УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2021-6-59-65

А.В. ИВАШКЕВИЧ

СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2, БЕЗМАССОВЫЙ СЛУЧАЙ, КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ

Институт физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, г. Минск, Беларусь

ivashkevich.alina@yandex.by

Аннотация

Исследуется структура решений типа плоских волн для релятивистской частицы со спином 3/2, описываемой 16-компонентным вектор-биспинором. В безмассовом случае применяются два представления уравнения: одно в базисе Рариты–Швингера; второе строится на основе применения дополнительного преобразования и содержит тензор Леви–Чивита. Во втором представлении для безмассового случая очевидным образом строятся калибровочные решения в виде градиента от произвольного биспинора. Показано, что общее решение безмассового уравнения содержит шесть линейно независимых решений. В явном виде установлены четыре решения, которые могут быть отождествлены с калибровочными и поэтому отброшены как нефизические. Процедура исключения калибровочных компонент проведена в обоих представлениях безмассового уравнения.

Ключевые слова:
спин 3/2, базис Рариты–Швингера, плоские волны, безмассовая частица, калибровочная симметрия

A.V. IVASHKEVICH

THE STRUCTURE OF THE PLANE WAVES FOR A SPIN 3/2 PARTICLE, MASSLESS CASE, GAUGE SYMMETRY

B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Abstract

The structure of plane wave solutions for a relativistic spin 3/2 particle described by a 16-component vector-bispinor is studied. In the massless case, two representations of the equation are used: in the Rarita–Schwinger basis and in a special second basis in which the wave equation contains the Levi–Civita tensor. In this second basis, the existence of trivial solutions in the form of a gradient on arbitrary bispinor becomes obvious. It is shown that the general solution of the massless equation consists of 6 linearly independent solutions. It is explicitly proved that four of them can be identified with gauge solutions and, therefore, can be removed as non-physical. The exclusion procedure of gauge components is carried out in both representations of the massless equation.

Keywords:
spin 3/2, Rarita–Schwinger basis, plane waves, massless particle, gauge symmetry

Введение

После работ Паули–Фирца [1, 2] и Рариты–Швингера [3] в физической литературе всегда присутствовал интерес к теории частиц с высшими спинами, в том числе и к частице со спином 3/2 [3–20]. Для описания частицы со спином 3/2 требуется 16-компонентная волновая функция с трансформационными свойствами вектор-биспинора относительно группы Лоренца. В литературе наибольшее внимание привлекло существование аномальных решений для массивной частицы в присутствии внешних полей, которым сопоставляется скорость частицы большая, чем скорость света. Отдельный интерес представляет случай безмассовой частицы со спином 3/2. Как показали Паули и Фирц [1], здесь существует специфическая калибровочная симметрия, выражающаяся в том, что 4-градиент от произвольной биспинорной функции дает решения безмассового волнового уравнения, т. е. в безмассовом случае среди множества решений волнового уравнения всегда присутствуют четыре калибровочные решения, которые являются физически ненаблюдаемыми, поскольку, например, не дают вклада в тензор энергии-импульса частицы. В данной работе мы проследим за степенями свободы безмассовой частицы со спином 3/2 на основе построения в явном виде решений типа плоских волн, и найдем решения, которые не содержат калибровочных компонент.

1. Безмассовая частица

Система уравнений первого порядка для безмассовой частицы в базисе Рариты–Швингера имеет вид [16]

$$\partial_a \gamma^a \Psi_k - \frac{1}{3}\partial_k \gamma' \Psi_l - \frac{1}{3}\gamma_k \partial_a \Psi^a +$$

$$+\frac{1}{3}\gamma_k(\gamma^a\partial_a)\gamma^l\Psi_l = 0, \quad \partial_a(\Gamma^a)^l_k \Psi_l = 0, \qquad (1)$$

где действующие в 16-мерном пространстве волновой функции матрицы задаются соотношением

$$(\Gamma^a)^l_k = \gamma^a \delta^l_k - \frac{1}{3}\gamma^l \delta^a_k - \frac{1}{3}\gamma_k g^{al} + \frac{1}{3}\gamma_k \gamma^a \gamma^l, \qquad (2)$$

биспинорные индексы у матрицы Γ^a опускаем. Ниже будем использовать известные свойства матриц Дирака [17]:

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab}, \ \gamma^a\gamma_a = 4,$$

$$\gamma^a\gamma^b\gamma^d = \gamma^a g^{bd} - \gamma^b g^{ad} + \gamma^d g^{ab} - i\gamma^5 \epsilon^{abdc}\gamma_c; \qquad (3)$$

в спинорном базисе имеем

$$\gamma^5 = +i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{0123} = +1.$$

Если воспользоваться формулой для произведения трех матриц Дирака, то для матриц $(\Gamma^a)^l_k$ можно получить другое представление:

$$(\Gamma^a)^l_k = \frac{2}{3}\gamma^a\delta^l_k - \frac{i}{3}\gamma^5 \epsilon^{aln}_k \gamma_n, \quad \partial_a(\Gamma^a)^l_k \Psi_l = 0. \qquad (4)$$

Совершим над уравнением [1] последовательно два преобразования. Сначала умножим его слева на невырожденную матрицу C со структурой $C^k_n = \delta^k_n + c\gamma_n\gamma^k$, в результате получаем другие матрицы $(\Gamma'^a)^l_n$:

$$(\Gamma'^a)^l_n = \gamma^a\delta^l_n - \frac{1}{3}\gamma^l\delta^a_n + \frac{2c-1}{3}\gamma_n g^{al} + \frac{1}{3}\gamma_n\gamma^a\gamma^l,$$

$$\partial_a(\Gamma'^a)^l_n\Psi_l = 0. \qquad (5)$$

Отсюда, воспользовавшись формулой для умножения трех матриц Дирака, получим

$$(\Gamma'^a)^l_n = \frac{2}{3}\gamma^a\delta^l_n + \frac{2c}{3}\gamma_n g^{al} - \frac{i}{3}\gamma^5\epsilon^{alk}_n\gamma_k; \qquad (6)$$

т. е. уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{2}{3}\partial_a\gamma^a\Psi_n + \frac{2c}{3}\gamma_n\partial_a\Psi^a - \frac{i}{3}\gamma^5\epsilon^{alk}_n\partial_a\gamma_k\Psi_l = 0; \qquad (7)$$

параметр c пока не фиксирован. Затем в уравнении (7) перейдем к новой волновой функции $\overline{\Psi}$ с помощью матрицы S :

$$\overline{\Psi} = S\Psi, \ S\partial_a\Gamma'^a S^{-1}\overline{\Psi} = 0,$$

$$S^n_m = \delta^n_m + a\gamma_m\gamma^n, \ (S^{-1})^k_l = \delta^k_l + b\gamma_l\gamma^k,$$

$$SS^{-1} = I \implies a + b + 4ab = 1. \qquad (8)$$

В результате находим новое представление для матриц уравнения

$$(\Gamma^a)^k_m = \gamma^a\delta^k_m\left[1 - \frac{1}{3} - b\left[\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a + \frac{1}{3}\right]\right] +$$

$$+\gamma^k\delta^a_m\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2b}{3} + b\left[\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a + \frac{1}{3}\right]\right] +$$

$$+\gamma_m g^{ak}\left[\frac{2c-1}{3}(1+4k) + 2a + \frac{1}{3} +\right.$$

$$\left. +b\left[\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a + \frac{1}{3}\right]\right] -$$

$$-\left[\frac{1}{3} + b\left[\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a + \frac{1}{3}\right]\right] i\gamma^5\epsilon^{akn}_m\gamma_n. \qquad (9)$$

Потребуем, чтобы в (9) осталось только слагаемое, содержащее символ Леви–Чивита. Это дает три уравнения на параметры a, b, c (помним об условии $a + b + 4ab = 0$):

$$\frac{2}{3} = \frac{2c-1}{3}(1+4a)b + 2ab + \frac{b}{3},$$

$$\frac{2b}{3} + \left\{\frac{2c-1}{3}(1+4a)b + 2ab + \frac{b}{3}\right\} = 0,$$

$$\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a + \frac{1}{3} +$$

$$+\left\{\frac{2c-1}{3}(1+4a)b + 2ab + \frac{b}{3}\right\} = 0.$$

Их решение следующее:

$$\overline{\Psi} = S\psi, \ a = -\frac{1}{3}, \ b = -1, \ c = 2, \qquad (10)$$

$$C^k_n = \delta^k_n + 2\gamma_n\gamma^k, \quad S^k_n = \delta^k_n - \frac{1}{3}\gamma_n\gamma^k,$$

$$(S^{-1})^k_n = \delta^k_n - \gamma_n\gamma^k. \qquad (11)$$

Следовательно, уравнение для безмассового поля со спином 3/2 в этом базисе имеет вид

$$\partial_a(\overline{\Gamma})^k_m\overline{\Psi}_k = 0, \quad -\partial_a[i\gamma^5\epsilon^{akn}_m\gamma_n]\Psi_k = 0. \qquad (12)$$

