УДК 539.1
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-53-58

Е.М. ОВСИЮК, А.Д. КОРАЛЬКОВ, А.П. САФРОНОВ

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 И ДВУМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина, г. Мозырь, Беларусь

e.ovsiyuk@mail.ru
artemkoralkov@gmail.com
safronov_mspu@mail.ru

E.M. OVSIYUK, A.D. KORAL'KOV, A.P. SAFRONOV

A SPIN 1/2 PARTICLE AND TWO MASS PARAMETERS IN AN EXTERNAL COULOMB FIELD

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

Аннотация

Обобщенное релятивистское уравнение для фермиона с двумя массовыми параметрами исследовано в случае присутствия внешнего кулоновского поля. После разделения переменных задача сведена к системе из восьми радиальных уравнений первого порядка. С учетом диагонализации оператора пространственного отражения выведены две независимые системы по четыре уравнения. На большом расстоянии от центра они принимают вид уравнений для обычных частиц с массами M_1 и M_2. В нерелятивистском приближении получены две системы зацепляющихся уравнений второго порядка для двух функций, откуда найдены соответствующие уравнения четвертого порядка для отдельных функций. Для этих уравнений построены решения фробениусовского типа, в них входят степенные ряды с 10-членными рекуррентными соотношениями. Два из четырех решений пригодны для описания связанных состояний. В качестве правила квантования используется условие, выделяющее так называемые трансцендентные решения Фробениуса. Получены две аналитические формулы, каждая из которых похожа на формулу для обычного спектра атома водорода, согласно теории Паули, они зависят от массовых параметров M_1 и M_2.

Ключевые слова:
частица со спином 1/2, кулоновское поле, нерелятивистское приближение, решения Фробениуса

Abstract

A generalized relativistic wave equation for a fermion with two mass parameters is studied in the presence of an external Coulomb field. After separating the variables, the problem is reduced to a system of eight differential equations of the first order. Taking into account the diagonalization of the spatial reflection operator, we derive two independent systems of four equations, referring to states of opposite parity. At a large distance from the center, they take the form of two subsystems for two ordinary Dirac particles in external Coulomb field, with masses M_1 and M_2 respectively. To simplify the problem, we perform transition to the nonrelativistic description of the system. In this way, we derive two systems of linked second order equations, referring to states with different parities, from which the corresponding fourth order differential equations for separate functions are found. Solutions of the Frobenius type are constructed, they involve power series with 10-term recurrent relations. Two of the four solutions are appropriate for describing bound states. As a quantization rule, we apply the known transcendency condition, in this way we obtained two analytical formulas for energy spectra. They are similar to nonrelativistic spectra for ordinary spin 1/2 particle, but being governed by masses M_1 and M_2.

Keywords:
spin 1/2 particle, Coulomb field, nonrelativistic approximation, Frobenius solutions

Введение

В работах [1–4] было предложено релятивистское уравнение для частицы со спином 1/2 и двумя массовыми параметрами. Показано, что в отсутствие внешних полей такое обобщенное уравнение для фермиона распадается на два обычных уравнения Дирака. В присутствии внешних электромагнитных полей происходит смешивание двух биспинорных компонент. Были построены точные решения такого уравнения в присутствии однородного магнитного поля.

Система уравнений для двух биспиноров $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ в тетрадном формализме имеет структуру

$$\{\gamma^\alpha[i(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha) - eA_\alpha] - M_1 +$$
$$+ b\Lambda_1\Sigma(x)\}\Psi_1(x) - a\Lambda_1\Sigma(x)\Psi_2(x) = 0,$$
$$\{\gamma^\alpha[i(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha) - eA_\alpha] - M_2 -$$
$$- a\Lambda_2\Sigma(x)\}\Psi_2(x) + b\Lambda_2\Sigma(x)\Psi_1(x) = 0; \qquad (1)$$
$$\gamma^\alpha(x) = e^\alpha_{(b)}\gamma^b, \ \Sigma(x) = -ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x),$$
$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \frac{\gamma^\alpha(x)\gamma^\beta(x) - \gamma^\beta(x)\gamma^\alpha(x)}{4}.$$

