(u; k) + \sqrt{n^2 - 1} \operatorname{dn}(u; k)}{\sqrt{k^2 + k'^2 n^2} \operatorname{sn}(u; k) - \sqrt{n^2 - 1} \operatorname{dn}(u; k)} \right|,$$

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

Here we note the elliptic integral of the third kind as

$$\Pi(u, n; k) \equiv \int_0^u \frac{dv}{1 - n \operatorname{sn}^2(v; k)}.$$

For t_1 we have

$$t_1 = (\xi_1 + a)\tau - \frac{2a}{l_1} \left[\int_0^{l_1(\tau+c_3)} \frac{du}{1 + \operatorname{cn}(u; k_1)} - \int_0^{l_1c_3} \frac{du}{1 + \operatorname{cn}(u; k_1)} \right].$$

The integral of $(1 + \operatorname{cn}(u; k_1))^{-1}$ is calculated by the formula (341.53) [15]

$$\int_0^u \frac{dv}{1 \pm \operatorname{cn}(v; k)} = u - E(u) \pm \frac{\operatorname{dn}(u; k) \operatorname{sn}(u; k)}{1 \pm \operatorname{cn}(u; k)}, \quad (46)$$

where $E(u) = E(\varphi; k)$ is incomplete elliptic integral of the second kind ($\varphi = \operatorname{am} u$).

The case $i_A = 2$. Suppose that $\Phi_1(Q_1)$ has three real roots $0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, and $Q_1^0 \in (0, \xi_1)$. Let's write (36) as

$$\tau + c_3 = \frac{\delta_1}{2\sqrt{-2A_2}} \int_{Q_1}^{\xi_1} \frac{dz}{\sqrt{(\xi_1 - z)(\xi_2 - z)(\xi_3 - z)}}.$$

Making the substitution $\varphi = \arcsin \sqrt{(\xi_1 - z)/(\xi_2 - z)}$ and reversing the resulting integral, we find

$$Q_1 = \xi_2 - \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{\operatorname{cn}^2(l_1(\tau + c_3); k_1)},$$

where

$$k_1 = \sqrt{\frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_1}}, \quad l_1 = \sqrt{-2A_2(\xi_3 - \xi_1)},$$

$$c_3 = \frac{\operatorname{sign} P_1^0}{l_1} \int_0^{\varphi_1^0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\varphi_1^0 = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_1 - Q_1^0}{\xi_2 - Q_1^0}}.$$

Now we calculate δ_1 . We differentiate Q_1 and use the formula of double argument for elliptic sine. We have

$$Q_1' = 2l_1(\xi_3 - \xi_2) \operatorname{cn}^{-3}(u; k_1) (-1) \operatorname{sn}(u; k_1) \operatorname{dn}(u; k_1) = -l_1(\xi_3 - \xi_2) \operatorname{cn}^{-4}(u; k_1) (1 - k_1^2 \operatorname{sn}^4(u; k_1)) \operatorname{sn}(2u; k_1),$$

where the notation $u = l_1(\tau + c_3)$ is introduced for brevity. Therefore,

$$\delta_1 = \operatorname{sign} Q_1' = -\operatorname{sign} \operatorname{sn}(2l_1(\tau + c_3); k_1).$$

Now we find Q_2

$$Q_2 = \frac{c_1\tau}{4\xi_2} + \frac{c_1(\xi_2 - \xi_1)}{4l_1\xi_1\xi_2} \left[\Pi(l_1(\tau + c_3), n_1; k_1) - \Pi(l_1c_3, n_1; k_1) \right] + Q_2^0, \quad n_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

For the value of physical time, corresponding to the variable Q_1 , we have

$$t_1 = \xi_2\tau + \frac{\xi_1 - \xi_2}{l_1} \left[\int_0^{l_1(\tau+c_3)} \frac{du}{\operatorname{cn}^2(u; k_1)} - \int_0^{l_1c_3} \frac{du}{\operatorname{cn}^2(u; k_1)} \right],$$

where the integral of $\operatorname{cn}^{-2}(u; k_1)$ is calculated by the formula (313.02) [15]

$$\int_0^u \frac{dv}{\operatorname{cn}^2(v; k)} = \frac{1}{1 - k^2} \left((1 - k^2)u - E(u) + \frac{\operatorname{dn}(u; k) \operatorname{sn}(u; k)}{\operatorname{cn}(u; k)} \right).$$

The case $i_A = 3$. The polynomial $\Phi_1(Q_1)$ has three real roots $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, and $Q_1^0 \in (\max\{0, \xi_2\}, \xi_3)$. Let us write (36) as

$$\tau + c_3 = \frac{\delta_1}{2\sqrt{-2A_2}} \int_{\xi_3}^{Q_1} \frac{dz}{\sqrt{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(\xi_3 - z)}}.$$

The reduction of this integral to the standard form (44) is carried out by the substitution $\varphi = \arcsin \sqrt{(\xi_3 - z)/(\xi_3 - \xi_2)}$. The result of reversion can be presented in the form

$$Q_1 = \xi_3 + (\xi_2 - \xi_3) \operatorname{sn}^2(l_1(\tau + c_3); k_1),$$

where the following notations are used

$$k_1 = \sqrt{\frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_1}}, \quad l_1 = \sqrt{-2A_2(\xi_3 - \xi_1)},$$

$$c_3 = -\frac{\operatorname{sign} P_1^0}{l_1} \int_0^{\varphi_1^0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\varphi_1^0 = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_3 - Q_1^0}{\xi_3 - \xi_2}}.$$

For δ_1 we find $\delta_1 = -\operatorname{sign} \operatorname{sn}(2l_1(\tau + c_3); k_1)$. Substitute Q_1 in the formulae for Q_2 and t_1 . We find

$$Q_2 = \frac{c_1}{4l_1\xi_3} \left[\Pi(l_1(\tau + c_3), n_1; k_1) - \Pi(l_1c_3, n_1; k_1) \right] + Q_2^0,$$

$$t_1 = \xi_3\tau + \frac{\xi_2 - \xi_3}{l_1} \left[\int_0^{l_1(\tau+c_3)} \operatorname{sn}^2(u; k_1) du - \int_0^{l_1c_3} \operatorname{sn}^2(u; k_1) du \right].$$

The integral of squared elliptic sine is calculated by the formula [15]

$$\int_0^u \operatorname{sn}^2(v; k) dv = \frac{1}{k^2}(u - E(u)).$$

II. Assume further that $A_2 > 0$. Now we have $\Phi_1(-\infty) < 0$, $\Phi_1(+\infty) > 0$, and $\Phi_1(0) = \hat{c}_1$. The qualitatively different cases of the graph $\Phi_1(Q_1)$ are shown in Fig. 3 and 4.

The case $i_A = 4$. The polynomial $\Phi_1(Q_1)$ has one real root ξ_1 and, accordingly, $Q_1(0) > \max\{0, \xi_1\}$. The graph of $\Phi_1(Q_1)$ in this case is shown in Fig. 3. Let us write the integral (36) as

$$\tau + c_3 = \frac{\delta_1}{2\sqrt{2A_2}} \int_{\xi_1}^{Q_1} \frac{dz}{\sqrt{(z - \xi_1)(z^2 + bz + c)}},$$

where the square trinomial $z^2 + bz + c > 0$ for all z . The coefficients b and c are found by the formulae (43). Applying the substitution

$$z = \xi_1 + a \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad a = \sqrt{\xi_1^2 + b\xi_1 + c}$$

and reversing the resulting integral, we come to the function

$$Q_1 = \xi_1 - a + \frac{2a}{1 + \operatorname{cn}(l_1(\tau + c_3); k_1)},$$

where

$$k_1^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_1 + b/2}{a} \right), \quad l_1 = 2\sqrt{2aA_2}.$$

$$c_3 = \frac{\operatorname{sign} P_1^0}{l_1} \int_0^{\varphi_1^0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\varphi_1^0 = 2 \arctan \sqrt{\frac{Q_1^0 - \xi_1}{a}}.$$

As above, one can show that $k_1^2 < 1$. The resulting function $Q_1(\tau)$ is unbounded, as it has an infinite number of poles on real straight line, which are found by the formula

$$\tau = \frac{4m + 2}{l_1} K(k_1) - c_3, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

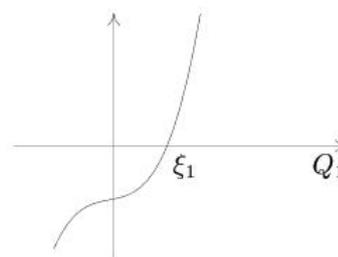


Fig. 3. The graph $\Phi_1(Q_1)$. Case $A_2 > 0$.
Рис. 3. График $\Phi_1(Q_1)$. Случай $A_2 > 0$.

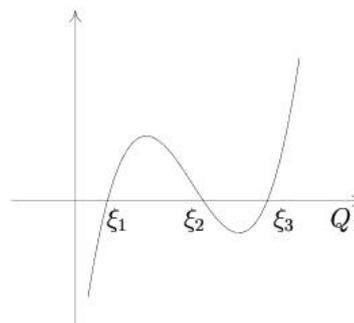


Fig. 4. The graph $\Phi_1(Q_1)$. Case $A_2 > 0$.
Рис. 4. График $\Phi_1(Q_1)$. Случай $A_2 > 0$.

Further we find that $\delta_1 = \text{sign sn}(l_1(\tau + c_3); k_1)$. For variable Q_2 we have

$$Q_2 = \frac{c_1\tau}{4(\xi_1 - a)} - \frac{ac_1}{2l_1(\xi_1^2 - a^2)} \left[\int_0^{l_1(\tau+c_3)} \frac{du}{1 + n_1 \text{cn}(u; k_1)} - \int_0^{l_1c_3} \frac{du}{1 + n_1 \text{cn}(u; k_1)} \right] + Q_2^0,$$

$$n_1 = 1 - \frac{2a}{\xi_1 + a}.$$

Note that

$$\frac{n_1^2}{n_1^2 - 1} = 1 + \frac{1}{n_1^2 - 1} = -\frac{(\xi_1 - a)^2}{4a\xi_1} < 0 < k_1^2.$$

Therefore for calculating the integral of the function $(1 + n_1 \text{cn}(u; k_1))^{-1}$ the formula (45) is to be applied with

$$g_1 = \sqrt{\frac{1 - n^2}{k^2 + k'^2 n^2}} \arctan \left[\sqrt{\frac{k^2 + k'^2 n^2}{1 - n^2}} \frac{\text{sn}(u; k)}{\text{dn}(u; k)} \right],$$

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

If $\xi_1 = 0$ then $n_1 = -1$, and for calculating Q_2 the formula (46) should be used. For t_1 we have

$$t_1 = (\xi_1 - a)\tau + \frac{2a}{l_1} \left[\int_0^{l_1(\tau+c_3)} \frac{du}{1 + \text{cn}(u; k_1)} - \int_0^{l_1c_3} \frac{du}{1 + \text{cn}(u; k_1)} \right].$$

Suppose that Φ_1 has three real roots $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. The graph of the function $\Phi_1(Q_1)$ in this case is given in Fig. 4. This case also splits into two subcases: $\xi_1 < Q_1^0 < \xi_2$ and $\xi_3 < Q_1^0$.

The case $i_A = 5$. Suppose that $Q_1^0 \in (\max\{0, \xi_1\}, \xi_2)$. We write (36) as

$$\tau + c_3 = \frac{\delta_1}{2\sqrt{2A_2}} \int_{\xi_1}^{Q_1} \frac{dz}{\sqrt{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)}}.$$

We apply the substitution $\varphi = \arcsin \sqrt{(z - \xi_1)/(\xi_2 - \xi_1)}$ to this integral and use the notations

$$k_1 = \sqrt{\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1}}, \quad l_1 = \sqrt{2A_2(\xi_3 - \xi_1)}.$$

Then our integral has the standard form

$$\tau + c_3 = \frac{\delta_1}{l_1} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (47)$$

Reversing (47) and using the inverse substitution, we find the required function

$$Q_1 = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) \text{sn}^2(l_1(\tau + c_3); k_1),$$

where

$$c_3 = \frac{\text{sign } P_1^0}{l_1} \int_0^{\varphi_1^0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\varphi_1^0 = \arcsin \sqrt{\frac{Q_1^0 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}}.$$

One can show that $\delta_1 = \text{sign sn}(2l_1(\tau + c_3); k_1)$. For Q_2 we find

$$Q_2 = \frac{c_1}{4l_1\xi_1} \left[\Pi(l_1(\tau + c_3), n_1; k_1) - \Pi(l_1c_3, n_1; k_1) \right] + Q_2^0, \quad n_1 = 1 - \frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

For the first summand of physical time t in (39) we have

$$t_1 = \xi_1\tau + \frac{\xi_2 - \xi_1}{l_1} \left[\int_0^{l_1(\tau+c_3)} \text{sn}^2(u; k_1) du - \int_0^{l_1c_3} \text{sn}^2(u; k_1) du \right].$$

Let us consider the case $i_A = 6$. Suppose $Q_1^0 \in (\max\{0, \xi_3\}, \infty)$. The integral (36) has the form

$$\tau + c_3 = \frac{\delta_1}{2\sqrt{2A_2}} \int_{\xi_3}^{Q_1} \frac{dz}{\sqrt{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)}}.$$

Using the substitution $\varphi = \arcsin \sqrt{(z - \xi_3)/(z - \xi_2)}$ we transform this integral to the standard form (47). The resulting reversion of the integral in this case is the following

$$Q_1 = \xi_2 + \frac{\xi_3 - \xi_2}{\text{cn}^2(l_1(\tau + c_3); k_1)},$$

where

$$k_1 = \sqrt{\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1}}, \quad l_1 = \sqrt{2A_2(\xi_3 - \xi_1)},$$

$$c_3 = \frac{\text{sign } P_1^0}{l_1} \int_0^{\varphi_1^0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\varphi_1^0 = \arcsin \sqrt{\frac{Q_1^0 - \xi_3}{Q_1^0 - \xi_2}}.$$

Now the function $Q_1(\tau)$ has an infinite number of poles of the second order, hence it is unbounded. The poles are found by the formula

$$\tau = \frac{2m + 1}{l_1} K(k_1) - c_3, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Further we find the values δ_1, Q_2, t_1

$$\delta_1 = \text{sign sn}(2l_1(\tau + c_3); k_1),$$

$$Q_2 = \frac{c_1\tau}{4\xi_2} + \frac{c_1(\xi_2 - \xi_3)}{4l_1\xi_2\xi_3} \left[\Pi(l_1(\tau + c_3), n_1; k_1) - \Pi(l_1c_3, n_1; k_1) \right] + Q_2^0, \quad n_1 = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$$t_1 = \xi_2\tau + \frac{\xi_3 - \xi_2}{l_1} \left[\int_0^{l_1(\tau+c_3)} \frac{du}{\text{cn}^2(u; k_1)} - \int_0^{l_1c_3} \frac{du}{\text{cn}^2(u; k_1)} \right].$$

An inversion of the integral (38) is fulfilled in a similar way. This integral and the function Φ_2 differ only by notations from the integral (36) and the function Φ_1 . Therefore, after some evident renaming, we find the expressions for Q_3, Q_4 , and t_2 . We number these cases sequentially by the parameter i_B . Then we have:

$$i_B = 1 \Leftrightarrow B_2 < 0, \eta_2, \eta_3 \in \mathbf{C}, 0 < Q_3^0 < \eta_1 \quad (Q_3 \text{ is bounded}).$$

$$i_B = 2 \Leftrightarrow B_2 < 0, 0 < Q_3^0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 \quad (Q_3 \text{ is bounded}).$$

$$i_B = 3 \Leftrightarrow B_2 < 0, \eta_1 < \eta_2 < Q_3^0 < \eta_3 \quad (Q_3 \text{ is bounded}).$$

$$i_B = 4 \Leftrightarrow B_2 > 0, \eta_2, \eta_3 \in \mathbf{C}, \eta_1 < Q_3^0 \quad (Q_3 \text{ is unbounded}).$$

$$i_B = 5 \Leftrightarrow B_2 > 0, \eta_1 < Q_3^0 < \eta_2 < \eta_3 \quad (Q_3 \text{ is bounded}).$$

$$i_B = 6 \Leftrightarrow B_2 > 0, \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < Q_3^0 \quad (Q_3 \text{ is unbounded}).$$

The study above yield the following theorem.

Theorem 3

The motion of the particle is bounded if and only if at the initial moment both variables Q_1 and Q_3 are restricted on the right by the roots of the polynomials Φ_1 and Φ_2 , correspondingly.

Now we give a definition of retaining potential, introduced in [14].

Definition 1

A potential is named as *retaining*, if for arbitrary initial conditions the motion of a particle in a perturbed field corresponding to this potential is bounded.

Thus, potential (28), where G_1, G_2 are defined by the formulae (40), (41) for $A_2 < 0$ and $B_2 < 0$, is retaining. Generally, the formulae (36), (38) are not elliptic integrals, and we cannot present a solution in explicit form. Nevertheless, the above-stated qualitative result remains true [16].

4. Numerical examples and analysis of motions

In the examples below we consider the motion of a particle in perturbed gravitational field of a planet with spherical density distribution, which gravitational parameter is taken to be $\mu = 398601.3 \text{ km}^3/\text{s}^2$. The perturbing force is defined by the potential (28), with G_1 and G_2 calculated by the formulae (40) and (41). For convenience (to have no fractions), a dimensionless direction vector $\hat{\mathbf{b}}$ for the constant force is used. While doing calculations, this direction vector is assumed to be normalized. The dimensions of parameters A_{-1} and B_{-1} are $[\text{km}^4/\text{s}^2]$, A_1 and B_1 are $[\text{km}^2/\text{s}^2]$, A_2 and B_2 are $[\text{km}/\text{s}^2]$. Calculations and construction of orbits were performed using the Maple system with 32 digits. In each example, for convenience of its analysis, the values of circular and parabolic velocities v_{cir}, v_{par} of Keplerian motion are given. The perturbations under consideration are great, they are non-typical for the Earth's satellites. For this reason, we do not give Keplerian elements of osculating orbits for the corresponding initial values. The initial position of a particle is marked by a point on the corresponding figure.

Example 1. Initial values of coordinates and velocities of a particle:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8200 \text{ km}, & x_2 &= 0 \text{ km}, & x_3 &= 6000 \text{ km}, \\ \dot{x}_2 &= 8.6 \text{ km/s}, & \dot{x}_1 &= \dot{x}_3 &= 0 \text{ km/s}, \\ (v_{cir} &\approx 6.26 \text{ km/s}, & v_{par} &\approx 8.86 \text{ km/s}). \end{aligned}$$

In an unperturbed case these values define an elliptic motion.

Parameters of potential are as follows:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0.004 \text{ km}^4/\text{s}^2, & A_1 &= 0.06 \text{ km}^2/\text{s}^2, \\ A_2 &= 0.2 \cdot 10^{-7} \text{ km}/\text{s}^2, & B_{-1} &= 0.0001 \text{ km}^4/\text{s}^2, \\ B_1 &= 0.008 \text{ km}^2/\text{s}^2, & B_2 &= -0.3 \cdot 10^{-4} \text{ km}/\text{s}^2. \end{aligned}$$

Coordinates of direction vector are $\hat{\mathbf{b}} = (-1, 2, 1)^T$. In the case under consideration the roots of polynomials Φ_1 and Φ_2 are

$$\begin{aligned} \xi_1 &\approx 1478, & \xi_2 &\approx 115346, \\ Q_1^0 &\approx 4631 & \Rightarrow & Q_1^0 \in (\xi_1, \xi_2), \\ \eta_2 &\approx 1707, & \eta_3 &\approx 31031, \\ Q_3^0 &\approx 5529 & \Rightarrow & Q_3^0 \in (\eta_2, \eta_3). \end{aligned}$$

Therefore, the motion is bounded. This is the case $i_A = 5, i_B = 3$.

The coordinates and velocities have been calculated during a time range, corresponding to two revolutions of the particle around the attracting centre without perturbations, that is $\tau \in [0, 2T]$, where T is calculated by the formula

$$T = \pi \sqrt{-\frac{2}{h_k}}, \quad h_k = \frac{|\dot{\mathbf{x}}^0|^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}^0|}. \quad (48)$$

Here h_k is the Keplerian energy. Let's remind that L -transformation doubles the angles at the origin of coordinates.

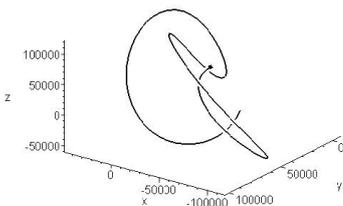


Fig. 5. The case $i_A = 5, i_B = 3$.
Рис. 5. Случай $i_A = 5, i_B = 3$.

Note that in this example the potential is not retaining. Nevertheless, the motion appears to be bounded. The trajectory of the particle is shown in Fig. 5.

Example 2. Initial values of coordinates and velocities of a particle:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8200 \text{ km}, & x_2 &= 0 \text{ km}, & x_3 &= 6000 \text{ km}, \\ \dot{x}_2 &= 9.9 \text{ km/s}, & \dot{x}_1 &= \dot{x}_3 &= 0 \text{ km/s}, \\ (v_{cir} &\approx 6.26 \text{ km/s}, & v_{par} &\approx 8.86 \text{ km/s}). \end{aligned}$$

In unperturbed case the motion belongs to hyperbolic type.

Parameters of potential are as follows:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0.004 \text{ km}^4/\text{s}^2, & A_1 &= 0.006 \text{ km}^2/\text{s}^2, \\ A_2 &= -0.2 \cdot 10^{-7} \text{ km}/\text{s}^2, & B_{-1} &= 0.0001 \text{ km}^4/\text{s}^2, \\ B_1 &= 0.008 \text{ km}^2/\text{s}^2, & B_2 &= -0.3 \cdot 10^{-7} \text{ km}/\text{s}^2. \end{aligned}$$

As A_2 and B_2 are negative we have a retaining potential. Coordinates of direction vector are $\hat{\mathbf{b}} = (1, 2, -1)^T$. The roots of polynomials:

$$\begin{aligned} \xi_2 &\approx 2126, & \xi_3 &\approx 122192633, \\ Q_1^0 &\approx 5529 \Rightarrow Q_1^0 \in (\xi_2, \xi_3), \\ \eta_2 &\approx 1699, & \eta_3 &\approx 81506371, \\ Q_3^0 &\approx 4631 \Rightarrow Q_3^0 \in (\eta_2, \eta_3). \end{aligned}$$

Therefore, the motion is bounded. This is the case $i_A = 3, i_B = 3$. The integration is carried out during the time range corresponding approximately to $t = 1759.74$ days. The particle trajectory is shown in Fig. 6.

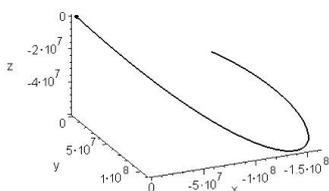


Fig. 6. The case $i_A = 3, i_B = 3$.
Рис. 6. Случай $i_A = 3, i_B = 3$.

Example 3. Initial values of coordinates and velocities of a particle are as follows:

$$\begin{aligned} x_1 &= 6000 \text{ km}, & x_2 &= 0 \text{ km}, & x_3 &= -8000 \text{ km}, \\ \dot{x}_2 &= 7.9 \text{ km/s}, & \dot{x}_1 &= \dot{x}_3 &= 0 \text{ km/s}, \\ (v_{cir} &\approx 6.31 \text{ km/s}, & v_{par} &\approx 8.93 \text{ km/s}). \end{aligned}$$

In an unperturbed case these values define an elliptic motion.

Parameters of a potential are as follows:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0.04 \text{ km}^4/\text{s}^2, & A_1 &= 0.03 \text{ km}^2/\text{s}^2, \\ A_2 &= -0.2 \cdot 10^{-5} \text{ km}/\text{s}^2, & B_{-1} &= 0.1 \cdot 10^{-4} \text{ km}^4/\text{s}^2, \\ B_1 &= -0.0003 \text{ km}^2/\text{s}^2, & B_2 &= 0.3 \cdot 10^{-4} \text{ km}/\text{s}^2. \end{aligned}$$

Here the potential is not retaining. Coordinates of direction vector are $\hat{\mathbf{b}} = (1, 1, 1)^T$. The roots of polynomials are as follows:

$$\begin{aligned} \xi_2 &\approx 2686, & \xi_3 &\approx 20699, \\ Q_1^0 &\approx 4423 \Rightarrow Q_1^0 \in (\xi_2, \xi_3), \\ \eta_1 &\approx 3256, & \eta_2, \eta_3 &\in \mathbf{C}, \\ Q_3^0 &\approx 5577 \Rightarrow Q_3^0 > \eta_1. \end{aligned}$$

Therefore, the motion is unbounded. This is the case $i_A = 3, i_B = 4$.

The integration is carried during the time range corresponding approximately to $t = 3.23$ days. The particle trajectory is shown in Fig. 7.

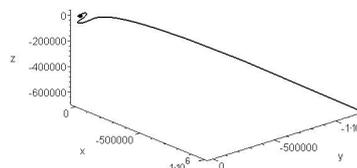


Fig. 7. The case $i_A = 3, i_B = 4$.
Рис. 7. Случай $i_A = 3, i_B = 4$.

In the case of unbounded motion, to define the integration interval firstly one has to find the nearest pole of $Q_1(\tau)$ and/or $Q_3(\tau)$ in the direction of ascending τ . Suppose this nearest pole is at $\tau = \tau_1$. Then we choose a small positive value ε and divide the segment $[0, \tau_1 - \varepsilon]$ into N equal subsegments. The value N is to be selected from practical reasons. The orbit should be visually a smooth curve. In our examples the value $N = 100$ was used. After that, the calculations by the formulae derived above are carried out in equidistant nodes.

The following example demonstrates an application of our formulae for testing a numerical integration method. The original system of motion equations (30) is considered. The Runge-Kutta-Fehlberg method of the eighth order with automatic choice of integration step is tested. The step is chosen by a method of the seventh order. The corresponding pair of programs, implemented in FORTRAN, is below noted as *RKF8(7)*. Integration of equations (30) was performed by *RKF8(7)* with relative local error of the method $\varepsilon = 10^{-13}$, and all calculations were carried out with double precision (real*8). The gravity parameter and the units of measurement are the same as above. A hypothetical particle is considered, repeatedly encountering the attracting centre. The trajectory obtained by explicit formulae is taken to be standard (reference). Its coordinates have been obtained using Maple with 32 digits (in FORTRAN this corresponds to quadruple precision (real*16)).

Example 4. Initial values of coordinates and velocities of a particle are as follows:

$$x_1 = 7000 \text{ km}, \quad x_2 = 0 \text{ km}, \quad x_3 = 6000 \text{ km},$$

Table 1

Estimation of the precision of numerical integration

Таблица 1

Оценка точности численного интегрирования

n	$t(\text{day})$	$\delta H \times 10^{-12}$	$\delta x_1 \times 10^{-12}$	$\delta x_2 \times 10^{-12}$	$\delta x_3 \times 10^{-12}$	$\delta r \times 10^{-12}$
1	.3382444	1	0.2	1	1	0.4
10	4.9080991	2	6	12	213	10
50	24.1940313	41	729	104	1667	108
100	48.4322508	53	4399798	523748	95154	330606
500	242.7821163	294	77898	31418	151259	77206
1000	485.2955201	556	554500	332688	1067003	330900

$$\dot{x}_2 = 7.9 \text{ km/s}, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0 \text{ km/s},$$

$$(v_{cir} \approx 6.58 \text{ km/s}, \quad v_{par} \approx 9.30 \text{ km/s}).$$

In an unperturbed case we have an elliptic motion. Parameters of retaining potential are as follows:

$$A_{-1} = 0.1 \text{ km}^4/\text{s}^2, \quad A_1 = -0.02 \text{ km}^2/\text{s}^2,$$

$$A_2 = -0.2 \cdot 10^{-5} \text{ km}/\text{s}^2, \quad B_{-1} = -0.004 \text{ km}^4/\text{s}^2,$$

$$B_1 = -0.001 \text{ km}^2/\text{s}^2, \quad B_2 = -0.001 \text{ km}/\text{s}^2.$$

Coordinates of direction vector are $\hat{\mathbf{b}} = (-1, -3, 1)^T$. The roots of polynomials Φ_1 and Φ_2 are as follows:

$$\xi_2 \approx 764, \quad \xi_3 \approx 58639,$$

$$Q_1^0 \approx 4459 \Rightarrow Q_1^0 \in (\xi_2, \xi_3),$$

$$\eta_2 \approx 504, \quad \eta_3 \approx 7209,$$

$$Q_3^0 \approx 4761 \Rightarrow Q_3^0 \in (\eta_2, \eta_3).$$

Therefore, the motion is bounded. The case $i_A = 3, i_B = 3$.

The calculations were carried out during the time ranges corresponding to 1, 10, 50, 100, 500, and 1000 revolutions of the particle around attracting centre without perturbations. The trajectory of the particle for three revolutions is shown in Fig. 8.

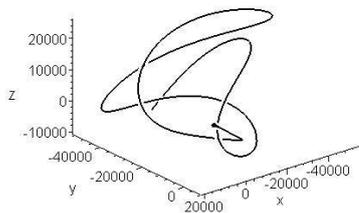


Fig. 8. The case $i_A = 3, i_B = 3$. The motion is bounded. Рис. 8. Случай $i_A = 3, i_B = 3$. Движение ограничено.

Table 1 contains the values, near the end of the integration interval, of the relative error for the energy constant δH , the coordinates of particle position vector x_i , and its absolute value r

$$\delta H = \frac{|H^0 - H|}{|H|}, \quad \delta x_i = \frac{|x_i - x_i^c|}{|x_i|}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\delta r = \frac{|r - r^c|}{r},$$

where H^0 is the value at the initial moment, H at an arbitrary moment; x_i^c, r^c are the values found by exact formulae. In the second column the intervals of physical time t (in days) are given, for which numerical integration of system (30) was carried out.

From these data we can see that if the integration interval increases, the relative errors of H and x_3 do not decrease. For coordinates x_1, x_2 , and absolute value r , with $n = 100$, these errors increase, then they diminish, and then increase again.

The numerical examples show efficiency of the formulae we obtained. Besides, the theorem 3 allows to determine, given the initial position and velocity of a particle, whether its motion is bounded or unbounded.

Conclusion

In this paper we consider three sorts of coordinates (regular q -coordinates, bipolar coordinates, spherical coordinates). For each of the systems, the forms of potentials admitting complete separation of variables are given. Thus, the original equations for such potentials allow integration “in the sense of Sundman”. In a similar way one can build, for regular q -coordinates, other coordinate systems for which Hamiltonian has orthogonal form, and with the use of Stackel theorem build potentials allowing the above-mentioned integrability.

Application of these potentials is a separate and independent problem. These potentials are of practical importance, which approximate some real forces.

The author is grateful to professor A.Zhubr for useful comments and discussions.

Литература—References

1. *Aksenov E.P.* Teorija dvizhenija iskusstvennyh sputnikov zemli [Theory of the motion of the Earth’s artificial satellites]. Moscow: Nauka, 1977. 360 p. *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников земли. М.: Наука, 1977. 360 с.
2. *Ferrandiz J.M., Floria L.* Towards a systematic definition of intermediaries in the theory of artificial satellites // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1991. Vol. 42. P. 401 – 407.
3. *Beletsky V.V.* Traektorii kosmicheskikh poletov s postojannym vektorom reaktivnogo uskorenija [Trajectories of Space Flights with a Constant Vector of Reactive Acceleration] // Cosmic Research. 1964. Vol. 2, No. 3. P. 787 – 807. *Белецкий В.В.* О траекториях космических

- полетов с постоянным вектором реактивного ускорения // Космические исследования. 1964. Т. 2, № 3. С. 787 – 807.
4. *Kunitsyn A.L.* O dvizhenii rakety v central'nom silovom pole s postojannym vektorom reaktivnogo uskorenija [Rocket Motion in a Central Force Field with a Constant Vector of Reactive Acceleration] // Cosmic Research. 1966. Vol. 4, No. 2. P. 324 – 332.
Куницын А.Л. О движении ракеты в центральном силовом поле с постоянным вектором реактивного ускорения // Космические исследования. 1966. Т. 4, № 2. С. 324 – 332.
 5. *Demin V.G.* Dvizhenie iskusstvennogo sputnika v nentral'nom pole tjagotenija [The motion of an artificial satellite in the eccentric gravitational field]. Moscow: Nauka, 1968. 352 p.
Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
 6. *Kirchgraber U.* A problem of orbital dynamics, which is separable in KS -variables // Celest. Mech. 1971. Vol. 4. P. 340 – 347.
 7. *Poleshchikov S.M.* One integrable case of the perturbed two-body problem // Cosmic Res. Vol. 42, No. 4. P. 398 – 407.
 8. *Poleshchikov S.M., Kholopov A.A.* Teorija L -matric i reguljarizacija uravnenij dvizhenija v nebesnoj mehanike [Theory of L -matrices and regularization of motion equations in Celestial Mechanics]. Syktyvkar: Syktyvkar Forest Inst., 1999. 255 p.
Полещиков С.М., Холопов А.А. Теория L -матриц и регуляризация уравнений движения в небесной механике. Сыктывкар: СЛИ, 1999. 255 с.
 9. *Poleshchikov S.M.* Regularization of motion equations with L -transformation and numerical integration of the regular equations // Celest. Mech. and Dyn. Astr. 2003. Vol. 85, No. 4. P. 341 – 393.
 10. *Pars L.A.* A treatise on analytical dynamics. NY: Wiley, 1965. 636 p.
 11. *Kholshevnikov K.V.* Ob integriruемости v nebesnoj mehanike [On the integrability in celestial mechanics] // Analiticheskaja nebesnaja mehanika [Analytical celestial mechanics]. Kazan: Kazan University publ., 1990. P. 5 – 10.
Холшевников К.В. Об интегрируемости в небесной механике // Аналитическая небесная механика. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. С. 5 – 10.
 12. *Stiefel E., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1971. 304 p.
 13. *Poleshchikov S.M.* Regularization of canonical equations of the two-body problem using a generalized KS -matrix // Cosmic Res. 1999. Vol. 37, No. 3. P. 302 – 308.
 14. *Poleshchikov S.M.* Motion of a particle in a perturbed field of the attracting centre // Cosmic Res. 2007. Vol. 45, No. 6. P. 522 – 535.
 15. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Berlin: Springer-Verlag, 1954. 355 p.
 16. *Poleshchikov S.M., Zhubr A.V.* A set of potentials allowing integration of the perturbed two-body problem in regular coordinates // Cosmic Res. 2008. Vol. 46, No. 3. P. 202 – 214.
 17. *Poleshchikov S.M.* Integriruemyj sluchaj voz-mushhennoj zadachi dvuh tel, porozhdajushhej elementarnye funkicii [An integrable case of the perturbed two-body problem producing elementary functions] // Proc. of Syktyvkar Forest Inst. 2006. Vol. 6. P. 31 – 57.
Полещиков С.М. Интегрируемый случай возмущенной задачи двух тел, порождающей элементарные функции // Труды СЛИ. 2006. Т. 6. С. 31 – 57.