Очевидно, что вектор-биспинор в виде градиента от произвольного биспинора $\Phi(x)$

$$\overline{\Psi}^{grad}_k(x) = \partial_k\Phi(x) \qquad (13)$$

всегда будет решением уравнения (12). Это свойство иначе называют калибровочной симметрией. В исходном базисе калибровочные решения представляются так:

$$\Psi^{grad}_l(x) = \partial_l\Phi - \gamma_l\gamma^k\partial_l\Phi, \ l = 0, 1, 2, 3. \qquad (14)$$

Уравнение (12) можно записать в безиндексной форме, если ввести шесть матриц:

$$\epsilon_m^{nak} = (\mu^{[na]})_m^{\ k},\ \mu^{[na]} = -\mu^{[an]};$$

$$-i\gamma^5\gamma_n\partial_a \otimes \mu^{[na]}\overline{\Psi} = 0, \qquad (15)$$

где $\overline{\Psi}$ – это (4×4)-матрица, ее первый индекс биспинорный, второй – векторный. Простота уравнения (15) обманчива, фактически имеем следующее:

$$\begin{aligned}(-i)\Big\{&\gamma^5(\gamma^1 \otimes \mu^{[01]} + \gamma^2 \otimes \mu^{[02]} + \gamma^3 \otimes \mu^{[03]})\partial_0\overline{\Psi} + \\ &+\gamma^5(\gamma^0 \otimes \mu^{[01]} + \gamma^2 \otimes \mu^{[12]} - \gamma^3 \otimes \mu^{[31]})\partial_1\overline{\Psi} + \\ &+\gamma^5(\gamma^0 \otimes \mu^{[02]} + \gamma^3 \otimes \mu^{[23]} - \gamma^1 \otimes \mu^{[12]})\partial_2\overline{\Psi} + \\ &+\gamma^5(\gamma^0 \otimes \mu^{[03]} + \gamma^1 \otimes \mu^{[31]} - \gamma^2 \otimes \mu^{[23]})\partial_3\overline{\Psi}\Big\} = 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Будем искать решения уравнения (16) в виде плоских волн, ориентированных вдоль оси x_3 (это не уменьшает общности рассмотрения, поскольку всегда можно выбрать систему координат так, чтобы удовлетворить условию $k^0 = (\epsilon, 0, 0, k))$:

$$[\overline{\Psi}_{an}] = e^{-i\epsilon t}e^{ikz}\overline{\Phi},$$

$$\overline{\Phi}_{an} = \begin{pmatrix} \overline{f}_0 & \overline{f}_1 & \overline{f}_2 & \overline{f}_3 \\ \overline{g}_0 & \overline{g}_1 & \overline{g}_2 & \overline{g}_3 \\ \overline{h}_0 & \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \\ \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \overline{d}_2 & \overline{d}_3 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

С учетом подстановки (17) уравнение (16) упрощается

$$\begin{aligned}-\epsilon\gamma^5(\gamma^1 \otimes \mu^{[01]} + \gamma^2 \otimes \mu^{[02]} + \gamma^3 \otimes \mu^{[03]})\partial_0\overline{\Phi} + \\ +k\gamma^5(\gamma^0 \otimes \mu^{[03]} + \gamma^1 \otimes \mu^{[31]} - \gamma^2 \otimes \mu^{[23]})\partial_3\overline{\Phi} = 0,\end{aligned} \qquad (18)$$

кратко его можно записать так:

$$-\epsilon\gamma^5 B_0\overline{\Phi} + k\gamma^5 B_3\overline{\Phi} = 0. \qquad (19)$$

Ниже будем использовать матрицы Дирака в спинорном базисе [16]:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