Используются следующие параметры:

$$M_1 = \frac{M}{(1+\cos\gamma)/2},$$
$$M_1 = \frac{M}{(1-\cos\gamma)/2}, \ \gamma \in [0, \pi/2],$$
$$a = \frac{1}{2}\frac{1}{M}\left(4 - 3\sqrt{1+(1/3)\sin^2\gamma} - \cos\gamma\right),$$
$$b = \frac{1}{2}\frac{1}{M}\left(4 - 3\sqrt{1+(1/3)\sin^2\gamma} + \cos\gamma\right),$$
$$\Lambda_1 = \left(1 + \sqrt{1+(1/3)\sin^2\gamma}\right) \times \times \frac{\cos\gamma - \sqrt{1+(1/3)\sin^2\gamma}}{\cos\gamma(1+\cos\gamma)},$$
$$\Lambda_2 = \left(1 + \sqrt{1+(1/3)\sin^2\gamma}\right) \times \times \frac{\cos\gamma + \sqrt{1+(1/3)\sin^2\gamma}}{\cos\gamma(1-\cos\gamma)}.$$

Параметр M с размерностью обратной длины является произвольным.

1. Разделение переменных

Рассмотрим обобщенное уравнение в кулоновском поле:

$$A_t = -\frac{e}{r}, \ F_{tr} = -\partial_r A_0 = -\frac{e}{r^2},$$
$$\Sigma(x) = i\frac{e^2}{r^2}\gamma^0\gamma^3,$$

применяем сокращающие запись обозначения

$$a\Lambda_1 e^2 = \alpha_1, \ a\Lambda_2 e^2 = \alpha_2,$$
$$b\Lambda_1 e^2 = \beta_1, \ b\Lambda_2 e^2 = \beta_2.$$

Система уравнений (1) принимает вид

$$\left[\gamma^0\left(i\partial_t - \frac{\alpha}{r}\right) + i\gamma^3\partial_r + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta\phi} - M_1 + \right.$$
$$\left. + i\frac{\beta_1}{r^2}\gamma^0\gamma^3\right]\Psi_1 - i\frac{\alpha_1}{r^2}\gamma^0\gamma^3\Psi_2 = 0,$$
$$\left[\gamma^0\left(i\partial_t - \frac{\alpha}{r}\right) + i\gamma^3\partial_r + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta\phi} - M_2 - \right.$$
$$\left. - i\frac{\alpha_2}{r^2}\gamma^0\gamma^3\right]\Psi_2 + i\frac{\beta_2}{r^2}\gamma^0\gamma^3\Psi_1 = 0,$$

где выделен зависящий от угловых переменных оператор

$$\Sigma_{\theta\phi} = i\gamma^1\partial_\theta + \gamma^2\frac{i\partial_\phi + i\sigma^{12}\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Дальше будем учитывать явные выражения для четырех параметров:

$$\alpha_1 = -e^2\frac{(1-\cos\gamma)}{3M\cos\gamma(1+\cos\gamma)} \times \times \frac{(-\cos\gamma\sqrt{12-3\cos^2\gamma} + \cos^2\gamma + 2)}{3M\cos\gamma(1+\cos\gamma)},$$
$$\alpha_2 = e^2\frac{2}{3}\frac{\sin^2\gamma}{M\cos\gamma}, \ \beta_1 = -e^2\frac{2}{3}\frac{\sin^2\gamma}{M\cos\gamma} < 0,$$
$$\beta_2 = -\frac{e^2(1+\cos\gamma)}{3M\cos\gamma(\cos\gamma - 1)} \times \times \frac{(\cos\gamma\sqrt{12-3\cos^2\gamma} + \cos^2\gamma + 2)}{3M\cos\gamma(\cos\gamma - 1)} > 0.$$

