Задача об устойчивости круговых колец, связанных между собой

В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

veran@list.ru,
vntarasov@dm.komisc.ru

Аннотация

В статье рассматриваются проблемы устойчивости системы круговых колец, связанных между собой таким образом, что перемещения этих колец и углы поворота их сечений в некоторых точках совпадают. Данная задача сводится к некоторой вариационной проблеме с ограничениями на искомые функции в виде линейных уравнений. Для конечномерной аппроксимации применяются ряды Фурье. В работе так же представлена задача устойчивости системы круговых колец, подкрепленных нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. В этом случае возникают ограничения в виде неравенств, и после конечномерной аппроксимации проблема сводится к отысканию точек бифуркации задач нелинейного программирования при наличии ограничений в виде неравенств.

Ключевые слова:

устойчивость, вариационные задачи, точки бифуркации, кольца

The problem of the stability of circular rings connected to each other

V.Yu. Andryukova, V.N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

veran@list.ru,
vntarasov@dm.komisc.ru

Abstract

The paper considers the problems on the stability of a system of circular rings interconnected in such a way that the displacements of these rings and the rotation angles of their sections coincide at some points. This problem is reduced to some variational problem with restrictions on the desired functions in the form of linear equations. The Fourier series are used for a finite-dimensional approximation. The paper also presents the problem on the stability of a system of circular rings reinforced with inextensible threads that do not withstand compressive forces. In this case, there are constraints in the form of inequalities, and after a finite-dimensional approximation, the problem is reduced to finding bifurcation points for nonlinear programming problems in the presence of constraints in the form of inequalities.

Keywords:

stability, variational problems, bifurcation points, rings

Введение

От работ Эйлера по теории продольного изгиба берет свое начало теория устойчивости упругих систем. Задачи упругой устойчивости в классическом случае сводятся к отысканию и исследованию точек бифуркации нелинейных уравнений равновесия. Линеаризация этих уравнений приводит к некоторой линейной краевой задаче на собственные значения. Современное состояние теории упругой устойчивости изложено в монографии [1]. Задачи устойчивости круговых арок и колец, находящихся под действием равномерного давления, подробно изложены в работах [2, 3]. Исследования в области устойчивости арок не прекращаются и в настоящее время [4]. При потере устойчивости колец и арок происходит либо плоская деформация (все перемещения происходят в плоскости недеформированного кольца), либо пространственная (перемещение перпендикулярно плоскости кольца, и присутствует кручение). Но в случае, когда кольца связаны друг с другом, при потере устойчивости возникают перемещения как в плоскости кольца, так и деформации, перпендикулярные его плоскости, что существенно увеличивает критическую нагрузку. В настоящей работе рассматривается задача устойчивости системы колец, подкрепленных нерастяжимыми нитями так, что расстояние между точками прикрепления концов нити не может увеличиваться, и они не выдерживают сжимающих усилий. При математической формализации расчет на устойчивость сводится к отысканию параметра нагрузки, при котором происходит бифуркация решения задачи вариационного исчисления при наличии ограничений на искомые функции в виде неравенств. При конечномерной аппроксимации получаем задачу нахождения параметра нагрузки, при которой происходит бифуркация решений задач нелинейного программирования. Последняя задача может быть сведена к идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. Аналитические критерии условной положительной определенности квадратичных форм в важном частном случае, когда конус представляет собой положительный ортант в R^n, приведены в [5, 6], но для их применения необходимо считать большое количество определителей, что в вычислительном отношении является крайне неэффективным. В общем случае требуется применять методы глобальной оптимизации, например метод ветвей и границ [7]. Некоторые задачи устойчивости и закритического поведения при наличии односторонних ограничений на перемещения рассмотрены в работах [8–10].

1. Пространственная деформация круговых арок

Пусть тонкий упругий стержень, представляющий собой кольцо радиуса R, находится в равновесии, силы равномерно распределены по его длине. Предполагается, что сечение стержня постоянно, и одна из главных осей инерции поперечного сечения лежит в плоскости дуги. В некоторой точке M_0 проведем три взаимно перпендикулярные оси (x_0, y_0, z_0): ось y_0 направлена по одной из главных осей инерции сечения, перпендикулярного плоскости дуги, ось x_0, соответственно, направлена к центру кривизны дуги, ось z_0 — по касательной к дуге стержня. Пусть в результате деформации стержня оси (x_0, y_0, z_0) переходят в оси (x, y, z), точка M_0 переходит в точку M, проекции перемещений точки M_0 на оси (x_0, y_0, z_0) обозначим через u, w, v. Система координат (x, y, z) получается из системы (x_0, y_0, z_0) путем переноса и путем поворота вокруг осей (x_0, y_0, z_0) на углы α, β, γ. Считая деформации малыми, можем написать уравнения Клебша [1]:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{du}{ds} + \dfrac{1}{R}w, \\ -\alpha = \dfrac{dv}{ds}, \\ \dfrac{dw}{ds} - \dfrac{1}{R}u = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $ds = Rd\vartheta$, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ — центральный угол дуги стержня. Третье уравнение выражает условие несжимаемости оси стержня.