Статья поступила в редакцию 01.11.2021.

УДК 530.145, 512.81
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-36-41

И.В. КОСТЯКОВ*, В.В. КУРАТОВ*, Н.А. ГРОМОВ

КОНТРАКЦИИ АЛГЕБР ЛИ И УРАВНЕНИЕ ЛИНДБЛАДА

*Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru
gromovna48@gmail.com

I.V. KOSTYAKOV*, V.V. KURATOV*, N.A. GROMOV

LIE ALGEBRA CONTRACTIONS AND THE LINDBLAD EQUATION

*Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktывkar

Аннотация

Динамика открытой квантовой системы приводит к декогеренции, что сопровождается предельными переходами в алгебре Ли наблюдаемых и появлению абелевых подалгебр. Возможно поставить и обратную задачу – по заданной контракции алгебры Ли найти динамику открытой квантовой системы, задаваемой уравнением Линдблада. В работе предложены примеры нахождения уравнения Линдблада по известным контракциям алгебры $su(3)$.

Ключевые слова:

открытые квантовые системы, алгебра наблюдаемых, контракции алгебр Ли

Abstract

The dynamics of an open quantum system leads to decoherence, which is accompanied by limiting transitions in the Lie algebra of observables and appearance of abelian subalgebras. It is possible to set an inverse problem as well – by a given Lie algebra contraction to find the dynamics of an open quantum system given by the Lindblad equation. The paper proposes examples of finding the Lindblad equation by the known contractions of algebra $su(3)$.

Keywords:

open quantum systems, algebra of observables, contractions of Lie algebras

Введение

Первой фундаментальной физической теорией, хорошо описывающей большой круг явлений, была классическая механика. Квантовая механика значительно расширила этот круг. Одним из способов описания квантового мира является матрица плотности. Ее элементам удобно сопоставлять некоторую многомерную фигуру. Например, с помощью сферы Блоха можно описывать состояния кубита. Тогда классический мир будет соответствовать отрезку вдоль оси z внутри сферы Блоха между ее полюсами или диагональным элементом матрицы плотности, а квантовый – всей остальной части внутри этой сферы. Характерными особенностями квантовой теории являются возможность суперпозиции разных состояний, которая описывается недиагональными элементами матрицы плотности, и принцип неопределенности, связанный с некоммутативностью наблюдаемых.

В физике более общая новая теория всегда должна содержать в себе старую в качестве предельного случая. Помимо предела, когда постоянная Планка стремится к нулю, существуют и другие предельные переходы, связывающие математический аппарат квантовой и классической механики, которые могут быть описаны с помощью контракций алгебр Ли.

Для замкнутой системы эволюция матрицы плотности в шредингеровском представлении определяется уравнением фон Неймана или квантовым уравнением Лиувилля [1–5]

$$\dot{\rho}(t) = \frac{i}{\hbar} [\rho(t), H] = \mathcal{L}(t)\rho(t), \quad (1)$$

которое сохраняет все квантовые свойства системы, в том числе суперпозицию и некоммутативность.

$\mathcal{L}(t)$ часто называют супероператором Лиувилля. Если гамильтониан H не зависит от времени, то решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t) = \Lambda_t\rho(0) = e^{\mathcal{L}t}\rho(0), \quad (2)$$

где $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, $\Lambda_t = e^{\mathcal{L}t}$.

Если перенести зависимость от времени матрицы плотности к наблюдаемым, то получим динамику наблюдаемых в представлении Гейзенберга

$$\dot{A}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)] = \mathcal{L}^\sharp(t)A(t), \quad (3)$$

$$A(t) = U^\dagger(t)A(0)U(t) = \Lambda^\sharp(t)A(0) = e^{\mathcal{L}^\sharp t}A(0). \quad (4)$$

Унитарная эволюция (3), (4) не меняет тип алгебры Ли наблюдаемых.

В случае слабого взаимодействия с окружением динамика открытых квантовых систем с хорошей точностью может быть представлена уравнением Линдблада [3–5]

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H] + \sum_k \gamma_k \left(V_k \rho V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho\} \right) = \mathcal{L}(t)\rho(t), \quad (5)$$

в котором к правой части уравнения (1), описывающего унитарную часть динамики, добавляется слагаемое, описывающее диссипативную часть. Операторы V_k обычно называют операторами Линдблада, \mathcal{L} в этом случае называют супероператором Линдблада, γ_k – скорости релаксации для различных видов затухания открытой квантовой системы.

Решение уравнения (5) для супероператора Линдблада \mathcal{L} , не зависящего от времени, может быть представлено в виде, аналогичном (2)

$$\rho(t) = \Lambda_t\rho(0) = e^{\mathcal{L}t}\rho(0). \quad (6)$$

Взаимодействие с окружением обычно приводит к потере квантовых свойств, и система начинает проявлять классическое поведение. Это влечет зануление недиагональных элементов матрицы плотности и отражается на алгебре наблюдаемых, в которой могут появиться дополнительные абелевы подалгебры.

Образно говоря, например, для двухуровневой системы уравнение (1) только вращает начальное состояние и не приближает его к оси z (классическому миру), а уравнение (5) может в асимптотике приблизить начальное квантовое состояние к оси z и сделать его классическим. Таким образом динамика, задаваемая уравнениями Линдблада (5), (6), сжимает квантовый мир (шар Блоха) до классического (отрезок на оси z). Контракция групп (алгебр) Ли представляет собой похожее сжатие в пространстве структурных констант группы, приводящее к обнулению коммутаторов. Все это наводит на мысль о возможности описать переходы из квантового мира в классический при взаимодействии с окружением на языке контракций.

В картине Гейзенберга для наблюдаемых A уравнение Линдблада имеет вид

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}[H, A] + \sum_k \gamma_k \left(V_k^\dagger A V_k - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, A\} \right) = \mathcal{L}^\sharp(t)A(t), \quad (7)$$

и зависимость от времени наблюдаемых $A(t)$ может быть представлена следующим образом

$$A(t) = \Lambda_t^\sharp(A) = e^{\mathcal{L}^\sharp t}A(0). \quad (8)$$

При этом изменение во времени коммутационных соотношений при отображении (8)

$$[A_i, A_j]_t \equiv (\Lambda_t^\sharp)^{-1}[\Lambda_t^\sharp(A_i), \Lambda_t^\sharp(A_j)] \equiv C_{ij}^k(t)A_k \quad (9)$$

представляет собой типичное преобразование коммутационных соотношений при контракции групп (алгебр) Ли [6–8]. В пределе $t \rightarrow \infty$, при некоторых условиях, исходная алгебра переходит в новую, которая называется контракцией исходной алгебры Ли [6–8]

$$[A_i, A_j]_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} [A_i, A_j]_t = C_{ij}^k(\infty)A_k. \quad (10)$$

В физике метод получения новых групп (алгебр) Ли с помощью контракций давно известен [6–8]. При этом в новой алгебре появляются абелевы подалгебры, что как раз и может использоваться для описания потери системой квантовых свойств. Это указывает на наличие связи между диссипативными процессами в открытых квантовых системах и контракциями групп (алгебр) Ли, которая анализируется в работах [9–11]. В трудах [12–14] приводятся примеры контракций алгебры $su(2)$ в квантовых каналах кубита, а в [15, 16] исследованы предельные переходы в алгебре $su(3)$ для трехуровневых систем. Высокоэнергетические пределы стандартной модели исследовались в [17] при предположении, что калибровочная группа при высоких температурах (энергиях) становится проще и может быть получена с помощью контракции, параметр которой обратно пропорционален температуре Вселенной.

В работе [18] предложены некоторые возможные контракции унитарной алгебры $su(3)$. В данной статье мы покажем, как каждой контракции из [18] можно сопоставить уравнение Линдблада.

1. Контракции Иненно-Вигнера алгебр Ли

Напомним определение контракции Иненно-Вигнера. Рассмотрим алгебру Ли g и выделим в ней подалгебру g_0 . Остальные генераторы образуют подмножество g_1 . Коммутационные соотношения общего вида схематично можно представить так

$$[g_0, g_0] = g_0, \quad [g_0, g_1] = g_0 + g_1, \quad [g_1, g_1] = g_0 + g_1. \quad (11)$$

Умножим все генераторы из g_1 на ε . Тогда коммутационные соотношения (11) изменятся так

$$[g_0, g_0]_\varepsilon = g_0, \quad [g_0, g_1]_\varepsilon = \varepsilon g_0 + g_1,$$

$$[g_1, g_1]_\varepsilon = \varepsilon^2 g_0 + \varepsilon g_1.$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ будем иметь новую алгебру Ли с новыми коммутационными соотношениями

$$[g_0, g_0]_0 \in g_0, \quad [g_0, g_1]_0 \in g_1, \quad [g_1, g_1]_0 = 0. \quad (12)$$

Таким образом, классификацию возможных контракций Иненю-Вигнера для алгебры g можно связать с возможными выборами инвариантной подалгебры g_0 .

В работе [18] исследовались общие диагональные преобразования генераторов алгебры $su(3)$ в базе матриц Гелл-Манна вида

$$\vec{\lambda}' = T_\varepsilon \vec{\lambda}, \quad (13)$$

где $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8)^t$, λ_i – матрицы Гелл-Манна, T_ε – диагональная матрица, у которой на диагонали стоят параметры ε_i . При определенных условиях на параметры ε_i возникают те или иные предельные переходы (контракции) алгебры Ли $su(3)$. В случае контракций Иненю-Вигнера на диагонали будут стоять либо 1, либо ε . Количество единиц равно размерности подалгебры g_0 , а количество параметров ε – размерности g_1 .

Далее мы приведем примеры, как заданным отображениям (13) можно сопоставить уравнение Линдблада, решения которых выражались бы отображением (13). Все примеры будут связаны с трехуровневыми системами и алгеброй $su(3)$. Наблюдаемые из множества g_1 при этом теряют свои квантовые свойства, образуя абелеву подалгебру. Наблюдаемые из подалгебры g_0 устойчивы по отношению к внешнему воздействию.

Как уже отмечалось выше, типы контракций (13) могут быть связаны с тем или иным выбором подалгебры g_0 и ее размерностью. Если размерность g_0 равна 0, то все $\varepsilon_i = \varepsilon$ – это приводит к контракции $su(3)$ до абелевой алгебры. Этому случаю будет соответствовать эволюция матрицы плотности трехуровневой системы (кутрита) до смешанной с равными вероятностями всех трех состояний (цвета кварков, значения спина, населенностей уровней и т.д.). Например, в работах [19, 20] была предложена интересная гипотеза, что конфайнмент кварков может быть описан как декогеренция цветового состояния частицы в смешанное квантовое состояние с равными вероятностями для разных цветов

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \frac{1}{3} I. \quad (14)$$

Следующей возможностью является выбор одномерной подалгебры g_0 из $su(3)$. Этой контракции будет соответствовать эволюция матрицы плотности к стационарному состоянию, которое будет принадлежать этой подалгебре. Например, если эта одномерная подалгебра принадлежит подалгебре Картана и система при взаимодействии с окружением стремится к термодинамическому равновесию, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(\infty) & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(\infty) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}(\infty) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где для гиббсовского состояния

$$\rho_{ii}(\infty) = \frac{e^{-\left(\frac{E_i}{kT}\right)}}{Z}, \quad Z = \sum_{i=1}^3 e^{-\left(\frac{E_i}{kT}\right)}, \quad (16)$$

E_i – энергия i -го уровня, T – температура.

Можно выбрать одномерную подалгебру в виде линейной комбинации генераторов подалгебры Картана и остальных генераторов. Этому будет соответствовать динамика матрицы плотности к состоянию, при котором сохраняется когерентность. Например, при включении внешнего поля, которое в гамильтониане взаимодействия пропорционально генератору λ_4 , одномерная подалгебра будет представлять линейную комбинацию генераторов λ_4 и $[\lambda_4, \lambda_5]$, и матрица плотности будет стремиться к

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(\infty) & 0 & \rho_{13}(\infty) \\ 0 & \rho_{22}(\infty) & 0 \\ \rho_{31}(\infty) & 0 & \rho_{33}(\infty) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Третья возможность – выделить в качестве g_0 двумерную подалгебру Картана. Этому будут соответствовать, например, контракции Кэпи-Клейна [8, 17], описывающие переход от $su(3)$ к более простой симметрии в КХД ранней Вселенной или предельные переходы в алгебре наблюдаемых при поперечной релаксации и декогеренции в трехуровневых системах. Матрица плотности в этом случае будет стремиться к (15), и $\rho_{ii}(\infty) = \rho_{ii}(0)$.

Еще одна возможность – взять трехмерную подалгебру $so(3)$ или $su(2)$, как g_0 . Например, для случая $so(3)$ это будет описывать сохранение когерентности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} 1/3 & -ia_2(0) & -ia_5(0) \\ ia_2(0) & 1/3 & -ia_7(0) \\ ia_5(0) & ia_7(0) & 1/3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

На возможность контракции к алгебре $su(2)$ или $so(3)$ с сохранением когерентности и соответствующую этой контракции спиновую динамику указал А.А. Карабанов. Он же предложил еще одну интересную контракцию от алгебры $su(2^m)$ к $so(2m)$ для цепочки спинов (кубитов), в которой майорановский спинор, устойчивый к декогеренции, связан с подалгеброй $so(2m)$ [21].

2. Примеры

Собственные значения l_i супероператора Ливилля \mathcal{L} (\mathcal{L}^\sharp) содержат информацию о скоростях релаксации, процессах диссипации и декогеренции и, следовательно, определяют ключевые физические свойства системы [22].

Если l_i – собственные значения \mathcal{L}^\sharp , то соответствующие собственные значения отображения $\Lambda_t^\sharp = e^{t\mathcal{L}^\sharp}$ равны $\lambda_i = e^{l_i t}$ и лежат внутри единичного круга комплексной плоскости, $|\lambda_i| \leq 1$, так как $\text{Re } l_i < 0$. Это квантовый аналог теоремы Фробениуса-Перрона. Собственные значения $l_i = 0$ соответствуют собственным состояниям, принадлежащим инвариантной подалгебре g_0 , $\Lambda_t^\sharp(g_0) = g_0$.

Покажем теперь, как можно по заданному преобразованию контракции (13) построить уравнение Линдблада (5) для матрицы плотности или (7) для наблюдаемых.

Пусть $\varepsilon = e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$. Тогда $\Lambda_t = T_\varepsilon$. Собственные значения \mathcal{L}^\sharp равны нулю для генераторов λ_i из подалгебры g_0 и равны $-\gamma$ для генераторов $\lambda_i \in g_1$. Тогда в базисе наблюдаемых λ_i , которые в этом случае будут собственными векторами для \mathcal{L}^\sharp , уравнения Линдблада (7) для наблюдаемых выглядят очень просто

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= 0, & \lambda_i &\in g_0, \\ \dot{\lambda}_i &= -\gamma\lambda_i, & \lambda_i &\in g_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Нам осталось только найти гамильтониан H и операторы Линдблада V_k , чтобы представить уравнения (19) в виде (7). Далее мы приведем несколько частных примеров решения этой задачи.

Пример 1 [10]. Рассмотрим алгебру $su(3)$ и ее контракцию Иненю-Вигнера, в которой в качестве g_0 выберем 4-мерную подалгебру $g_0 = u(1) + su(2)$ с базисом из $\lambda_3, \lambda_8, \lambda_6, \lambda_7$, а генераторами из g_1 являются матрицы Гелл-Манна $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5$. Преобразование контракции T_ε

$$\begin{aligned} T_\varepsilon g = g_0 + \varepsilon g_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23}^* & a_{33} \end{pmatrix} + \\ &+ \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12}^* & 0 & 0 \\ a_{13}^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Это частный случай контракций Кэли-Клейна (пример 1 из [18]) и случая поперечной релаксации.

Приведем частное решение, когда гамильтониан и операторы Линдблада принадлежат подалгебре Картана $su(3)$ – диагональным бесследовым матрицам или линейной комбинации λ_3 и λ_8 . В этом случае гамильтониан можно положить равным нулю, а V взять в виде

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Уравнение Линдблада для матрицы плотности

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \gamma \left(V\rho V^+ - \frac{1}{2} \{V^+V, \rho\} \right) = \\ &= -\gamma \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 0 & 0 \\ \rho_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

и его решение

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \Lambda_t \rho(0) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0) = \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & e^{-\gamma t} \rho_{12}(0) & e^{-\gamma t} \rho_{13}(0) \\ e^{-\gamma t} \rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) & \rho_{23}(0) \\ e^{-\gamma t} \rho_{31}(0) & \rho_{32}(0) & \rho_{33}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

как раз соответствуют преобразованию T_ε (20). В асимптотике на больших временах матрица плотности сожмется до области $g_0 = u(1) + su(2)$, которая будет устойчивой к воздействию окружения.

Несложно убедиться, что уравнения (19) для наблюдаемых могут быть записаны в виде уравнений Линдблада

$$\dot{A} = \mathcal{L}^\sharp A = \gamma \left(V^+AV - \frac{1}{2} \{V^+V, A\} \right). \quad (24)$$

Такая динамика сохраняет частичную когерентность (возможность суперпозиции между вторым и третьим уровнями). Интерес представляет более общий выбор гамильтониана и операторов Линдблада из g_0 .

Пример 2 [11]. Рассмотрим алгебру $su(3)$ и выберем в качестве g_0 подалгебру Картана $\alpha\lambda_3 + \beta\lambda_8 \in g_0$. Это частный случай контракций Кэли-Клейна и частный вариант полной декогеренции (поперечной релаксации), когда скорости релаксации γ_i равны. В g_1 теперь входят все генераторы, отвечающие за квантовые особенности системы и недиагональные элементы матрицы плотности $-(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7) \in g_1$. Преобразование контракции T_ε в этом случае равно

$$\begin{aligned} T_\varepsilon g = g_0 + \varepsilon g_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \\ &+ \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12}^* & 0 & a_{23} \\ a_{13}^* & a_{23}^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

Гамильтониан и операторы Линдблада принадлежат подалгебре Картана $su(3)$. Возьмем $H = 0$, так как он не влияет существенным образом на динамику, а в качестве операторов Линдблада выберем

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad V_2 = V_1^*, \quad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Уравнение Линдблада для матрицы плотности

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\gamma \sum_{k=1}^2 \left(V_k \rho V_k^+ - \frac{1}{2} \{V_k^+ V_k, \rho\} \right) = \\ &= -\gamma \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 0 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

приводит к решению

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \Lambda_t \rho(0) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0) = \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & e^{-\gamma t} \rho_{12}(0) & e^{-\gamma t} \rho_{13}(0) \\ e^{-\gamma t} \rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) & e^{-\gamma t} \rho_{23}(0) \\ e^{-\gamma t} \rho_{31}(0) & e^{-\gamma t} \rho_{32}(0) & \rho_{33}(0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

которое на больших временах стремится к

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(0) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}(0) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

что описывает полную декогеренцию системы.

Уравнение Линдблада (7)

$$\dot{A} = \mathcal{L}^\sharp A = \gamma \sum_{k=1}^2 \left(V_k^+ A V_k - \frac{1}{2} \{V_k^+ V_k, A\} \right) \quad (28)$$

для наблюдаемых λ_i также примет вид (19).

Итак, по заданной однопараметрической контракции Иненю-Вигнера в определенном базисе по преобразованию (13) можно сразу написать уравнения (19), а затем искать их представление в виде уравнений Линдблада (7). Важную роль в сохранении когерентных свойств при этом может играть определенный выбор гамильтониана. Уравнения Линдблада можно находить для обобщенных контракций Иненю-Вигнера (в этом случае скорости релаксаций будут иметь вид $\gamma_k = k\gamma$, а параметры контракций $\varepsilon_k = \varepsilon^k = e^{-k\gamma t}$), многопараметрических контракций (они будут связаны с разными скоростями релаксации $\gamma_k, \varepsilon_k = e^{-\gamma_k t}$), градуированных контракций и т.д.

Авторы выражают благодарность А.А. Карбанову за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 200 с.
2. Bohm A. Quantum mechanics: foundations and applications. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
3. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
4. Preskill J. Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
5. Breuer H.-P., Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.
6. Inönü E., Wigner E.P. On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
7. Saletan E.J. Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 1–21.
8. Громов Н.А. Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.
9. Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al. The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. Physica Scripta. 2016. Vol. 91, No. 4. P. 045201.
10. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems / S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.
11. The Observables of a Dissipative Quantum System / D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19, No. 01. P. 1250001.
12. Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В. Диссипация кубита и контракции алгебр Ли // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. № 4(40). С. 7–14.
13. Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В. Когерентность в открытой квантовой системе // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2020. № 4(44). С. 30–33.
14. Костяков И.В., Куратов В.В. Квантовые вычисления и контракции алгебр Ли // Вестник

Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика, механика, информатика. 2018. Вып. 2(27). С. 32–39.

15. Костяков И.В., Куратов В.В., Громов Н.А. Эволюция кутрита и контракция алгебры Ли $su(3)$ // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2021. № 6(52). С. 42–48.
16. Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В. Когерентная эволюция кутрита // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(40). С. 20–38.
17. Gromov N.A. Particles in the early Universe. World Scientific: Singapore, 2020. 160 p.
18. Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В. Диагональные контракции унитарных алгебр малой размерности // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2020. № 4(44). С. 23–29.
19. Kuvshinov V.I., Bagashov E.G. Confinement of color states in a stochastic vacuum of quantum chromodynamics // Theor. Math. Phys. 2015. Vol. 184. P. 1304–1310.
20. Кувшинов В.И., Багашов Е.Г. Декогеренция квантовых состояний в вакууме КХД // ФЭЧАЯ. 2017. Т. 48. № 5. С. 736–739.
21. Karabanov A.A. Symmetry reductions of Lindblad equations – simple examples and applications // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2021. No. 6(52). P. 49–52.
22. On the universal constraints for relaxation rates for quantum dynamical semigroup / D. Chruściński, G. Kimura, A. Kossakowski, Y. Shishido // arXiv:2011.10159 [quant-ph].

References

1. Faddeev L.D., Yakubovskiy O.A. Lectures on quantum mechanics for mathematics students. Leningrad: Leningrad Univ. Publ., 1980. 200 p.
2. Bohm A. Quantum mechanics: foundations and applications. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
3. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
4. Preskill J. Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
5. Breuer H.-P., Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.
6. Inönü E., Wigner E.P. On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
7. Saletan E.J. Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 1–21.
8. Gromov N.A. Kontraktzii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups]. Moscow: FIZMATLIT, 2012. 318 p.
9. Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al. The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. Physica Scripta. 2016. Vol. 91, No. 4. P. 045201.
10. Dynamically algebra of observables in dis-

- sipative quantum systems / *S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani* // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2017. Vol. 50. 065301.
11. The Observables of a Dissipative Quantum System / *D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio* // *Open Systems & Information Dynamics.* 2012. Vol. 19, No. 01. P. 1250001.
 12. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Dissipaciya qubita i kontraktsii algebr Lie [Qubit dissipation and contractions of Lie algebras] // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2019. No. 4(40). P. 7–14.
 13. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Kogerentnost v otkrytoy kvantovoy sisteme [Coherence in an open quantum system] // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2020. No. 4(44). P. 30–33.
 14. *Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Kvantovye vychisleniya i kontrakcii algebr Li [Quantum computation and contraction of Lie algebras] // *Bull. of Syktyvkar Univ. Series 1: Mathematics, mechanics, computer science.* 2018. Issue 2(27). P. 32–39.
 15. *Kostyakov I.V., Kuratov V.V., Gromov N.A.* Evoluciya kutrita i kontrakciya algebr Li $su(3)$ [Qutrit evolution and contraction of Lie algebra $su(3)$] // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2021. No. 6(52). P. 42–48.
 16. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Kogerentnaya evoluciya kutrita [Qutrit coherent evolution] // *Bull. of Syktyvkar Univ. Series 1: Mathematics, mechanics, computer science.* 2021. Issue 3(40). P. 20–38.
 17. *Gromov N.A.* Particles in the early Universe. World Scientific: Singapore, 2020. 160 p.
 18. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Diagonal'nye kontrakcii unitarnykh algebr maloj razmernosti [Diagonal contractions of small-dimensional unitary algebras] // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2020. No. 4(44). P. 23–29.
 19. *Kuvshinov V.I., Bagashov E.G.* Confinement of color states in a stochastic vacuum of quantum chromodynamics // *Theor. Math. Phys.* 2015. Vol. 184. P. 1304–1310.
 20. *Kuvshinov V.I., Bagashov E.G.* Dekogerenciya kvantovykh sostoyanij v vakuume KHD [Decoherence of quantum states in QCD vacuum] // *PEPAN.* 2017. Vol. 48. No. 5. P.736–739.
 21. *Karabanov A.A.* Symmetry reductions of Lindblad equations – simple examples and applications // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2021. No. 6(52). P. 49–52.
 22. On the universal constraints for relaxation rates for quantum dynamical semigroup / *D. Chruściński, G. Kimura, A. Kossakowski, Y. Shishido* // arXiv:2011.10159 [quant-ph].

Статья поступила в редакцию 27.10.2021.

УДК 530.145, 512.81
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-42-48

И.В. КОСТЯКОВ, В.В. КУРАТОВ, Н.А. ГРОМОВ

ЭВОЛЮЦИЯ КУТРИТА И КОНТРАКЦИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $SU(3)$

*Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар*

*kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru
gromov@ipm.komisc.ru*

I.V. KOSTYAKOV, V.V. KURATOV, N.A. GROMOV

QUTRIT EVOLUTION AND CONTRACTION OF LIE ALGEBRA $SU(3)$

*Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktывkar*

Аннотация

Рассмотрена трехуровневая квантовая система с симметрией алгебры Ли $su(3)$ (кутрит). Получена эволюция кутрита при взаимодействии с окружающей средой. Изучена поперечная релаксация кутрита (за счет диагональных операторов Линдблада), приводящая к обнулению (с одинаковой скоростью для вещественной и мнимой частей) недиагональных элементов матрицы плотности. Получена динамика кутрита при наличии как поперечной, так и продольной релаксации, т.е. когда операторы Линдблада недиагональны и в системе имеются переходы между всеми уровнями энергии. Показано, что добавление продольной релаксации кутрита, помимо обращения в ноль недиагональных элементов, затрагивает также и диагональные элементы его матрицы плотности. В результате диссипации квантовая система с течением времени становится некогерентной. В обоих случаях первоначально некоммутирующие квантовые наблюдаемые в процессе эволюции приобретают свойства коммутирующих классических наблюдаемых, что алгебраически проявляется в контракции алгебры $su(3)$.

Ключевые слова:

диссипативные квантовые системы, алгебра наблюдаемых, кутрит, контракции алгебр Ли

Abstract

The evolution of a three-level quantum system interacting with the environment with the symmetry of the Lie algebra $su(3)$ (qutrit) is considered. The evolution of qutrit is obtained when interacting with the environment. The transverse relaxation of the qutrit (due to the diagonal Lindblad operators) has been studied, leading to zero (with the same speed for the real and imaginary parts) off-diagonal elements of the density matrix. The dynamics of qutrit is obtained in the presence of both transverse and longitudinal relaxation, i.e. when the Lindblad operators are off-diagonal and there are transitions in the system between all energy levels. It is shown that the addition of the longitudinal relaxation of the qutrit in addition to the conversion of the off-diagonal elements to zero, also affects the diagonal elements of its density matrix. As a result of dissipation, the quantum system becomes incoherent over time. In both cases, initially non-commuting quantum observables in the process of evolution acquire the properties of commuting classical observables, which algebraically manifests itself in the contraction of the algebra $su(3)$.

Keywords:

dissipative quantum systems, algebra of observables, qutrit, contractions of Lie algebras

Введение

Под описанием физической системы понимается построение ее математического образа, выраженного через наблюдаемые системы. В классической физике наблюдаемые системы – это вещественные бесконечно дифференцируемые функции координат и импульсов, образующие коммутативную алгебру вещественных гладких функций на фазовом пространстве [1]. В квантовой физике наблюдаемой сопоставляется линейный оператор, а сама система описывается, вообще говоря, некоммутативной алгеброй операторов в линейном пространстве [1, 2].

Для связи линейных операторов с экспериментальными данными, которые являются вещественными числами, служит матрица плотности ρ , $\text{Tr} \rho = 1$, описывающая состояние квантовомеханической системы. Среднее значение наблюдаемой A физической системы, находящейся в состоянии ρ , дается выражением $\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho)$.

Динамика замкнутой квантовой системы определяется унитарным оператором эволюции, поэтому ее алгебра наблюдаемых не изменяется в процессе эволюции системы. Другая картина имеет место для открытых квантовых систем, взаимодействующих с окружающей средой. Эволюция таких систем уже не описывается в терминах унитарной гамильтоновой динамики и, следовательно, алгебра наблюдаемых может изменяться в ходе ее эволюции. Изменение во времени матрицы плотности в общем случае описывается преобразованием Крауса

$$\rho(t) = \Lambda(t)\rho(0) = \sum_k B_k(t)\rho(0)B_k^\dagger(t),$$

$$\sum_k B_k^\dagger(t)B_k(t) = 1. \quad (1)$$

При малом времени взаимодействия с окружением можно пренебречь эффектами памяти (марковское приближение) и тогда эволюцию системы можно описать уравнением Линдблада [3–5]

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] + \sum_k \gamma_k \left(V_k \rho V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho\} \right). \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения отвечает унитарной части динамики системы, генерируемой гамильтонианом \hat{H} , который в общем случае включает гамильтониан системы, а также содержит дополнительные слагаемые, относящиеся к взаимодействию с окружением. Второе слагаемое описывает диссипативную часть динамики. Операторы V_k обычно называют операторами Линдблада, а неотрицательные γ_k играют роль скоростей релаксации для различных видов затухания открытой квантовой системы.

Диссипативные процессы в открытых квантовых системах могут приводить к обнулению некоторых коммутаторов алгебры наблюдаемых, что интерпретируется как частичная потеря системой квантовых свойств, т.е. частичному переходу от квантового поведения к классическому. Появляющиеся при этом коммутирующие наборы наблюдаемых интерпретируются как классические переменные, возникающие в результате диссипации.

В картине Гейзенберга для наблюдаемых A уравнение Линдблада имеет вид

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, A] + \sum_k \gamma_k \left(V_k^\dagger A V_k - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, A\} \right) = \mathcal{L}^\#(A). \quad (3)$$

Эволюция алгебры динамических переменных $A(t)$ тогда имеет вид

$$A(t) = \Lambda_t^\#(A) = e^{\mathcal{L}^\# t} A(0), \quad (4)$$

а изменение во времени коммутационных соотношений дается формулой

$$[A_i, A_j]_t \equiv \left(\Lambda_t^\# \right)^{-1} \left[\Lambda_t^\#(A_i), \Lambda_t^\#(A_j) \right] \equiv C_{ij}^k(t) A_k, \quad (5)$$

которая представляет собой типичное преобразование коммутационных соотношений между генераторами при контракции групп (алгебр) Ли [6–8]. Таким образом, имеется естественная связь между диссипативными процессами в открытых квантовых системах и контракциями групп (алгебр) Ли, которая анализируется в трудах [9–11]. В работах [12, 13] подробно изучена связь квантовых каналов кубита с контракциями алгебры $su(2)$.

В данной статье мы продолжаем изучать Ли-алгебраический подход к исследованию открытых квантовых систем теперь на примере кутрита – трехуровневой системы с алгеброй симметрии $su(3)$. Трехуровневые системы появляются во многих областях. Например, частица спина 1 в магнитном поле, нейтринные осцилляции, три выделенных уровня в атоме, лазерной спектроскопии, квантовой электронике, КХД, в квантовых моделях фотосинтеза [14–17].

1. Поперечная релаксация кутрита

Матрица плотности ρ кутрита может быть представлена в виде линейной комбинации генераторов алгебры Ли $u(3)$

$$\rho = \frac{1}{3} \mathbf{I} + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{\lambda} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + a_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} a_8 & a_1 - i a_2 & & & & & & & \\ a_1 + i a_2 & \frac{2}{3} - a_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} a_8 & & & & & & & \\ a_4 + i a_5 & & a_4 - i a_5 & & & & & & \\ & & a_6 - i a_7 & & & & & & \\ & & \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} a_8 & & & & & & \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_8)$ – вектор Блоха, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_8)$ – матрицы Гелл-Манна вида

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В качестве базисных состояний кутрита мы используем обозначения

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Неунитарная эволюция кутрита, приводящая к его декогерентности [9–12], описывается преобразованием Крауса (1) с набором диагональных матриц вида

$$B_1 = \sqrt{p_1} I, \quad B_2 = \sqrt{p_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \sqrt{p_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \sqrt{p_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$p_1 = \frac{1}{4} (1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2),$$

$$p_2 = \frac{1}{4} (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2),$$

$$p_3 = \frac{1}{4} (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2),$$

$$p_4 = \frac{1}{4} (1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2). \quad (10)$$

Оно приводит к матрице плотности кутрита

$$\rho' = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + a_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} a_8 & \varepsilon_1 \varepsilon_3 (a_1 - i a_2) \\ \varepsilon_1 \varepsilon_3 (a_1 + i a_2) & \frac{2}{3} - a_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} a_8 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 (a_4 + i a_5) & \varepsilon_2 \varepsilon_3 (a_6 + i a_7) \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 (a_4 - i a_5) & \varepsilon_2 \varepsilon_3 (a_6 - i a_7) \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} a_8 & \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Эта же матрица плотности получается преобразованием генераторов

$$\lambda_i \rightarrow T_{ij} \lambda_j, \quad (12)$$

где T_{ij} – диагональная матрица с элементами $T_{11} = T_{22} = \varepsilon_1 \varepsilon_3$, $T_{44} = T_{55} = \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $T_{66} = T_{77} = \varepsilon_2 \varepsilon_3$, $T_{33} = T_{88} = 1$, которое имеет вид контракции Вигнера-Инены [6, 8, 18]. При переходе к новому базису структурные константы в алгебре Ли преобразуются по правилу

$$C_{ij}^k(t) = T_{kl}^{-1} T_{im} T_{jn} C_{mn}^l. \quad (13)$$

В общем случае эволюция кутрита описывается уравнением (2), в котором сумма по k берется от единицы до восьми. В частных случаях диссипации кутрита можно обойтись меньшим числом

слагаемых. Например, в случае декогеренции кутрита, приводящей к обнулению (с одинаковой скоростью для вещественной и мнимой частей) недиагональных элементов матрицы плотности, ее можно получить как решение уравнения (2) с операторами Линдблада

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

и гамильтонианом

$$\hat{H} = \text{diag}(E_1, E_2, E_3), \quad (15)$$

где E_i обозначает энергию i -го уровня. Действительно, диагональные элементы матрицы плотности стационарны $\dot{\rho}_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$, а недиагональные элементы подчиняются простым уравнениям

$$\dot{\rho}_{12} = -\alpha_{12} \rho_{12}, \quad \dot{\rho}_{13} = -\alpha_{13} \rho_{13},$$

$$\dot{\rho}_{23} = -\alpha_{23} \rho_{23} \quad (16)$$

с параметрами

$$\alpha_{12} = 2(\gamma_1 + \gamma_2) + i\omega_{12}, \quad \alpha_{13} = 2(\gamma_1 + \gamma_3) + i\omega_{13},$$

$$\alpha_{23} = 2(\gamma_2 + \gamma_3) + i\omega_{23}, \quad (17)$$

где действительная часть α_{ij} есть скорость затухания интерференции между уровнями i и j , которая описывается элементом ρ_{ij} матрицы плотности кутрита, а мнимая часть есть разность энергий $\omega_{ij} = (E_j - E_i)/\hbar$. Решения уравнений имеют вид

$$\rho_{12}(t) = e^{-\alpha_{12} t} \rho_{12}(0), \quad \rho_{13}(t) = e^{-\alpha_{13} t} \rho_{13}(0),$$

$$\rho_{23}(t) = e^{-\alpha_{23} t} \rho_{23}(0). \quad (18)$$

Обозначая $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = e^{-\alpha_{12} t}$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = e^{-\alpha_{13} t}$, $\varepsilon_2 \varepsilon_3 = e^{-\alpha_{23} t}$, получаем для матрицы плотности $\rho(t)$ выражение (11).