Отмечаем, что выполняются следующие соотношения между параметрами

$$\alpha_2 = -\beta_1, \ \alpha_1\beta_2 = -\beta_1^2. \qquad (2)$$

Подстановка для волновой функции с квантовыми числами ϵ, j, m имеет вид

$$\Psi_1(x) = \frac{e^{-i\epsilon t}}{r}\begin{vmatrix} f_1(r)D_{-1/2} \\ f_2(r)D_{+1/2} \\ f_3(r)D_{-1/2} \\ f_4(r)D_{+1/2} \end{vmatrix},$$
$$\Psi_2(x) = \frac{e^{-i\epsilon t}}{r}\begin{vmatrix} g_1(r)D_{-1/2} \\ g_2(r)D_{+1/2} \\ g_3(r)D_{-1/2} \\ g_4(r)D_{+1/2} \end{vmatrix}.$$

Используется аппарат D-функций Вигнера. С учетом матриц Дирака в спинорном представлении получаем восемь радиальных уравнений:

$$\left(\epsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_3 - i\frac{d}{dr}f_3 - i\frac{\nu}{r}f_4 -$$
$$- M_1 f_1 + \frac{i\beta_1}{r^2}f_1 - \frac{i\alpha_1}{r^2}g_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)f_4+i\frac{d}{dr}f_4+i\frac{\nu}{r}f_3-\\
&\qquad -M_1f_2-\frac{i\beta_1}{r^2}f_2+\frac{i\alpha_1}{r^2}g_2=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)f_1+i\frac{d}{dr}f_1+i\frac{\nu}{r}f_2-\\
&\qquad -M_1\delta f_2-\frac{i\beta_1}{r^2}f_3+\frac{i\alpha_1}{r^2}g_3=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)f_2-i\frac{d}{dr}f_2-i\frac{\nu}{r}f_1-\\
&\qquad -M_1f_4+\frac{i\beta_1}{r^2}f_4-\frac{i\alpha_1}{r^2}g_4=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)g_3-i\frac{d}{dr}g_3-i\frac{\nu}{r}g_4-\\
&\qquad -M_2g_1-\frac{i\alpha_2}{r^2}g_1+\frac{i\beta_2}{r^2}f_1=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)g_4+i\frac{d}{dr}g_4+i\frac{\nu}{r}g_3-\\
&\qquad -M_2g_2+\frac{i\alpha_2}{r^2}g_2-\frac{i\beta_2}{r^2}f_2=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)g_1+i\frac{d}{dr}g_1+i\frac{\nu}{r}g_2-\\
&\qquad -M_2g_3+\frac{i\alpha_2}{r^2}g_3-\frac{i\beta_2}{r^2}\delta f_2=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)g_2-i\frac{d}{dr}g_2-i\frac{\nu}{r}g_1-\\
&\qquad -M_2g_4-\frac{i\alpha_2}{r^2}g_4+\frac{i\beta_2}{r^2}f_4=0, \qquad (3)
\end{aligned}$$

где $\nu = j+1/2$; $j = 1/2, 3/2, \ldots$ Система (3) допускает наложение условий, вытекающих из требования диагонализации оператора пространственной четности:

$$f_3=\delta f_2,\ f_4=\delta f_1,\ \delta=\pm1,$$
$$g_3=\delta g_2,\ g_4=\delta g_1,\ \delta=\pm1;$$