Упругая энергия стержня в результате деформации определяется формулой

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} (A\delta p^2 + B\delta q^2 + C\delta r^2) R d\vartheta, \tag{2}$$

где A, B — жесткости стержня на изгиб, C — жесткость стержня при кручении.

$$\begin{cases} \delta p = \frac{1}{R}(\alpha' + \gamma) = \frac{1}{R}\left(-\frac{1}{R}v' + \gamma\right), \\ \delta q = \frac{1}{R}\beta' = \frac{1}{R^2}(u'' + u), \\ \delta r = \frac{1}{R}(\gamma - \alpha) = \frac{1}{R}\left(\gamma + \frac{1}{R}v'\right), \end{cases} \tag{3}$$

где штрих обозначает производную по ϑ.

Предположим, что кольцо нагружено давлением P, равномерно распределенным по его оси. При любой величине давления возможна круговая (первоначальная) форма равновесия.

Если давление достаточно велико, то первоначальная круговая форма становится неустойчивой, и арка принимает другую, нетривиальную форму. Предположим, что нагрузка P постоянно направлена к центру кривизны. В этом случае работа внешних сил равна $\widetilde{W} = PRW$, где

$$W(u, w, v, \gamma) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(2u^2 - u'^2 - v'^2 + v^2\right) d\vartheta. \tag{4}$$

В положении равновесия функционал полной энергии

$$J(u, w, v, \gamma) = U - W = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \Bigg[\frac{B}{R^2}(u'' + u)^2 + $$

$$+ \frac{A}{R^2}\left(\frac{1}{R}v'' - \gamma\right)^2\Bigg] R dv - \widetilde{W} \tag{5}$$

принимает минимальное значение. В (5) A, B, C — упругие постоянные. Система уравнений Эйлера для функционала (5) распадается на две независимые подсистемы (6) и (7)

$$\frac{B}{R^3}(u^{IV} + 2u'' + u) + P(u'' + u) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{A_i}{R^3}v^{(4)} - \frac{A_i}{R^2}\gamma'' - \frac{C_i}{R^3}v'' - \frac{C_i}{R^2}\gamma'' + P(v'' + v) = 0,$$

$$\frac{A_i}{R^3}v'' - \frac{A_i}{R^2}\gamma + \frac{C_i}{R^2}v'' + \frac{C_i}{R}\gamma'' = 0. \tag{7}$$

Это означает, что при потере устойчивости происходит либо плоская деформация, при которой $v = 0,\ \gamma = 0$, либо пространственная $(u = 0,\ w = 0)$.

Для определения критического давления требуется найти минимальное значение силы P, при котором задача на минимум функционала (5), или, что то же самое, система дифференциальных уравнений (6) или (7), имеет нетривиальное решение. Очевидно, последняя задача эквивалентна вариационной проблеме изопериметрического типа

$$J \to \min \ \text{при ограничении} \ W = 1. \tag{8}$$

Функции u, w, v, γ должны быть 2π-периодическими. Используя ряды Фурье, получим значения критической силы:

— в случае плоской деформации $(v = 0,\ \gamma = 0)$

$$P_1 = 4.5\frac{B}{R^3}, \tag{9}$$

— в пространственном случае $(u = 0,\ v = 0)$

$$P_2 = \frac{A}{R^3}\frac{12}{4 + \frac{A}{C}}. \tag{10}$$

Эти результаты содержаться в работе [2]. Критическая сила будет равна минимальному из чисел P_1 и P_2.

2. Задача устойчивости системы круговых колец с неудерживающими связями. Пространственный случай

Рассмотрим систему, состоящую из m круговых колец, координаты которых в недеформированном состоянии описываются уравнениями

$$\begin{cases} x_i^0 = R\sin\vartheta\cos\varphi_i, \\ y_i^0 = R\sin\vartheta\sin\varphi_i, \\ z_i^0 = R\cos\vartheta, \end{cases} \tag{11}$$

где $i = 1,\ldots,m,\ \varphi_i \in \frac{\pi(i-1)}{m},\ \vartheta \in [-\pi,\pi]$.