Что касается эволюции наблюдаемых $\lambda_i(t)$ (одинаковой для их вещественных и мнимых частей), то из уравнения (3) имеем

$$\dot{\lambda}_{3,8} = 0, \quad \dot{\lambda}_{1,2} = -\alpha_{12} \lambda_{1,2}, \quad \dot{\lambda}_{4,5} = -\alpha_{13} \lambda_{4,5},$$

$$\dot{\lambda}_{6,7} = -\alpha_{23} \lambda_{6,7}. \quad (19)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\lambda_{3,8}(t) = \lambda_{3,8}, \quad \lambda_{1,2}(t) = e^{-\alpha_{12} t} \lambda_{1,2},$$

$$\lambda_{4,5}(t) = e^{-\alpha_{13} t} \lambda_{4,5}, \quad \lambda_{6,7}(t) = e^{-\alpha_{23} t} \lambda_{6,7} \quad (20)$$

и могут быть представлены в виде (12) как преобразования контракций. Преобразованные генераторы образуют алгебру $su(3, \varepsilon)$ с коммутационными соотношениями

$$[\lambda_1, \lambda_2]_t = 2i\varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \lambda_3, \quad [\lambda_1, \lambda_3]_t = -2i\lambda_2,$$

$$[\lambda_1, \lambda_4]_t = i\varepsilon_1^2 \lambda_7, \quad [\lambda_1, \lambda_5]_t = -i\varepsilon_1^2 \lambda_6,$$

$$[\lambda_1, \lambda_6]_t = i\varepsilon_3^2 \lambda_5, \quad [\lambda_1, \lambda_7]_t = -i\varepsilon_3^2 \lambda_4,$$

$$\begin{aligned}
 &[\lambda_1, \lambda_8]_t = 0, \quad [\lambda_2, \lambda_3]_t = 2i\lambda_1, \\
 &[\lambda_2, \lambda_4]_t = i\varepsilon_1^2\varepsilon_3^2\lambda_6, \quad [\lambda_2, \lambda_5]_t = i\varepsilon_1^2\varepsilon_3^2\lambda_7, \\
 &[\lambda_2, \lambda_6]_t = -i\varepsilon_3^2\lambda_4, \quad [\lambda_2, \lambda_7]_t = -i\varepsilon_3^2\lambda_5, \\
 &[\lambda_2, \lambda_8]_t = 0, \quad [\lambda_3, \lambda_4]_t = i\lambda_5, \\
 &[\lambda_3, \lambda_5]_t = -i\lambda_4, \quad [\lambda_3, \lambda_6]_t = -i\lambda_7, \\
 &[\lambda_3, \lambda_7]_t = i\lambda_6, \quad [\lambda_3, \lambda_8]_t = 0, \\
 &[\lambda_7, \lambda_8]_t = i\sqrt{3}\lambda_6, \quad [\lambda_4, \lambda_6]_t = -i\varepsilon_2^2\lambda_2, \\
 &[\lambda_4, \lambda_7]_t = i\varepsilon_2^2\lambda_1, \quad [\lambda_4, \lambda_8]_t = -i\sqrt{3}\lambda_5, \\
 &[\lambda_5, \lambda_6]_t = -i\varepsilon_2^2\lambda_1, \quad [\lambda_5, \lambda_7]_t = i\varepsilon_2^2\lambda_2, \\
 &[\lambda_5, \lambda_8]_t = i\sqrt{3}\lambda_4, \quad [\lambda_6, \lambda_8]_t = -i\sqrt{3}\lambda_7, \\
 &[\lambda_4, \lambda_5]_t = i\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8), \\
 &[\lambda_6, \lambda_7]_t = i\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2(\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3). \quad (21)
 \end{aligned}$$

При $\varepsilon_3 = 1$ получаем контракции Кэли-Клейна [8]. Контракции алгебры Ли $su(3, \varepsilon)$ при предельных переходах $t \rightarrow \infty$ ($\varepsilon_i \rightarrow 0$) подробно разобраны в работе [18]. Таким образом, мы показали, что эволюция кутрита при наличии поперечной релаксации приводит к диагональной контракции ее алгебры симметрии $su(3)$.

2. Поперечная и продольная релаксации кутрита

К рассмотренной поперечной релаксации кутрита можно добавить продольную с переходами между всеми уровнями. При наличии продольной релаксации динамика кутрита затронет также и диагональные элементы его матрицы плотности. Обозначим γ_{ij} вероятность перехода с j -го уровня на i -й (рис. 1). Тогда в уравнении Линдблада к операторам (14) добавятся операторы $V_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ($i \neq j$)

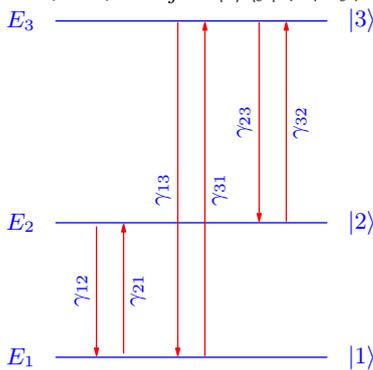


Рис. 1. Схема переходов между уровнями кутрита.
Fig. 1. The scheme of transitions between the qutrit levels.

$$\begin{aligned}
 V_{12} &= |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 V_{21} &= |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{13} &= |1\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 V_{31} &= |3\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 V_{23} &= |2\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 V_{32} &= |3\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)
 \end{aligned}$$

и уравнение (2) в этом случае будет иметь вид [19]

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] + \\
 &+ \sum_{k=1}^3 \gamma_k \left(V_k \rho V_k^+ - \frac{1}{2} \{V_k^+ V_k, \rho\} \right) + \\
 &+ \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} \left(V_{ij} \rho V_{ij}^+ - \frac{1}{2} \{V_{ij}^+ V_{ij}, \rho\} \right). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Выпишем эти уравнения отдельно для диагональных и недиагональных элементов матрицы плотности

$$\dot{\rho}_{mm} = \sum_n \gamma_{mn} \rho_{nn} - \Gamma_m \rho_{mm}, \quad (24)$$

$$\dot{\rho}_{mn} = -\alpha_{mn} \rho_{mn}, \quad m \neq n, \quad \alpha_{mn} = \alpha_{nm}, \quad (25)$$

где $\Gamma_n = \sum_m \gamma_{mn}$ – общая ширина уровня n , $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j) + 2(\gamma_i + \gamma_j) + i\omega_{ij}$, $\text{Re } \alpha_{ij}$ – скорость релаксации недиагональных элементов матрицы плотности ρ_{ij} . Мнимая часть α_{ij} для нас не существенна и мы будем ее опускать (или подразумевать, что работаем в представлении взаимодействия). Эволюция недиагональных элементов ρ_{mn} , как это видно из уравнения (24), (25)

$$\dot{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{12}\rho_{22} + \gamma_{13}\rho_{33} - \Gamma_1\rho_{11} & & & & \\ -\alpha_{12}\rho_{21} & & & & \\ -\alpha_{13}\rho_{31} & & & & \\ & -\alpha_{12}\rho_{12} & & & \\ \gamma_{21}\rho_{11} + \gamma_{23}\rho_{33} - \Gamma_2\rho_{22} & & & & \\ & -\alpha_{23}\rho_{32} & & & \\ & & -\alpha_{13}\rho_{13} & & \\ & & -\alpha_{23}\rho_{23} & & \\ \gamma_{31}\rho_{11} + \gamma_{23}\rho_{22} - \Gamma_3\rho_{33} & & & & \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Недиагональные элементы удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\rho}_{ij} = -\alpha_{ij}\rho_{ij}, \quad i < j, \quad \alpha_{ji} = \alpha_{ij}, \quad (27)$$

с решениями

$$\rho_{ij}(t) = e^{-\alpha_{ij}t} \rho_{ij}(0). \quad (28)$$

Решения уравнений (24) для диагональных элементов имеют вид

$$\rho_{11}(t) = C_0 + C_1 e^{-\alpha_- t} + C_2 e^{-\alpha_+ t},$$

$$\begin{aligned} \rho_{22}(t) &= C_3 + C_4 e^{-\alpha-t} + C_5 e^{-\alpha+t}, \\ \rho_{33}(t) &= C_6 + C_7 e^{-\alpha-t} + C_8 e^{-\alpha+t}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= \frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4D}, \quad B = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i = \sum_{i \neq j} \gamma_{ij}, \\ D &= \gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{21}\gamma_{23} + \gamma_{12}\gamma_{31} + \\ &+ \gamma_{31}\gamma_{32} + \gamma_{23}\gamma_{31} + \gamma_{12}\gamma_{13} + \gamma_{12}\gamma_{23} + \gamma_{13}\gamma_{32}, \\ C_3 &= (\gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{23}\Gamma_1) D_0, \\ C_0 &= (\gamma_{23}\gamma_{12} + \gamma_{13}\Gamma_2) D_0, \\ C_6 &= (\Gamma_1\Gamma_2 - \gamma_{12}\gamma_{21}) D_0, \\ C_4 &= (\gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{23}(\Gamma_1 - \alpha_-)) D_1, \\ C_1 &= (\gamma_{23}\gamma_{12} + \gamma_{13}(\Gamma_2 - \alpha_-)) D_1, \\ C_7 &= ((\alpha_- - \Gamma_1)(\alpha_- - \Gamma_2) - \gamma_{12}\gamma_{21}) D_1, \\ C_5 &= (\gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{23}(\Gamma_1 - \alpha_+)) D_2, \\ C_2 &= (\gamma_{23}\gamma_{12} + \gamma_{13}(\Gamma_2 - \alpha_+)) D_2, \\ C_8 &= ((\alpha_+ - \Gamma_1)(\alpha_+ - \Gamma_2) - \gamma_{12}\gamma_{21}) D_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь D_i – константы, зависящие от начальных условий.

Таким образом, эволюция матрицы плотности кутрита при наличии как поперечной, так и продольной релаксации описывается матрицей плотности

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \begin{pmatrix} C_0 + C_1 e^{-\alpha-t} + C_2 e^{-\alpha+t} & & & & & & & & \\ & e^{-\alpha_{12}t} \rho_{21}(0) & & & & & & & \\ & & e^{-\alpha_{13}t} \rho_{31}(0) & & & & & & \\ & & & e^{-\alpha_{12}t} \rho_{12}(0) & & & & & \\ & & & & C_3 + C_4 e^{-\alpha-t} + C_5 e^{-\alpha+t} & & & & \\ & & & & & e^{-\alpha_{23}t} \rho_{32}(0) & & & \\ & & & & & & e^{-\alpha_{13}t} \rho_{13}(0) & & \\ & & & & & & & e^{-\alpha_{23}t} \rho_{23}(0) & \\ & & & & & & & & C_6 + C_7 e^{-\alpha-t} + C_8 e^{-\alpha+t} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

При $t \rightarrow \infty$ происходит релаксация диагональных элементов матрицы плотности со скоростями α_{\pm} и декогеренция недиагональных элементов со скоростями α_{ij} . В целом система стремится к полностью декогерентному стационарному состоянию

$$\rho(\infty) = \begin{pmatrix} C_0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_6 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Выше мы рассмотрели эволюцию матрицы плотности в картине Шредингера. В картине Гейзенберга от времени зависят наблюдаемые, и уравнение Линдблада в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, A] + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \gamma_k \left(V_k^+ A V_k - \frac{1}{2} \{V_k^+ V_k, A\} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} \left(V_{ij}^+ A V_{ij} - \frac{1}{2} \{V_{ij}^+ V_{ij}, A\} \right) = \\ = \mathcal{L}^{\sharp}(A). \end{aligned} \quad (33)$$

Генераторы λ_i ($i = 1, 2, 4, 5, 6, 7$) алгебры $su(3)$ являются наблюдаемыми для кутрита и собственными векторами оператора \mathcal{L}^{\sharp} . Их динамика описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{1,2} &= -\alpha_{12} \lambda_{1,2}, \quad \dot{\lambda}_{4,5} = -\alpha_{13} \lambda_{4,5}, \\ \dot{\lambda}_{6,7} &= -\alpha_{23} \lambda_{6,7}, \end{aligned} \quad (34)$$

с решениями

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(t) &= e^{-\alpha_{12}t} \lambda_{1,2}(0), \quad \lambda_{4,5}(t) = e^{-\alpha_{13}t} \lambda_{4,5}(0), \\ \lambda_{6,7}(t) &= e^{-\alpha_{23}t} \lambda_{6,7}(0). \end{aligned} \quad (35)$$

Для генераторов подалгебры Картана удобно перейти к новому базису e_0, e_{\pm}

$$e_0 = I, \quad e_{\pm} = a_{\pm}|1\rangle\langle 1| + b_{\pm}|2\rangle\langle 2| + c_{\pm}|3\rangle\langle 3|,$$

$$a_{\pm} = \frac{1}{\Delta} (\gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{31}(\Gamma_2 - \alpha_{\pm})),$$

$$b_{\pm} = \frac{1}{\Delta} (\gamma_{12}\gamma_{31} + \gamma_{32}(\Gamma_1 - \alpha_{\pm})),$$

$$c_{\pm} = \frac{1}{\Delta} ((\Gamma_1 - \alpha_{\pm})(\Gamma_2 - \alpha_{\pm}) - \gamma_{12}\gamma_{21}), \quad (36)$$

(Δ – нормировочный множитель), в котором уравнения Линдблада принимают простой вид

$$\dot{e}_0 = 0, \quad \dot{e}_{\pm} = -\alpha_{\pm} e_{\pm}, \quad (37)$$

с решениями

$$e_0(t) = I, \quad e_{\pm}(t) = e^{-\alpha_{\pm}t} e_{\pm}(0). \quad (38)$$

Воспользовавшись обратным к (36) преобразованием, которое запишем в виде

$$|1\rangle\langle 1| = f_1 e_0 + g_1 e_+ + h_1 e_-,$$

$$|2\rangle\langle 2| = f_2 e_0 + g_2 e_+ + h_2 e_-,$$

$$|3\rangle\langle 3| = f_3 e_0 + g_3 e_+ + h_3 e_-,$$

получим описание динамики наблюдаемых λ_3 и λ_8

$$\begin{aligned} \lambda_3(t) &= (f_1 - f_2)I + (g_1 - g_2) e^{-\alpha_+t} e_+(0) + \\ &+ (h_1 - h_2) e^{-\alpha_-t} e_-(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_8(t) &= (f_1 + f_2 - 2f_3)I + (g_1 + g_2 - 2g_3) e^{-\alpha_+t} e_+(0) + \\ &+ (h_1 + h_2 - 2h_3) e^{-\alpha_-t} e_-(0). \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, преобразования контракции наблюдаемых кутрита в новом базисе принимают вид (35), (38), а зависящие от времени коммутационные соотношения этих наблюдаемых даются формулами

$$[\lambda_1, \lambda_4]_t = i e^{-\Delta_1 t} \lambda_7, \quad [\lambda_5, \lambda_1]_t = i e^{-\Delta_1 t} \lambda_6,$$

$$[\lambda_1, \lambda_6]_t = i e^{-\Delta_2 t} \lambda_5, \quad [\lambda_7, \lambda_1]_t = i e^{-\Delta_2 t} \lambda_4,$$

$$[\lambda_6, \lambda_4]_t = i e^{-\Delta_3 t} \lambda_2, \quad [\lambda_2, \lambda_4]_t = i e^{-\Delta_1 t} \lambda_6,$$

$$[\lambda_2, \lambda_5]_t = i e^{-\Delta_1 t} \lambda_7, \quad [\lambda_6, \lambda_2]_t = i e^{-\Delta_2 t} \lambda_4,$$

$$\begin{aligned}
 [\lambda_7, \lambda_2]_t &= ie^{-\Delta_2 t} \lambda_5, & [\lambda_6, \lambda_5]_t &= ie^{-\Delta_3 t} \lambda_1, \\
 [\lambda_5, \lambda_7]_t &= ie^{-\Delta_3 t} \lambda_2, & [\lambda_4, \lambda_7]_t &= ie^{-\Delta_3 t} \lambda_1, \\
 [\lambda_1, \lambda_2]_t &= 2i((f_1 - f_2)e^{-2\alpha_{12}t} I_+ + (g_1 - g_2)e^{-\Delta_4 t} e_+ + (h_1 - h_2)e^{-\Delta_5 t} e_-), \\
 [\lambda_4, \lambda_5]_t &= 2i((f_1 - f_3)e^{-2\alpha_{13}t} I_+ + (g_1 - g_3)e^{-\Delta_6 t} e_+ + (h_1 - h_3)e^{-\Delta_7 t} e_-), \\
 [\lambda_6, \lambda_7]_t &= 2i((f_2 - f_3)e^{-2\alpha_{12}t} I_+ + (g_2 - g_3)e^{-\Delta_8 t} e_+ + (h_2 - h_3)e^{-\Delta_9 t} e_-), \\
 [\lambda_1, e_{\pm}]_t &= i(b_{\pm} - a_{\pm})e^{-\alpha_{\pm}t} \lambda_2, \\
 [\lambda_2, e_{\pm}]_t &= i(a_{\pm} - b_{\pm})e^{-\alpha_{\pm}t} \lambda_1, \\
 [\lambda_4, e_{\pm}]_t &= ie^{-\alpha_{\pm}t} (c_{\pm} - a_{\pm}) \lambda_5, \\
 [\lambda_5, e_{\pm}]_t &= ie^{-\alpha_{\pm}t} (a_{\pm} - c_{\pm}) \lambda_4, \\
 [\lambda_6, e_{\pm}]_t &= ie^{-\alpha_{\pm}t} (c_{\pm} - b_{\pm}) \lambda_5, \\
 [\lambda_7, e_{\pm}]_t &= ie^{-\alpha_{\pm}t} (b_{\pm} - c_{\pm}) \lambda_6, \\
 [e_+, e_-]_t &= 0,
 \end{aligned} \tag{40}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{23} = \gamma_{21} + \gamma_{31} + \gamma_1 > 0, \\
 \Delta_2 &= \alpha_{12} + \alpha_{23} - \alpha_{13} = \gamma_{12} + \gamma_{32} + \gamma_2 > 0, \\
 \Delta_3 &= \alpha_{13} + \alpha_{23} - \alpha_{12} = \gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_3 > 0, \\
 \Delta_4 &= 2\alpha_{12} - \alpha_+, & \Delta_5 &= 2\alpha_{12} - \alpha_-, \\
 \Delta_6 &= 2\alpha_{13} - \alpha_+, & \Delta_7 &= 2\alpha_{13} - \alpha_-, \\
 \Delta_8 &= 2\alpha_{23} - \alpha_+, & \Delta_9 &= 2\alpha_{23} - \alpha_-.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Параметры Δ_i , $i = 1, 2, 3$ положительны, а Δ_k , $k = 4, \dots, 9$ могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Именно они определяют предельное поведение кутрита и коммутационные соотношения его алгебры симметрии в пределе $t \rightarrow \infty$.

При $\Delta_k > 0$, $k = 4, \dots, 9$, т.е. $2\alpha_{ij} > \alpha_{\pm}$ все коммутационные соотношения обращаются в нуль, и алгебра становится абелевой. При $\Delta_{4,6,8} = 0$, т.е. $2\alpha_{ij} = \alpha_+$, $i \neq j$, добавляются три ненулевых коммутатора

$$\begin{aligned}
 [\lambda_1, \lambda_2]_{\infty} &= 2i(g_1 - g_2)e_+(t), \\
 [\lambda_4, \lambda_5]_{\infty} &= 2i(g_1 - g_3)e_+(t), \\
 [\lambda_6, \lambda_7]_{\infty} &= 2i(g_2 - g_3)e_+(t).
 \end{aligned} \tag{42}$$

Если какой-то из параметров Δ_k , $k = 4, \dots, 9$ отрицателен, то появляются сингулярные коммутаторы, что свидетельствует о разрушении кутрита как физической системы.

В обзоре [20] приведен пример, где для двухуровневой системы в оптическом диапазоне скорости поперечной и продольной релаксации относятся, как один к двум, и отмечено, что для подавляющего

большинства оптических систем наблюдается существенное превышение скорости дефазировки (поперечной релаксации) над скоростью релаксации энергии (продольной скоростью). В реальных системах это отношение может достигать пяти порядков.

Таким образом, в процессе эволюции трехуровневой квантовой системы с унитарной симметрией $SU(3)$ при наличии взаимодействия с окружающей средой, приводящего к диссипации и декогеренции матрицы плотности, происходит обнуление коммутационных соотношений наблюдаемых кутрита, что математически отвечает контракции алгебры симметрии системы. Физически такое поведение свидетельствует о частичной (или полной) потере кутритом квантовых свойств.

Авторы выражают глубокую благодарность А.А. Карабанову за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 200 с.
2. Bohm A. Quantum mechanics: foundations and applications. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
3. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
4. Preskill J. Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
5. Breuer H.-P., Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.
6. Inönü E., Wigner E.P. On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
7. Saletan E.J. Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 1–21.
8. Громов Н.А. Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.
9. Ibert A., Man'ko V.I., Marmo G. et al. The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. Physica Scripta. 2016. Vol. 91, No. 4. P. 045201.
10. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems / S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. Vol. 50. 065301.
11. The Observables of a Dissipative Quantum System / D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio // Open Systems & Information Dynamics. 2012. Vol. 19, No. 01. P. 1250001.
12. Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В. Диссипация кубита и контракции алгебр Ли // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. № 4(40). С. 7–14.
13. Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В. Когерентность в открытой квантовой системе // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2020. № 4(44). С. 30–33.

14. *Арефьева И.Я., Волович И.В., Козырев С.В.* Метод стохастического предела и интерференция в квантовых многочастичных системах. ТМФ. 2015. Т. 183, № 3. С. 388–408.
15. *Arefyeva I.Y., Volovich I.V.* Holographic Photosynthesis. arXiv:1603.09107 [hep-th].
16. *Ohya M., Volovich I.* Mathematical Foundations of Quantum Information and Computation and Its Applications to Nano- and Bio-systems. Springer, 2011. 759 p.
17. Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis / *S.V. Kozyrev, A.A. Mironov, A.E. Teretenkov, I.V. Volovich* // *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 2017. Vol. 20, No. 4. P. 1750021.
18. *Громов Н.А., Костяков И.В., Куратов В.В.* Диагональные контракции унитарных алгебр малой размерности // *Известия Коми НЦ УрО РАН.* 2020. № 4(44). С. 23–29.
19. Релаксация квантовых систем с эквидистантным спектром / *А.А. Белавин, Б.Я. Зельдович, А.М. Переломов, В.С. Попов* // *ЖЭТФ.* 1969. Т. 56, № 1. С. 264–274.
20. Релаксация взаимодействующих открытых квантовых систем / *В.Ю. Шишков, Е.С. Андрианов, А.А. Пухов, А.П. Виноградов, А.А. Лисянский* // *УФН.* 2019. Т. 189. С. 544–558.
10. Dynamically algebra of observables in dissipative quantum systems / *S. Alipour, D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A.T. Rezakhani* // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2017. Vol. 50. 065301.
11. The Observables of a Dissipative Quantum System / *D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio* // *Open Systems & Information Dynamics.* 2012. Vol. 19, No. 01. P. 1250001.
12. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Dissipatsiya qubita i kontraktsii algebr Lie [Qubit dissipation and contractions of Lie algebras] // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2019. No. 4(40). P. 7–14.
13. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Kogerentnost v otkrytoy kvantovoy sisteme [Coherence in an open quantum system] // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2019. No. 4(44). P. 30–33.
14. *Arefyeva I.Ya., Volovich I.V., Kozyrev S.V.* Metod stokhasticheskogo predela i interferentsiya v kvantovykh mnogochastichnykh sistemakh [Stochastic limit method and interference in quantum multiparticle systems] // *Theoret. and Math. Phys.* 2015. Vol. 183, No. 3. P. 388–408.
15. *Arefyeva I.Ya., Volovich I.V.* Holographic Photosynthesis. arXiv:1603.09107 [hep-th].
16. *Ohya M., Volovich I.* Mathematical Foundations of Quantum Information and Computation and Its Applications to Nano- and Bio-systems. Springer, 2011. 759 p.
17. Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis / *S.V. Kozyrev, A.A. Mironov, A.E. Teretenkov, I.V. Volovich* // *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 2017. Vol. 20, No. 4. P. 1750021.
18. *Gromov N.A., Kostyakov I.V., Kuratov V.V.* Diagonal'nye kontrakcii unitarnykh algebr maloy razmernosti [Diagonal contractions of small-dimensional unitary algebras] // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* 2020. No. 4(44). P. 23–29.
19. Relaksatsiya kvantovykh sistem s ekvidistantnym spektrom [Relaxation of quantum systems with equidistant spectrum] / *A.A. Belavin, B.Ya. Zel'dovich, A.M. Perelomov, V.S. Popov* // *JETF.* 1969. Vol. 56(1). P. 264–274.
20. Relaksatsiya vzaimodeystvuyushchikh otkrytykh kvantovykh sistem [Relaxation of interacting open quantum systems] / *V.Yu. Shishkov, E.S. Andrianov, A.A. Pukhov, A.P. Vinogradov, A.A. Lisyanskiy* // *Physics–Uspekhi.* 2019. Vol. 189. P. 544–558.

References

1. *Faddeev L.D., Yakubovskiy O.A.* Lektsii po kvantovoy mekhanike dlya studentov-matematikov [Lectures on quantum mechanics for mathematics students]. Leningrad: Leningrad Univ. Publ., 1980. 200 p.
2. *Bohm A.* Quantum mechanics: foundations and applications. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
3. *Nielsen M.A., Chuang I.L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010. 702 p.
4. *Preskill J.* Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. 322 p.
5. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.
6. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1953. Vol. 39. P. 510–524.
7. *Saletan E.J.* Contraction of Lie groups // *J. Math. Phys.* 1961. Vol. 2. P. 1–21.
8. *Gromov N.A.* Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups]. Moscow: FIZMATLIT, 2012. 318 p.
9. *Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G. et al.* The quantum-to-classical transition: contraction of associative products. *Physica Scripta.* 2016. Vol. 91, No. 4. P. 045201.

Статья поступила в редакцию 25.06.2021.

УДК 530.145, 512.81
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-49-52

А.А. КАРАБАНОВ

РЕДУКЦИИ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ЛИНДБЛАДА – ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

*Школа физики и астрономии
Ноттингемского университета,
Великобритания*

karabanov@hotmail.co.uk

A.A. KARABANOV

SYMMETRY REDUCTIONS OF LINDBLAD EQUATIONS – SIMPLE EXAMPLES AND APPLICATIONS

*School of Physics and Astronomy,
University of Nottingham,
UK*

Аннотация

Открытая квантовая динамика в марковском приближении описывается основным уравнением Линдблада. Динамика Линдблада замкнута в алгебре Ли $\Lambda = su(n)$, т.е. имеет $su(n)$ симметрию. Мы говорим, что уравнение Линдблада допускает редукцию симметрии, если оно имеет инвариантное векторное подпространство $\Lambda_0 \subset \Lambda$ с Ли-алгебраической структурой. Редукции симметрии ограничивают динамику на меньшие подпространства, которые дополнительно являются алгебрами Ли.

В заметке описаны тривиальные редукции, основанные на приводимости гамильтониана и операторов Линдблада. Представлены примеры нетривиальных редукций в пределе бесконечной температуры и редукций Майораны с сохранением четности. Обсуждаются приложения к открытой спиновой динамике.

Ключевые слова:

открытые квантовые системы, уравнение Линдблада, редукция симметрии

Abstract

Open quantum dynamics in the Markovian approximation is described by the Lindblad master equation. The Lindbladian dynamics is closed in the Lie algebra $\Lambda = su(n)$, i.e. it has $su(n)$ symmetry. We say that the Lindblad equation admits a symmetry reduction if it has an invariant vector subspace $\Lambda_0 \subset \Lambda$ with the Lie algebraic structure. Symmetry reductions restrict dynamics to smaller subspaces that additionally are Lie algebras.

In these notes, trivial reductions relying on the reducibility of the Hamiltonian and Lindblad operators are described. Examples of nontrivial reductions in the infinite temperature limit and the parity preserving Majorana reductions are presented. Applications to open spin dynamics are discussed.

Keywords:

open quantum systems, Lindblad master equation, symmetry reduction

Introduction

The open quantum dynamics in terms of the positive density operator in the Markovian approximation is described by the Lindblad master equation [1]

$$\dot{\rho} = \mathcal{M}\rho \equiv -i[H, \rho] + \mathcal{D}\rho, \quad \mathcal{D} = \sum_{k=1}^{\bar{m}} \gamma_k \mathcal{L}(V_k), \quad (1)$$

$$\mathcal{L}(V)\rho \equiv V\rho V^\dagger - \frac{1}{2}(V^\dagger V\rho + \rho V^\dagger V).$$

Here H is the Hamiltonian, \mathcal{D} is the dissipator built with the traceless Lindblad operators V_k , $\text{Tr} V_k = 0$, and the non-negative rates $\gamma_k \geq 0$.

The density operator has trace 1 and at any time t is written in the form

$$\rho(t) = n^{-1}I + \rho_0(t), \quad \text{Tr} \rho_0(t) = 0, \quad \rho_0(t) = \rho_0(t)^\dagger$$

where n is the dimension of the Hilbert space, I is the unit operator, $\rho_0(t)$ is the traceless Hermitian operator. The first term does not change in time. The vector space Λ of all possible traceless parts generate the Lie algebra (with the usual commutation of operators) that is isomorphic to $su(n)$, the algebra of traceless anti-Hermitian $n \times n$ operators. Indeed, multiplying traceless Hermitian

operators by the complex unit, we come to traceless anti-Hermitian operators. Thus, the Lindbladian dynamics of Eq. (1) is closed in the Lie algebra $\Lambda = su(n)$, i.e., it has the $su(n)$ symmetry.

We say that Eq. (1) admits a symmetry reduction if it has a smaller invariant vector space $\Lambda_0 \subset \Lambda$ with a Lie algebraic structure. In other words, Λ_0 is a Lie algebra (with the usual commutator of operators) and any trajectory that starts in Λ_0 remains there for any times,

$$[\Lambda_0, \Lambda_0] \subset \Lambda_0, \quad \rho_0(0) \in \Lambda_0 \quad \longrightarrow \quad \forall t \quad \rho_0(t) \in \Lambda_0.$$

Obviously, Λ_0 is a subalgebra of the total symmetry algebra $su(n)$. Symmetry reductions restrict the dynamics into smaller invariant subspaces that additionally have a Lie algebraic structure.

Since all initial conditions within Λ_0 generate trajectories that stay within Λ_0 for all times, it is necessary that the action of the superoperator \mathcal{M} to the unit operator belongs to Λ_0 and Λ_0 is invariant under the action of \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M}I \in \Lambda_0, \quad \mathcal{M}\Lambda_0 \subset \Lambda_0. \quad (2)$$

Eq. (2) gives the criterion for the subalgebra Λ_0 to be a symmetry reduction.

In particular, the full Krylov subspace generated by the powers $\mathcal{M}^k I$ is within any symmetry reduction algebra Λ_0 . The subspace K_I and so all symmetry reductions contain also the 1-dimensional subspace spanned by the equilibrium state (perhaps not unique),

$$\text{span} \{ \rho_0^* \} \in \Lambda_0, \quad n^{-1} \mathcal{M}I + \mathcal{M}\rho_0^* = 0. \quad (3)$$

Thus, for existence of symmetry reductions it is necessary that the subspace K_I is a proper subspace of the total algebra $su(n)$,

$$\dim K_I < n^2 - 1, \quad (4)$$

$$K_I = \text{span} \{ \mathcal{M}^k I, k = 1, 2, \dots \}.$$

Indeed, the Krylov subspace K_I is an invariant subspace of Eq. (1), i.e., trajectories starting in K_I remain there all the time. In general, $\dim K_I = n^2 - 1$, the Krylov subspace coincides with the total symmetry algebra $su(n)$, Eq. (1) does not have proper invariant subspaces and hence does not admit symmetry reductions.

Eqs. (2), (3), (4) show that the Hamiltonian and Lindblad operators should satisfy special conditions for Eq. (1) to have symmetry reductions. In these notes, we discuss first trivial symmetry reductions relying on splitting the Hilbert space by reducibility of the Hamiltonian and Lindblad operators. Then we present two examples of nontrivial symmetry reductions: the reduction to the infinite temperature limit $\mathcal{M}I = 0$ and the reduction by the parity Z_2 -grading of the total algebra $su(n)$ realised as a Majorana reduction. In the first example, the symmetry reduction is due to a constraint to the dissipation rates γ_k . The second example is valid for any dissipation rates. The relevant applications to open spin dynamics are pointed out and briefly discussed.