$$\begin{aligned}
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)f_1+i\frac{d}{dr}f_1+i\frac{\nu}{r}f_2-\\
&\qquad -M_1\delta f_2-\frac{i\beta_1}{r^2}f_2+\frac{i\alpha_1}{r^2}\delta g_2=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)f_2-i\frac{d}{dr}f_2-i\frac{\nu}{r}f_1-\\
&\qquad -M_1\delta f_1+\frac{i\beta_1}{r^2}\delta f_1-\frac{i\alpha_1}{r^2}\delta g_1=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)g_1+i\frac{d}{dr}g_1+i\frac{\nu}{r}g_2-\\
&\qquad -M_2\delta g_2+\frac{i\alpha_2}{r^2}\delta g_2-\frac{i\beta_2}{r^2}\delta f_2=0,\\
&\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}\Big)g_2-i\frac{d}{dr}g_2-i\frac{\nu}{r}g_1-\\
&\qquad -M_2\delta g_1-\frac{i\alpha_2}{r^2}\delta g_1+\frac{i\beta_2}{r^2}\delta f_1=0.
\end{aligned}$$

Вместо f_1 и f_2 используем комбинации этих функций:

$$f=(f_2+f_1),\ F=i(f_2-f_1);$$
$$g=(g_2+g_1),\ G=i(g_2-g_1);$$

в результате получаем

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}+\delta\frac{\beta_1}{r^2}\Big)F-\\
&\qquad -\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}-\delta M_1\Big)f-\delta\frac{\alpha_1}{r^2}G=0,\\
&\Big(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}-\delta\frac{\beta_1}{r^2}\Big)f+\\
&\qquad +\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}+\delta M_1\Big)F+\delta\frac{\alpha_1}{r^2}g=0,\\
&\Big(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}-\delta\frac{\alpha_2}{r^2}\Big)G-\\
&\qquad -\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}-\delta M_2\Big)g+\delta\frac{\beta_2}{r^2}F=0,\\
&\Big(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}+\delta\frac{\alpha_2}{r^2}\Big)g+\\
&\qquad +\Big(\epsilon+\frac{\alpha}{r}+\delta M_2\Big)G-\delta\frac{\beta_2}{r^2}f=0. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Удобно рассматривать состояния с разной четностью по отдельности:

$\delta=+1,$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}+\frac{\beta_1}{r^2}\right)F-\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}-M_1\right)f-\frac{\alpha_1}{r^2}G=0,\\
&\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}-\frac{\beta_1}{r^2}\right)f+\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}+M_1\right)F+\frac{\alpha_1}{r^2}g=0,\\
&\left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}-\frac{\alpha_2}{r^2}\right)G-\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}-M_2\right)g+\frac{\beta_2}{r^2}F=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}+\frac{\alpha_2}{r^2}\right)g+\\
&\qquad +\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}+M_2\right)G-\frac{\beta_2}{r^2}f=0; \qquad (5)
\end{aligned}$$

$\delta=-1,$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}-\frac{\beta_1}{r^2}\right)F-\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}+M_1\right)f+\frac{\alpha_1}{r^2}G=0,\\
&\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}+\frac{\beta_1}{r^2}\right)f+\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}-M_1\right)F-\frac{\alpha_1}{r^2}g=0,\\
&\left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}+\frac{\alpha_2}{r^2}\right)G-\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}+M_2\right)g-\frac{\beta_2}{r^2}F=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}-\frac{\alpha_2}{r^2}\right)g+\\
&\qquad +\left(\epsilon+\frac{\alpha}{r}-M_2\right)G+\frac{\beta_2}{r^2}f=0. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Эти две системы уравнений связаны формальным преобразованием

$$M_1, M_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \Rightarrow$$
$$-M_1, -M_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\beta_1, -\beta_2.$$

Если рассматривать эти уравнения при достаточно больших r, то пренебрегая слагаемыми, содержащими r^{-2}, приходим к двум несвязанным подсистемам уравнений для двух обычных дираковских частиц с массами M_1 и M_2 во внешнем кулоновском поле. Это означает, что достаточно далеко от центра $r = 0$ будем наблюдать две несвязанные между собой частицы с различающимися массами.