также потребуются выражения для шести (транспонированных) матриц:

$$\mu_{tr}^{[01]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mu_{tr}^{[02]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu_{tr}^{[03]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mu_{tr}^{[23]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu_{tr}^{[31]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mu_{tr}^{[12]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальше находим 16 уравнений, которые разбиваются на четыре независимые системы:

$$I,\ \begin{pmatrix} -ik & -i\epsilon & 0 & -(k+\epsilon) \\ k & \epsilon & -(\epsilon+k) & 0 \\ 0 & 0 & ik & -k \\ 0 & 0 & -i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{d}_0 \\ \overline{d}_3 \\ \overline{h}_1 \\ \overline{h}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$II,\ \begin{pmatrix} ik & i\epsilon & 0 & (\epsilon-k) \\ -k & -\epsilon & -(\epsilon-k) & 0 \\ 0 & 0 & -ik & -k \\ 0 & 0 & i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{h}_0 \\ \overline{h}_3 \\ \overline{d}_1 \\ \overline{d}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$III,\ \begin{pmatrix} -ik & -i\epsilon & 0 & -(\epsilon-k) \\ -k & -\epsilon & (\epsilon-k) & 0 \\ 0 & 0 & ik & -k \\ 0 & 0 & -i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{g}_0 \\ \overline{g}_3 \\ \overline{f}_1 \\ \overline{f}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$IV,\ \begin{pmatrix} ik & i\epsilon & 0 & (k+\epsilon) \\ -k & -\epsilon & -(k+\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & -ik & -k \\ 0 & 0 & i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{f}_0 \\ \overline{f}_3 \\ \overline{g}_1 \\ \overline{g}_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Требование равенства нулю определителей приводит к одному и тому же условию

$$(k^2 - \epsilon^2)^2 = 0. \qquad (20)$$

Способ исследования уравнений такой: находим линейно независимые решения каждой подсистемы, при этом описываем только входящие в нее переменные, а остальные полагаем равными нулю; таким образом, находим все независимые решения исходной системы из 16 уравнений. Будем строить решения, предполагая $\epsilon > 0$. Это означает, что исследуем случай частиц, для античастиц соответствующие решения можно получить с помощью операции зарядового сопряжения $\Psi^C = (\gamma^2 \otimes I)\Psi^*$ из строящихся ниже решений. Положительность энергии возможна в двух случаях: $k > 0,\ \epsilon = k$ и $k < 0,\ \epsilon = -k$; для определенности следим за вариантом $k > 0$. Тогда приведенные выше уравнения упрощаются (сразу приводим их решения):

$$I,\ \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{d}_0 \\ \overline{d}_3 \\ \overline{h}_1 \\ \overline{h}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$\overline{d}_0$– любое, $\overline{d}_3 = -\overline{d}_0,\ \overline{h}_1 = 0,\ \overline{h}_2 = 0;$ (21a)

$$II,\ \begin{pmatrix} i & i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{h}_0 \\ \overline{h}_3 \\ \overline{d}_1 \\ \overline{d}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$\overline{h}_0, \overline{d}_0$– любые, $\overline{h}_3 = -\overline{h}_0,\ \overline{d}_1 = i\overline{d}_2;$ (21b)

$$III,\ \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{g}_0 \\ \overline{g}_3 \\ \overline{f}_1 \\ \overline{f}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$\overline{g}_0, \overline{f}_2$– любые, $\overline{g}_3 = -\overline{g}_0,\ \overline{f}_1 = i\overline{f}_2;$ (21c)

$$IV,\ \begin{pmatrix} i & i & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{f}_0 \\ \overline{f}_3 \\ \overline{g}_1 \\ \overline{g}_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$\overline{f}_0$– любое, $\overline{f}_3 = -\overline{f}_0,\ \overline{g}_1 = 0,\ \overline{g}_2 = 0.$ (21d)

Следовательно, общее решение системы уравнений имеет вид

$$\overline{\Psi} = \begin{pmatrix} \overline{f}_0 & -i\overline{f}_2 & \overline{f}_2 & -\overline{f}_0 \\ \overline{g}_0 & 0 & 0 & -\overline{g}_0 \\ \overline{h}_0 & 0 & 0 & -\overline{h}_0 \\ \overline{d}_0 & i\overline{d}_2 & \overline{d}_2 & -\overline{d}_0 \end{pmatrix}; \quad (22a)$$