1. Trivial reduction

The Hamiltonian is an Hermitian operator. The set of Lindblad operators (even in useful physical models) is typically not very large and is subdivided into a set

of Hermitian operators and a set of Hermitian-conjugate pairs,

$$V_{2q} = V_{2q-1}^\dagger \neq V_{2q-1}, \quad q = 1, \dots, m_1,$$

$$H = H^\dagger, \quad V_{2m_1+p} = V_{2m_1+p}^\dagger, \quad p = 1, \dots, m_2.$$

We have then

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m_2} \gamma_{2m_1+p} [V_{2m_1+p}, [V_{2m_1+p}, \cdot]] + \\ & + \sum_{q=1}^{m_1} \left\{ \gamma_{2q} \mathcal{L}(V_{2q}) + \gamma_{2q-1} \mathcal{L}(V_{2q}^\dagger) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

In particular,

$$\mathcal{M}I = \sum_{q=1}^{m_1} (\gamma_{2q} - \gamma_{2q-1}) [V_{2q}, V_{2q}^\dagger]. \quad (6)$$

Let the set of the Hermitian-conjugate pairs of Lindblad operators V_{2q}, V_{2q}^\dagger be reducible, i.e., possesses a common invariant vector subspace $X \subset h$ of the Hilbert space of a lower dimension,

$$\begin{aligned} V_{2q} X \subset X, \quad V_{2q}^\dagger X \subset X, \quad q = 1, \dots, m_1, \\ 0 < \dim X = m < n. \end{aligned}$$

Then the Hermitian-conjugate part of the dissipator (given by the second term in Eq. (5)) is closed in the set Λ_0 of all traceless operators $\rho_0 \in su(n)$ that preserve the reduced subspace X ,

$$\rho \in \Lambda_0 \quad \longrightarrow \quad \rho_0 X \subset X.$$

The set Λ_0 is closed with respect to commutation of operators and so forms a Lie algebra. This algebra is isomorphic to the $su(n)$ -normalizer of the algebra $su(m)$ spanned by traceless operators on the reduced subspace X . If additionally the Hamiltonian and the Hermitian Lindblad operators belong to Λ_0 ,

$$V_{2m_1+p}, H \in \Lambda_0 = N(su(m)),$$

then the subalgebra Λ_0 is a symmetry reduction of Eq. (1). Since the complementary subspace $X_c = h \setminus X$, $\dim X_c = n - m$ is also invariant for V_{2q}, V_{2q}^\dagger , the same construction is applicable to X_c . Hence,

$$\Lambda_0 = N(su(m)) = N(su(n - m))$$

where the subalgebra $su(n - m)$ is spanned by traceless operators on the complementary subspace X_c .

We call such symmetry reduction a *trivial reduction*, as it describes the situation where the initial Hilbert space, being formally n -dimensional, is in fact split into two independent subspaces of lower dimensions $m, n - m < n$ that are not dynamically connected. We have (after a suitable permutation of Hilbert states)

$$H, \quad V_k \in \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_c \end{pmatrix},$$

$$\dim \mathcal{A} = m \times m, \quad 0 < m < n.$$

In the special case where the Lindblad operators are all Hermitian, $V_{2q} = 0$, $q = 1, \dots, m_1$, the symmetry reductions are any subalgebras which normalizers contain the operators V_{2m_1+p} , H .

2. Infinite temperature reduction

Let the unit operator annihilate the right-hand side of Eq. (1),

$$\mathcal{M}I = 0 \quad (7)$$

and the operators $[V_{2q}, V_{2q}^\dagger]$ are linearly independent. Then it follows from Eq. (6) that

$$\gamma_{2q} = \gamma_{2q-1} \equiv \bar{\gamma}_q. \quad (8)$$

As a result, according to Eq. (5),

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m_2} \gamma_{2m_1+p} [V_{2m_1+p}, [V_{2m_1+p}, \cdot]] - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{m_1} \bar{\gamma}_q \left([V_{2q}, [V_{2q}^\dagger, \cdot]] + [V_{2q}^\dagger, [V_{2q}, \cdot]] \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Let Λ_0 be the subalgebra generated by the Hermitian-conjugate pairs of Lindblad operators and let the Hermitian Lindblad operators and the Hamiltonian belong to the normalizer of Λ_0 ,

$$[V_{2m_1+p}, \Lambda_0], [H, \Lambda_0] \subset \Lambda_0 \longleftarrow \{V_{2q}, V_{2q}^\dagger\}. \quad (10)$$

It follows then from Eq. (9) that Λ_0 is a symmetry reduction of Eq. (1).

According to Eq. (7), the density operator $\rho = n^{-1}I$ is an incoherent equilibrium solution to Eq. (1), featuring the case where all the pure states of the system have equal probabilities. This case corresponds to the infinite temperature limit of both Fermi-Dirac and Bose-Einstein statistics that in this case coincide with the corresponding limit of the Boltzmann distribution. For this reason, we call the symmetry reduction given by Eqs. (7), (8), (10) an *infinite temperature reduction*.

As an example, consider the Markovian Lindblad open dynamics of a single spin in a magnetic field. The Hamiltonian contains the Zeeman splitting and the coherent driving parts,

$$H = \Omega S_z + \frac{\omega_1}{2} (S_+ + S_-).$$

The Lindblad operators are the usual raising and lowering operators characterizing the longitudinal relaxation plus the z -operator that describes the transverse relaxation,

$$V_{1,2} = S_\pm = S_x \pm iS_y, \quad V_3 = S_z.$$

We assume that the initial value for the dynamics belongs to the spin algebra $so(3)$ (treated as an isomorphic copy of $su(2)$),

$$\rho(0) = n^{-1}I + p_z S_z + p_+ S_+ + p_- S_-, \quad (11)$$

$$[S_z, S_\pm] = \pm S_\pm, \quad [S_+, S_-] = 2S_z$$

where $n = 2s + 1$ is the dimension of the Hilbert space, s is the spin quantum number (any half-integer or integer), $p_{z,\pm}$ are some constants.

Let $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$, i.e., the Lindblad operators S_\pm have the same dissipation rates. Then it can be easily verified that we are under conditions of the infinite temperature reduction described earlier in this section. For any time t the dynamics remains closed in $so(3)$, i.e., is reduced to a 3-dimensional dynamics of the constants $p_{z,\pm}$,

$$\rho(t) = n^{-1}I + p_z(t)S_z + p_+(t)S_+ + p_-(t)S_-.$$

The latter is described by the well-known Bloch equations. This result is valid for any spin quantum number s .

Let now $s > 1/2$ and $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Then Eq. (7) no longer holds and the dynamics, even starting in $so(3)$ as in Eq. (11), at $t > 0$ comes out of the spin algebra $so(3)$. Indeed, the (non-driven) thermal equilibrium state is represented now by a diagonal matrix that cannot be represented by a combination of the unit operator and the operator S_z ,

$$\begin{aligned} \rho_{th} = & Z^{-1} \exp\left(-\frac{\hbar\bar{\Omega}S_z}{kT}\right) = \\ & = \text{diag}\{\rho_1, \dots, \rho_n\} \neq n^{-1}I + \beta S_z. \end{aligned}$$

As a matter of fact, higher orders S_z^r , $r > 1$, of the operator S_z occur that do not belong to $so(3)$. This corresponds to the case of finite temperatures.

It can be shown that in the presence of the coherent terms in the Hamiltonian, $\omega_1 \neq 0$, and for $\gamma_1 \neq \gamma_2$, the above spin dynamics does not admit symmetry reductions: the dimension of any (non-equilibrium) trajectory equals $n^2 - 1$, the dimension of the total symmetry algebra $su(n)$. For $\omega_1 = 0$ and any $\gamma_{1,2}$ the dynamics admits the symmetry reduction represented by the algebra of traceless diagonal $n \times n$ matrices that is the Cartan subalgebra of $su(n)$.

3. Parity preserving reduction

The total symmetry algebra $\Lambda = su(n)$ is a formal superalgebra, i.e., it admits a Z_2 -grading into even and odd subspaces respected by the commutation,

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1, \quad [\Lambda_l, \Lambda_j] \subset \Lambda_{(l+j) \pmod{2}}.$$

Here the even subspace Λ_0 is a subalgebra, while the odd subspace Λ_1 (being not a subalgebra) complements the even subalgebra to the total algebra Λ .

It can be assumed that the Z_2 -grading of $su(n)$ is inherited from a Z_2 -grading of the associative algebra of $n \times n$ matrices. An example valid for any n is the representation of traceless (anti-)Hermitian operators by matrix elements ρ_{lj} , $1 \leq l, j \leq n$, that belong to even and odd collateral diagonals,

$$\Lambda_s = \text{span}\{\rho_{lj} : l - j = s \pmod{2}\}, \quad s = 0, 1. \quad (12)$$

The following result is a simple subsequence of the above construction. If the Hamiltonian belongs to the even subspace, while each Lindblad operator belongs entirely to one of the two grading subspaces,

$$H \in \Lambda_0, \quad V_k \in \Lambda_0 \text{ or } \Lambda_1,$$

then the even subalgebra Λ_0 is a symmetry reduction of Eq. (1). We call such symmetry reduction a *parity preserving reduction*.

For large n , the Z_2 -grading given by Eq. (12) may be not unique. Below we consider an example of parity preserving reduction based on the so-called Majorana fermions.

The Majorana fermions form a set of $2m$ $n \times n$ operators $a_l, l = 1, \dots, 2m$, that anti-commute with each other and square to the unit operator,

$$a_l^2 = I, \quad a_l a_j + a_j a_l = 0, \quad l \neq j.$$

Consider the even and odd parts of the Clifford algebra generated by the Majorana fermions, i.e., the vector spaces spanned by even and odd order products of the operators a_l ,

$$\Lambda_0 = \text{span} \left\{ \prod_{r=1}^{2k} a_{l_r}, l_r = 1, \dots, 2m, \right. \\ \left. k = 1, \dots, m \right\},$$

$$\Lambda_1 = \text{span} \left\{ \prod_{r=1}^{2k-1} a_{l_r}, l_r = 1, \dots, 2m, \right. \\ \left. k = 1, \dots, m \right\}.$$

Denote Λ_0, Λ_1 the subspaces of the above subspaces that contain only traceless operators. The even subspace Λ_0 is closed with respect to the operator commutation and so forms a Lie algebra. It follows from the anti-commutation of the Majorana fermions that the algebra Λ_0 contains the algebra of anti-symmetric quadratic forms of the operators a_l that is isomorphic to the algebra $so(2m)$ of (generally complex) anti-symmetric operators. Hence, Λ_0 is an extension of $so(2m)$ by all even order products of a_l .

The above construction suggests that the subdivision $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1$ is a Z_2 -grading of the total symmetry algebra. Thus, if the Hamiltonian belongs to Λ_0 and each Lindblad operator belongs to either Λ_0 or Λ_1 , then the algebra Λ_0 is a symmetry reduction of Eq. (1). In other words, for any time t the traceless part of the density operator is represented by a combination of even order products of the operators a_l . We call this a *Majorana reduction*.

As an example, consider the system of $m > 1$ interacting spin-1/2 particles (for example, qubits). This system is described by the tensor product of m 4-dimensional operator spaces spanned by the set of 2×2 operators $1, S_x, S_y, S_z$ where 1 is the unit operator and S_α ,

$\alpha = x, y, z$, are the standard spin-1/2 operators (of the 2-representation of $so(3)$). As each spin has two states and the trace of the density operator equals 1, the whole symmetry algebra is $\Lambda = su(2^m)$ of dimension $4^m - 1$.

Denote S_{kx}, S_{ky}, S_{kz} the spin operators generated by the k th spin – that placed in position k of the tensor product: $S_{k\alpha} = 1 \times \dots \times 1 \times S_\alpha \times 1 \dots \times 1$. These individual operators for different spins $k \neq k'$ commute and generate the algebra $so(3)$ within their subspaces with the same k . It can be easily verified that the set of $2m$ operators

$$a_{2k-1} = 2^k S_{kx} \prod_{s < k} S_{sz}, \\ a_{2k} = 2^k S_{ky} \prod_{s < k} S_{sz}, \quad (13) \\ k = 1, \dots, m,$$

are Majorana fermions.

Here, the Majorana chain

$$H = \sum_{l=1}^{2m-1} h_l [a_l, a_{l+1}] = \sum_{l=1}^{m-1} (\Omega_l S_{lz} + D_l S_{lx} S_{l+1,x})$$

leads to the Hamiltonian of the coherently driven 1-dimensional Ising model (with respect to the x axis). Another combination

$$H = \sum_{l=1}^{2m-1} h_l [a_l, a_{l+1}] + \sum_{k=1}^{m-1} \bar{h}_k [a_{2k-1}, a_{2k+2}] = \\ = \sum_{l=1}^{m-1} (\Omega_l S_{lz} + D_l^x S_{lx} S_{l+1,x} + D_l^y S_{ly} S_{l+1,y})$$

leads to the Hamiltonian of the driven anisotropic Heisenberg XY 1-dimensional chain. Adding higher even order Majorana products, we can get interacting spin systems of higher dimensions. In all cases, choosing various combinations of odd or even order Majorana products as the Lindblad operators, we generate various dissipation models.

Other physically important examples of symmetry reductions relying on parity can be suggested.

References

1. Breuer H.P., Petruccione F. The theory of open quantum systems. Oxford University Press, 2010. 636 p.

Статья поступила в редакцию 28.10.2021.

УДК 539.1
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-53-58

Е.М. ОВСИЮК, А.Д. КОРАЛЬКОВ, А.П. САФРОНОВ

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 И ДВУМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

*Мозырский государственный педагогический
университет имени И.П. Шамякина,
г. Мозырь, Беларусь*

*e.ovsiyuk@mail.ru
artemkoralkov@gmail.com
safronov_mspu@mail.ru*

E.M. OVSIYUK, A.D. KORAL'KOV, A.P. SAFRONOV

A SPIN 1/2 PARTICLE AND TWO MASS PARAMETERS IN AN EXTERNAL COULOMB FIELD

*I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical
University,
Mozyr, Belarus*

Аннотация

Обобщенное релятивистское уравнение для фермиона с двумя массовыми параметрами исследовано в случае присутствия внешнего кулоновского поля. После разделения переменных задача сведена к системе из восьми радиальных уравнений первого порядка. С учетом диагонализации оператора пространственного отражения выведены две независимые системы по четыре уравнения. На большом расстоянии от центра они принимают вид уравнений для обычных частиц с массами M_1 и M_2 . В нерелятивистском приближении получены две системы зацепляющихся уравнений второго порядка для двух функций, откуда найдены соответствующие уравнения четвертого порядка для отдельных функций. Для этих уравнений построены решения Фробениусовского типа, в них входят степенные ряды с 10-членными рекуррентными соотношениями. Два из четырех решений пригодны для описания связанных состояний. В качестве правила квантования используется условие, выделяющее так называемые трансцендентные решения Фробениуса. Получены две аналитические формулы, каждая из которых похожа на формулу для обычного спектра атома водорода, согласно теории Паули, они зависят от массовых параметров M_1 и M_2 .

Ключевые слова:

частица со спином 1/2, кулоновское поле, нерелятивистское приближение, решения Фробениуса

Abstract

A generalized relativistic wave equation for a fermion with two mass parameters is studied in the presence of an external Coulomb field. After separating the variables, the problem is reduced to a system of eight differential equations of the first order. Taking into account the diagonalization of the spatial reflection operator, we derive two independent systems of four equations, referring to states of opposite parity. At a large distance from the center, they take the form of two subsystems for two ordinary Dirac particles in external Coulomb field, with masses M_1 and M_2 respectively. To simplify the problem, we perform transition to the nonrelativistic description of the system. In this way, we derive two systems of linked second order equations, referring to states with different parities, from which the corresponding fourth order differential equations for separate functions are found. Solutions of the Frobenius type are constructed, they involve power series with 10-term recurrent relations. Two of the four solutions are appropriate for describing bound states. As a quantization rule, we apply the known transcendence condition, in this way we obtained two analytical formulas for energy spectra. They are similar to nonrelativistic spectra for ordinary spin 1/2 particle, but being governed by masses M_1 and M_2 .

Keywords:

spin 1/2 particle, Coulomb field, nonrelativistic approximation, Frobenius solutions

Введение

В работах [1–4] было предложено релятивистское уравнение для частицы со спином 1/2 и двумя массовыми параметрами. Показано, что в отсутствие внешних полей такое обобщенное уравнение для фермиона распадается на два обычных уравнения Дирака. В присутствии внешних электромагнит-

ных полей происходит смешивание двух биспинорных компонент. Были построены точные решения такого уравнения в присутствии однородного магнитного поля.

Система уравнений для двух биспиноров $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ в тетрадном формализме имеет структуру

$$\begin{aligned} & \{\gamma^\alpha [i(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha) - eA_\alpha] - M_1 + \\ & + b\Lambda_1 \Sigma(x)\} \Psi_1(x) - a\Lambda_1 \Sigma(x) \Psi_2(x) = 0, \\ & \{\gamma^\alpha [i(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha) - eA_\alpha] - M_2 - \\ & - a\Lambda_2 \Sigma(x)\} \Psi_2(x) + b\Lambda_2 \Sigma(x) \Psi_1(x) = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\gamma^\alpha(x) = e_{(b)}^\alpha \gamma^b, \quad \Sigma(x) = -ieF_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}(x),$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \frac{\gamma^\alpha(x)\gamma^\beta(x) - \gamma^\beta(x)\gamma^\alpha(x)}{4}.$$

Используются следующие параметры:

$$M_1 = \frac{M}{(1 + \cos \gamma)/2},$$

$$M_2 = \frac{M}{(1 - \cos \gamma)/2}, \quad \gamma \in [0, \pi/2],$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{1}{M} \left(4 - 3\sqrt{1 + (1/3)\sin^2 \gamma} - \cos \gamma \right),$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{1}{M} \left(4 - 3\sqrt{1 + (1/3)\sin^2 \gamma} + \cos \gamma \right),$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \left(1 + \sqrt{1 + (1/3)\sin^2 \gamma} \right) \times \\ &\times \frac{\cos \gamma - \sqrt{1 + (1/3)\sin^2 \gamma}}{\cos \gamma(1 + \cos \gamma)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \left(1 + \sqrt{1 + (1/3)\sin^2 \gamma} \right) \times \\ &\times \frac{\cos \gamma + \sqrt{1 + (1/3)\sin^2 \gamma}}{\cos \gamma(1 - \cos \gamma)}. \end{aligned}$$

Параметр M с размерностью обратной длины является произвольным.

1. Разделение переменных

Рассмотрим обобщенное уравнение в кулоновском поле:

$$A_t = -\frac{e}{r}, \quad F_{tr} = -\partial_r A_0 = -\frac{e}{r^2},$$

$$\Sigma(x) = i\frac{e^2}{r^2} \gamma^0 \gamma^3,$$

применяем сокращающие запись обозначения

$$a\Lambda_1 e^2 = \alpha_1, \quad a\Lambda_2 e^2 = \alpha_2,$$

$$b\Lambda_1 e^2 = \beta_1, \quad b\Lambda_2 e^2 = \beta_2.$$

Система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[\gamma^0 \left(i\partial_t - \frac{\alpha}{r} \right) + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta\phi} - M_1 + \right. \\ & \left. + i\frac{\beta_1}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \right] \Psi_1 - i\frac{\alpha_1}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \Psi_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\gamma^0 \left(i\partial_t - \frac{\alpha}{r} \right) + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta\phi} - M_2 - \right. \\ & \left. - i\frac{\alpha_2}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \right] \Psi_2 + i\frac{\beta_2}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \Psi_1 = 0, \end{aligned}$$

где выделен зависящий от угловых переменных оператор

$$\Sigma_{\theta\phi} = i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + i\sigma^{12} \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Дальше будем учитывать явные выражения для четырех параметров:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -e^2 \frac{(1 - \cos \gamma)}{3M \cos \gamma(1 + \cos \gamma)} \times \\ &\times \frac{(-\cos \gamma \sqrt{12 - 3\cos^2 \gamma} + \cos^2 \gamma + 2)}{3M \cos \gamma(1 + \cos \gamma)}, \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = e^2 \frac{2 \sin^2 \gamma}{3 M \cos \gamma}, \quad \beta_1 = -e^2 \frac{2 \sin^2 \gamma}{3 M \cos \gamma} < 0,$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -\frac{e^2(1 + \cos \gamma)}{3M \cos \gamma(\cos \gamma - 1)} \times \\ &\times \frac{(\cos \gamma \sqrt{12 - 3\cos^2 \gamma} + \cos^2 \gamma + 2)}{3M \cos \gamma(\cos \gamma - 1)} > 0. \end{aligned}$$

Отмечаем, что выполняются следующие соотношения между параметрами

$$\alpha_2 = -\beta_1, \quad \alpha_1 \beta_2 = -\beta_1^2. \quad (2)$$

Подстановка для волновой функции с квантовыми числами ϵ, j, m имеет вид

$$\Psi_1(x) = \frac{e^{-i\epsilon t}}{r} \begin{pmatrix} f_1(r) D_{-1/2} \\ f_2(r) D_{+1/2} \\ f_3(r) D_{-1/2} \\ f_4(r) D_{+1/2} \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2(x) = \frac{e^{-i\epsilon t}}{r} \begin{pmatrix} g_1(r) D_{-1/2} \\ g_2(r) D_{+1/2} \\ g_3(r) D_{-1/2} \\ g_4(r) D_{+1/2} \end{pmatrix}.$$

Используется аппарат D -функций Вигнера. С учетом матриц Дирака в спинорном представлении получаем восемь радиальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} \right) f_3 - i\frac{d}{dr} f_3 - i\frac{\nu}{r} f_4 - \\ & - M_1 f_1 + \frac{i\beta_1}{r^2} f_1 - \frac{i\alpha_1}{r^2} g_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_4 + i \frac{d}{dr} f_4 + i \frac{\nu}{r} f_3 - \\
 & \quad - M_1 f_2 - \frac{i\beta_1}{r^2} f_2 + \frac{i\alpha_1}{r^2} g_2 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_1 + i \frac{d}{dr} f_1 + i \frac{\nu}{r} f_2 - \\
 & \quad - M_1 \delta f_2 - \frac{i\beta_1}{r^2} f_3 + \frac{i\alpha_1}{r^2} g_3 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_2 - i \frac{d}{dr} f_2 - i \frac{\nu}{r} f_1 - \\
 & \quad - M_1 f_4 + \frac{i\beta_1}{r^2} f_4 - \frac{i\alpha_1}{r^2} g_4 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_3 - i \frac{d}{dr} g_3 - i \frac{\nu}{r} g_4 - \\
 & \quad - M_2 g_1 - \frac{i\alpha_2}{r^2} g_1 + \frac{i\beta_2}{r^2} f_1 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_4 + i \frac{d}{dr} g_4 + i \frac{\nu}{r} g_3 - \\
 & \quad - M_2 g_2 + \frac{i\alpha_2}{r^2} g_2 - \frac{i\beta_2}{r^2} f_2 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_1 + i \frac{d}{dr} g_1 + i \frac{\nu}{r} g_2 - \\
 & \quad - M_2 g_3 + \frac{i\alpha_2}{r^2} g_3 - \frac{i\beta_2}{r^2} \delta f_2 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_2 - i \frac{d}{dr} g_2 - i \frac{\nu}{r} g_1 - \\
 & \quad - M_2 g_4 - \frac{i\alpha_2}{r^2} g_4 + \frac{i\beta_2}{r^2} f_4 = 0, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где $\nu = j + 1/2$; $j = 1/2, 3/2, \dots$. Система (3) допускает наложение условий, вытекающих из требования диагонализации оператора пространственной четности:

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \delta f_2, \quad f_4 = \delta f_1, \quad \delta = \pm 1, \\
 g_3 &= \delta g_2, \quad g_4 = \delta g_1, \quad \delta = \pm 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_1 + i \frac{d}{dr} f_1 + i \frac{\nu}{r} f_2 - \\
 & \quad - M_1 \delta f_2 - \frac{i\beta_1}{r^2} f_2 + \frac{i\alpha_1}{r^2} \delta g_2 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_2 - i \frac{d}{dr} f_2 - i \frac{\nu}{r} f_1 - \\
 & \quad - M_1 \delta f_1 + \frac{i\beta_1}{r^2} \delta f_1 - \frac{i\alpha_1}{r^2} \delta g_1 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_1 + i \frac{d}{dr} g_1 + i \frac{\nu}{r} g_2 - \\
 & \quad - M_2 \delta g_2 + \frac{i\alpha_2}{r^2} \delta g_2 - \frac{i\beta_2}{r^2} \delta f_2 = 0, \\
 & \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_2 - i \frac{d}{dr} g_2 - i \frac{\nu}{r} g_1 - \\
 & \quad - M_2 \delta g_1 - \frac{i\alpha_2}{r^2} \delta g_1 + \frac{i\beta_2}{r^2} \delta f_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Вместо f_1 и f_2 используем комбинации этих функций:

$$f = (f_2 + f_1), \quad F = i(f_2 - f_1);$$

$$g = (g_2 + g_1), \quad G = i(g_2 - g_1);$$

в результате получаем

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \delta \frac{\beta_1}{r^2}\right) F - \\
 & \quad - \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} - \delta M_1\right) f - \delta \frac{\alpha_1}{r^2} G = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \delta \frac{\beta_1}{r^2}\right) f + \\
 & \quad + \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} + \delta M_1\right) F + \delta \frac{\alpha_1}{r^2} g = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \delta \frac{\alpha_2}{r^2}\right) G - \\
 & \quad - \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} - \delta M_2\right) g + \delta \frac{\beta_2}{r^2} F = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \delta \frac{\alpha_2}{r^2}\right) g + \\
 & \quad + \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} + \delta M_2\right) G - \delta \frac{\beta_2}{r^2} f = 0. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Удобно рассматривать состояния с разной четностью по отдельности:

$$\begin{aligned}
 \delta &= +1, \\
 & \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\right) F - \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} - M_1\right) f - \frac{\alpha_1}{r^2} G = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\right) f + \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} + M_1\right) F + \frac{\alpha_1}{r^2} g = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\right) G - \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} - M_2\right) g + \frac{\beta_2}{r^2} F = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\right) g + \\
 & \quad + \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} + M_2\right) G - \frac{\beta_2}{r^2} f = 0; \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta &= -1, \\
 & \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\right) F - \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} + M_1\right) f + \frac{\alpha_1}{r^2} G = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\right) f + \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} - M_1\right) F - \frac{\alpha_1}{r^2} g = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\right) G - \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} + M_2\right) g - \frac{\beta_2}{r^2} F = 0, \\
 & \left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\right) g + \\
 & \quad + \left(\epsilon + \frac{\alpha}{r} - M_2\right) G + \frac{\beta_2}{r^2} f = 0. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Эти две системы уравнений связаны формальным преобразованием

$$\begin{aligned}
 & M_1, M_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \Rightarrow \\
 & -M_1, -M_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\beta_1, -\beta_2.
 \end{aligned}$$

Если рассматривать эти уравнения при достаточно больших r , то пренебрегая слагаемыми, содержащими r^{-2} , приходим к двум несвязанным подсистемам уравнений для двух обычных дираковских частиц с массами M_1 и M_2 во внешнем кулоновском поле. Это означает, что достаточно далеко от центра $r = 0$ будем наблюдать две несвязанные между собой частицы с различающимися массами.

2. Нерелятивистское приближение

Чтобы упростить задачу, перейдем к нерелятивистскому приближению. Исходим из уравнений (5), (6). Вводим две нерелятивистские энергии E_1 и E_2 : $\epsilon = M_1 + E_1$, $\epsilon = M_2 + E_2$; при этом уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \delta = +1, \\ -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\right)F + \left(E_1 + \frac{\alpha}{r}\right)f + \frac{\alpha_1}{r^2}G = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\right)f - \left(2M_1 + E_1 + \frac{\alpha}{r}\right)F - \frac{\alpha_1}{r^2}g = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\right)G + \left(E_2 + \frac{\alpha}{r}\right)g - \frac{\beta_2}{r^2}F = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\right)g - \left(2M_2 + E_2 + \frac{\alpha}{r}\right)G + \frac{\beta_2}{r^2}f = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta = -1, \\ -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\right)F + \left(2M_1 + E_1 + \frac{\alpha}{r}\right)f - \frac{\alpha_1}{r^2}G = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\right)f - \left(E_1 + \frac{\alpha}{r}\right)F + \frac{\alpha_1}{r^2}g = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\right)G + \left(2M_2 + E_2 + \frac{\alpha}{r}\right)g + \frac{\beta_2}{r^2}F = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\right)g - \left(E_2 + \frac{\alpha}{r}\right)G - \frac{\beta_2}{r^2}f = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала уравнения при $\delta = +1$. Пренебрежем энергией в сравнении с массой покоя

$$2M_1 + E_1 + \frac{\alpha}{r} \approx 2M_1 \quad 2M_2 + E_2 + \frac{\alpha}{r} \approx 2M_2,$$

тогда получим

$$\begin{aligned} \delta = +1, \\ -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\right)F + \left(E_1 + \frac{\alpha}{r}\right)f + \frac{\alpha_1}{r^2}G = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\right)f - 2M_1F - \frac{\alpha_1}{r^2}g = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\right)G + \left(E_2 + \frac{\alpha}{r}\right)g - \frac{\beta_2}{r^2}F = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\right)g - 2M_2G + \frac{\beta_2}{r^2}f = 0. \end{aligned}$$

Выразим из второго и четвертого уравнений функции F, G и подставим в первое и третье уравнения. В результате получаем два уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dr^2} + \left[\frac{2M_1\alpha}{r} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} + \frac{2\beta_1(\nu+1)}{r^3} - \frac{\beta_1^2}{r^4} + \frac{M_1\alpha_1\beta_2}{M_2r^4} + 2M_1E_1 \right] f + \\ + \left(\frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{\alpha_1M_1}{r^2M_2} \right) \frac{dg}{dr} + \left(\frac{\nu\alpha_1}{r^3} - \frac{2\alpha_1}{r^3} - \frac{M_1\alpha_1\nu}{M_2r^3} + \frac{\alpha_1\beta_1}{r^4} - \frac{\alpha_1\alpha_2M_1}{M_2r^4} \right) g = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2g}{dr^2} + \left[\frac{2M_1\alpha}{r} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} - \frac{2\alpha_2(\nu+1)}{r^3} - \frac{\alpha_2^2}{r^4} + \frac{M_2\alpha_1\beta_2}{M_1r^4} + 2M_2E_2 \right] g + \\ + \left(-\frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_2M_2}{r^2M_1} \right) \frac{df}{dr} + \left(\frac{\nu\beta_2}{r^3} + \frac{2\beta_2}{r^3} + \frac{M_2\beta_2\nu}{M_1r^3} + \frac{\alpha_2\beta_2}{r^4} - \frac{\beta_1\beta_2M_2}{M_1r^4} \right) f = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Эти уравнения симметричны относительно замен (учитываем (2))

$$f \Rightarrow g, \quad \alpha_1 \Rightarrow -\beta_2, \quad \alpha_2 \Rightarrow -\beta_1, \quad M_1 \Rightarrow M_2;$$

следовательно, достаточно исследовать уравнение четвертого порядка только для одной функции. Приведем общую структуру уравнений (7) и (8):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + b + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^4} \right) f + \\ + \left(\frac{c}{r^2} \frac{d}{dr} + \frac{c_3}{r^3} + \frac{c_4}{r^4} \right) g = 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + B + \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_3}{r^3} + \frac{B_4}{r^4} \right) f + \\ + \left(\frac{C}{r^2} \frac{d}{dr} + \frac{C_3}{r^3} + \frac{C_4}{r^4} \right) g = 0. \end{aligned}$$

Для случая с противоположной четностью ($\delta = -1$) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2F}{dr^2} + \left[\frac{2M_1\alpha}{r} + \frac{\nu(-\nu+1)}{r^2} + \frac{2\beta_1(-\nu+1)}{r^3} - \frac{\beta_1^2}{r^4} + \frac{M_1\alpha_1\beta_2}{M_2r^4} + 2M_1E_1 \right] F + \\ + \left(\frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{\alpha_1M_1}{r^2M_2} \right) \frac{dG}{dr} + \left(\frac{\nu\alpha_1}{r^3} - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{M_1\alpha_1\nu}{M_2r^3} + \frac{\alpha_1\beta_1}{r^4} - \frac{\alpha_1\alpha_2M_1}{M_2r^4} \right) G = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \left[\frac{2M_2\alpha}{r} - \frac{\nu(\nu-1)}{r^2} + \frac{2\alpha_2(\nu-1)}{r^3} - \frac{\alpha_2^2}{r^4} + \frac{M_2\alpha_1\beta_2}{M_1r^4} + 2M_2E_2 \right] G +$$

$$-\frac{\alpha_2^2}{r^4} + \frac{M_2\alpha_1\beta_2}{M_1r^4} + 2M_2E_2 \Big] G + \left(-\frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_2M_2}{r^2M_1} \right) \frac{dF}{dr} + \left(-\frac{\nu\beta_2}{r^3} + \frac{2\beta_2}{r^3} - \frac{M_2\beta_2\nu}{M_1r^3} + \frac{\alpha_2\beta_2}{r^4} - \frac{\beta_1\beta_2M_2}{M_1r^4} \right) F = 0. \quad (10)$$

Уравнения (9),(10) отличаются от (7),(8) только формальными заменами

$$f \Rightarrow F, g \Rightarrow G, \nu \Rightarrow -\nu. \quad (11)$$

Приведем общую структуру уравнения четвертого порядка для функции g :

$$\frac{d^4g}{dr^4} + \left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2r^3 + m_2r^2 + m_4r + m_5}{P} \right) \frac{d^3g}{dr^3} + \left(n_0 + \frac{n_1}{r} + \frac{n_2}{r^2} + \frac{n_3}{r^3} + \frac{n_4}{r^4} + \frac{n_5r^3 + n_6r^2 + n_7r + n_8}{P} \right) \frac{d^2g}{dr^2} + \left(\frac{p_1}{r} + \frac{p_2}{r^2} + \frac{p_3}{r^3} + \frac{p_4}{r^4} + \frac{p_5r^3 + p_6r^2 + p_7r + p_8}{P} \right) \frac{dg}{dr} + \left(q_0 + \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r^2} + \frac{q_3}{r^3} + \frac{q_4}{r^4} + \frac{q_5}{r^5} + \frac{q_6}{r^6} + \frac{q_7}{r^7} + \frac{q_8}{r^8} + \frac{q_9r^3 + q_{10}r^2 + q_{11}r + q_{12}}{P} \right) g = 0,$$

где P обозначает полином четвертого порядка:

$$P = 2E_1M_2(M_1 - M_2)^2r^4 + 2M_2\alpha(M_1 - M_2)^2r^3 + 2M_2(\nu + 1)[(2\nu + 1)M_2 + M_1]r^2 + 2M_2(\nu + 1)[(-3\beta_1 + \alpha_2)M_2 + M_1(\beta_1 + \alpha_2)]r + [\beta_2\alpha_1 + 2\beta_1(-\alpha_2 + \beta_1)]M_2^2 - M_2M_1(-\alpha_2^2 + \beta_1^2 + 2\beta_2\alpha_1) + M_1^2\alpha_1\beta_2.$$

Выполнив подстановку $g = e^{Br}\bar{g}(r)$, находим четыре возможных значения для B :

$$B = -\sqrt{-2M_1E_1}, +\sqrt{-2M_1E_1}, -\sqrt{-2M_2E_2}, +\sqrt{-2M_2E_2}. \quad (12)$$

Далее выполним подстановку $\bar{g} = r^A e^{C/r} G(r)$, для определения параметра C получаем уравнение четвертого порядка $C^4 + (2\alpha_1\beta_2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2)C^2 + (-\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2 = 0$; отсюда, учитывая соотношение (2), получаем

$$C^4 - 4C^2\beta_1^2 = 0 \Rightarrow C = 0, 0, \pm 2\beta_1.$$

Возможны следующие варианты:

$$I. C = +2\beta_1 < 0, A = \nu + 2 > 0; \quad (13)$$

$$II. C = -2\beta_1 > 0, A = -\nu < 0; \quad (14)$$

$$III, IV. C = 0, A = -\nu, \nu + 1. \quad (15)$$

Будем следить за случаями, пригодными для описания связанных состояний: т. е. I и IV при положительных A . Далее приходим к уравнению со сложной структурой, его решения строятся в виде степенных

рядов $G(r) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k r^k$ с 10-членными рекуррентными соотношениями

$$Q_{k-9}d_{k-9} + Q_{k-8}d_{k-8} + \dots + Q_k d_k = 0. \quad (16)$$

Условие получения трансцендентных решений

$$Q_{k-9} = 0, \Rightarrow N_{10}(k-9) + L_9 = 0, k-9 = n \geq 0,$$

при $A = \nu + 2, B = -\sqrt{-2M_1E_1}$ имеет вид

$$8[(-5 + \nu + k)\sqrt{-2E_1M_1} - \alpha M_1].$$

$$(M_1 - M_2)^2 M_2 (-E_2 M_2 + E_1 M_1) E_1 = 0,$$

откуда следует

$$E_1 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 M_1}{[k-7 + (\nu+2)]^2}. \quad (17)$$

Пусть $B = -\sqrt{-2M_2E_2}$, тогда получаем

$$E_2 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 M_2}{[k-9 + (\nu+2)]^2}. \quad (18)$$

Выбрав параметры A, C , согласно (15), и проделав аналогичные вычисления, получим еще два выражения для спектров:

$$A = \nu + 1, B = -\sqrt{-2M_1E_1},$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 M_1}{[k-6 + (\nu+1)]^2}, \quad (19)$$

$$A = \nu + 1, B = -\sqrt{-2M_2E_2},$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{M_2\alpha^2}{[k-8 + (\nu+1)]^2}. \quad (20)$$

С точностью до переобозначения параметров имеем только два разных спектра.