2. Нерелятивистское приближение

Чтобы упростить задачу, перейдем к нерелятивистскому приближению. Исходим из уравнений (5), (6). Вводим две нерелятивистские энергии E_1 и $E_2 : \epsilon = M_1 + E_1$, $\epsilon = M_2 + E_2$; при этом уравнения примут вид

$\delta = +1$,

$$-\Big(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\Big)F + \Big(E_1 + \frac{\alpha}{r}\Big)f + \frac{\alpha_1}{r^2}G = 0,$$

$$-\Big(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\Big)f - \Big(2M_1 + E_1 + \frac{\alpha}{r}\Big)F - \frac{\alpha_1}{r^2}g = 0,$$

$$-\Big(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\Big)G + \Big(E_2 + \frac{\alpha}{r}\Big)g - \frac{\beta_2}{r^2}F = 0,$$

$$-\Big(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\Big)g - \Big(2M_2 + E_2 + \frac{\alpha}{r}\Big)G + \frac{\beta_2}{r^2}f = 0;$$

$\delta = -1$,

$$-\Big(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\Big)F + \Big(2M_1 + E_1 + \frac{\alpha}{r}\Big)f - \frac{\alpha_1}{r^2}G = 0,$$

$$-\Big(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\Big)f - \Big(E_1 + \frac{\alpha}{r}\Big)F + \frac{\alpha_1}{r^2}g = 0,$$

$$-\Big(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\Big)G + \Big(2M_2 + E_2 + \frac{\alpha}{r}\Big)g + \frac{\beta_2}{r^2}F = 0,$$

$$-\Big(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\Big)g - \Big(E_2 + \frac{\alpha}{r}\Big)G - \frac{\beta_2}{r^2}f = 0.$$

Рассмотрим сначала уравнения при $\delta = +1$. Пренебрежем энергией в сравнении с массой покоя

$$2M_1 + E_1 + \frac{\alpha}{r} \approx 2M_1 \; 2M_2 + E_2 + \frac{\alpha}{r} \approx 2M_2,$$

тогда получим

$\delta = +1$,

$$-\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\beta_1}{r^2}\right)F + \left(E_1 + \frac{\alpha}{r}\right)f + \frac{\alpha_1}{r^2}G = 0,$$

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\beta_1}{r^2}\right)f - 2M_1F - \frac{\alpha_1}{r^2}g = 0,$$

$$-\left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}\right)G + \left(E_2 + \frac{\alpha}{r}\right)g - \frac{\beta_2}{r^2}F = 0,$$

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}\right)g - 2M_2G + \frac{\beta_2}{r^2}f = 0.$$

Выразим из второго и четвертого уравнений функции F, G и подставим в первое и третье уравнения. В результате получаем два уравнения второго порядка

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \left[\frac{2M_1\alpha}{r} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} + \frac{2\beta_1(\nu+1)}{r^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{\beta_1^2}{r^4} + \frac{M_1\alpha_1\beta_2}{M_2r^4} + 2M_1E_1\right]f +$$
$$+ \left(\frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{\alpha_1M_1}{r^2M_2}\right)\frac{dg}{dr} + \left(\frac{\nu\alpha_1}{r^3} - \frac{2\alpha_1}{r^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{M_1\alpha_1\nu}{M_2r^3} + \frac{\alpha_1\beta_1}{r^4} - \frac{\alpha_1\alpha_2M_1}{M_2r^4}\right)g = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{d^2g}{dr^2} + \left[\frac{2M_1\alpha}{r} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} - \frac{2\alpha_2(\nu+1)}{r^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha_2^2}{r^4} + \frac{M_2\alpha_1\beta_2}{M_1r^4} + 2M_2E_2\right]g +$$
$$+ \left(-\frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_2M_2}{r^2M_1}\right)\frac{df}{dr} + \left(\frac{\nu\beta_2}{r^3} + \frac{2\beta_2}{r^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{M_2\beta_2\nu}{M_1r^3} + \frac{\alpha_2\beta_2}{r^4} - \frac{\beta_1\beta_2M_2}{M_1r^4}\right)f = 0. \qquad (8)$$