его можно разложить в суперпозицию шести независимых:

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \overline{f}_0 & 0 & 0 & -\overline{f}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{g}_0 & 0 & 0 & -\overline{g}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{h}_0 & 0 & 0 & -\overline{h}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{d}_0 & 0 & 0 & -\overline{d}_0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & -i\overline{f}_2 & \overline{f}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\overline{d}_2 & \overline{d}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22b)$$

В свою очередь, калибровочные решения имеют вид (множитель $e^{i\epsilon t}e^{ikz}$ опускаем)

$$\overline{\Phi}_0^K = -i\epsilon \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix},\ \overline{\Phi}_1^K = 0,$$

$$\overline{\Phi}_2^K = 0,\ \overline{\Phi}_3^K = ik \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $L_1 \ldots L_4$ – произвольные числовые параметры. Для матрицы общего калибровочного решения имеем следующее представление (учитываем $\epsilon = k > 0$, далее этот общий множитель опускаем)

$$\Psi^K = \begin{pmatrix} -iL_1 & 0 & 0 & iL_1 \\ -iL_2 & 0 & 0 & iL_2 \\ -iL_3 & 0 & 0 & iL_3 \\ -iL_4 & 0 & 0 & iL_4 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Легко убедиться, что все независимые калибровочные решения удовлетворяют полученным выше уравнениям:

$$I,\ \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iL_4 \\ +iL_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0;$$
$$II,\ \begin{pmatrix} i & i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iL_3 \\ +iL_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0; \quad (25)$$
$$III,\ \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iL_2 \\ +iL_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0;$$
$$IV,\ \begin{pmatrix} i & i & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iL_1 \\ +iL_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Также замечаем, что первые четыре решения в суперпозиции (22b) являются чисто калибровочными (см. (25)), поэтому они могут быть отброшены. Таким образом, в (22a) остаются только два независимых решения, они не содержат калибровочных компонент:

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -i\overline{f}_2 & \overline{f}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I\overline{d}_2 & \overline{d}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Теперь исследуем эту задачу, используя исходный базис Рариты–Швингера (4). В матричной форме уравнение записывается так:

$$\left[\frac{2}{3}\partial_a\gamma^a \otimes I - \frac{i}{3}\gamma^5\partial_a\gamma_n \otimes \mu^{an}\right]\Psi = 0. \quad (27)$$

Для плоских волн уравнение принимает вид (см. (19))

$$-2i\epsilon\gamma^0\Phi + 2ik\gamma^3\Phi - \epsilon\gamma^5 B_0\overline{\Phi} + k\gamma^5 B_3\overline{\Phi} = 0. \quad (28)$$

После необходимых вычислений находим 16 уравнений, группируем их в четыре несвязанные подсистемы:

$$I,\ \left(\begin{matrix} -ik & -i\epsilon & -2i(\epsilon+k) \\ k & \epsilon & -(\epsilon+k) \\ -2i(\epsilon-k) & 0 & ik \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} -(k+\epsilon) \\ -2i(\epsilon+k) \\ -k \\ \epsilon \end{matrix}\right) \begin{pmatrix} d_0 \\ d_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$II,\ \left(\begin{matrix} ik & i\epsilon & -2i(\epsilon-k) \\ -k & -\epsilon & -(\epsilon-k) \\ -2i(\epsilon+k) & 0 & -ik \\ 0 & -2i(\epsilon+k) & i\epsilon \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} (\epsilon-k) \\ -2i(\epsilon-k) \\ -k \\ \epsilon \end{matrix}\right) \begin{pmatrix} h_0 \\ h_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$III,\ \begin{pmatrix} -ik & -i\epsilon & -2i(\epsilon-k) & -(\epsilon-k) \\ -k & -\epsilon & (\epsilon-k) & -2i(\epsilon-k) \\ -2i(\epsilon+k) & 0 & ik & -k \\ 0 & -2i(\epsilon+k) & -i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_3 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$IV,\ \begin{pmatrix} ik & i\epsilon & -2i(\epsilon+k) & (k+\epsilon) \\ -k & -\epsilon & -(k+\epsilon) & -2i(\epsilon+k) \\ -2i(\epsilon-k) & 0 & -ik & -k \\ 0 & -2i(\epsilon-k) & i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Дальнейший анализ проводится по прежней схеме. Строим решения, предполагая $\epsilon > 0$. Положительность энергии возможна в двух случаях: $k > 0,\ \epsilon = k$ и $k < 0,\ \epsilon = -k$; следим за вариантом $k > 0$. Тогда системы упрощаются (общий множитель $\epsilon = k$ опускаем)