Для состояний с противоположной четностью получаем спектры (используем формальные замены $\nu + 2 \Rightarrow \nu, \nu + 1 \Rightarrow \nu$)

$$A = \nu, B = -\sqrt{-2M_1E_1}, E_1 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 M_1}{[k-7 + \nu]^2},$$

$$A = \nu, B = -\sqrt{-2M_2E_2}, E_2 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 M_2}{[k-9 + \nu]^2},$$

$$A = \nu, B = -\sqrt{-2M_1E_1}, E_1 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 M_1}{[k-6 + \nu]^2},$$

$$A = \nu, B = -\sqrt{-2M_2E_2}, E_2 = -\frac{1}{2} \frac{M_2\alpha^2}{[k-8 + \nu]^2}.$$

Здесь также с точностью до переобозначения параметров имеем два разных спектра; причем они совпадают с предыдущими.

Остановимся на структуре нерелятивистских волновых функций. В нерелятивистском описании имеем следующие приближенные равенства:

$$\delta = +1, f_1 = f + iF \approx f, f_2 = f - iF \approx f, \\ g_1 = g + iG \approx g, g_2 = g - iG \approx g; \quad (21)$$

$$\delta = -1, f_1 = f + iF \approx iF, f_2 = f - iF \approx -iF, \\ g_1 = g + iG \approx iG, g_2 = g - iG \approx -iG. \quad (22)$$

Соответственно, нерелятивистские 2-компонентные волновые функции имеют вид

$$\delta = +1, \Psi_{\delta=+1} = \begin{vmatrix} f(r)D_{-1/2} \\ f(r)D_{+1/2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g(r)D_{-1/2} \\ g(r)D_{+1/2} \end{vmatrix}; \\ \delta = -1, \Psi_{\delta=+1} = i \begin{vmatrix} F(r)D_{-1/2} \\ -F(r)D_{+1/2} \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} G(r)D_{-1/2} \\ G(r)D_{+1/2} \end{vmatrix}.$$

Заключение

Обобщенное уравнение для фермиона с двумя массовыми параметрами исследовано в случае присутствия внешнего кулоновского поля. Показано, что вдали от кулоновского центра система представляется как простая совокупность двух несвязанных частиц дираковского типа с фиксированными разными массами. Однако при рассмотрении системы во всей области изменения радиальной переменной две компоненты сложной системы связаны объединенной системой уравнений и не могут рассматриваться как независимые. Удивительным представляется тот факт, что анализ сложной системы радиальных уравнений во всей области изменения переменной, тем не менее, приводит в нерелятивистском описании к тем же двум выражениям для энергий, как если бы две компоненты с разными массами были независимыми. Установление этого спектра основывается на использовании условия трансцендент-

ности для решений фробениусового типа результирующих уравнений четвертого порядка. По-видимому, большего понимания поведения частицы со спином 1/2 и двумя массовыми параметрами можно достичь, если построить решения радиальных уравнений в релятивистском случае, не используя перехода к нерелятивистскому приближению.

Работа выполнена при финансовой поддержке МО РБ по договору № 1410/2021.

Литература—References

1. Spin 1/2 particle with two mass states, interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. Vol. 20, No. 4. P. 404–423.
2. Фермион с внутренним спектром масс во внешних полях / В.В. Кисель, Е.М. Овсюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2018. № 1(33). С. 81–88.
Fermion s vnutrennim spektrom mass vo vneshnikh polyakh [Fermion with the internal mass spectrum in external fields] / V.V. Kisel, E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2018. No. 1(33). P. 81–88.
3. Spin 1/2 particle with two masses in magnetic field / E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Applied Sciences. 2018. Vol. 20. P. 148–166.
4. Spin 1/2 particle with two masses in external magnetic field / E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov, V.V. Kisel, N.V. Samsonenko // J. Mech. Cont. and Math. Sci. Special Issue. 2019. No. 1. P. 651–660.

Статья поступила в редакцию 5.04.2021.

УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-59-65

А.В. ИВАШКЕВИЧ

СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2, БЕЗМАССОВЫЙ СЛУЧАЙ, КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ

*Институт физики им. Б.И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь*

ivashkevich.alina@yandex.by

A.V. IVASHKEVICH

THE STRUCTURE OF THE PLANE WAVES FOR A SPIN 3/2 PARTICLE, MASSLESS CASE, GAUGE SYMMETRY

*B.I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus*

Аннотация

Исследуется структура решений типа плоских волн для релятивистской частицы со спином $3/2$, описываемой 16-компонентным вектор-биспинором. В безмассовом случае применяются два представления уравнения: одно в базисе Рариты–Швингера; второе строится на основе применения дополнительного преобразования и содержит тензор Леви–Чивита. Во втором представлении для безмассового случая очевидным образом строятся калибровочные решения в виде градиента от произвольного биспинора. Показано, что общее решение безмассового уравнения содержит шесть линейно независимых решений. В явном виде установлены четыре решения, которые могут быть отождествлены с калибровочными и поэтому отброшены как нефизические. Процедура исключения калибровочных компонент проведена в обоих представлениях безмассового уравнения.

Ключевые слова:

спин 3/2, базис Рариты–Швингера, плоские волны, безмассовая частица, калибровочная симметрия

Abstract

The structure of plane wave solutions for a relativistic spin $3/2$ particle described by a 16-component vector-bispinor is studied. In the massless case, two representations of the equation are used: in the Rarita–Schwinger basis and in a special second basis in which the wave equation contains the Levi–Civita tensor. In this second basis, the existence of trivial solutions in the form of a gradient on arbitrary bispinor becomes obvious. It is shown that the general solution of the massless equation consists of 6 linearly independent solutions. It is explicitly proved that four of them can be identified with gauge solutions and, therefore, can be removed as non-physical. The exclusion procedure of gauge components is carried out in both representations of the massless equation.

Keywords:

spin 3/2, Rarita–Schwinger basis, plane waves, massless particle, gauge symmetry

Введение

После работ Паули–Фирца [1, 2] и Рариты–Швингера [3] в физической литературе всегда присутствовал интерес к теории частиц с высшими спинами, в том числе и к частице со спином $3/2$ [3–20]. Для описания частицы со спином $3/2$ требуются 16-компонентная волновая функция с трансформационными свойствами вектор-биспинора относительно группы Лоренца. В литературе наибольшее внимание привлекло существование аномальных решений для массивной частицы в присутствии внешних полей, которым сопоставляется скорость частицы большая, чем скорость света. Отдельный интерес представляет случай безмассовой частицы со спином $3/2$. Как показали Паули и Фирц [1], здесь существует специфическая калибровочная симметрия, выражающаяся в том, что 4-градиент от произвольной биспинорной функции дает решения безмассового волнового уравнения, т. е. в безмассовом случае среди множества решений волнового уравнения всегда присутствуют четыре калибровочные решения, которые являются физически ненаблюдаемыми, по-

скольку, например, не дают вклада в тензор энергии-импульса частицы. В данной работе мы проследим за степенями свободы безмассовой частицы со спином 3/2 на основе построения в явном виде решений типа плоских волн, и найдем решения, которые не содержат калибровочных компонент.

1. Безмассовая частица

Система уравнений первого порядка для безмассовой частицы в базе Рариты–Швингера имеет вид [16]

$$\begin{aligned} \partial_a \gamma^a \Psi_k - \frac{1}{3} \partial_k \gamma^l \Psi_l - \frac{1}{3} \gamma_k \partial_a \Psi^a + \\ + \frac{1}{3} \gamma_k (\gamma^a \partial_a) \gamma^l \Psi_l = 0, \quad \partial_a (\Gamma^a)_k^l \Psi_l = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где действующие в 16-мерном пространстве волновой функции матрицы задаются соотношением

$$(\Gamma^a)_k^l = \gamma^a \delta_k^l - \frac{1}{3} \gamma^l \delta_k^a - \frac{1}{3} \gamma_k g^{al} + \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^a \gamma^l, \quad (2)$$

биспинорные индексы у матрицы Γ^a опускаем. Ниже будем использовать известные свойства матриц Дирака [17]:

$$\begin{aligned} \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2g^{ab}, \quad \gamma^a \gamma_a = 4, \\ \gamma^a \gamma^b \gamma^d = \gamma^a g^{bd} - \gamma^b g^{ad} + \gamma^d g^{ab} - i\gamma^5 \epsilon^{abcd} \gamma_c; \end{aligned} \quad (3)$$

в спинорном базисе имеем

$$\gamma^5 = +i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{0123} = +1.$$

Если воспользоваться формулой для произведения трех матриц Дирака, то для матриц $(\Gamma^a)_k^l$ можно получить другое представление:

$$(\Gamma^a)_k^l = \frac{2}{3} \gamma^a \delta_k^l - \frac{i}{3} \gamma^5 \epsilon_k^{aln} \gamma_n, \quad \partial_a (\Gamma^a)_k^l \Psi_l = 0. \quad (4)$$

Совершим над уравнением [1] последовательно два преобразования. Сначала умножим его слева на невырожденную матрицу C со структурой $C_n^k = \delta_n^k + c\gamma_n \gamma^k$, в результате получаем другие матрицы $(\Gamma'^a)_n^l$:

$$\begin{aligned} (\Gamma'^a)_n^l = \gamma^a \delta_n^l - \frac{1}{3} \gamma^l \delta_n^a + \frac{2c-1}{3} \gamma_n g^{al} + \frac{1}{3} \gamma_n \gamma^a \gamma^l, \\ \partial_a (\Gamma'^a)_n^l \Psi_l = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда, воспользовавшись формулой для умножения трех матриц Дирака, получим

$$(\Gamma'^a)_n^l = \frac{2}{3} \gamma^a \delta_n^l + \frac{2c}{3} \gamma_n g^{al} - \frac{i}{3} \gamma^5 \epsilon_n^{alk} \gamma_k; \quad (6)$$

т. е. уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{2}{3} \partial_a \gamma^a \Psi_n + \frac{2c}{3} \gamma_n \partial_a \Psi^a - \frac{i}{3} \gamma^5 \epsilon_n^{alk} \partial_a \gamma_k \Psi_l = 0; \quad (7)$$

параметр c пока не фиксирован. Затем в уравнении (7) перейдем к новой волновой функции $\bar{\Psi}$ с помощью матрицы S :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} = S\Psi, \quad S\partial_a \Gamma'^a S^{-1} \bar{\Psi} = 0, \\ S_n^m = \delta_n^m + a\gamma_n \gamma^m, \quad (S^{-1})_l^k = \delta_l^k + b\gamma_l \gamma^k, \\ SS^{-1} = I \implies a + b + 4ab = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

В результате находим новое представление для матриц уравнения

$$\begin{aligned} (\Gamma^a)_m^k = \gamma^a \delta_m^k \left[1 - \frac{1}{3} - b \left[\frac{2c-1}{3} (1+4a) + 2a + \frac{1}{3} \right] \right] + \\ + \gamma^k \delta_m^a \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2b}{3} + b \left[\frac{2c-1}{3} (1+4a) + 2a + \frac{1}{3} \right] \right] + \\ + \gamma_m g^{ak} \left[\frac{2c-1}{3} (1+4k) + 2a + \frac{1}{3} + \right. \\ \left. + b \left[\frac{2c-1}{3} (1+4a) + 2a + \frac{1}{3} \right] \right] - \\ - \left[\frac{1}{3} + b \left[\frac{2c-1}{3} (1+4a) + 2a + \frac{1}{3} \right] \right] i\gamma^5 \epsilon_m^{akn} \gamma_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Потребуем, чтобы в (9) осталось только слагаемое, содержащее символ Леви–Чивита. Это дает три уравнения на параметры a, b, c (помним об условии $a + b + 4ab = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} = \frac{2c-1}{3} (1+4a)b + 2ab + \frac{b}{3}, \\ \frac{2b}{3} + \left\{ \frac{2c-1}{3} (1+4a)b + 2ab + \frac{b}{3} \right\} = 0, \\ \frac{2c-1}{3} (1+4a) + 2a + \frac{1}{3} + \\ + \left\{ \frac{2c-1}{3} (1+4a)b + 2ab + \frac{b}{3} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Их решение следующее:

$$\bar{\Psi} = S\psi, \quad a = -\frac{1}{3}, \quad b = -1, \quad c = 2, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} C_n^k = \delta_n^k + 2\gamma_n \gamma^k, \quad S_n^k = \delta_n^k - \frac{1}{3} \gamma_n \gamma^k, \\ (S^{-1})_n^k = \delta_n^k - \gamma_n \gamma^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, уравнение для безмассового поля со спином 3/2 в этом базисе имеет вид

$$\partial_a (\bar{\Gamma})_m^k \bar{\Psi}_k = 0, \quad -\partial_a [i\gamma^5 \epsilon_m^{akn} \gamma_n] \bar{\Psi}_k = 0. \quad (12)$$

Очевидно, что вектор-биспинор в виде градиента от произвольного биспинора $\Phi(x)$

$$\bar{\Psi}_k^{grad}(x) = \partial_k \Phi(x) \quad (13)$$

всегда будет решением уравнения (12). Это свойство иначе называют калибровочной симметрией. В исходном базисе калибровочные решения представляются так:

$$\Psi_l^{grad}(x) = \partial_l \Phi - \gamma_l \gamma^k \partial_k \Phi, \quad l = 0, 1, 2, 3. \quad (14)$$

Уравнение (12) можно записать в безиндексной форме, если ввести шесть матриц:

$$\epsilon_m^{nak} = (\mu^{[na]})_m^k, \mu^{[na]} = -\mu^{[an]};$$

$$-i\gamma^5 \gamma_n \partial_a \otimes \mu^{[na]} \bar{\Psi} = 0, \quad (15)$$

где $\bar{\Psi}$ – это (4×4) -матрица, ее первый индекс биспинорный, второй – векторный. Простота уравнения (15) обманчива, фактически имеем следующее:

$$(-i) \left\{ \gamma^5 (\gamma^1 \otimes \mu^{[01]} + \gamma^2 \otimes \mu^{[02]} + \gamma^3 \otimes \mu^{[03]}) \partial_0 \bar{\Psi} + \right.$$

$$+ \gamma^5 (\gamma^0 \otimes \mu^{[01]} + \gamma^2 \otimes \mu^{[12]} - \gamma^3 \otimes \mu^{[31]}) \partial_1 \bar{\Psi} +$$

$$+ \gamma^5 (\gamma^0 \otimes \mu^{[02]} + \gamma^3 \otimes \mu^{[23]} - \gamma^1 \otimes \mu^{[12]}) \partial_2 \bar{\Psi} +$$

$$\left. + \gamma^5 (\gamma^0 \otimes \mu^{[03]} + \gamma^1 \otimes \mu^{[31]} - \gamma^2 \otimes \mu^{[23]}) \partial_3 \bar{\Psi} \right\} = 0. \quad (16)$$

Будем искать решения уравнения (16) в виде плоских волн, ориентированных вдоль оси x_3 (это не уменьшает общности рассмотрения, поскольку всегда можно выбрать систему координат так, чтобы удовлетворить условию $k^0 = (\epsilon, 0, 0, k)$):

$$[\bar{\Psi}_{an}] = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} \bar{\Phi},$$

$$\bar{\Phi}_{an} = \begin{pmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \\ \bar{g}_0 & \bar{g}_1 & \bar{g}_2 & \bar{g}_3 \\ \bar{h}_0 & \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \\ \bar{d}_0 & \bar{d}_1 & \bar{d}_2 & \bar{d}_3 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

С учетом подстановки (17) уравнение (16) упрощается

$$-\epsilon \gamma^5 (\gamma^1 \otimes \mu^{[01]} + \gamma^2 \otimes \mu^{[02]} + \gamma^3 \otimes \mu^{[03]}) \partial_0 \bar{\Phi} +$$

$$+ k \gamma^5 (\gamma^0 \otimes \mu^{[03]} + \gamma^1 \otimes \mu^{[31]} - \gamma^2 \otimes \mu^{[23]}) \partial_3 \bar{\Phi} = 0, \quad (18)$$

кратко его можно записать так:

$$-\epsilon \gamma^5 B_0 \bar{\Phi} + k \gamma^5 B_3 \bar{\Phi} = 0. \quad (19)$$

Ниже будем использовать матрицы Дирака в спинорном базисе [16]:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

также потребуются выражения для шести (транспонированных) матриц:

$$\mu_{tr}^{[01]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mu_{tr}^{[02]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu_{tr}^{[03]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mu_{tr}^{[23]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu_{tr}^{[31]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mu_{tr}^{[12]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальше находим 16 уравнений, которые разбиваются на четыре независимые системы:

$$I, \begin{pmatrix} -ik & -i\epsilon & 0 & -(k+\epsilon) \\ k & \epsilon & -(\epsilon+k) & 0 \\ 0 & 0 & ik & -k \\ 0 & 0 & -i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}_0 \\ \bar{d}_3 \\ \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$II, \begin{pmatrix} ik & i\epsilon & 0 & (\epsilon-k) \\ -k & -\epsilon & -(\epsilon-k) & 0 \\ 0 & 0 & -ik & -k \\ 0 & 0 & i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{h}_0 \\ \bar{h}_3 \\ \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$III, \begin{pmatrix} -ik & -i\epsilon & 0 & -(\epsilon-k) \\ -k & -\epsilon & (\epsilon-k) & 0 \\ 0 & 0 & ik & -k \\ 0 & 0 & -i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{g}_0 \\ \bar{g}_3 \\ \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$IV, \begin{pmatrix} ik & i\epsilon & 0 & (k+\epsilon) \\ -k & -\epsilon & -(k+\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & -ik & -k \\ 0 & 0 & i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Требование равенства нулю определителей приводит к одному и тому же условию

$$(k^2 - \epsilon^2)^2 = 0. \quad (20)$$

Способ исследования уравнений такой: находим линейно независимые решения каждой подсистемы, при этом описываем только входящие в нее переменные, а остальные полагаем равными нулю; таким образом, находим все независимые решения исходной системы из 16 уравнений. Будем строить решения, предполагая $\epsilon > 0$. Это означает, что исследуем случай частиц, для античастиц соответствующие решения можно получить с помощью операции зарядового сопряжения $\Psi^C = (\gamma^2 \otimes I) \Psi^*$ из строящихся ниже решений. Положительность энергии возможна в двух случаях: $k > 0$, $\epsilon = k$ и $k < 0$, $\epsilon = -k$; для определенности следим за вариантом $k > 0$. Тогда приведенные выше уравнения упрощаются (сразу приводим их решения):

$$I, \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}_0 \\ \bar{d}_3 \\ \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\bar{d}_0 - \text{любое}, \bar{d}_3 = -\bar{d}_0, \bar{h}_1 = 0, \bar{h}_2 = 0; \quad (21a)$$

$$II, \begin{pmatrix} i & i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{h}_0 \\ \bar{h}_3 \\ \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\bar{h}_0, \bar{d}_0 - \text{любые}, \bar{h}_3 = -\bar{h}_0, \bar{d}_1 = i\bar{d}_2; \quad (21b)$$

$$III, \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{g}_0 \\ \bar{g}_3 \\ \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\bar{g}_0, \bar{f}_2 - \text{любые, } \bar{g}_3 = -\bar{g}_0, \bar{f}_1 = i\bar{f}_2; \quad (21c)$$

$$IV, \begin{pmatrix} i & i & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\bar{f}_0 - \text{любое, } \bar{f}_3 = -\bar{f}_0, \bar{g}_1 = 0, \bar{g}_2 = 0. \quad (21d)$$

Следовательно, общее решение системы уравнений имеет вид

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{f}_0 & -i\bar{f}_2 & \bar{f}_2 & -\bar{f}_0 \\ \bar{g}_0 & 0 & 0 & -\bar{g}_0 \\ \bar{h}_0 & 0 & 0 & -\bar{h}_0 \\ \bar{d}_0 & i\bar{d}_2 & \bar{d}_2 & -\bar{d}_0 \end{pmatrix}; \quad (22a)$$

его можно разложить в суперпозицию шести независимых:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \begin{pmatrix} \bar{f}_0 & 0 & 0 & -\bar{f}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{g}_0 & 0 & 0 & -\bar{g}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{h}_0 & 0 & 0 & -\bar{h}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_0 & 0 & 0 & -\bar{d}_0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -i\bar{f}_2 & \bar{f}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\bar{d}_2 & \bar{d}_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22b)$$

В свою очередь, калибровочные решения имеют вид (множитель $e^{i\epsilon t} e^{ikz}$ опускаем)

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0^K &= -i\epsilon \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}, \bar{\Phi}_1^K = 0, \\ \bar{\Phi}_2^K &= 0, \bar{\Phi}_3^K = ik \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $L_1 \dots L_4$ – произвольные числовые параметры. Для матрицы общего калибровочного решения имеем следующее представление (учитываем $\epsilon = k > 0$, далее этот общий множитель опускаем)

$$\Psi^K = \begin{pmatrix} -iL_1 & 0 & 0 & iL_1 \\ -iL_2 & 0 & 0 & iL_2 \\ -iL_3 & 0 & 0 & iL_3 \\ -iL_4 & 0 & 0 & iL_4 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Легко убедиться, что все независимые калибровочные решения удовлетворяют полученным выше уравнениям:

$$I, \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iL_4 \\ +iL_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0;$$

$$II, \begin{pmatrix} i & i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iL_3 \\ +iL_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0; \quad (25)$$

$$III, \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iL_2 \\ +iL_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0;$$

$$IV, \begin{pmatrix} i & i & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iL_1 \\ +iL_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Также замечаем, что первые четыре решения в суперпозиции (22b) являются чисто калибровочными (см. (25)), поэтому они могут быть отброшены. Таким образом, в (22a) остаются только два независимых решения, они не содержат калибровочных компонент:

$$\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -i\bar{f}_2 & \bar{f}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\bar{d}_2 & \bar{d}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Теперь исследуем эту задачу, используя исходный базис Рариты–Швингера (4). В матричной форме уравнение записывается так:

$$\left[\frac{2}{3} \partial_a \gamma^a \otimes I - \frac{i}{3} \gamma^5 \partial_a \gamma_n \otimes \mu^{an} \right] \Psi = 0. \quad (27)$$

Для плоских волн уравнение принимает вид (см. (19))

$$-2i\epsilon\gamma^0\Phi + 2ik\gamma^3\Phi - \epsilon\gamma^5 B_0\bar{\Phi} + k\gamma^5 B_3\bar{\Phi} = 0. \quad (28)$$

После необходимых вычислений находим 16 уравнений, группируем их в четыре несвязанные подсистемы:

$$\begin{aligned} I, \begin{pmatrix} -ik & -i\epsilon & -2i(\epsilon+k) \\ k & \epsilon & -(\epsilon+k) \\ -2i(\epsilon-k) & 0 & ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(k+\epsilon) \\ -2i(\epsilon+k) \\ -k \\ \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= 0; \\ II, \begin{pmatrix} ik & i\epsilon & -2i(\epsilon-k) \\ -k & -\epsilon & -(\epsilon-k) \\ -2i(\epsilon+k) & 0 & -ik \\ 0 & -2i(\epsilon+k) & i\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\epsilon-k) \\ -2i(\epsilon-k) \\ -k \\ \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III, \quad & \begin{pmatrix} -ik & -i\epsilon & -2i(\epsilon - k) \\ -k & -\epsilon & (\epsilon - k) \\ -2i(\epsilon + k) & 0 & ik \\ 0 & -2i(\epsilon + k) & -i\epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}d_1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}d_1 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
 & \begin{pmatrix} -(\epsilon - k) \\ -2i(\epsilon - k) \\ -k \\ \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_3 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0; \\
 IV, \quad & \begin{pmatrix} ik & i\epsilon & -2i(\epsilon + k) \\ -k & -\epsilon & -(k + \epsilon) \\ -2i(\epsilon - k) & 0 & -ik \\ 0 & -2i(\epsilon - k) & i\epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}d_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}d_2 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \\
 & \begin{pmatrix} (k + \epsilon) \\ -2i(\epsilon + k) \\ -k \\ \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = 0.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Дальнейший анализ проводится по прежней схеме. Строим решения, предполагая $\epsilon > 0$. Положительность энергии возможна в двух случаях: $k > 0, \epsilon = k$ и $k < 0, \epsilon = -k$; следим за вариантом $k > 0$. Тогда системы упрощаются (общий множитель $\epsilon = k$ опускаем)

$$I, \quad \begin{pmatrix} -i & -i & -4i & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -4i \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$II, \quad \begin{pmatrix} i & i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -4i & 0 & -i & -1 \\ 0 & -4i & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$III, \quad \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -4i & 0 & i & -1 \\ 0 & -4i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_3 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$IV, \quad \begin{pmatrix} i & i & -4i & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -4i \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & -f_0 \\ \frac{1}{4}(f_1 + if_2) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(f_1 + if_2) \\ \frac{1}{4}(id_2 - d_1) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(id_2 - d_1) \\ d_0 & d_1 & d_2 & -d_0 \end{pmatrix}; \tag{29}$$

его можно разложить в линейную суперпозицию:

$$\begin{aligned}
 \Phi = & \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & -f_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_0 & 0 & 0 & -d_0 \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}f_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}f_1 \\ 0 & -0 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +
 \end{aligned}$$

Преобразование к этому базису найденных выше калибровочных решений $\bar{\Phi}^K$ задается соотношением:

$$\Psi_a^K = \bar{\Psi}_a - \gamma_a \gamma^b \bar{\Psi}_b^K, \text{ где } \bar{\Psi}_b = \partial_b \Psi. \tag{31}$$

В результате для матрицы общего калибровочного решения в базисе Рариты–Швингера находим следующее представление:

$$\Phi^K = \begin{pmatrix} -ikL_1 & i(\epsilon + k)L_2 & (\epsilon + k)L_2 & i\epsilon L_1 \\ +ikL_2 & i(\epsilon - k)L_1 & -(\epsilon - k)L_1 & -i\epsilon L_2 \\ +ikL_3 & -i(\epsilon - k)L_4 & -(\epsilon - k)L_4 & -i\epsilon L_3 \\ -ikL_4 & -i(\epsilon + k)L_3 & (\epsilon + k)L_3 & i\epsilon L_4 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Для ситуации $\epsilon = k > 0$ (с учетом последующего сокращения общего множителя $\epsilon = k$) получаем

$$\begin{aligned}
 \Phi^K = & \begin{pmatrix} f_0^K & f_1^K & f_2^K & f_3^K \\ g_0^K & g_1^K & g_2^K & g_3^K \\ h_0^K & h_1^K & h_2^K & h_3^K \\ d_0^K & d_1^K & d_2^K & d_3^K \end{pmatrix} = \\
 = & \begin{pmatrix} -iL_1 & 2iL_2 & 2L_2 & iL_1 \\ +iL_2 & 0 & 0 & -iL_2 \\ +iL_3 & 0 & 0 & -iL_3 \\ -iL_4 & -2iL_3 & 2L_3 & iL_4 \end{pmatrix}. \tag{33}
 \end{aligned}$$

Это общее калибровочное решение можно разложить в суперпозицию четырех независимых

$$\begin{aligned}
 \Phi^K = & \begin{pmatrix} -iL_1 & 0 & 0 & iL_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iL_4 & 0 & 0 & iL_4 \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & 2iL_2 & 2L_2 & 0 \\ +iL_2 & 0 & 0 & -iL_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +iL_3 & 0 & 0 & -iL_3 \\ 0 & -2iL_3 & 2L_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}
 \end{aligned}$$

Первые два решения в (30) являются очевидно калибровочными, их можно отбросить, тогда остаются четыре решения:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}f_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_2 & 0 \\ \frac{i}{4}f_2 & 0 & 0 & -\frac{i}{4}f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}d_1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}d_1 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{4}d_2 & 0 & 0 & -\frac{i}{4}d_2 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (35)
 \end{aligned}$$

неиспользованными являются два калибровочных решения

$$\begin{aligned}
 \Phi_K^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 2iL_2 & 2L_2 & 0 \\ +iL_2 & 0 & 0 & -iL_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \Phi_K^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +iL_3 & 0 & 0 & -iL_3 \\ 0 & -2iL_3 & 2L_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

Исследуем следующий вопрос: можно ли в решениях (35) выделить те, которые отождествимы с калибровочными решениями (36). Нужно решить уравнение

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & 0 \\ \frac{1}{4}(f_1 + if_2) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(f_1 + if_2) \\ \frac{i}{4}(id_2 - d_1) & 0 & 0 & -\frac{i}{4}(id_2 - d_1) \\ 0 & d_1 & d_2 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 2iL_2 & 2L_2 & 0 \\ +iL_2 & 0 & 0 & -iL_2 \\ +iL_3 & 0 & 0 & -iL_3 \\ 0 & -2iL_3 & 2L_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)
 \end{aligned}$$

относительно переменных f_1, f_2, d_1, d_2 . В результате находим два простых решения:

$$\begin{aligned}
 f_1 = 2iL_2, \quad f_2 = 2L_2 &\implies f_1 = if_2; \\
 d_1 = -2iL_3, \quad d_2 = 2L_3 &\implies d_2 = id_1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, найдены два решения, которые устраняются калибровочными преобразованиями (напоминаем, что параметры d_1 и f_2 независимые):

$$\begin{aligned}
 f_1 = +if_2, \quad d_2 = +id_1, \\
 \Phi = \begin{pmatrix} 0 & if_2 & f_2 & 0 \\ \frac{i}{2}f_2 & 0 & 0 & -\frac{i}{2}f_2 \\ -\frac{i}{2}d_1 & 0 & 0 & \frac{i}{2}d_1 \\ 0 & d_1 & id_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Не устраняются калибровочным преобразованием следующие два решения:

$$\begin{aligned}
 f_1 = -if_2, \quad d_2 = -id_1, \\
 \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -if_2 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & -id_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (39)
 \end{aligned}$$

они не содержат калибровочных компонент и являются физическими.

Резюмируем результат. В явном виде построены шесть линейно независимых решений уравнения

для безмассовой частицы со спином 3/2, среди них найдены два решения, которые не содержат калибровочных компонент.

Литература

1. *Pauli W., Fierz M.* Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld // *Helv. Phys. Acta.* 1939. Vol. 12. P. 297–300.
2. *Pauli W., Fierz M.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // *Proc. Roy. Soc. London. A.* 1939. Vol. 173. P. 211–232.
3. *Rarita W., Schwinger J.* On a theory of particles with half-integral spin // *Phys. Rev.* 1941. Vol. 60, No. 1. P. 61–64.
4. *Гинзбург В.Л.* К теории частиц со спином 3/2 // *ЖЭТФ.* 1942. Т. 12. С. 425–442.
5. *Давыдов А.С.* Волновое уравнение частицы, имеющей спин 3/2, в отсутствие поля // *ЖЭТФ.* 1943. Т. 13, № 9–10. С. 313–319.
6. *Johnson K., Sudarshan E.C.G.* Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles // *Ann. Phys. N.Y.* 1961. Vol. 13, No. 1. P. 121–145.
7. *Bender C.M., McCoy B.M.* Peculiarities of a free massless spin-3/2 field theory // *Phys. Rev.* 1966. Vol. 148, No. 4. P. 1375–1380.
8. *Hagen C.R., Singh L.P.S.* Search for consistent interactions of the Rarita–Schwinger field // *Phys. Rev. D.* 1982. Vol. 26, No. 2. P. 393–398.
9. *Baisya H.L.* On the Rarita–Schwinger equation for the vector-bispinor field // *Nucl. Phys. B.* 1971. Vol. 29, No. 1. P. 104–124.
10. *Loide R.K.* Equations for a vector–bispinor // *J. Phys. A.* 1984. Vol. 17, No. 12. P. 2535–2550.
11. *Плетюхов В.А., Стражев В.И.* К теории частиц со спином 3/2 // *Изв. вузов. Физика.* 1985. Т. 28, № 1. С. 91–96.
12. *Capri A.Z., Kobes R.L.* Further problems in spin-3/2 field theories // *Phys. Rev. D.* 1980. Vol. 22. P. 1967–1978.
13. *Darkhosh T.* Is there a solution to the Rarita–Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field // *Phys. Rev. D.* 1985. Vol. 32, No. 12. P. 3251–3255.
14. *Cox W.* On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita–Schwinger field coupled to an external electromagnetic field // *J. Phys. A.* 1989. Vol. 22, No. 10. P. 1599–1608.
15. *Deser S., Waldron A., Pascalutsa V.* Massive spin-3/2 electrodynamics // *Phys. Rev. D.* 2000. Vol. 62. Paper 105031.
16. *Napsuciale M., Kirchbach M., Rodriguez S.* Spin-3/2 Beyond Rarita–Schwinger Framework // *Eur. Phys. J. A.* 2006. Vol. 29. P. 289–306.
17. *Редьков В.М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Минск: Белорусская наука, 2009. 486 с.
18. *Плетюхов В.А., Редьков В.М., Стражев В.И.* Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы. Минск: Белорусская наука, 2015. 328 с.

19. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.
20. Решения уравнения для частицы со спином $3/2$ и оператор спиральности / А.В. Ивашкевич, Е.М. Овсюк, В.В. Кисель, В.М. Ред'ков // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. 2020. № 1. С. 15–35.
10. Loide R.K. Equations for a vector–bispinor // J. Phys. A. 1984. Vol. 17, No. 12. P. 2535–2550.
11. Pletyukhov V.A., Strazhev V.I. K teorii chastic so spinom $3/2$ [To the theory of particles of spin $3/2$] // Russian Physics J. 1985. Vol. 28, No. 1. P. 91–96.
12. Capri A.Z., Kobes R.L. Further problems in spin- $3/2$ field theories // Phys. Rev. D. 1980. Vol. 22. P. 1967–1978.
13. Darkhosh T. Is there a solution to the Rarita-Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field // Phys. Rev. D. 1985. Vol. 32, No. 12. P. 3251–3255.

References

1. Pauli W., Fierz M. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld // Helv. Phys. Acta. 1939. Vol. 12. P. 297–300
2. Pauli W., Fierz M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. London. A. 1939. Vol. 173. P. 211–232.
3. Rarita W., Schwinger J. On a theory of particles with half-integral spin // Phys. Rev. 1941. Vol. 60, No. 1. P. 61–64.
4. Ginzburg V.L. K teorii chastic so spinom $3/2$ [To the theory of particles of spin $3/2$] // J. of Experimental and Theoretical Physics. 1942. Vol. 12. P. 425–442.
5. Davydov A.S. Volnovoe uravnenie chasticy, imejushhej spin $3/2$, v otsutstvii polja [Wave equation for a particle with spin $3/2$, in absence of external field] // J. of Experimental and Theoretical Physics. 1943. Vol. 13, No. 9–10. P. 313–319.
6. Johnson K., Sudarshan E.C.G. Inconsistency of the local field theory of charged spin $3/2$ particles // Ann. Phys. N.Y. 1961. Vol. 13, No. 1. P. 121–145.
7. Bender C.M., McCoy B.M. Peculiarities of a free massless spin- $3/2$ field theory // Phys. Rev. 1966. Vol. 148, No. 4. P. 1375–1380.
8. Hagen C.R., Singh L.P.S. Search for consistent interactions of the Rarita–Schwinger field // Phys. Rev. D. 1982. Vol. 26, No. 2. P. 393–398.
9. Baisya H.L. On the Rarita–Schwinger equation for the vector-bispinor field // Nucl. Phys. B. 1971. Vol. 29, No. 1. P. 104–124.
14. Cox W. On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita–Schwinger field coupled to an external electromagnetic field // J. Phys. A. 1989. Vol. 22, No. 10. P. 1599–1608.
15. Deser S., Waldron A., Pascalutsa V. Massive spin- $3/2$ electrodynamics // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62. Paper 105031.
16. Napsuciale M., Kirchbach M., Rodriguez S. Spin- $3/2$ Beyond Rarita-Schwinger Framework // Eur. Phys. J. A. 2006. Vol. 29. P. 289–306.
17. Red'kov V.M. Polja chastic v rimanovom prostanstve i gruppa Lorentca [Particle fields in the Riemann space and the Lorentz group]. Minsk: Belorussian Science Publ., 2009. 486 p.
18. Pletyukhov V.A., Red'kov V.M., Strazhev V.I. Reljativistskie volnovye uravnenija i vnutrennie stepeni svobody [Relativistic wave equations and internal degrees of freedom]. Minsk: Belorussian Science Publ., 2015. 328 p.
19. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.
20. Reshenija uravnenija dlja chasticy so spinom $3/2$ i operator spirjal'nosti [Solutions of the wave equation for a spin $3/2$ particle and helicity operator] / A.V. Ivashkevich, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Bull. of Brest University. Series 4. Physics, Mathematics. 2020. No. 1. P. 15–35.

Статья поступила в редакцию 25.02.2021.

УДК 539.12.01
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-66-72

Н.А. ГРОМОВ

ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЙ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ПРОЦЕССОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ВСЕЛЕННОЙ

*Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар*

gromov@ipm.komisc.ru

N.A. GROMOV

DEPENDENCE OF CROSS SECTIONS OF ELECTROWEAK PROCESSES ON THE TEMPERATURE OF THE UNIVERSE

*Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktывkar*

Аннотация

Анализируется поведение амплитуд и сечений основных процессов, обусловленных электромагнитным и слабым взаимодействием частиц, при контракции калибровочной группы Стандартной модели. Получены зависимости сечений упругого рассеяния фотонов, электронов (позитронов) и нейтрино (антинейтрино) на электронах; аннигиляцию электронов и позитронов в два фотона, в пару нейтрино–антинейтрино, в мюон–антимюонную пару от температуры Вселенной с учетом того, что параметр контракции обратно пропорционален температуре $\varepsilon \sim T^{-1}$.

Ключевые слова:

стандартная модель, контракция калибровочной группы, сечение электрослабого процесса

Abstract

The behavior of amplitudes and cross section of the main processes, caused by electromagnetic and weak interactions of particles during the contraction of the Standard Model gauge group is analysed. The dependences of the elastic scattering cross sections of photons, electrons (positrons) and neutrinos (antineutrinos) on electrons, as well as the annihilation of electrons and positrons into two photons, into a neutrino-antineutrino pair, into a muon-antimuon pair on the temperature of the Universe are established, taking into account that the contraction parameter is inversely proportional to the temperature $\varepsilon \sim T^{-1}$.

Keywords:

standard model, contractions of gauge group, cross section of the electroweak process

Введение

Современная теория элементарных частиц – Стандартная модель – включает в себя две части. Это электрослабая модель, которая описывает электромагнитные и слабые взаимодействия частиц, и квантовая хромодинамика (КХД), описывающая сильные взаимодействия частиц. Эта теория хорошо описывает имеющиеся экспериментальные данные и была подтверждена в экспериментах на большом адронном коллайдере, результатом которых стало открытие предсказанного ею скалярного бозона Хиггса. Энергии, доступные современным ускорителям, представляют собой практический потолок. Появление новых машин с более высокими энергиями ограничено непомерными затратами на их сооружение. Все это стимулирует интерес к теоретическому изучению свойств частиц и процессов их взаимодействия при высоких энергиях. Если оставаться на твердой научной почве, то необходимо отталкиваться от поведения Стандартной модели при высоких энергиях.

Более 40 лет назад была выдвинута гипотеза о том, что при высоких энергиях три калибровочных взаимодействия Стандартной модели – электромагнитные, слабые и сильные – объединяются в одно взаимодействие. Эта гипотеза получила название теории великого объединения (ТВО) и остается наиболее популярной до наших дней. Исторически первая ТВО, базирующаяся на простой группе Ли $SU(5)$,

была предложена Г. Джорджи (H. Georgi) и Ш. Глэшоу (S. Glashow) в 1974 г. [1]. Этой модели предшествовала модель Пати–Салама (Pati–Salam) [2] с полупростой алгеброй Ли. Современное состояние дел в ТВО смотри, например, в обзоре [3].

В отличие от усложнения калибровочной группы в ТВО, мы предлагаем **новую гипотезу в физике частиц: калибровочная группа Стандартной модели с увеличением энергии становится проще.** Действительно, Стандартная модель представляет собой калибровочную теорию, основанную на калибровочной группе $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, являющейся прямым произведением простых групп. Сильные взаимодействия кварков описываются квантовой хромодинамикой с калибровочной группой $SU(3)$ и характерной температурой 0,2 ГэВ. В калибровочной группе $SU(2) \times U(1)$ электрослабой модели группа $SU(2)$ отвечает за слабые взаимодействия с характерной температурой 100 ГэВ, тогда как группа $U(1)$ ассоциирована с дальнедействующими электромагнитными взаимодействиями. Вследствие нулевой массы фотона – переносчика этого взаимодействия – его характерная температура простирается до «бесконечной» планковской энергии 10^{19} ГэВ. Предлагаемая гипотеза основывается, в частности, на сопоставлении этих характерных температур. Мы предполагаем [4, 5], что **при увеличении энергии (температуры) более простая калибровочная группа Стандартной модели получается с помощью контракции, параметр которой обратно пропорционален температуре Вселенной.** Поскольку средняя энергия (температура T) горячей Вселенной связана с ее возрастом [6, 7], то параметр контракции $\varepsilon \sim T^{-1}$ стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$.

Операция контракции (или предельного перехода) групп хорошо известна в физике [8]. Она, в частности, преобразует простую группу в неполупростую. Понятие контракции было распространено [9] на алгебраические структуры, такие как квантовые группы, супергруппы, а также на фундаментальные представления унитарных групп, которые имеют непосредственное отношение к Стандартной модели. Для симметричной физической системы контракция группы симметрии означает переход к тому или иному предельному состоянию системы. В случае сложной физической системы, каковой является Стандартная модель, изучение предельных состояний при тех или иных предельных значениях физических параметров открывает возможность лучше понять поведение системы в целом.

В данной работе, основываясь на монографии [10], мы анализируем некоторые основные четырехчастичные процессы, обусловленные электромагнитным и слабым взаимодействием частиц, при контракции калибровочной группы Стандартной модели. Мы рассматриваем, в частности, поведение сечений упругого рассеяния фотонов, электронов (позитронов) и нейтрино (антинейтрино) на электронах; аннигиляцию электронов и позитронов в два фотона, в пару нейтрино–антинейтрино, в мюон–антимюонную пару при увеличении температуры Вселенной, т.е. при движении назад к моменту ее рождения.

1. Контракция калибровочной группы и поведение полей

Электрослабая модель, объединяющая электромагнитные и слабые взаимодействия, представляет собой калибровочную теорию с калибровочной группой $SU(2) \times U(1)$. Существует два способа описания контрактированных групп и их действия в пространстве фундаментального представления. В традиционном подходе матричная группа с вещественными или комплексными элементами действует на вектора с такими же компонентами

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon^2 \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\det u(\varepsilon) = |\alpha|^2 + \varepsilon^2 |\beta|^2 = 1, \quad u(\varepsilon)u^\dagger(\varepsilon) = 1. \quad (1)$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ матрица имеет вид

$$u(0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = e^{i\gamma}, \quad \gamma \in R \quad (2)$$

и очевидно принадлежит к группе $E(2)$.

Мы введем контрактированную группу $SU(2; \varepsilon)$ и соответствующее пространство фундаментального представления $C_2(\varepsilon)$ [9] согласованным изменением элементов группы $SU(2)$ и компонент пространства C_2 вида

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ \varepsilon z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \beta \\ -\varepsilon \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \varepsilon z_2 \end{pmatrix},$$

$$\det u(\varepsilon) = |\alpha|^2 + \varepsilon^2 |\beta|^2 = 1, \quad u(\varepsilon)u^\dagger(\varepsilon) = 1. \quad (3)$$

Наш подход базируется на действии матриц с зависящими от контракционного параметра ε элементами на вектора, компоненты которых тоже зависят от этого параметра.

Замена $\beta \rightarrow \varepsilon \beta$ индуцирует преобразование генераторов алгебры Ли $su(2)$: $T_1 \rightarrow \varepsilon T_1$, $T_2 \rightarrow \varepsilon T_2$, $T_3 \rightarrow T_3$. Поскольку калибровочные поля принимают значения в алгебре Ли, можно вместо генераторов преобразовать калибровочные поля. Для стандартных калибровочных полей [11] это преобразование имеет вид

$$W_\mu^\pm \rightarrow \varepsilon W_\mu^\pm, \quad Z_\mu \rightarrow Z_\mu, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu. \quad (4)$$

Левые лептонные $L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ e_l \end{pmatrix}$ и кварковые $Q_l = \begin{pmatrix} u_l \\ d_l \end{pmatrix}$ поля являются $SU(2)$ -дублетами, поэтому их компоненты преобразуются как компоненты вектора z , а именно:

$$e_l \rightarrow \varepsilon e_l, \quad d_l \rightarrow \varepsilon d_l, \quad \nu_l \rightarrow \nu_l, \quad u_l \rightarrow u_l. \quad (5)$$

Правые лептонные и кварковые поля являются $SU(2)$ -синглетами (скалярами) и поэтому не изменяются.

В механизме спонтанного нарушения симметрии, с помощью которого генерируются массы векторных бозонов и других частиц электрослабой модели, одно из основных состояний бозонного лагран-

жиана $\phi^{vac} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, выбирается в качестве вакуума модели и затем рассматриваются малые возмущения поля $v + \chi(x)$ относительно второй компоненты вакуума. Поэтому поле бозона Хиггса χ , константа v и зависящие от нее массы частиц m_p умножаются на контракционный параметр:

$$\chi \rightarrow \varepsilon\chi, \quad v \rightarrow \varepsilon v, \quad m_p \rightarrow \varepsilon m_p, \quad (6)$$

где $p = \chi, W, Z, e, u, d$. Замены (4)–(6) в лагранжиане электрослабой модели дают преобразованный лагранжиан электрослабой модели с контрактированной калибровочной группой.

Квантовая хромодинамика – это калибровочная теория с группой $SU(3)$, действующей в трехмерном комплексном пространстве \mathbf{C}_3 цветовых состояний кварков $q = (q_1, q_2, q_3)^t \equiv (q_R, q_G, q_B)^t \in \mathbf{C}_3$, где через $q(x)$ обозначены кварковые поля $q = u, d, s, c, b, t$, а индексы R (red), G (green), B (blue) обозначают цветовые степени свободы [12]. Контракция калибровочной группы КХД $SU(3; \varepsilon)$ определяется действием $q'(\varepsilon) = U(\varepsilon)q(\varepsilon)$ вида

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ \varepsilon q'_2 \\ \varepsilon^2 q'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \varepsilon u_{12} & \varepsilon^2 u_{13} \\ \varepsilon u_{21} & u_{22} & \varepsilon u_{23} \\ \varepsilon^2 u_{31} & \varepsilon u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \varepsilon q_2 \\ \varepsilon^2 q_3 \end{pmatrix}$$

в цветовом пространстве $\mathbf{C}_3(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Переход от классической группы $SU(3)$ и комплексного пространства \mathbf{C}_3 к группе $SU(3; \varepsilon)$ и пространству $\mathbf{C}_3(\varepsilon)$ осуществляется подстановками в лагранжиане КХД полей глюонов и кварков вида

$$A_\mu^{GR} \rightarrow \varepsilon A_\mu^{GR}, \quad A_\mu^{BG} \rightarrow \varepsilon A_\mu^{BG}, \quad A_\mu^{BR} \rightarrow \varepsilon^2 A_\mu^{BR},$$

$$q_1 \rightarrow q_1, \quad q_2 \rightarrow \varepsilon q_2, \quad q_3 \rightarrow \varepsilon^2 q_3. \quad (7)$$

Диагональные калибровочные поля (глюоны) $A_\mu^{RR}, A_\mu^{GG}, A_\mu^{BB}$ при этом не преобразуются. В результате получаем лагранжиан КХД с контрактированной калибровочной группой.

2. Рассеяние, рождение и аннигиляция частиц

В данном разделе мы рассмотрим, следуя монографии [10], изменения матричных элементов процессов рассеяния частиц, их рождения и аннигиляции, обусловленные электромагнитными и слабыми взаимодействиями, при контракции калибровочной группы Стандартной модели. Или, учитывая связь контракционного параметра с температурой $\varepsilon \sim T^{-1}$, поведение сечений взаимодействий частиц при увеличении температуры (энергии) Вселенной T .

2.1. Комптон-эффект на электроны

Простейший электромагнитный эффект – это рассеяние фотонов на электроны (Комптон-эффект)

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-. \quad (8)$$

Амплитуда вероятности процесса (матричный элемент S -матрицы) во втором порядке по теории возмущений дается выражением (формула (6.31) в работе [10])

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = -ie^2 N_{p'} N_p N_{k'} N_k \times$$

$$\times \left[\bar{u}^{r'}(p') \hat{e}^{\lambda'}(k') \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m} \hat{e}^\lambda(k) u^r(p) + \bar{u}^{r'}(p') \hat{e}^\lambda(k) \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}' - m} \hat{e}^{\lambda'}(k') u^r(p) \right] \times$$

$$\times (2\pi)^4 \delta(p' + k' - p - k), \quad (9)$$

где спинор $u^r(p)$ представляет волновую функцию электрона с импульсом p и спиральностью r : $N_p u^r(p) e^{-ipx}$, вектор поляризации фотона $e^\lambda(k)$ представляет волновую функцию фотона с импульсом k и поляризацией λ : $N_k e^\lambda(k) e^{-ikx}$, вектор $\hat{e}^\lambda(k) = \gamma^\alpha e_\alpha^\lambda(k)$, γ^α – матрицы Дирака, $(\hat{p} + \hat{k} - m)^{-1}$ – пропагатор электрона.

Матричный элемент S -матрицы удобно записывать графически с помощью диаграмм Фейнмана. Фейнмановская диаграмма первого слагаемого в (9) изображена на рис.1 при $\varepsilon = 1$. Диаграмма отвечает следующей возможности: начальный электрон с импульсом p поглощает начальный фотон с импульсом k и переходит в промежуточное (виртуальное) состояние с импульсом p_1 ; затем электрон распространяется в промежуточном состоянии; наконец, виртуальный электрон испускает конечный фотон с импульсом k' и переходит в конечное состояние с импульсом k' .

Для перехода от канонической диаграммы к преобразованной мы заменили поля электронов и фотонов по правилам (4), (5), что выразилось в появлении у вершин, символизирующих взаимодействие электронов и фотонов, множителя ε^2 и умножении пропагатора виртуального электрона на ε^{-2} . Действительно, пропагатор электрона возникает из свертки $e(x_1)\bar{e}(x_2) = \Delta$, которая преобразуется так: $\varepsilon e(x_1)\varepsilon\bar{e}(x_2) = \Delta$. Поэтому свертка для преобразованных операторов дает $e(x_1)\bar{e}(x_2) = \varepsilon^{-2}\Delta$.

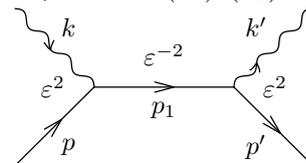


Рис. 1. Преобразованная диаграмма процесса рассеяния $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$.

Fig. 1. Transformed diagram of the scattering process $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$.

В результате первое слагаемое матричного элемента (9) приобретает множитель ε^2 . Аналогичное справедливо и для второго слагаемого. Поэтому амплитуда вероятности Комптон-эффекта при контракции калибровочной группы электрослабой модели преобразуется по правилу

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle \rightarrow \varepsilon^2 \langle f | S^{(2)} | i \rangle. \quad (10)$$

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. при возрастании температуры $T \rightarrow \infty$, сечение рассеяния фотона на электроны, равное квадрату амплитуды, убывает пропорционально $\varepsilon^4 \sim T^{-4}$. Аналогично ведет себя сечение рассеяния фотона на позитроне, описываемое диаграммой на рис.2.

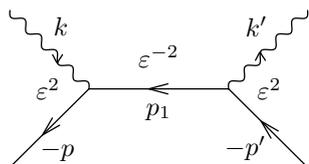


Рис. 2. Диаграмма рассеяния фотона на позитроне $\gamma + e^+ \rightarrow \gamma + e^+$.

Fig. 2. Scattering diagram of a photon on a positron $\gamma + e^+ \rightarrow \gamma + e^+$.

2.2. Аннигиляция пары электрон–позитрон в два фотона

Рассмотрим процесс аннигиляции пары электрон–позитрон в два фотона

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (11)$$

Амплитуда вероятности процесса во втором порядке по теории возмущений дается выражением (формула (6.41) в [10])

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= -ie^2 N_{p'} N_p N_{k'} N_k \times \\ &\times \left[\bar{u}(-p') \hat{\epsilon}(k) \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}' - m} \hat{\epsilon}(k') u(p) + \right. \\ &\left. + \bar{u}(-p') \hat{\epsilon}(k') \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \hat{\epsilon}(k) u(p) \right] \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta(k + k' - p - p'). \end{aligned} \quad (12)$$

Первому слагаемому амплитуды процесса отвечает диаграмма Фейнмана, изображенная на рис.3 при $\epsilon = 1$. Эта диаграмма описывает (во втором порядке теории возмущений) следующую картину: электрон с импульсом p испускает фотон с импульсом k' и переходит в промежуточное состояние с импульсом p_1 , электрон распространяется в промежуточном состоянии; виртуальный электрон с импульсом p_1 и позитрон с импульсом p' аннигилируют с образованием фотона с импульсом k .

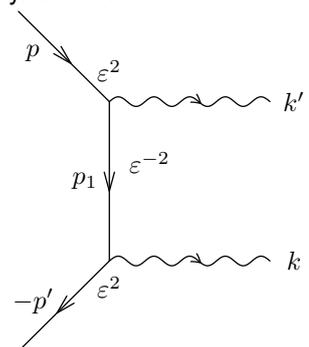


Рис. 3. Преобразованная диаграмма процесса аннигиляции $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$.

Fig. 3. Transformed diagram of the annihilation process $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$.

При замене полей электронов и фотонов, согласно правилам (4), (5), вершины, отвечающие взаимодействию электронов и фотонов, умножаются на ϵ^2 , а пропагатор – на ϵ^{-2} . В результате получаем диаграмму рис.3 аннигиляции электрона и позитрона. Как и в случае упругого рассеяния, амплитуда процесса преобразуется по правилу (10), а сечение

аннигиляции с ростом температуры убывает пропорционально $\epsilon^4 \sim T^{-4}$. Аналогично изменяется с температурой и сечение обратного процесса, изображенного на рис.4, – рождения электрон–позитронных пар в результате столкновения фотонов.

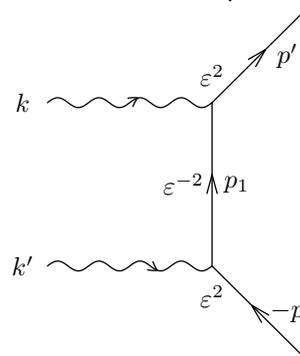


Рис. 4. Диаграмма рождения электрон–позитронных пар $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$.

Fig. 4. Diagram of electron–positron pair production $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$.

2.3. Упругое рассеяние электрона на электроне

Амплитуда вероятности процесса упругого рассеяния электрона на электроне (меллеровское рассеяние)

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- \quad (13)$$

во втором порядке теории возмущений дается выражением (формула (6.67) в [10])

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= ie^2 N_{p'_1} N_{p'_2} N_{p_1} N_{p_2} \times \\ &\times \left[\bar{u}(p'_2) \gamma^\alpha u(p'_1) \frac{1}{(p'_1 - p_1)^2} \bar{u}(p'_1) \gamma_\alpha u(p_1) - \right. \\ &\left. - \bar{u}(p'_1) \gamma^\alpha u(p_2) \frac{1}{(p'_2 - p_1)^2} \bar{u}(p'_2) \gamma_\alpha u(p_1) \right] \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta(p'_2 + p'_1 - p_2 - p_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Первому слагаемому сопоставляется диаграмма Фейнмана рис.5 при единичном контракционном параметре $\epsilon = 1$.

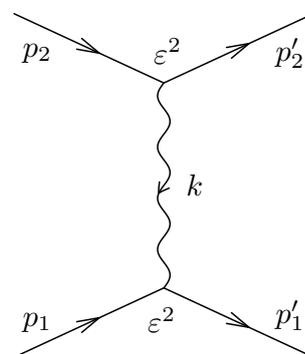


Рис. 5. Диаграмма меллеровского рассеяния $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$.

Fig. 5. Diagram of the Møller scattering $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$.

Замена полей электронов и фотонов по правилам (4), (5) приводит к появлению множителей ϵ^2

у каждой из вершин диаграммы, а поскольку пропагатор фотона не преобразуется, то общий множитель для амплитуды процесса равен ε^4 . Следовательно, сечение упругого рассеяния электрона на электроне с ростом температуры убывает пропорционально $\varepsilon^8 \sim T^{-8}$. Аналогично ведет себя сечение упругого рассеяния позитрона на электроне, диаграмма которого изображена на рис.6.

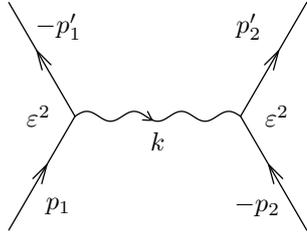


Рис. 6. Диаграмма упругого рассеяния позитрона на электроне $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.
Fig. 6. Diagram of elastic scattering of the positron on the electron $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.

2.4. Рождение мюонных пар при аннигиляции электронов и позитронов

Преыдушие процессы происходили благодаря электромагнитному взаимодействию. Рассмотрим обусловленный электрослабым взаимодействием процесс рождения мюон–антимюонных пар

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-. \quad (15)$$

Согласно стандартной электрослабой модели, пара позитрон–электрон может превратиться в фотон (электромагнитное взаимодействие), либо в Z -бозон (слабое взаимодействие, нейтральный ток). В свою очередь фотон и Z -бозон могут превратиться в пару мюон–антимюон. Таким образом, во втором порядке по теории возмущений диаграммы процесса (15) имеют вид, изображенный на рис.7 и 8 при $\varepsilon = 1$. Амплитуда процесса дается выражением (формула (6.90) в [10])

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle &= iN_{p_1}N_{p_2}N_{p'_1}N_{p'_2} \times \\ &\times \left[e^2 \bar{u}(p'_1)\gamma^\alpha u(-p'_2) \frac{1}{q^2} \bar{u}(-p_2)\gamma_\alpha u(p_1) + \right. \\ &+ 2 \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(p'_1)\gamma^\alpha (g_V + g_A\gamma_5) u(-p'_2) \times \\ &\left. \times \frac{m_Z^2}{q^2 - m_Z^2} \bar{u}(-p_2)\gamma_\alpha (g_V + g_A\gamma_5) u(p_1) \right] \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2), \quad (16) \end{aligned}$$

где $q = p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$, e – заряд электрона, m_Z – масса Z -бозона, $\frac{1}{q^2}$ – фотонный пропагатор, $m_Z^2/(q^2 - m_Z^2)$ – пропагатор Z -бозона, $g_A = -\frac{1}{2}$, $g_V = -\frac{1}{2} - 2\sin^2\theta_W$, $\frac{G}{\sqrt{2}}$ – константа Ферми. Первое слагаемое отвечает диаграмме рис.7, а второе – диаграмме рис.8. Замена полей, согласно правилам (4)–(6), дает множители ε^2 у вершин диаграммы, а поскольку пропагаторы фотона и Z -бозона не преобразуются, то общий множитель для амплитуды процесса равен ε^4 . Следовательно, сечение процесса рож-

дения мюонных пар убывает с ростом температуры пропорционально $\varepsilon^8 \sim T^{-8}$.

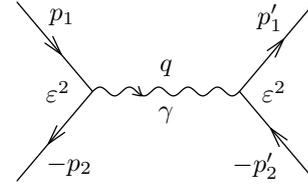


Рис. 7. Диаграмма рождения мюонных пар $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ (обмен γ -квантом).
Fig. 7. Diagram of muon pairs production $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ (γ -quanta exchange).

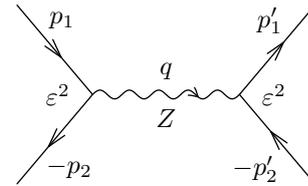


Рис. 8. Диаграмма рождения мюонных пар $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ (обмен Z -бозоном).
Fig. 8. Diagram of muon pairs production $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ (Z boson exchange).

2.5. Рассеяние нейтрино на электронах

Процесс рассеяния электронного нейтрино на электронах

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^- \quad (17)$$

происходит благодаря электрослабым взаимодействиям как за счет обмена Z -бозоном (нейтральный ток, диаграмма на рис.9 при $\varepsilon = 1$), так и путем обмена W -бозоном (заряженный ток, диаграмма на рис.10 при $\varepsilon = 1$). Амплитуда рассеяния во втором порядке теории возмущений дается выражением (формула (6.106) в [10])

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle &= -i \frac{G}{\sqrt{2}} N_{k'} N_k N_{p'} N_p \times \\ &\times [\bar{u}(k')\gamma^\alpha (1 + \gamma_5) u(k) \bar{u}(p')\gamma_\alpha (g_V^e + g_A^e\gamma_5) u(p)] \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta(k' + p' - k - p). \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_V^e &= g_V + 1 = \frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W, \\ g_A^e &= g_A + 1 = \frac{1}{2}. \quad (19) \end{aligned}$$

При выводе данного матричного элемента пренебрегли q^2 по сравнению с m_Z^2 и m_W^2 в знаменателях пропагаторов Z - и W -бозонов соответственно, а также учли соотношение Стандартной модели $m_Z^2 \cos^2\theta_W = m_W^2$. При преобразовании полей по правилам (4)–(6) электронная вершина диаграммы на рис.9 приобретает множитель ε^2 . У диаграммы на рис.10 обе вершины умножаются на ε^2 , а пропагатор W -бозона вносит множитель ε^{-2} . Таким образом, ε^2 является общим множителем обеих диаграмм и, следовательно, амплитуды (18). Сечение процесса рассеяния нейтрино на электронах убывает с ростом температуры пропорционально $\varepsilon^4 \sim T^{-4}$. Аналогичным образом ведет себя сечение рассеяния антинейтрино на электронах $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$.

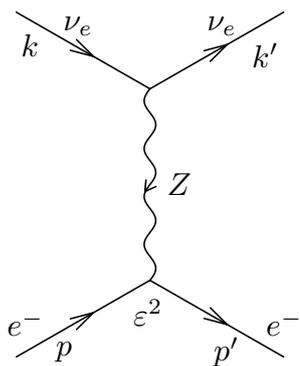


Рис. 9. Диаграмма рассеяния нейтрино на электронах $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ (нейтральный ток).

Fig. 9. Diagram of neutrino scattering on electrons $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ (neutral current).

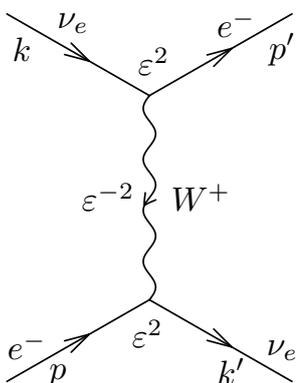


Рис. 10. Диаграмма рассеяния нейтрино на электронах $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ (заряженный ток).

Fig. 10. Diagram of neutrino scattering on electrons $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ (charged current).

2.6. Аннигиляция электронов и позитронов с образованием нейтрино и антинейтрино

Подобно рассеянию нейтрино на электронах, процесс аннигиляции электронов и позитронов в пару нейтрино–антинейтрино

$$e^+ + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + \nu_e \quad (20)$$

также происходит за счет обмена Z -бозоном (нейтральный ток, диаграмма на рис.12 при $\varepsilon = 1$) и путем обмена W -бозоном (заряженный ток, диаграмма на рис.11 при $\varepsilon = 1$). Амплитуда рассеяния во втором порядке теории возмущений имеет вид (формула (6.111) в [10])

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle = & -i \frac{G}{\sqrt{2}} N_{k'} N_{p'} N_k N_p \times \\ & \times [\bar{u}(k') \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) u(-k) \times \\ & \times \bar{u}(-p') \gamma_\alpha (g_V^e + g_A^e \gamma_5) u(p)] \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta(k' + k - p - p'). \end{aligned} \quad (21)$$

При преобразовании полей по правилам (4)–(6) диаграммы процесса аннигиляции электрона и позитрона преобразуются аналогично диаграммам рис.9 и 10. Поэтому амплитуда процесса (20) умножается на ε^2 . Соответственно, сечение процесса аннигиляции

электрона и позитрона в пару нейтрино–антинейтрино убывает с ростом температуры пропорционально $\varepsilon^4 \sim T^{-4}$.

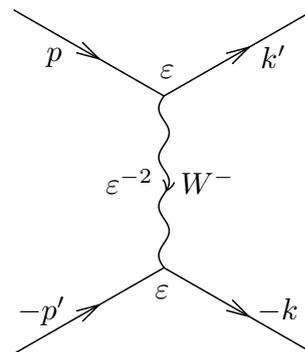


Рис. 11. Диаграмма аннигиляции электрона и позитрона в пару нейтрино–антинейтрино (обмен W -бозоном).

Fig. 11. Annihilation diagram of an electron and a positron into a neutrino–antineutrino pair (W boson exchange).

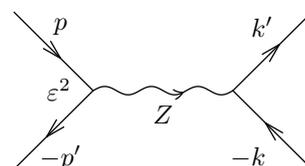


Рис. 12. Диаграмма аннигиляции электрона и позитрона в пару нейтрино–антинейтрино (обмен Z -бозоном).

Fig. 12. Diagram of annihilation of an electron and a positron into a neutrino–antineutrino pair (Z boson exchange).

Заключение

В теориях калибровочного типа состав частиц выбирается в зависимости от поставленной проблемы, а калибровочная группа определяет взаимодействие между частицами модели. Поэтому изменение калибровочной группы, в частности, ее упрощение с помощью контракции (предельного перехода) неизбежно приводит к изменению процессов, происходящих при взаимодействии частиц модели. В данной работе мы проанализировали основные процессы, происходящие между четырьмя частицами, которые определяются электромагнитным и слабым взаимодействием частиц в рамках электрослабой модели, являющейся составной частью современной теории элементарных частиц – Стандартной модели. При контракции $\varepsilon \rightarrow 0$ калибровочной группы электрослабой модели $SU(2) \rightarrow SU(2, \varepsilon)$, с учетом того, что параметр контракции обратно пропорционален температуре Вселенной $\varepsilon \sim T^{-1}$, как и ожидалось, сечения процессов убывают с ростом температуры, т.е. при движении назад к моменту рождения Вселенной, поскольку взаимодействия частиц зависят от параметра контракции и уменьшаются вместе с ним.

Степень убывания сечений оказывается разной для разных процессов. Так, сечения упругого рассеяния фотонов и нейтрино (антинейтрино) на электронах (2.1), (2.5), аннигиляции электронов и позитронов в два фотона (2.2), в пару нейтрино–антиней-

трино (2.6) убывают при $T \rightarrow \infty$ пропорционально T^{-4} , а сечения упругого рассеяния электрон на электроне (2.3) и рождения мюон–антимюонных пар при аннигиляции электронов и позитронов (2.4) ведут себя пропорционально T^{-8} .

Автор выражает признательность В.В. Куратову за полезные обсуждения и помощь в оформлении работы.