Эти уравнения симметричны относительно замен (учитываем (2))

$$f \Rightarrow g,\; \alpha_1 \Rightarrow -\beta_2,\; \alpha_2 \Rightarrow -\beta_1,\; M_1 \Rightarrow M_2;$$

следовательно, достаточно исследовать уравнение четвертого порядка только для одной функции. Приведем общую структуру уравнений (7) и (8):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^4}\right)f +$$
$$+ \left(\frac{c}{r^2}\frac{d}{dr} + \frac{c_3}{r^3} + \frac{c_4}{r^4}\right)g = 0,$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + B + \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_3}{r^3} + \frac{B_4}{r^4}\right)f +$$
$$+ \left(\frac{C}{r^2}\frac{d}{dr} + \frac{C_3}{r^3} + \frac{C_4}{r^4}\right)g = 0.$$

Для случая с противоположной четностью $(\delta = -1)$ получаем уравнения

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \left[\frac{2M_1\alpha}{r} + \frac{\nu(-\nu+1)}{r^2} + \frac{2\beta_1(-\nu+1)}{r^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{\beta_1^2}{r^4} + \frac{M_1\alpha_1\beta_2}{M_2r^4} + 2M_1E_1\right]F +$$
$$+ \left(\frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{\alpha_1M_1}{r^2M_2}\right)\frac{dG}{dr} + \left(\frac{\nu\alpha_1}{r^3} - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{M_1\alpha_1\nu}{M_2r^3} + \frac{\alpha_1\beta_1}{r^4} - \frac{\alpha_1\alpha_2M_1}{M_2r^4}\right)G = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \left[\frac{2M_2\alpha}{r} - \frac{\nu(\nu-1)}{r^2} + \frac{2\alpha_2(\nu-1)}{r^3} - \right.$$

$$-\frac{\alpha_2^2}{r^4}+\frac{M_2\alpha_1\beta_2}{M_1r^4}+2M_2E_2\Big]G+$$
$$+\left(-\frac{\beta_2}{r^2}+\frac{\beta_2M_2}{r^2M_1}\right)\frac{dF}{dr}+\left(-\frac{\nu\beta_2}{r^3}+\frac{2\beta_2}{r^3}-\right.$$
$$\left.-\frac{M_2\beta_2\nu}{M_1r^3}+\frac{\alpha_2\beta_2}{r^4}-\frac{\beta_1\beta_2M_2}{M_1r^4}\right)F=0. \qquad (10)$$

Уравнения (9),(10) отличаются от (7),(8) только формальными заменами

$$f\Rightarrow F,\ g\Rightarrow G,\ \nu\Rightarrow-\nu. \qquad (11)$$

Приведем общую структуру уравнения четвертого порядка для функции g:

$$\frac{d^4g}{dr^4}+\left(\frac{m_1}{r}+\frac{m_2r^3+m_2r^2+m_4r+m_5}{P}\right)\frac{d^3g}{dr^3}+$$
$$+\Big(n_0+\frac{n_1}{r}+\frac{n_2}{r^2}+\frac{n_3}{r^3}+\frac{n_4}{r^4}+$$
$$+\frac{n_5r^3+n_6r^2+n_7r+n_8}{P}\Big)\frac{d^2g}{dr^2}+$$
$$+\Big(\frac{p_1}{r}+\frac{p_2}{r^2}+\frac{p_3}{r^3}+\frac{p_4}{r^4}+$$
$$+\frac{p_5r^3+p_6r^2+p_7r+p_8}{P}\Big)\frac{dg}{dr}+$$
$$+\Big(q_0+\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{r^2}\frac{q_3}{r^3}+\frac{q_4}{r^4}+\frac{q_5}{r^5}+\frac{q_6}{r^6}+\frac{q_7}{r^7}+\frac{q_8}{r^8}+$$
$$+\frac{q_9r^3+q_{10}r^2+q_{11}r+q_{12}}{P}\Big)g=0,$$