$$I,\ \begin{pmatrix} -i & -i & -4i & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -4i \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$II,\ \begin{pmatrix} i & i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -4i & 0 & -i & -1 \\ 0 & -4i & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$III,\ \begin{pmatrix} -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -4i & 0 & i & -1 \\ 0 & -4i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_3 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$IV,\ \begin{pmatrix} i & i & -4i & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -4i \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & -f_0 \\ \frac{1}{4}(f_1 + i f_2) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(f_1 + i f_2) \\ \frac{1}{4}(i d_2 - d_1) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(i d_2 - d_1) \\ d_0 & d_1 & d_2 & -d_0 \end{pmatrix}; \tag{29}$$

его можно разложить в линейную суперпозицию:

$$\Phi = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & -f_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_0 & 0 & 0 & -d_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}f_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}f_1 \\ 0 & -0 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}d_1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}d_1 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_2 & 0 \\ \frac{1}{4}f_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}d_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}d_2 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Преобразование к этому базису найденных выше калибровочных решений $\overline{\Phi}^K$ задается соотношением:

$$\Psi^K_a = \overline{\Psi}_a - \gamma_a \gamma^b \overline{\Psi}^K_b, \text{ где } \quad \overline{\Psi}_b = \partial_b \Psi. \tag{31}$$

В результате для матрицы общего калибровочного решения в базисе Рариты–Швингера находим следующее представление:

$$\Phi^K = \begin{pmatrix} -ikL_1 & i(\epsilon+k)L_2 & (\epsilon+k)L_2 & i\epsilon L_1 \\ +ikL_2 & i(\epsilon-k)L_1 & -(\epsilon-k)L_1 & -i\epsilon L_2 \\ +ikL_3 & -i(\epsilon-k)L_4 & -(\epsilon-k)L_4 & -i\epsilon L_3 \\ -ikL_4 & -i(\epsilon+k)L_3 & (\epsilon+k)L_3 & i\epsilon L_4 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Для ситуации $\epsilon = k > 0$ (с учетом последующего сокращения общего множителя $\epsilon = k$) получаем

$$\Phi^K = \begin{pmatrix} f^K_0 & f^K_1 & f^K_2 & f^K_3 \\ g^K_0 & g^K_1 & g^K_2 & g^K_3 \\ h^K_0 & h^K_1 & h^K_2 & h^K_3 \\ d^K_0 & d^K_1 & d^K_2 & d^K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iL_1 & 2iL_2 & 2L_2 & iL_1 \\ +iL_2 & 0 & 0 & -iL_2 \\ +iL_3 & 0 & 0 & -iL_3 \\ -iL_4 & -2iL_3 & 2L_3 & iL_4 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Это общее калибровочное решение можно разложить в суперпозицию четырех независимых

$$\Phi^K = \begin{pmatrix} -iL_1 & 0 & 0 & iL_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iL_4 & 0 & 0 & iL_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2iL_2 & 2L_2 & 0 \\ +iL_2 & 0 & 0 & -iL_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +iL_3 & 0 & 0 & -iL_3 \\ 0 & -2iL_3 & 2L_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Первые два решения в (30) являются очевидно калибровочными, их можно отбросить, тогда остаются четыре решения:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}f_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_2 & 0 \\ \frac{i}{4}f_2 & 0 & 0 & -\frac{i}{4}f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}d_1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}d_1 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{4}d_2 & 0 & 0 & -\frac{i}{4}d_2 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (35)$$

неиспользованными являются два калибровочных решения

$$\Phi_K^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2iL_2 & 2L_2 & 0 \\ +iL_2 & 0 & 0 & -iL_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_K^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +iL_3 & 0 & 0 & -iL_3 \\ 0 & -2iL_3 & 2L_3 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (36)$$