Литература

1. *Georgi H., Glashow S.L.* Unity of All Elementary Particle Forces // *Phys. Rev. Lett.* 1974. Vol. 8. P. 438–441.
2. *Pati J., Salam A.* Lepton Number as the Fourth Color // *Phys. Rev. D.* 1974. Vol. 1. P. 275–289.
3. GUT Physics in the Era of the LHC / *D. Croon, T.E. Gonzalo, L. Graf, N. Košnik, G. White* // *Front. Phys.* 2019.
4. *Gromov N.A.* Elementary particles in the early Universe // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2016. Vol. 03. P. 053.
5. *Gromov N.A.* Particles in the Early Universe: High-Energy Limit of the Standard Model from the Contraction of Its Gauge Group. Singapore: World Scientific, 2020. 159 p.
6. *Gorbunov D.S., Rubakov V.A.* Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory. World Scientific, 2011.
7. *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990. 280 с.
8. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1953. Vol. 39. P. 510–524.
9. *Громов Н.А.* Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.
10. *Bilenky S.M.* Basics of introduction to Feynman diagrams and electroweak interactions physics. Paris: Atlantica Séguier Frontières, 1994. 368 p.
11. *Рубаков В.А.* Классические калибровочные поля. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 336 с.
12. *Емельянов В.М.* Стандартная модель и ее расширения. М.: Физматлит, 2007. 584 с.

References

1. *Georgi H., Glashow S.L.* Unity of All Elementary Particle Forces // *Phys. Rev. Lett.* 1974. Vol. 8. P. 438–441.
2. *Pati J., Salam A.* Lepton Number as the Fourth Color // *Phys. Rev. D.* 1974. Vol. 1. P. 275–289.
3. GUT Physics in the Era of the LHC / *D. Croon, T.E. Gonzalo, L. Graf, N. Košnik, G. White* // *Front. Phys.* 2019.
4. *Gromov N.A.* Elementary particles in the early Universe // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2016. Vol. 03. P. 053.
5. *Gromov N.A.* Particles in the Early Universe: High-Energy Limit of the Standard Model from the Contraction of Its Gauge Group. Singapore: World Scientific, 2020. 159 p.
6. *Gorbunov D.S., Rubakov V.A.* Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory. World Scientific, 2011.
7. *Linde A.D.* Fizika elementarnykh chastits i inflyatsionnaya kosmologiya [Particle Physics and Inflationary Cosmology] // Moscow: Nauka, 1990. 280 p.
8. *Inönü E., Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1953. Vol. 39. P. 510–524.
9. *Gromov N.A.* Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups]. Moscow: Fizmatlit, 2012. 318 p.
10. *Bilenky S.M.* Basics of introduction to Feynman diagrams and electroweak interactions physics. Paris: Atlantica Séguier Frontières, 1994. 368 p.
11. *Rubakov V.A.* Klassicheskiye kalibrovochnyye polya [Classical Gauge Fields]. Moscow: Editorial URSS, 1999. 336 p.
12. *Emelyanov V.M.* Standartnaya model i ee rasshireniya [Standard model and its extensions]. Moscow: Fizmatlit, 2007. 584 p.

Статья поступила в редакцию 25.06.2021.

УДК 539.3
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-73-78

В.Н. ТАРАСОВ, Н.О. СМОЛЕВА

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ АРОК С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

*Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар*

*vntarasov@dm.komisc.ru
nataljafilipp5@gmail.com*

V.N. TARASOV, N.O. SMOLEVA

SUSTAINABILITY PROBLEMS OF CIRCULAR ARCS WITH NON-RETAINING LINKS

*Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktывkar*

Аннотация

В работе рассматриваются проблемы устойчивости арок и арочных систем, подкрепленных нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Эти вопросы относятся к контактным задачам упругих конструкций с неизвестной областью активного взаимодействия их элементов, и исследование сводится к поиску и анализу точек бифуркации решений вариационных проблем при наличии ограничений-неравенств на искомые функции. В работе рассматривается задача устойчивости арки, подкрепленной нитями, один конец которых прикреплен к некоторой точке арки, другой – к проекции этой точки на хорду, соединяющую ее концы. При численном решении проблема сводится к поиску параметра нагрузки, при которой задача невыпуклого квадратичного программирования с ограничениями на переменные в виде неравенств имеет неединственное решение. Численные расчеты показали, что даже при небольшом числе подкрепляющих нитей критическая нагрузка увеличивается примерно в два раза.

Ключевые слова:

устойчивость, критическая сила, арка, вариационная задача, нелинейное программирование, односторонние ограничения, бифуркация, квадратичная форма, собственные значения, нерастяжимые нити

Abstract

The work deals with the problems of stability of arches and arch systems supported by inextensible threads that cannot withstand compressive forces. These questions relate to contact problems of elastic structures with an unknown region of active interaction of their elements, and the study is reduced to the search and analysis of bifurcation points of solutions to variational problems in the presence of inequality constraints on the sought functions. The paper considers the problem of stability of an arch supported by threads, one end of which is attached to some point of the arch, the other to the projection of this point on the chord connecting its ends. In the numerical solution, the problem is reduced to finding a load parameter in which the non-convex quadratic programming problem with constraints on variables in the form of inequalities has a non-unique solution. Numerical calculations have shown that even with a small number of reinforcing threads, the critical load approximately doubles.

Keywords:

stability, critical force, arch, variational problem, nonlinear programming, one-sided constraints, bifurcation, quadratic form, eigenvalues, inextensible threads

Введение

Использование новых высокопрочных материалов обуславливает появление все более сложных тонкостенных конструкций. Расчет на устойчивость становится все более важным, так как разрушение тонких конструкций связано с общей потерей устойчивости всей конструкции, либо ее отдельных элементов. Исследование устойчивости упругих систем берет свое начало с работ Л. Эйлера (см. обзор Е.А. Николаи [1] «О работах Эйлера по теории продольного изгиба»). Задачи упругой устойчивости стержней, пластин и оболочек в классическом случае сво-

дятся к исследованию и отысканию точек бифуркации нелинейных уравнений или к отысканию параметров, при которых вариационная задача имеет несколько решений. Современное состояние теории упругой устойчивости изложено в монографии [2]. Общая концепция упругой бифуркационной устойчивости описана в работе В.В. Новожилова [3]. Устойчивость круговых арок подробно изучена в трудах [1–4]. Иногда упругая система переходит в сложное состояние равновесия и движения. В таких случаях статические методы неприменимы и необходимо интегрировать динамические уравнения. Сопоставление статического и динамического подходов приведено в монографии [5].

Рассматриваемые в работе задачи относятся к контактным задачам теории упругости с неизвестной областью активного взаимодействия элементов упругой конструкции. При математической формализации появляются неравенства или негладкие функционалы. Применению неравенств в физике и математике посвящена монография [6].

Исследования в задачах устойчивости арок не прекращаются и в настоящее время [7–11].

В предлагаемой вниманию читателя статье рассматриваются задачи устойчивости подкрепленных арок нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Проблемы, описанные в статье, приводят к необходимости исследовать точки бифуркации вариационных задач при наличии ограничений на искомые функции в виде неравенств. При конечномерной аппроксимации приходим к задаче нахождения точек бифуркации в задачах нелинейного программирования, что, в свою очередь, может быть сведено к поиску глобального минимума в некоторой невыпуклой задаче квадратичного программирования. Последняя замена переменных преобразуется к задаче сепарабельного программирования, для решения которой имеется достаточно эффективный метод ветвей и границ [12]. Проблема поиска глобального минимума квадратичного функционала приводит к задаче идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. Аналитические критерии положительной определенности квадратичных форм на конусах в важном частном случае, когда конус представляет положительный ортант, предложены в работах [13, 14], но их применение связано с вычислением большого количества определителей и в вычислительном отношении крайне неэффективно. Влияние односторонних ограничений на перемещения изучалось в [15–18].

Работа [15] посвящена экспериментальному и численному исследованию устойчивости сжимаемой продольными силами цилиндрической оболочки односторонне взаимодействующих с упругой средой. В.И. Феодосьевым [16] решена задача устойчивости кольца, находящегося в жесткой оболочке, аналогичная задача рассматривалась в [17]. Задача устойчивости арок, односторонне взаимодействующих с упругой средой, разобрана в [18]. Другие задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения исследовались в работах авторов [19, 20]. В [20] аналитически ре-

шена задача устойчивости сжимаемого продольными силами цилиндрической оболочки, находящейся в жесткой обойме, при граничных условиях жесткой заделки и шарнирного опирания. В [19] рассматривалась аналитическая задача при граничных условиях свободного края. Так же в работах [19–21] приведены решения задач устойчивости упругих колец и арок, подкрепленных нерастяжимыми нитями при различных способах подкрепления.

1. Деформация круговых арок

Пусть тонкий упругий стержень, представляющий собой дугу окружности радиуса R , находится в равновесии, силы равномерно распределены по его длине. Предполагается, что сечение стержня постоянно, и одна из главных осей инерции поперечного сечения лежит в плоскости дуги. В некоторой точке M_0 проведем три взаимно перпендикулярные оси (x_0, y_0, z_0) : ось y_0 направлена по одной из главных осей инерции сечения, перпендикулярно плоскости дуги, ось x_0 , соответственно, направлена к центру кривизны дуги, ось z_0 – по касательной к дуге стержня. Пусть в результате деформации стержня оси (x_0, y_0, z_0) переходят в оси x, y, z , точка M_0 переходит в точку M , проекции перемещений точки M_0 на оси (x_0, y_0, z_0) обозначим через u, w, v . Система координат (x, y, z) получается из системы (x_0, y_0, z_0) путем переноса и поворота вокруг осей (x_0, y_0, z_0) на углы α, β, γ . Считаем деформации малы, можем написать уравнения Клебша [1]

$$\begin{cases} \beta = \frac{du}{ds} + \frac{1}{R}w, \\ -\alpha = \frac{dv}{ds}, \\ \frac{dw}{ds} - \frac{1}{R}u = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$ds = R d\vartheta$, $\vartheta \in [\alpha_0, \alpha_1]$ – центральный угол дуги стержня.

Упругая энергия стержня в результате деформации определяется формулой

$$U = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (A\delta p^2 + B\delta q^2 + C\delta^2) R d\vartheta, \quad (2)$$

где A, B – жесткости стержня на изгиб, C – жесткость стержня при кручении.

$$\begin{cases} \delta p = \frac{1}{R}(\alpha' + \gamma) = \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{R}v' + \gamma \right), \\ \delta q = \frac{1}{R}\beta' = \frac{1}{R^2}(u'' + u), \\ \delta r = \frac{1}{R}(\gamma - \alpha) = \frac{1}{R} \left(\gamma + \frac{1}{R}v' \right). \end{cases} \quad (3)$$

Предположим, что арка нагружена давлением P , равномерно распределенным по ее оси. При любой величине давления возможна круговая (первоначальная) форма равновесия.

Если давление достаточно велико, то первоначальная круговая форма становится неустойчивой, и арка принимает другую, нетривиальную форму. Предположим, что деформация арки является плоской, т.е. $\vartheta = 0, \gamma = 0$. Тогда работа внешних

сил определяется формулой

$$W = \frac{PR}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (u'^2 - bu^2) d\vartheta, \quad (4)$$

где $b = 2$ в случае центральных сил, т.е. нагрузка направлена к центру первоначальной кривизны арки, и $b = 1$ в случае нормальной нагрузки, т.е. давление направлено по нормали к деформированной линии арки. В положении равновесия функционал полной энергии

$$J = U - W = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{B}{R^2} (u'' + u)^2 - W \quad (5)$$

принимает минимальное значение. В (5) B – упругая постоянная.

Уравнение Эйлера для функционала (5) имеет вид

$$\frac{B}{R^3} (u^{IV} + 2u'' + u) + P(u'' + u) = 0. \quad (6)$$

2. Об устойчивости арки, подкрепленной нитями

Рассмотрим случай плоской деформации арки, подкрепленной нерастяжимыми нитями. Один конец нити прикреплен к некоторой точке арки, а другой – к хорде, соединяющей концы арки (рис. 1), при этом расстояние между концами нити не может увеличиваться. Число таких нитей обозначим через M . Далее $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$.

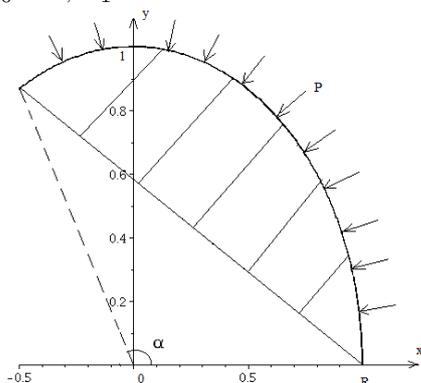


Рис. 1. Плоская деформация арки.
Fig. 1. Flat deformation of the arch.

$$\begin{cases} x = (R - u) \cos \vartheta - w \sin \vartheta, \\ y = (R - u) \sin \vartheta + w \cos \vartheta, \end{cases} \quad (7)$$

где $0 \leq \vartheta \leq \alpha$, $0 < \alpha < \pi$. Уравнение хорды имеет вид

$$y = k(x - R), \quad k = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1}.$$

Один конец нити прикреплен к дуге арки в точке при $\vartheta = \epsilon_j$. Проекция точки $x_{0j} = R \cos \epsilon_j$, $y_{0j} = R \sin \epsilon_j$ определяется формулами

$$x_j = x_{0j} + \mu_j k, \quad y_j = y_{0j} - \mu_j,$$

где $\mu_j = \frac{y_{0j} - kx_{0j} + kR}{1 + k^2}$. После деформации точка (x_{0j}, y_{0j}) перешла в точку с координатами (x, y) ,

определяемыми уравнениями (2) при $\vartheta = \epsilon_j$. Введем функцию

$$f_j(u, w) = \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2},$$

$$g_j(u, w) = f_j(0, 0).$$

Разложим функции $g_j(u, w)$ в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка малости:

$$g_j(u, w) \approx a_j u + b_j w, \quad j \in 1 : M,$$

$$\text{где } a_j = \frac{\partial g_j(0, 0)}{\partial u_j}, \quad b_j = \frac{\partial g_j(0, 0)}{\partial w_j}.$$

Обозначим через Γ конус, определяемый неравенствами

$$a_j u + b_j w \leq 0, \quad j \in 1 : M. \quad (8)$$

Используя систему Maple можно получить

$$a_j = Rc_0(\sin(\alpha - \epsilon_j) + \sin \epsilon_j),$$

$$b_j = Rc_0(\cos(\alpha - \epsilon_j) - \cos \epsilon_j),$$

$$c_0 = \text{signum}(\sin \alpha - \sin \epsilon_j - \sin(\epsilon_j - \alpha)).$$

Задача об устойчивости подкрепленной арки сводится к поиску минимального числа λ , при котором вариационная задача

$$J(u, w) = V - W = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (u'' + u)^2 d\vartheta -$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^\alpha (u'^2 - bu^2) d\vartheta \rightarrow \min_{u, w \in \Gamma}$$

имеет нетривиальное решение. Здесь из (1) $w' = u$, и параметр b характеризует поведение нагрузки после потери устойчивости.

Поскольку функционал $J(u, w)$ положительно однороден, ($J(cu, cw) = c^2 J(u, w)$), то можно потребовать, чтобы

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (u'^2 - bu^2) d\vartheta = 1.$$

Таким образом, исследование устойчивости подкрепленной арки сводится к вариационной проблеме изопериметрического типа

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (u'' + u)^2 d\vartheta \rightarrow \min_{u, w \in \Gamma}, \quad (9)$$

$$W(u) = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (u'^2 - bu^2) d\vartheta = 1 \quad (10)$$

и выполнению неравенств (8). Задачу (8)–(10), по-видимому, можно исследовать лишь численными методами. В случае граничных условий жесткой заделки $u(0) = u(\alpha) = 0$, $u'(0) = u'(\alpha) = 0$ для конечномерной аппроксимации использовались ряды Фурье и интерполяционные кубические сплайны. При аппроксимации рядами Фурье

$$w(0) = \sum_{k=1}^n z_k \sin \frac{k\pi\vartheta}{\alpha},$$

граничные условия жесткой заделки будут выполнены, если потребовать выполнение равенств

$$\sum_{k=1}^n z_k \frac{k\pi}{\alpha} = 0, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k z_k \frac{k\pi}{\alpha} = 0.$$

В случае граничных условий шарнирного опирания $u(0) = u(\alpha) = 0, u''(0) = u''(\alpha) = 0, w(0) = w(\alpha) = 0$ применялась аппроксимация интерполяционными сплайнами.

Наличие ограничений неравенств существенно усложняет решение задачи. В случае аппроксимации сплайнами условие несжимаемости $u = w'$ учитывается методом штрафных функций. Функционал U заменяется на

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (u'' + u)^2 d\vartheta + \frac{D}{2} \int_0^\alpha (u - w')^2 d\vartheta,$$

где D – большое число. Таким образом, подставляя, например, ряды Фурье в (9),(10), получаем задачу нелинейного программирования

$$f(z) = \frac{1}{2}(Gz, z) \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$g(z) = \frac{1}{2}(Qz, z) = 1, \quad (12)$$

$$(a_j z) \leq 0, \quad j \in 1 : m, \quad z \in R^n. \quad (13)$$

Для решения задачи (11)–(13) применяется метод последовательных приближений: пусть вектор $z_0 \in \Gamma, g(z_0) = 1$ – начальное приближение. Предположим, что уже получена точка $z_k \in \Gamma, g(z_k) = 1$. Введем множество $\Omega_k = \{z \in \Gamma, (Qz_k, z) = 1\}$. Найдем точку $y_k \in \Omega$ такую, что $f(y_k) = \min_{z \in \Omega_k} f(z)$. Далее

полагаем $z_{k+1} = \frac{1}{S_k} y_k, S_k = \sqrt{g(y_k)}$. Вопросы сходимости алгоритма обсуждаются [20].

3. Результаты вычислений

Приведем результаты вычислений.

Таблица 1. Значение безразмерного критического давления в зависимости от числа подкрепляющих нитей при граничных условиях жесткой заделки, нормальной и центральной нагрузок
Table 1. The value of the dimensionless critical pressure depending on the number of reinforcing threads under the boundary conditions of rigid embedding and normal and central loads

α/M	0	2	3	4
<i>b = 1</i> сила направлена по нормали к оси арки				
π	8,0	12,94	21,7	29,5
$\frac{2\pi}{3}$	18,1	29,8	47,8	66,2
<i>b = 2</i> сила направлена к центру кривизны арки				
π	10,6	14,0	22,8	30,6
$\frac{2\pi}{3}$	20,1	34,8	49,2	67,8

Таблица 2. Значение безразмерного критического давления PR^3/B в зависимости от числа подкрепляющих нитей при граничных условиях шарнирного опирания, нормальной и центральной нагрузок

Table 2. Dimensionless critical pressure value PR^3/B depending on the number of reinforcing threads under the boundary conditions of the hinge support for normal and central loads

α/M	0	2	3	4
<i>b = 1</i> сила направлена по нормали к оси арки				
π	3,0	3,0	5,6	13,6
$\frac{2\pi}{3}$	8,0	8,0	12,1	34,1
<i>b = 2</i> сила направлена к центру кривизны арки				
π	4,5	4,5	7,4	15,2
$\frac{2\pi}{3}$	9,2	8,0	13,47	35,2

Результаты численных экспериментов показывают, что даже небольшое число вертикальных нитей значительно увеличивает критическую нагрузку примерно в два раза.

Заключение

Таким образом, численные расчеты показали, что даже при небольшом числе подкрепляющих нитей критическая нагрузка увеличивается примерно в два раза. При сравнении результатов, приведенных в табл. 1, 2, можно сделать вывод, что на величину критической нагрузки существенно влияет вид граничных условий.

Литература

1. *Николаи Е.Л.* Труды по механике. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 584 с.
2. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т. 1. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010–2011. 686 с.
3. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
4. *Динник А.Н.* Устойчивость арок. М., 1946. 128 с.
5. *Ziegler H.* Principles of Structural Stability. Waltham, Massachusetts, Toronto, London: Blaisdell publishing company, 1968. 194 с.
6. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
7. In-plane elastic stability of arches under a radial concentrated load / *Yongjun Xu, Xiaoming Gui, Bin Zhao, Ruiqi Zhao* // Engineering. 2014. No. 6. P. 572–583.
8. *Pi Y.-L., Bradford A.* Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load // J. of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331. P. 4199–4217.
9. *Pi Y.-L., Bradford A.* A new analytical solution for lateral-torsional buckling of arches under axial uniform compression // Engineering Structures. 2012. Vol. 41. P. 14–23.

10. *Pi Y.-L., Bradford A.* Dynamic buckling of shallow pin-ended arches under a sudden central concentrated load // *J. of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 317. P. 898–917.
11. *Lalin V.V., Dmitriev A.N., Diakov S.F.* Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches // *Magazine of Civil Engineering*. 2019. Vol. 89, No. 5. P. 39–51.
12. *Сухарев А.Г.* Глобальный экстремум и методы его отыскания // *Математические методы и исследования операций*. М.: Изд-во МГУ, 1983. 193 с.
13. *Рапопорт Л.Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе // *ПММ*. 1986. Т. 50, № 4. С. 674–679.
14. *Крепс В.Л.* О квадратичных формах неотрицательных на ортанте // *ЖВМиМФ*. 1984. Т. 24, № 14. С. 497–503.
15. *Алфутов Н.А., Еремичев А.Н.* Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии // *Расчеты на прочность*. М.: Машиностроение, 1989. С. 179–180.
16. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
17. *Zhaochao Li, Junxing Zheng, Yizheng Chen.* Nonlinear buckling of thin-walled FGM arch encased in rigid confinement subjected to external pressure // *Engineering Structures*. 2019. Vol. 186. P. 86–95.
18. *Ricardo A.M. Silveria, Christianne L. Nogueira, Paulo B. Goncalves.* A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. No. 50. P. 147–159.
19. *Andryukova V., Tarasov V.* Nonsmooth problem of stability for elastic rings // *Abstracts of the Intern. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Prof. V.F. Demyanov. Part I*. St. Petersburg: Inst. of Electrical and Electronic Engineers, 2017. P. 268.
20. *Tarasov V.* Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // *Abstracts of the Intern. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Prof. V.F. Demyanov. Part I*. St. Petersburg: Inst. of Electrical and Electronic Engineers, 2017. P. 268.
21. *Андрюкова В.Ю.* Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7, № 4. С. 412–422.
3. *Novozhilov V.V.* *Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti* [Foundations of the nonlinear theory of elasticity]. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 211 p.
4. *Dinnik A.N.* *Ustojchivost' arok* [Stability of arches]. Moscow, 1946. 128 p.
5. *Ziegler H.* *Principles of Structural Stability*. Waltham, Massachusetts, Toronto, London: Blaisdell publishing company, 1968. 194 c.
6. *Panagiotopoulos P.* *Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevypuklyye funktsii energii* [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy functions]. Moscow: Mir, 1989. 494 p.
7. In-plane elastic stability of arches under a radial concentrated load / *Yongjun Xu, Xiaoming Gui, Bin Zhao, Ruiqi Zhao* // *Engineering*. 2014. No. 6. P. 572–583.
8. *Pi Y.-L., Bradford A.* Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load // *J. of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. P. 4199–4217.
9. *Pi Y.-L., Bradford A.* A new analytical solution for lateral-torsional buckling of arches under axial uniform compression // *Engineering Structures*. 2012. Vol. 41. P. 14–23.
10. *Pi Y.-L., Bradford A.* Dynamic buckling of shallow pin-ended arches under a sudden central concentrated load // *J. of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 317. P. 898–917.
11. *Lalin V.V., Dmitriev A.N., Diakov S.F.* Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches // *Magazine of Civil Engineering*. 2019. Vol. 89, No. 5. P. 39–51.
12. *Sukharev A.G.* *Global'nyj ekstremum i metody ego otskaniya* [Global extremum and methods of finding it] // *Mathematical Methods and Operations Research*. Moscow: Moscow State Univ. Publ. House, 1983. 193 p.
13. *Rapoport L.B.* *Ustojchivost' po Lyapunovu i znakoopredelennost' kvadrachnoj formy na konuse* [Lyapunov stability and definiteness of a quadratic form on a cone] // *PMM*. 1986. Vol. 50, No. 4. P. 674–679.
14. *Kreps V.L.* *O kvadrachnyh formah neotricatel'nyh na ortante* [Quadratic forms of nonnegative forms on the orthant] // *ZhVMiMF*. 1984. Vol. 24, No. 14. P. 497–503.
15. *Alfutov N.A., Eremichev A.N.* *Vliyanie odnostoronnih svyazej na ustojchivost' cilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii* [Influence of one-way bonds on the stability of cylindrical shells under axial compression] // *Strength calculations. Mechanical engineering*. 1989. P. 179–180.
16. *Feodosyev V.I.* *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected tasks and questions on the strength of materials]. Moscow: Nauka, 1967. 376 p.
17. *Zhaochao Li, Junxing Zheng, Yizheng Chen.* Nonlinear buckling of thin-walled FGM arch encased in rigid confinement subjected to external pressure // *Engineering Structures*. 2019. Vol. 186. P. 86–95.
18. *Ricardo A.M. Silveria, Christianne L. Nogueira, Paulo B. Goncalves.* A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender

References

1. *Nikolai E.L.* *Trudy po mekhanike* [Transactions on mechanics]. Moscow: Publishing house of technical and theoretical literature, 1955. 584 p.
2. *Perelmuter A.V., Slivker V.I.* *Ustojchivost' ravnovesiya konstrukcij i rodstvennyye problemy* [Equilibrium stability of structures and related problems]. Vol. 1. Moscow: Publishing house SKAD SOFT, 2010–2011. 686 p.

- arches and rings under contact constraints // International Journal of Solids and Structures. 2013. No. 50. P. 147–159.
19. *Andryukova V., Tarasov V.* Nonsmooth problem of stability for elastic rings // Abstracts of the Intern. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Prof. V.F. Demyanov. Part I. St. Petersburg: Inst. of Electrical and Electronic Engineers, 2017. P. 268.
20. *Tarasov V.* Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Intern. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Prof. V.F. Demyanov. Part I. St. Petersburg: Inst. of Electrical and Electronic Engineers, 2017. P. 268.
21. *Andryukova V.Yu.* Nekotorye konstruktivno-nelinejnye zadachi ustojchivosti uprugih sistem pri odnostoronnih ogranicheniyah na peremeshcheniya [Some constructively nonlinear stability problems for elastic systems under one-sided constraints on displacements] // Computational Continuum Mechanics. 2014. Vol. 7, No. 4. P. 412–422.

Статья поступила в редакцию 21.10.2021.

УДК 53.072.13:621.372.41
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-79-85

Н.А. СЕКУШИН

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ: ОБОБЩЕННАЯ
МОДЕЛЬ ВОЙТА**

*Институт химии ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар*

nsekushin@inbox.ru

N.A. SEKUSHIN

**SOLVING THE INVERSE ELECTRICAL
PROBLEM IN MATERIALS SCIENCE:
GENERALIZED VOIGHT MODEL**

*Institute of Chemistry,
Federal Research Centre Komi Science Centre,
Ural Branch, RAS,
Syktuykar*

Аннотация

Работа посвящена теоретическим основам низкочастотной электромагнитной спектроскопии, используемой для исследования материалов, биологических объектов, электрохимических систем. Описана методика построения электрической модели образца в виде классической и обобщенной схем Войта. Показано, что анализ геометрической формы экспериментального годографа импеданса позволяет определить количество звеньев схемы Войта, а также оценить значения параметров каждого звена. Рассмотрены способы перехода от параметров эквивалентной схемы (ЭС) к электрическим характеристикам объема материала. Предложены три новые интегральные характеристики неоднородной среды, в ЭС которых присутствуют элементы постоянной фазы.

Ключевые слова:

импеданс спектроскопия, эквивалентные схемы, двухполюсники, модель Войта, элемент постоянной фазы, мнимая импеданс частотная характеристика

Abstract

This work deals with the theoretical foundations of high-frequency impedance spectroscopy used for the study of functional polycrystalline materials. A method for constructing an electrical model of a sample in the form of a classical and generalized Voight scheme is described. The impedance hodo-graph of the classical Voight scheme is an overlay of semi-circles, from which geometric dimensions it is possible to determine the parameters of the equivalent scheme. It is shown that for inhomogeneous materials, the considered semicircles are rotated relative to the origin of the complex plane and shifted horizontally. To model such systems, it is necessary to use a generalized Voight scheme, in which the capacitors are replaced with elements of a constant phase. The ways of transition from the “inconvenient” parameters of such two-poles to the electrical characteristics of the material volume are considered. Three new integral characteristics of an inhomogeneous medium are proposed: the peak parameters on the imaginary impedance frequency characteristic (the frequency of the impedance resonance and the half-width of the peak). Both values can be determined without measuring the geometric dimensions of the sample. In addition, the “dielectric loss correction factor” has been introduced, which affects the horizontal offset of the impedance frequency response.

Keywords:

impedance spectroscopy, equivalent circuit, bipolar, Voight model, constant phase element, imaginary impedance frequency response

Введение

В теории пассивных двухполюсников существуют две основные задачи. Прямая задача заключается в расчете частотных и переходных характеристик электрических схем, у которых все параметры известны. Методы решения прямой задачи подробно описаны в многочисленных учебниках и задачниках [1]. Обратная электротехническая задача заключается в построении схемы двухполюсника (черного ящика), если известны его частотные характеристики. Необходимость в решении обратной задачи возникает при проектировании аналого-

вых фильтров и усилителей [1], при определении параметров электрохимических процессов [2], при исследовании материалов [3] и биологических систем [4] методом импеданс-спектроскопии (ИС). Полезную информацию по решению обратной задачи в электрохимии можно найти в монографиях [5, 6]. В настоящее время для решения как прямой, так и обратной задач используют компьютерные программы «EquivCrt» (B.A. Boukamp), «LEVM» (J.R. Macdonald) и «ZView» (Scribner Associates Inc.). Наиболее продвинутым инструментом является, по-видимому, программа ZView. При решении обратной задачи необходимо найти наиболее точную эквивалентную схему (ЭС) «черного ящика». Этот процесс осуществляется методом проб и ошибок. В программе ZView точность модели оценивается с помощью критериев Weighted Sum of Squares и Chi-Squared (χ^2). Величину χ^2 рассчитывают по формуле [6]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - m_i)^2}{m_i}, \quad (1)$$

где k – количество наблюдений (точек на кривой); x_i – результат наблюдения; m_i – ожидаемый (теоретический) результат.

При моделировании импеданса образца схемой, состоящей из m резисторов (R) и n конденсаторов (C), выражение (1) представляет собой функцию параметров ЭС: $\chi^2 = f(R_1 - R_m, C_1 - C_n)$. Программа ZView варьирует эти параметры и рассчитывает χ^2 до тех пор, пока не получит минимальное значение критерия χ^2 . Проблема рассматриваемого алгоритма заключается в том, что функция χ^2 в некоторых случаях может иметь несколько минимумов. В качестве примера на рис. 1 приведена ЭС, у которого функция χ^2 имеет 3 минимума.

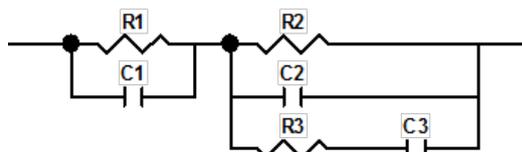


Рис. 1. Пример проблемной эквивалентной схемы.
Fig. 1. An example of a problem equivalent circuit.

Перед пуском программы ZView необходимо задать точку старта, т. е. начальные значения параметров ЭС. После пуска программа обнаружит ближайший минимум и выдаст значения элементов ЭС. Иногда после изменения температуры образца точка старта оказывается ближе к другому минимуму χ^2 . В таких случаях наблюдается явление «перескока», которое исследователь должен распознать. Не единственность решения обратной электротехнической задачи проявляется также в том, что существуют математически эквивалентные двухполюсники (МЭД), различающиеся своими электрическими схемами и имеющие при этом одинаковые частотные характеристики. В работе [7] сформулированы необходимые и достаточные признаки МЭД, а также доказана математическая эквивалентность моделей Войта и Максвелла. В электрохимической литературе при решении обратной задачи отдается пред-

почтение модели Войта, что позволяет, во-первых, не экспериментировать с ЭС разной структуры. Во-вторых, при использовании модели Войта достаточно просто контролировать корректность работы компьютерной программы. В настоящей работе показано, как следует строить ЭС и выбирать точку старта для последующих компьютерных вычислений, анализируя форму экспериментального годографа импеданса образца.

1. Классическая модель Войта

При моделировании частотных характеристик схемой Войта необходимо экспериментальные данные ИС представить в виде графика в координатах ($ReZ; ImZ$), где ReZ – вещественная, а ImZ – мнимая составляющие комплексного сопротивления (импеданса). Полученная таким способом кривая называется годографом импеданса или импедансной кривой. Сами по себе ReZ и ImZ не имеют какого-либо четкого физического смысла. Вместе с тем, анализируя геометрическое строение годографа, можно определить структуру эквивалентной схемы и ее некоторые параметры. Покажем это с помощью рис. 2, где изображена трехзвенная схема Войта и ее частотные характеристики, построенные для заданных параметров двухполюсника в условных единицах (у. е.).

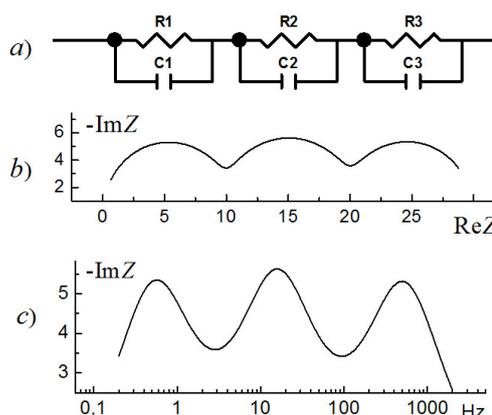


Рис. 2. Трехзвенная модель Войта а), ее годограф импеданса б) и мнимая импеданс частотная характеристика с). Графики б) и с) построены для следующих значений резисторов: $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ у. е. и емкостей: $C_1 = 3 \cdot 10^{-2}$; $C_2 = 10^{-3}$; $C_3 = 3 \cdot 10^{-5}$ у. е.
Fig. 2. The three-link Voight model a), its impedance hodograph b) and imaginary impedance frequency response c). Graphs b) and c) are plotted for the following resistor values: $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ a. u. and capacities: $C_1 = 3 \cdot 10^{-2}$; $C_2 = 10^{-3}$; $C_3 = 3 \cdot 10^{-5}$ a. u.

Импеданс отдельного звена модели Войта «R-C» можно рассчитать по формуле [5, 6]:

$$Z = \frac{R}{1 + j\omega\tau}, \quad (2)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени; j – мнимая единица; ω – круговая частота.