где P обозначает полином четвертого порядка:

$$P=2E_1M_2(M_1-M_2)^2r^4+2M_2\alpha(M_1-M_2)^2r^3+$$
$$+2M_2(\nu+1)[(2\nu+1)M_2+M_1]r^2+$$
$$+2M_2(\nu+1)[(-3\beta_1+\alpha_2)M_2+M_1(\beta_1+\alpha_2)]r+$$
$$+[\beta_2\alpha_1+2\beta_1(-\alpha_2+\beta_1)]M_2^2-$$
$$-M_2M_1\left(-\alpha_2^2+\beta_1^2+2\beta_2\alpha_1\right)+M_1^2\alpha_1\beta_2.$$

Выполнив подстановку $g=e^{Br}\overline{g}(r)$, находим четыре возможных значения для B :

$$B=-\sqrt{-2M_1E_1},\ +\sqrt{-2M_1E_1},$$
$$-\sqrt{-2M_2E_2},\ +\sqrt{-2M_2E_2}. \qquad (12)$$

Далее выполним подстановку $\overline{g}=r^Ae^{C/r}G(r)$, для определения параметра C получаем уравнение четвертого порядка $C^4+(2\alpha_1\beta_2-\beta_1^2-\alpha_2^2)C^2+(-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2=0$; отсюда, учитывая соотношение (2), получаем

$$C^4-4C^2\beta_1^2=0\Rightarrow C=0,0,\pm2\beta_1.$$

Возможны следующие варианты:

$$I.\quad C=+2\beta_1<0,\ A=\nu+2>0; \qquad (13)$$
$$II.\quad C=-2\beta_1>0,\ A=-\nu<0; \qquad (14)$$
$$III,IV.\quad C+0,\ A=-\nu,\ \nu+1. \qquad (15)$$

Будем следить за случаями, пригодными для описания связанных состояний: т. е. I и IV при положительных A. Дальше приходим к уравнению со сложной структурой, его решения строятся в виде степенных рядов $G(r)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_kr^k$ с 10-членными рекуррентными соотношениями

$$Q_{k-9}d_{k-9}+Q_{k-8}d_{k-8}+\ldots+Q_kd_k=0. \qquad (16)$$

Условие получения трансцендентных решений

$$Q_{k-9}=0,\Rightarrow N_{10}(k-9)+L_9=0,\ k-9=n\geq0,$$

при $A=\nu+2,\ B=-\sqrt{-2M_1E_1}$ имеет вид

$$8[(-5+\nu+k)\sqrt{-2E_1M_1}-\alpha M_1]\cdot$$
$$(M_1-M_2)^2M_2(-E_2M_2+E_1M_1)E_1=0,$$

откуда следует

$$E_1=-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2M_1}{[k-7+(\nu+2)]^2}. \qquad (17)$$

Пусть $B=-\sqrt{-2M_2E_2}$, тогда получаем

$$E_2=-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2M_2}{[k-9+(\nu+2)]^2}. \qquad (18)$$

Выбрав параметры A,C, согласно (15), и проделав аналогичные вычисления, получим еще два выражения для спектров:

$$A=\nu+1,\ B=-\sqrt{-2M_1E_1},$$
$$E_1=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2M_1}{[k-6+(\nu+1)]^2}, \qquad (19)$$

$$A=\nu+1,\ B=-\sqrt{-2M_2E_2},$$
$$E_2=\frac{1}{2}\frac{M_2\alpha^2}{[k-8+(\nu+1)]^2}. \qquad (20)$$

С точностью до переобозначения параметров имеем только два разных спектра.