Исследуем следующий вопрос: можно ли в решениях (35) выделить те, которые отождествимы с калибровочными решениями (36). Нужно решить уравнение

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & 0 \\ \frac{1}{4}(f_1+if_2) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(f_1+if_2) \\ \frac{1}{4}(id_2-d_1) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(id_2-d_1) \\ 0 & d_1 & d_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2iL_2 & 2L_2 & 0 \\ +iL_2 & 0 & 0 & -iL_2 \\ +iL_3 & 0 & 0 & -iL_3 \\ 0 & -2iL_3 & 2L_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (37)$$

относительно переменных f_1, f_2, d_1, d_2. В результате находим два простых решения:

$$f_1 = 2iL_2,\ f_2 = 2L_2 \Longrightarrow f_1 = if_2;$$

$$d_1 = -2iL_3,\ d_2 = 2L_3 \Longrightarrow d_2 = id_1.$$

Таким образом, найдены два решения, которые устраняются калибровочными преобразованиями (напоминаем, что параметры d_1 и f_2 независимые):

$$f_1 = +if_2, \quad d_2 = +id_1,$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & if_2 & f_2 & 0 \\ \frac{i}{2}f_2 & 0 & 0 & -\frac{i}{2}f_2 \\ -\frac{i}{2}d_1 & 0 & 0 & \frac{i}{2}d_1 \\ 0 & d_1 & id_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (38)$$

Не устраняются калибровочным преобразованием следующие два решения:

$$f_1 = -if_2, \quad d_2 = -id_1,$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -if_2 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & -id_1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (39)$$

они не содержат калибровочных компонент и являются физическими.

Резюмируем результат. В явном виде построены шесть линейно независимых решений уравнения для безмассовой частицы со спином 3/2, среди них найдены два решения, которые не содержат калибровочных компонент.

Литература

1. *Pauli W., Fierz M.* Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld // Helv. Phys. Acta. 1939. Vol. 12. P. 297–300.
2. *Pauli W., Fierz M.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. London. A. 1939. Vol. 173. P. 211–232.
3. *Rarita W., Schwinger J.* On a theory of particles with half-integral spin // Phys. Rev. 1941. Vol. 60, No. 1. P. 61–64.
4. *Гинзбург В.Л.* К теории частиц со спином 3/2 // ЖЭТФ. 1942. Т. 12. С. 425–442.
5. *Давыдов А.С.* Волновое уравнение частицы, имеющей спин 3/2, в отсутствие поля // ЖЭТФ. 1943. Т. 13, № 9–10. С. 313–319.
6. *Johnson K., Sudarshan E.C.G.* Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles // Ann. Phys. N.Y. 1961. Vol. 13, No. 1. P. 121–145.
7. *Bender C.M., McCoy B.M.* Peculiarities of a free massless spin-3/2 field theory // Phys. Rev. 1966. Vol. 148, No. 4. P. 1375–1380.
8. *Hagen C.R., Singh L.P.S.* Search for consistent interactions of the Rarita–Schwinger field // Phys. Rev. D. 1982. Vol. 26, No. 2. P. 393–398.
9. *Baisya H.L.* On the Rarita–Schwinger equation for the vector-bispinor field // Nucl. Phys. B. 1971. Vol. 29, No. 1. P. 104–124.
10. *Loide R.K.* Equations for a vector–bispinor // J. Phys. A. 1984. Vol. 17, No. 12. P. 2535–2550.
11. *Плетюхов В.А., Стражев В.И.* К теории частиц со спином 3/2 // Изв. вузов. Физика. 1985. Т. 28, № 1. С. 91–96.
12. *Capri A.Z., Kobes R.L.* Further problems in spin-3/2 field theories // Phys. Rev. D. 1980. Vol. 22. P. 1967–1978.
13. *Darkhosh T.* Is there a solution to the Rarita-Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field // Phys. Rev. D. 1985. Vol. 32, No. 12. P. 3251–3255.
14. *Cox W.* On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita–Schwinger field coupled to an external electromagnetic field // J. Phys. A. 1989. Vol. 22, No. 10. P. 1599–1608.
15. *Deser S., Waldron A., Pascalutsa V.* Massive spin-3/2 electrodynamics // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62. Paper 105031.
16. *Napsuciale M., Kirchbach M., Rodriguez S.* Spin-3/2 Beyond Rarita-Schwinger Framework // Eur. Phys. J. A. 2006. Vol. 29. P. 289–306.
17. *Редьков В.М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Минск: Белорусская наука, 2009. 486 с.
18. *Плетюхов В.А., Редьков В.М., Стражев В.И.* Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы. Минск: Белорусская наука, 2015. 328 с.

19. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / *V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov* New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.
20. Решения уравнения для частицы со спином 3/2 и оператор спиральности / *А.В. Ивашкевич, Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков* // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. 2020. № 1. С. 15–35.

References

1. *Pauli W., Fierz M.* Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld // Helv. Phys. Acta. 1939. Vol. 12. P. 297–300
2. *Pauli W., Fierz M.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. London. A. 1939. Vol. 173. P. 211–232.
3. *Rarita W., Schwinger J.* On a theory of particles with half-integral spin // Phys. Rev. 1941. Vol. 60, No. 1. P. 61–64.
4. *Ginzburg V.L.* K teorii chastic so spinom 3/2 [To the theory of particles of spin 3/2] // J. of Experimental and Theoretical Physics. 1942. Vol. 12. P. 425–442.
5. *Davydov A.S.* Volnovoe uravnenie chasticy, imejushhej spin 3/2, v otsutstvie polja [Wave equation for a particle with spin 3/2, in absence of external field] // J. of Experimental and Theoretical Physics. 1943. Vol. 13, No. 9–10. P. 313–319.
6. *Johnson K., Sudarshan E.C.G.* Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles // Ann. Phys. N.Y. 1961. Vol. 13, No. 1. P. 121–145.
7. *Bender C.M., McCoy B.M.* Peculiarities of a free massless spin-3/2 field theory // Phys. Rev. 1966. Vol. 148, No. 4. P. 1375–1380.
8. *Hagen C.R., Singh L.P.S.* Search for consistent interactions of the Rarita–Schwinger field // Phys. Rev. D. 1982. Vol. 26, No. 2. P. 393–398.
9. *Baisya H.L.* On the Rarita–Schwinger equation for the vector-bispinor field // Nucl. Phys. B. 1971. Vol. 29, No. 1. P. 104–124.
10. *Loide R.K.* Equations for a vector–bispinor // J. Phys. A. 1984. Vol. 17, No. 12. P. 2535–2550.
11. *Pletyukhov V.A., Strazhev V.I.* K teorii chastic so spinom 3/2 [To the theory of particles of spin 3/2] // Russian Physics J. 1985. Vol. 28, No. 1. P. 91–96.
12. *Capri A.Z., Kobes R.L.* Further problems in spin-3/2 field theories // Phys. Rev. D. 1980. Vol. 22. P. 1967–1978.
13. *Darkhosh T.* Is there a solution to the Rarita-Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field // Phys. Rev. D. 1985. Vol. 32, No. 12. P. 3251–3255.
14. *Cox W.* On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita–Schwinger field coupled to an external electromagnetic field // J. Phys. A. 1989. Vol. 22, No. 10. P. 1599–1608.
15. *Deser S., Waldron A., Pascalutsa V.* Massive spin-3/2 electrodynamics // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62. Paper 105031.
16. *Napsuciale M., Kirchbach M., Rodriguez S.* Spin-3/2 Beyond Rarita-Schwinger Framework // Eur. Phys. J. A. 2006. Vol. 29. P. 289–306.
17. *Red'kov V.M.* Polja chastic v rimanovom prostranstve i gruppa Lorenca [Particle fields in the Riemann space and the Lorentz group]. Minsk: Belorusian Science Publ., 2009. 486 p.
18. *Pletyukhov V.A., Red'kov V.M., Strazhev V.I.* Reljativistskie volnovye uravnenija i vnutrennie stepeni svobody [Relativistic wave equations and internal degrees of freedom]. Minsk: Belorusian Science Publ., 2015. 328 p.
19. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / *V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov* New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.
20. Reshenija uravnenija dlja chasticy so spinom 3/2 i operator spiral'nosti [Solutions of the wave equation for a spin 3/2 particle and helicity operator] / *A.V. Ivashkevich, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov* // Bull. of Brest University. Series 4. Physics, Mathematics. 2020. No. 1. P. 15–35.

Статья поступила в редакцию 25.02.2021.