В работе [8] доказано, что годограф импеданса (2) представляет собой точную полуокружность диаметром R . Ее центр располагается на оси абс-

цисс и имеет координаты: $\left(\frac{R}{2}; 0\right)$. Импеданс двух-полюсника, в котором элементы соединены последовательно, находят суммированием импедансов отдельных звеньев цепи. Составляющие импеданса n -звенной схемы Войта равны [7]:

$$ReZ = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\omega^2 \tau_i^2 + 1}; ImZ = - \sum_{i=1}^n \frac{R_i \tau_i}{\omega^2 \tau_i^2 + 1}. \quad (3)$$

Функции (3) называют «импеданс спектрами». Наиболее информативна зависимость $-ImZ(\omega)$, которая является «мнимой импеданс частотной характеристикой» (рис. 2с). Таким образом, использование комплексной плоскости (ReZ ; $-ImZ$) позволяет связать структуру ЭС с геометрической фигурой, что сделало популярной данную систему координат.

2. Обобщенная модель Войта

Экспериментальные годографы импеданса часто имеют более сложный вид. Во-первых, постоянные времени звеньев могут оказаться близки по величине, что приведет к наложению отдельных полуокружностей. Во-вторых, сама полуокружность может быть смещена по вертикали и горизонтали. На рис. 3 изображен годограф импеданса сложного оксида $CaCu_3Ti_4O_{12}$, результаты исследования которого приведены в работе [9].

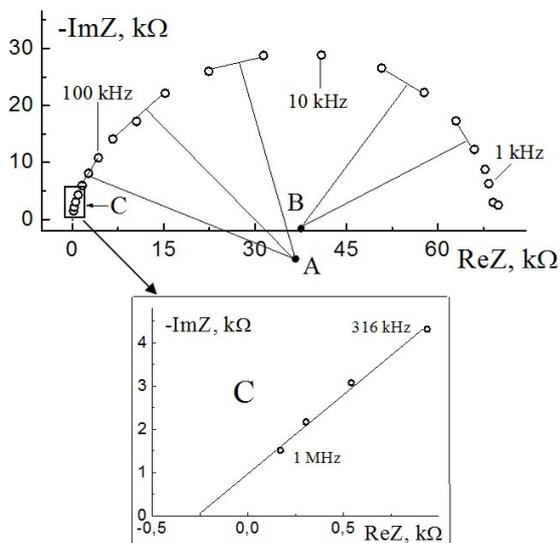


Рис. 3. Экспериментальный годограф импеданса $CaCu_3Ti_4O_{12}$, измеренный при температуре $300^\circ C$ (точки) и геометрические построения, позволяющие определить центры кривизны дугообразных частей годографа. В рамке С приведена высокочастотная часть годографа импеданса.

Fig. 3. Experimental impedance hodograph $CaCu_3Ti_4O_{12}$, measured at a temperature of $300^\circ C$ (points) and geometric constructions, that allow to determine the centers of curvatures of the arcuate parts of the impedance hodograph. The high-frequency part of the impedance hodograph is shown in frame C.

Для определения центра кривизны дуги можно воспользоваться известной теоремой, согласно которой, любые перпендикуляры к дуге пересекаются в

ее центре. На рис. 3 элементы годографа аппроксимированы отрезками прямой линии. От каждого отрезка проведен перпендикуляр. Несложно заметить, что высокочастотная часть годографа имеет центр кривизны в точке А, а низкочастотная часть – в точке В. Следовательно, схема Войта должна состоять из двух звеньев.

При моделировании процесса, когда центр кривизны импедансной кривой находится в нижней полуплоскости, необходимо в соответствующем звене схемы Войта поменять конденсатор на элемент постоянной фазы (CPE), импеданс которого рассчитывают по формуле [5]:

$$Z_{CPE} = \frac{1}{T_{CPE}(j\omega)^P} = \frac{1}{T_{CPE}\omega^P} \exp j\varphi, \quad (4)$$

где P – безразмерный параметр, имеющий величину от 0 до 1; T_{CPE} – параметры с размерностью $[\Phi^P \text{ Ом}^{P-1}; F^P \cdot \Omega^{P-1}]$; $\varphi = -\frac{\pi P}{2}$ – фаза импеданса CPE.

Поскольку Z_{CPE} при $P = 1$ превращается в конденсатор с емкостью T_{CPE} , то можно считать CPE обобщенным видом конденсатора. В соответствии с этим в «обобщенной схеме Войта» все конденсаторы заменены на CPE. Исследуем частотные свойства отдельного звена такой модели, обозначаемого символом: «R-CPE». Импеданс этого двухполюсника рассчитывают по формуле [5]:

$$Z = \frac{RZ_{CPE}}{R + Z_{CPE}} = \frac{R}{1 + j^P \omega^P R T_{CPE}}. \quad (5)$$

Для возведения мнимой единицы в степень необходимо ее записать в экспоненциальной форме: $j = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $j^P = \exp\left(j\frac{\pi P}{2}\right)$.

При изображении j и j^P на комплексной плоскости получим два единичных вектора, угол между которыми в радианах равен $\delta = \frac{\pi}{2}(1 - P)$ (рис. 4). Отсюда получаем полезную формулу: $P = 1 - \frac{\delta}{90}$, где угол δ необходимо выразить в градусах.

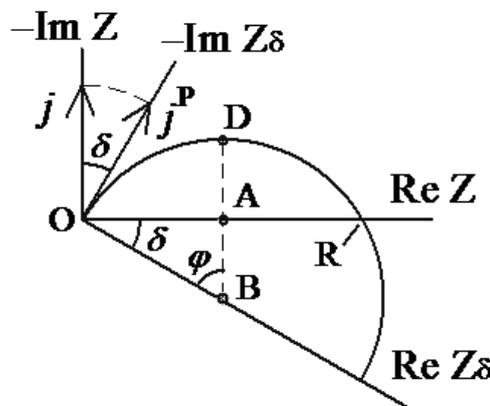


Рис. 4. Годограф импеданса, построенный по формуле (5).

Fig. 4. Impedance hodograph built according to formula (5).

Таким образом, годограф импеданса (5) является также полукругностью, построенной в повернутой системе координат $(ReZ_\delta; -ImZ_\delta)$ (рис. 4). Переход в лабораторную систему координат $(ReZ; -ImZ)$ осуществляется поворотом системы координат $(ReZ_\delta; -ImZ_\delta)$ на угол δ против часовой стрелки. Следовательно, годограф импеданса (5) имеет форму дуги идеальной окружности, центр которой располагается в нижней полуплоскости и имеет координаты: $\left(\frac{R}{2}; \frac{R}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi P}{2}\right)$.

Параметр годографа P можно также рассчитать по точной формуле:

$$P = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}, \quad (6)$$

где $\gamma = \frac{DA}{OA}$ – величина, легко измеряемая на рис. 4.

Поскольку график функции (6) достаточно близок к прямой линии, то для оценки параметра P можно воспользоваться приближенной формулой: $P \approx \gamma$. Точное значение $P = \gamma + \text{поправка } \Delta P$, которая всегда положительна и не превышает $0,1(\Delta P = -0,006 + 0,375\gamma - 0,367\gamma^2)$.

Таким образом, из формы годографа на рис. 4 можно определить два параметра импеданса (5). Оставшийся параметр T_{CPE} не влияет на форму импедансной кривой. Для его определения необходимо использовать формулу для мнимой импеданс частотной характеристики двухполюсника « $R-CPE$ » [5]:

$$-ImZ = R \frac{x \sin \varphi}{1 + x^2 + 2x \cos \varphi}, \quad (7)$$

где $x = \omega^P RT_{CPE}$.

Кривая $-ImZ(x)$ в логарифмической шкале аргумента x представляет собой симметричный пик, форма которого зависит только от фазы φ (рис. 5).

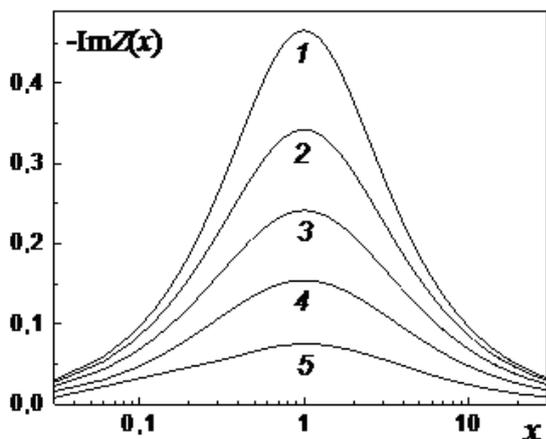


Рис. 5. Мнимые импеданс частотные характеристики двухполюсника « $R-CPE$ » (7), построенные для $R = 1$ и фазы $CPE \varphi$ (рад.): 1,5 (1); 1,2 (2); 0,9 (3); 0,6 (4) и 0,3 (5).

Fig. 5. Imaginary impedance frequency characteristics of the two-terminal « $R-CPE$ » (5), constructed for $R = 1$ and phase $CPE \varphi$ (rad.): 1.5 (1); 1.2 (2); 0.9 (3); 0.6 (4) and 0.3 (5).

Функция $-ImZ(x)$ имеет максимум (импедансный резонанс) при $x = 1$ или при круговой частоте

$$\omega_{max} = (RT_{CPE})^{-\frac{1}{P}}. \quad (8)$$

Таким образом, параметр T_{CPE} можно определить, если известна частота в точке D на рис. 4.

Вернемся теперь к экспериментальным данным на рис. 3. Необходимо определить координаты точки пересечения годографа с осью абсцисс в области высоких частот. Этот участок импедансной кривой выделен на рис. 3 прямоугольником, копия которого представлена на рис. 3 в рамке в увеличенном виде. Линейная аппроксимация годографа в области высоких частот показала, что координата точки пересечения импедансной кривой с вещественной осью равна ≈ -250 Ом. Эту особенность импеданса учитывают в ЭС подсоединением к цепи дополнительного резистора r , в данном случае отрицательного знака (рис. 6а). Вследствие этого годограф двухполюсника сместится по горизонтали влево.

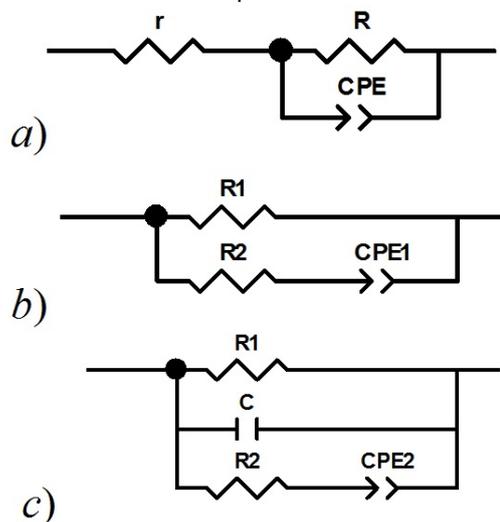


Рис. 6. Звено обобщенной модели Войта до корректировки а) и после корректировки резистором R_2 б) и конденсатором C в).

Fig. 6. The link of the generalized Voight model before adjustment a) and after adjustment by resistor R_2 b) and capacitor C c).

Недостатком ЭС (рис. 6а) является то, что отрицательное сопротивление r находится в цепи, отвечающей за сквозную проводимость образца. Поэтому двухполюсник $r \cdot (R-CPE)$ (рис. 6а) следует заменить на математически эквивалентный двухполюсник $R_1-R_2 \cdot CPE1$ (рис. 6б), воспользовавшись формулами из работы [7]:

$$R_1 = R + r; R_2 = r \left(1 + \frac{r}{R}\right);$$

$$Z_{CPE1} = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 Z_{CPE}. \quad (9)$$

Из формул (4) и (9) получим связь между параметрами:

$$T_{CPE1} = \left(\frac{R}{R+r}\right)^2 T_{CPE}; P_1 = P.$$

Перенос отрицательного резистора из цепи, моделирующей сквозной ток, в цепь, где проходит только ток смещения, делает электрическую модель физически корректной. В этом случае R_2 влияет на фазу импеданса и угол диэлектрических потерь цепи R_2-CPE1 . При $R_2 < 0$ тангенс угла диэлектрических потерь D двухполюсника R_2-CPE1 уменьшается, а при $R_2 > 0$ – увеличивается. Это следует из формулы, полученной в работе [10]:

$$D = \operatorname{ctg} \frac{\pi P}{2} + R_2 T_{CPE1} \omega^P \sin^{-1} \frac{\pi P}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, резистор R_2 (рис. 6) осуществляет корректировку диэлектрических потерь в ЭС. Нередко импедансная кривая имеет не постоянную кривизну, как это показано на рис. 3. В таких случаях в звено можно ввести также корректирующую емкость (см. рис. 6), которая иногда может быть отрицательной.

3. Переход от параметров образца к характеристикам среды

При исследовании электрических свойств материалов образцы готовят в виде дисков с плоскопараллельными сторонами, на которые обычно наносят серебряные или платиновые электроды. Почти все параметры ЭС образцов зависят от их геометрических размеров. В настоящем разделе предложены интегральные характеристики неоднородной среды, моделируемой обобщенной схемой Войта.

3.1. Коэффициент корректировки диэлектрических потерь

Проведем более подробный анализ формулы (10). Сопротивление R_2 пропорционально толщине образца h и обратно пропорционально площади его поверхности S . Параметр T_{CPE1} равен емкости CPE при $P = 1$ или равен проводимости CPE при $P = 0$. Следовательно, T_{CPE1} пропорционально S и обратно пропорционально h . Таким образом, R_2 и T_{CPE1} не являются характеристиками среды. Вместе с тем при их перемножении геометрические размеры образца сокращаются. Поэтому произведение $R_2 \times T_{CPE1}$ является параметром среды с неудобной размерностью: время ^{P} . Ранее было показано, что безразмерный параметр P не зависит от геометрических размеров образца [10]. Если произведение $R_2 \times T_{CPE1}$ возвести в степень $1/P$, то его размерность становится равной времени. Поскольку $R_2 \times T_{CPE1}$ может иметь как положительный, так и отрицательный знак, то процедура возведения в дробную степень усложняется. Нами предложена формула для расчета характеристики материала, учитывающая знак резистора R_2 :

$$\tau = \operatorname{sign}(R_2) \cdot (|R_2| \cdot T_{CPE})^{1/P}, \quad (11)$$

где $|R_2|$ и $\operatorname{sign}(R_2) = R_2/|R_2|$ – параметры резистора R_2 (абсолютное значение сопротивления и знак сопротивления соответственно).

Мы решили назвать τ «коэффициентом корректировки диэлектрических потерь», так как этот параметр входит в формулу (10). Физический смысл τ

становится понятен, если вспомнить некоторые положения классической физики. В системе единиц СГСЭ, которую используют до сих пор в электродинамике, удельное сопротивление имеет размерность времени. Парселл объяснил взаимосвязь удельного сопротивления и времени с помощью мысленного эксперимента по разряду конденсатора через резистор [11]. Чем больше удельное сопротивление материала, из которого изготовлен резистор, тем больше требуется время на разряд конденсатора. Следовательно, параметр τ отвечает за поглощение энергии веществом при его поляризации.

3.2. Частота импедансного резонанса (ω_{max})

Формула (8) по своей структуре фактически совпадает с выражением (11). Следовательно, ω_{max} также является интегральным параметром среды, который характеризует скорость отклика системы на электромагнитное воздействие.

3.3. Полуширина пика на мнимой импеданс частотной характеристике

Ширина максимума на рис. 5 характеризует поляризационную неоднородность материала. Необходимое для расчета уравнение получим из формулы (7). Высота изображенного на рис. 5 пика равна:

$$-ImZ_{max} = R \frac{\sin \varphi}{2 + 2 \cos \varphi} = \frac{R}{2} \tan \frac{\varphi}{2}. \quad (12)$$

$-ImZ_{max}$ не является характеристикой среды, так как R зависит от геометрических размеров образца.

Пусть на краях полосы частот мнимая часть импеданса равна $-gImZ_{max}$, где константа $g < 1$. «Полушириной импедансного пика» будем называть частный случай полосы при $g = 0, 5$. Из формул (7) и (12) получим уравнение, корнями которого являются пограничные безразмерные частоты x_1 и x_2 :

$$\frac{gR}{2} \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{Rx \sin \varphi}{1 + x^2 + 2x \cos \varphi}.$$

После преобразования это уравнение приобретает следующий вид:

$$x^2 - 2xK + 1 = 0, \text{ где } K = 1 + \frac{2(1-g)}{g} \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (13)$$

Корни уравнения (13):

$$x_1 = K + \sqrt{K^2 - 1}; \quad x_2 = K - \sqrt{K^2 - 1}.$$

Делим первый корень на второй и используем выражение (7):

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^P = \frac{K + \sqrt{K^2 - 1}}{K - \sqrt{K^2 - 1}} = (K + \sqrt{K^2 - 1})^2,$$

где $\omega_1 \gg \omega_2$ – граничные частоты.

Частотный диапазон $\Delta\omega_g$, в котором находится мнимая составляющая импеданса цепи « $R-CPE$ », необходимо выразить в декадах:

$$\omega_g = \log \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{P} \log (K + \sqrt{K^2 - 1}). \quad (14)$$

При расчете полуширины импедансного пика необходимо использовать следующие уравнения:

$$\omega_{0.5} = \frac{2}{P} \log \left(K + \sqrt{K^2 - 1} \right), \quad (15)$$

где

$$K = 1 + 2 \cos^2 \frac{\pi P}{4}.$$

Из формул (14) и (15) следует, что ширина импедансного пика зависит только от параметра P . График зависимости (15) на рис. 7 можно использовать для оценки параметра P , если мнимая импеданс частотная характеристика известна. Для дискретного случая ($P = 1$) полуширина пика равна 1,14 дек.

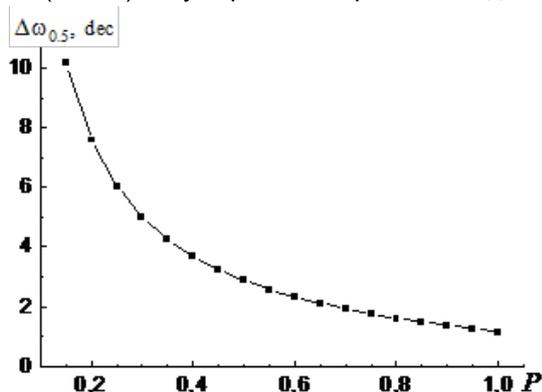


Рис. 7. Зависимость полуширины импедансного пика от параметра P .

Fig. 7. Dependence of the half-width of the impedance peak on parameter P .

Таким образом, теоретический анализ показал, что «неудобные параметры» образца R_2, T_{CPE} и P (см. рис. 6) можно преобразовать в интегральные характеристики неоднородной среды τ, ω_{max} и $\Delta\omega_{0.5}$, воспользовавшись формулами (8), (11) и (15). При этом не требуется измерение геометрических размеров образца. Благодаря этому, облегчается аттестация материалов, которые имеют разный химический, фазовый состав и условия синтеза.

Заключение

При построении эквивалентных схем с помощью специальных компьютерных программ необходимо провести анализ формы годографа импеданса образца. Это позволяет определить структуру эквивалентной схемы, число звеньев в модели Войта и их классический или обобщенный вид. Несложные расчеты позволяют оценить часть параметров эквивалентной схемы, что помогает в выборе точки старта при компьютерных вычислениях. После определения величин всех параметров электрической модели необходимо получить из них интегральные характеристики среды. В работе предложены три объемных параметра неоднородного материала, в эквивалентной схеме которого присутствуют элементы постоянной фазы. Это облегчает аттестацию функциональных материалов, имеющих разный химический состав, структуру и условия синтеза.

Литература

1. Расчет электронных схем. Примеры и задачи / Г.И. Изъюрова, Г.В. Королев, М.А. Терехов, М.А. Ожогин, В.Н. Серов. М.: Высшая школа, 1987. 335 с.
2. Электрохимический импеданс / З.Б. Стойнов, Б.М. Графов, Б. Саввова-Стойнова, В.В. Елкин. М.: Наука, 1991. 336 с.
3. Определение вида распределения релаксаторов методом экстраполяции / А.С. Богатин, Е.В. Андреев, С.А. Ковригина, Ю.А. Игнатова, В.Н. Богатина, А.Л. Буланова // Известия Российской Академии наук. Серия физическая. 2016. Т. 80, № 11. С. 1519–1521.
4. Grimnes S., Martinsen O.G. Bioimpedance and bioelectricity basics. Academic Press, 2000. 360 p.
5. Barsoukov E., Macdonald J.R. Impedance spectroscopy: theory, experiment and application. Wiley-Interscience, 2005. 606 p.
6. Lasia A. Electrochemical impedance spectroscopy and its applications. New York: Springer Science+Business Media, 2014. 369 p.
7. Секушин Н.А. Математическая эквивалентность моделей Максвелла и Войта // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. № 1(37). С. 127–134.
8. Секушин Н.А. Универсальная эквивалентная схема электрохимической ячейки // Электрохимия. 2009. Т. 45, № 3. С. 372–377.
9. Sekushin N.A., Koksharova L.A., Zhuk N.A. Impedance spectroscopy of $CaCu_3Ti_4O_{12}$ // Letters on Materials. 2020. Vol. 10, No. 1. P. 72–77.
10. Sekushin N.A., Koroleva M.S. Electronic processes in $Bi_2Cu_{0.5}Mg_{0.5}Nb_2O_9$ with pyrochlore structure // Russ. J. Electrochem. 2018. Vol. 54, No. 9. P. 714–722.
11. Purcell E. Electricity and magnetism. Volume 2. Berkeley physics course. Mcgraw-hill book company, 1965.

References

1. Raschet elektronnykh skhem. Primery i zadachi [Calculation of electronic circuits. Examples and tasks] / G.I. Izyurova, G.V. Korolev, M.A. Terekhov, M.A. Ozhogin, V.N. Serov. Moscow: Vysshaya shkola, 1987. 335 p.
2. Elektrohimičeskij impedans [Electrochemical Impedance] / Z.B. Stoinov, B.M. Grafov, B. Savvova-Stoinova, V.V. Elkin. Moscow: Nauka, 1991. 336 p.
3. Determination of the types of relaxers distribution by extrapolation / A.S. Bogatin, E.V. Andreev, S.A. Kovrigina, Yu.A. Ignatova, V.N. Bogatina, A.L. Bulanova // Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2016. Vol. 80, No. 11. P. 1344–1346.
4. Grimnes S., Martinsen O.G. Bioimpedance and bioelectricity basics. Academic Press, 2000. 360 p.
5. Barsoukov E., Macdonald J.R. Impedance spectroscopy: theory, experiment and application. Wiley-Interscience, 2005. 606 p.

6. *Lasia A.* Electrochemical impedance spectroscopy and its applications. New York: Springer Science+Business Media, 2014. 369 p.
7. *Sekushin N.A.* Matematicheskaja jekvivalentnost' modelej Maksvella i Vojta [Mathematical equivalence of Maxwell and Voigt models] // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2019. No. 1(37). P. 127–134.
8. *Sekushin N.A.* Universal'naja jekvivalentnaja shema jelektrohimicheskoi jachejki [Universal equivalent circuit of electrochemical cell] // Russian J. of Electrochemistry. 2009. Vol. 45, No. 3. P. 350–355.
9. *Sekushin N.A., Koksharova L.A., Zhuk N.A.* Impedance spectroscopy of $CaCu_3Ti_4O_{12}$ // Letters on Materials. 2020. Vol. 10, No. 1. P. 72–77.
10. *Sekushin N.A., Koroleva M.S.* Electronic-ionic processes in $Bi_2Cu_{0,5}Mg_{0,5}Nb_2O_9$ with pyrochlore structure // Russ. J. Electrochem. 2018. Vol. 54, No. 9. P. 714–722.
11. *Purcell E.* Electricity and magnetism. Vol. 2. Berkeley physics course. Mcgraw-hill book company, 1965.

Статья поступила в редакцию 18.10.2021

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ
журнала «Известия Коми НЦ УрО РАН»
серии «Физико-математические науки»

Журнал публикует научно-аналитические обзоры (объем до 1,5 п.л.), оригинальные статьи (до 0,8 п.л.) и краткие сообщения (до 0,3 п.л.) по различным направлениям Физико-математических наук.

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
01.01.03 Математическая физика
01.01.04 Геометрия и топология
01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика
01.02.04 Механика деформируемого твердого тела
01.04.02 Теоретическая физика
01.04.07 Физика конденсированного состояния
05.13.01 Системный анализ, управление и обработка информации

Статьи должны отражать результаты законченных и методически корректно выполненных исследований. Изложение материала должно быть ясным, лаконичным и последовательным.

Направляя статью в наш журнал, Вы соглашаетесь с нашим **Положением о публикационной этике журнала** (приведено на сайте журнала). Решение о публикации принимается редакционной коллегией журнала после рецензирования, с учетом новизны, научной значимости и актуальности представленных материалов. Статьи, отклоненные редакционной коллегией, повторно не рассматриваются.

К публикации также принимаются комментарии к ранее опубликованным работам, информация о научных конференциях, рецензии на книги, хроника событий научной жизни.

Общие требования к оформлению рукописей

Статьи должны сопровождаться направлением того научного учреждения, где была выполнена работа, а также экспертным заключением о возможности опубликования в открытой печати. В случае отсутствия возможности представить экспертное заключение, автор (авторы) статьи могут подать заявление на проведение экспертизы в ФИЦ Коми НЦ УрО РАН. Статья должна быть подписана всеми авторами (автором) с указанием (полностью) фамилии, имени, отчества, места работы, служебного телефона и e-mail. Рекомендуется указать автора, который будет вести переписку с журналом.

В редакцию подается рукопись статьи в двух экземплярах – в печатном и электронном вариантах. При подготовке электронного варианта предпочтительнее использовать издательский пакет **ЛАТЭХ** со стилевым файлом серии (выложен на сайте журнала). Электронная и бумажная версии статьи должны быть идентичны. Электронный вариант рукописи может быть прислан по электронной почте или ответственному редактору серии gromov@ipm.komisc.ru или на адрес редакционной коллегии: journal@frc.komisc.ru. В случае использования текстового редактора Microsoft Word for Windows, текст набирается шрифтом Times New Roman, кегль 14, в одну колонку через 1,5 интервала, на странице форматом А4. По всей статье шрифт должен быть одинаковым. Поля страниц оригинала устанавливаются следующими: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 10 мм, нижнее – 25 мм. Текст статьи набирается без принудительных переносов, разрядки слов не допускаются. В числовых значениях десятичные разряды отделяются запятой (например, 102,5). Для специальных символов, таких как греческие буквы, степень, умножение и т. д., используется стандартная кодировка, которая обеспечивается сочетанием клавиш в программе Word [Вставка | Символ].

Сокращение следует проводить по ключевым буквам слов в русском написании. При первом упоминании терминов, неоднократно используемых в статье, необходимо давать их полное наименование, и сокращение в скобках, в последующем применяя только сокращение. В заголовке статьи и аннотации сокращения не используются.

Все используемые, включая общепринятые, аббревиатуры должны быть расшифрованы при первом упоминании. Не допускаются сокращения, кроме стандартных. Необходимо использовать исключительно единицы СИ. Объем иллюстраций (таблицы, рисунки, фото) в статье не должен превышать 5–7 шт. Количество иллюстраций в кратких сообщениях не должно превышать 2–3 шт.

Первая страница рукописи оформляется следующим образом: в начале статьи указывается индекс Универсальной десятичной классификации (УДК); затем прописными буквами печатается название статьи, которое должно быть максимально кратким, информационно ёмким и не

содержать сокращений; далее следуют инициалы и фамилии авторов. Отдельной строкой дается название учреждения и города (для иностранных авторов – также страны). Далее приводится электронный адрес для переписки. При наличии авторов из нескольких организаций необходимо арабскими цифрами указать их принадлежность. Через один полуторный интервал далее следует краткая аннотация (8–10 строк), в которой кратко описываются основные результаты работы. После аннотации через полуторный интервал приводятся ключевые слова (до 10). Далее идут название статьи, аннотация и ключевые слова на английском языке. Английская аннотация объемом (до 2000 печатных знаков или 1 машинописная страница) для читателей, не владеющих русским языком, должна стать независимым источником информации (пересказом статьи). В тех случаях, когда текст статьи поделен на разделы, автор может подобным образом разделить и текст аннотации. Редколлегия проверяет качество английского текста и вносит необходимые правки. Во избежание разночтений автор в отдельном файле представляет русский текст, по которому был произведен перевод расширенной аннотации.

Таблицы должны быть составлены в соответствии с принятым стандартом, без включения в них легко вычисляемых величин. Таблицы должны быть отформатированы одинаковым образом, пронумерованы в порядке их появления в тексте, иметь тематический заголовок. Каждая таблица предоставляется на отдельной странице. Ширина таблицы должна быть либо 90 мм (на одну колонку), либо 185 мм (на две колонки). Текст в таблице набирается шрифтом Times New Roman, кегль 9–10, через два интервала. Сокращение слов в шапке таблиц не допускается. Пустые графы должны быть заменены условными знаками, которые объясняются в примечании. Единицы измерения даются через запятую: масса, г. Если таблица в статье одна, то порядковый номер не ставится и слово «Таблица» не пишется.

Рисунки представляются пригодными для непосредственного воспроизведения, пояснения к ним выносятся в подрисуночные подписи (за исключением кратких цифровых или буквенных обозначений), отдельные фрагменты обозначаются арабскими цифрами или буквами русского алфавита, которые расшифровываются в подрисуночных подписях. Подрисуночные подписи прилагаются отдельно. Каждый рисунок должен сопровождаться подписью на русском и английском языках (английская подпись должна соответствовать русской).

Графика должна быть подготовлена в форматах EPS, PNG, PDF или JPG и представлена отдельными файлами. Расширения файлов должны соответствовать их типу. Рисунки в тексте упоминаются как „рис.“ с указанием номера (рис.1).

Растровые рисунки должны сохраняться с разрешением не менее 300 dpi (точек на дюйм) для фотографий и не менее 600 dpi (точек на дюйм) для остальных рисунков (черно-белый).

Ширина рисунков должна быть либо 90 мм, либо 185 мм, а высота – не более 240 мм. Шрифт буквенных и цифровых обозначений на рисунках – Times New Roman, кегль – 9–10. Линии должны быть яркими (4–5 pixel). Следует избегать оттеночных заливок серого и черного цветов.

Каждый рисунок должен быть выполнен на отдельной странице. На обратной стороне рисунка простым карандашом или ручкой указывается фамилия первого автора статьи и номер рисунка.

В тексте цитированную литературу следует приводить только цифрами и в квадратных скобках. Список литературы должен быть представлен на отдельной странице и составлен в порядке упоминания источников в тексте в соответствии с примером (см. ниже). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

После Списка литературы размещается References – пристатейный список литературы в транслите (на латинице) и в квадратных скобках перевод названия статьи и журнала на английский язык. References повторяет в полном объеме, с той же нумерацией Список Литературы на русском языке, независимо от того, имеются ли в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются как в Списке литературы, так и в References.

Список литературы и References оформляется по нижеприведенным примерам (следует обратить особое внимание на знаки препинания):

Список литературы:

1. *Иванов И.И.* Название статьи // Название журнала. 2005. Т. 41. № 4. С. 18–26.
2. *Петров П.П.* Название книги. М.: Наука, 2007. Общее число страниц в книге (например, 180 с.) или конкретная страница (например, С. 75).
3. *Казаков К.К.* Название диссертации: Дис. канд. биол. наук / Название института. М.: 2002. 164 с.

References:

1. *Ivanov I.I.* Nazvanie stat'i [Article title] // Nazvanie zhurnala [Journal title]. 2005. T. 41. No. 4. S. 18–26.
2. *Petrov P.P.* Nazvanie knigi [Book title]. M.: Nauka, 2007. Общее число страниц в книге (например, 180 p.) или конкретная страница (например, p. 75).
3. *Kazakov K.K.* Kazakov K.K. Nazvanie dissertatsii [Dissertation title]: Dis. kand. biol. nauk/ Nazvanie instituta. M.: 2002. 164 p.

При наличии большого количества авторов в списке литературы указываются все.

Для транслитерации списка литературы удобно использовать интернет-ресурс <http://translit-online.ru/>.

При несоблюдении этих перечисленных правил, статья не рассматривается редакционной коллегией, а возвращается авторам на доработку.

Редакция принимает для опубликования статьи на английском языке (оригинальные, либо переведенные на английский язык профессиональным переводчиком). Такие рукописи следует сопровождать аннотацией, подписями к рисункам и названиям таблиц на русском языке.

Все статьи проходят рецензирование и, в случае необходимости, возвращаются авторам на доработку. Рецензирование статьи закрытое. Возможно повторное и параллельное рецензирование. Редакционная коллегия оставляет за собой право редактирования статьи. Статьи публикуются в порядке очередности, но при этом учитывается их тематика и актуальность. Редакционная коллегия сохраняет первоначальную дату поступления статьи, а, следовательно, и очередность публикации, при условии возвращения ее в редакционную коллегию не позднее, чем через 1 месяц. Корректуру принятой в печать статьи редакционная коллегия иногородним авторам рассылает по e-mail. Автор в течение 5–7 дней должен вернуть ее в редакционную коллегию или передать правку по указанному телефону или электронному адресу (e-mail) редакционной коллегии.

Материалы, опубликованные в журнале «Известия Коми НЦ УрО РАН» серии «Физико-математические науки», размещаются в РИНЦ, а также на сайте ФМИ Коми НЦ УрО РАН <http://www.ipm.komisc.ru>

Статьям, опубликованным в журнале «Известия Коми НЦ УрО РАН» серии «Физико-математические науки», присваивается DOI.

В случае отклонения материала рукописи, приложения и диски не возвращаются.

Рукописи статей простым письмом направлять по адресу:

Ответственному редактору серии «Физико-математические науки»

журнала «Известия Коми НЦ УрО РАН»

Громову Николаю Алексеевичу

167982, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, д. 24,

E-mail: gromov@ipm.komisc.ru

Научный журнал

ИЗВЕСТИЯ
Коми научного центра
Уральского отделения РАН
Серия «Физико-математические науки»

№ 6(52)

Номер подготовили:

Ответственный редактор серии д.ф.-м.н. Н.А. Громов
Ответственный секретарь серии к.ф.-м.н. Д.А. Тимушев
Редактор О.А. Гросу
Корректурa английского перевода Т.А. Искакова

Лицензия № 0047 от 10.01.1999.
Подписано в печать 27.12.2021.
Формат бумаги 60x84^{1/8}.
Усл.-печ.л. 11,2. Уч.-изд.л. 11. Тираж 300. Заказ № 34.
Свободная цена.

Подготовлено к изданию редакцией журнала «Известия Коми НЦ УрО РАН».
167982, ГСП, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24.
Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФИЦ Коми НЦ УрО РАН.
167982, ГСП, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Первомайская, 48.

Адрес учредителя, издателя: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр «Коми научный центр УрО РАН».
167982, ГСП, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24.