Для состояний с противоположной четностью получаем спектры (используем формальные замены $\nu+2\Rightarrow\nu,\ \nu+1\Rightarrow\nu$)

$$A=\nu,\ B=-\sqrt{-2M_1E_1},\ E_1=-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2M_1}{[k-7+\nu]^2},$$
$$A=\nu,\ B=-\sqrt{-2M_2E_2},\ E_2=-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2M_2}{[k-9+\nu]^2},$$
$$A=\nu,\ B=-\sqrt{-2M_1E_1},\ E_1=-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2M_1}{[k-6+\nu]^2},$$
$$A=\nu,\ B=-\sqrt{-2M_2E_2},\ E_2=-\frac{1}{2}\frac{M_2\alpha^2}{[k-8+\nu]^2}.$$

Здесь также с точностью до переобозначения параметров имеем два разных спектра; причем они совпадают с предыдущими.

Остановимся на структуре нерелятивистских волновых функций. В нерелятивистском описании имеем следующие приближенные равенства:

$$\delta = +1,\ f_1 = f + iF \approx f,\ f_2 = f - iF \approx f,$$
$$g_1 = g + iG \approx g,\ g_2 = g - iG \approx g; \quad (21)$$

$$\delta = -1,\ f_1 = f + iF \approx iF,\ f_2 = f - iF \approx -iF,$$
$$g_1 = g + iG \approx iG,\ g_2 = g - iG \approx -iG. \quad (22)$$

Соответственно, нерелятивистские 2-компонентные волновые функции имеют вид

$$\delta = +1,\ \Psi_{\delta=+1} = \begin{vmatrix} f(r)D_{-1/2} \\ f(r)D_{+1/2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g(r)D_{-1/2} \\ g(r)D_{+1/2} \end{vmatrix};$$

$$\delta = -1,\ \Psi_{\delta=+1} = i\begin{vmatrix} F(r)D_{-1/2} \\ -F(r)D_{+1/2} \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} G(r)D_{-1/2} \\ G(r)D_{+1/2} \end{vmatrix}.$$

Заключение

Обобщенное уравнение для фермиона с двумя массовыми параметрами исследовано в случае присутствия внешнего кулоновского поля. Показано, что вдали от кулоновского центра система представляется как простая совокупность двух несвязанных частиц дираковского типа с фиксированными разными массами. Однако при рассмотрении системы во всей области изменения радиальной переменной две компоненты сложной системы связаны объединенной системой уравнений и не могут рассматриваться как независимые. Удивительным представляется тот факт, что анализ сложной системы радиальных уравнений во всей области изменения переменной, тем не менее, приводит в нерелятивистском описании к тем же двум выражениям для энергий, как если бы две компоненты с разными массами были независимыми. Установление этого спектра основывается на использовании условия трансцендентности для решений фробениусового типа результирующих уравнений четвертого порядка. По-видимому, большего понимания поведения частицы со спином $1/2$ и двумя массовыми параметрами можно достичь, если построить решения радиальных уравнений в релятивистском случае, не используя перехода к нерелятивистскому приближению.

Работа выполнена при финансовой поддержке МО РБ по договору № 1410/2021.

Литература–References

1. Spin 1/2 particle with two mass states, interaction with external fields / *V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. Vol. 20, No. 4. P. 404–423.
2. Фермион с внутренним спектром масс во внешних полях / *В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков* // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2018. № 1(33). С. 81–88.
Fermion s vnutrennim spektrom mass vo vneshnikh polyakh [Fermion with the internal mass spectrum in external fields] / *V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov* // Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS. 2018. No. 1(33). P. 81–88.
3. Spin 1/2 particle with two masses in magnetic field / *E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov* // Applied Sciences. 2018. Vol. 20. P. 148–166.
4. Spin 1/2 particle with two masses in external magnetic field / *E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov, V.V. Kisel, N.V. Samsonenko* // J. Mech. Cont. and Math. Sci. Special Issue. 2019. No. 1. P. 651–660.

Статья поступила в редакцию 5.04.2021.