Введем следующие обозначения: $n_i = (-\sin\vartheta\cos\varphi_i, -\sin\vartheta\sin\varphi_i, -\cos\vartheta)$ — вектор единичной нормали к кривой, определяемой уравнениями (1), $\tau_i = (\cos\vartheta\cos\varphi_i, \cos\vartheta\sin\varphi_i, -\sin\vartheta)$ — касательный вектор, $b_i = \tau_i \times n_i = (-\sin\varphi_i, \cos\varphi_i, 0)$ — бинормаль, $u_i(\vartheta), w_i(\vartheta), v_i(\vartheta),\ i = 1,\ldots,m$ — перемещения точек i-того кольца вдоль n_i, τ_i, b_i, соответственно, в результате деформации. Предположим, что каждая арка нагружена давлением P, которое остается направленным к центру кривизны (центру сферической поверхности). В результате деформации упругая энергия системы может быть вычислена по формуле [2]

$$U = \sum_{i=1}^{m} U_i = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (A_i\delta p_i^2 + B_i\delta q_i^2 + C_i\delta r_i^2)d\vartheta, \tag{12}$$

где A_i, B_i — жесткости стержней на изгиб, C_i — жесткость при кручении.

$$\delta p_i = -\frac{1}{R^2}v_i^{''} + \frac{1}{R}\gamma_i,$$

$$\delta q_i = -\frac{1}{R^2}(u_i^{''} + u_i),$$

$$\delta r_i = -\frac{1}{R}\gamma_i^{'} + \frac{1}{R^2}v_i^{'}.$$

Углы поворота определяются формулами

$$\alpha_i = -\frac{1}{R}v_i^{\prime}, \quad \beta_i = \frac{1}{R}(u_i^{\prime} + w_i),$$

и выполнено условие несжимаемости $u_i = w_i^{\prime}$. В случае центральной нагрузки с учетом условия несжимаемости работа внешних сил определяется формулой

$$W_i = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (u_i^{'2} - 2w_i^2 + v_i^{'2} - v_i^2)d\vartheta, \tag{13}$$

$$W = \sum_{i=1}^{m} W_i.$$

Полная энергия системы колец имеет вид

$$J = \sum_{i=1}^{m} J_i = \sum_{i=1}^{m}\left(U_i - \frac{PR}{2}\cdot W_i\right). \tag{14}$$

Для определенности положим $m = 3$, т.е. имеется три кольца, связанные между собой при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = -\pi$.

Для того, чтобы перемещения колец совпадали, должны выполняться равенства:
при $\vartheta = 0$

$$w_1 = \frac{1}{2}w_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_2, \quad v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}w_2 + \frac{1}{2}v_2, \quad u_1 = u_2. \tag{15}$$

$$w_1 = -\frac{1}{2}w_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_3, \quad v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}w_3 - \frac{1}{2}v_3, \quad u_1 = u_3; \tag{16}$$

при $\vartheta = -\pi$

$$w_1 = -\frac{1}{2}w_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_2, \quad v_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}w_2 + \frac{1}{2}v_2, \quad u_1 = u_3. \tag{17}$$

$$w_1 = -\frac{1}{2}w_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_3, \quad v_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}w_3 - \frac{1}{2}v_3, \quad u_1 = u_3. \tag{18}$$

Для совпадения углов поворота необходимо потребовать выполнения равенств:
при $\vartheta = 0$

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \frac{1}{2}\gamma_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_2 = \gamma_1, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2 + \frac{1}{2}\beta_2 = \beta_1; \tag{19}$$

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad -\frac{1}{2}\gamma_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_3 = \gamma_1, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_3 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1; \tag{20}$$

при $\vartheta = -\pi$

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_2 = \gamma_1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2 + \frac{1}{2}\beta_2 = \beta_1; \tag{21}$$

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad -\frac{1}{2}\gamma_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_3 = \gamma_1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_3 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1. \tag{22}$$

Представим себе, что каждое кольцо подкреплено нерастяжимыми нитями так, что расстояние между точками прикрепления нити к кольцу не может увеличиваться. Пусть концы j-ой нити прикреплены к кольцу, соответствующему углам $\vartheta = \epsilon_1$ и $\vartheta = \epsilon_2$, ϵ_1 и ϵ_2 зависят от j. Обозначим $u_i = u_i(\epsilon_j), w_i = w_i(\epsilon_j), v_i = v_i(\epsilon_j)$. Тогда координаты точек кольца в некоторой неподвижной системе координат определяются формулами

$$\begin{cases} \epsilon_i = (R - u_i)\cos\epsilon_j - w_i \sin\epsilon_j, \\ \eta_i = (R - u_i)\sin\epsilon_j - w_i \cos\epsilon_j, \\ \varsigma_i = v_i, \end{cases} \tag{23}$$

где $j = 1, 2$. Расстояние между точками прикрепления нити равно

$$\rho = \rho(u_1, w_1, v_1, u_2, w_2, v_2) = \\ = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}.$$

Обозначим через $\rho_0 = \rho(0,0,0,0,0,0)$. Деформации кольца должны удовлетворять неравенству

$$\rho \le \rho_0. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (24) и используя разложение в ряд Тейлора с точностью до линейных слагаемых, вместо (24) получим линейное неравенство

$$(\cos\omega - 1)(u_1 + u_2) + \sin\omega(w_1 - w_2) \le 0, \tag{25}$$

в котором $u_1 = u_1(j)$, $w_i = w_i(j)$, где j — номер нити, $\omega = \epsilon_2 - \epsilon_1$. Функции w_i, v_i, γ_i будем искать в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{k=2}^{n} a_{ki}\cos k\vartheta + b_{ki}\sin k\vartheta, \\ u_i &= \sum_{k=2}^{n} -a_{ki}k\sin k\vartheta + b_{ki}\cos k\vartheta, \\ v_i &= \sum_{k=2}^{n} c_{ki}\cos k\vartheta + d_{ki}\sin k\vartheta, \\ \gamma_i &= \sum_{k=2}^{n} \tilde{c}_{ki}\cos k\vartheta + \tilde{d}_{ki}\sin k\vartheta. \end{aligned} \tag{26}$$

Пусть $z \in R^N$ — вектор коэффициентов в (26), $N = 6n \times 3$. Подставляя (26) в (12), (13), получим две квадратичные формы $f(z) = \frac{1}{2}(Gz, z)$ и $g(z) = \frac{1}{2}(Qz, z)$ соответственно. Равенства (15)–(22) дают 24 линейных ограничения вида $(\eta_j, z) = 0$, $j = 1, \ldots, 24$. Наконец, неравенства (25) дают ограничения вида $(\eta_j, z) \le 0$, $j = 1 \ldots, m_0$, где m_0 — число подкрепляющих нитей. Таким образом, для определения критической нагрузки получаем задачу нелинейного программирования

$$f(z) \Rightarrow \frac{1}{2}(Gz, z) \to \min_z \tag{27}$$

при ограничениях

$$g(z) = \frac{1}{2}(Qz, z) = 1, \tag{28}$$

$$(\eta_j, z) = 0, \quad j = 1 \ldots, 24, \tag{29}$$

$$(\tilde{\eta}_j, z) \le 0, \quad j = 1 \ldots, m_0. \tag{30}$$

Обозначим через Γ конус, определяемый ограничениями (29)–(30). Для решения экстремальной задачи (27)–(30) применяется метод последовательных приближений: пусть $z_0 \in R^n$ — некоторое начальное приближение. Пусть уже получена такая точка $z_k \in R^n$, что $g(z_k) = 1$. Введем множество $M_k = \{z \in \Gamma | (Qz_0, z - z_0) = 0\}$. Найдем точку $\tilde{z}_{k+1} \in M_k$, такую, что

$$f(\tilde{z}_{k+1}) = \min_{z \in M_k} f(z). \tag{31}$$

Далее полагаем

$$z_{k+1} = \frac{1}{S_k}\tilde{z}_{k+1}, \text{ где } S_k = \sqrt{f(\tilde{z}_{k+1})}.$$

Можно показать, что $f(z_k)$ монотонно убывает, и последовательность $\{z_k\}$ сходится к некоторой точке z_*, в которой выполнены необходимые условия экстремума (теорема Куна-Таккера).

3. Результаты численных экспериментов

Предполагается, что сечение всех колец представляет собой эллипс с полуосями a и b . Тогда жесткости при изгибе и жесткость на кручение могут быть вычислены по формуле

$$A = \frac{\pi}{4}Ea^3b, \quad B = \frac{\pi}{4}Eb^3a,$$

$$C = \frac{4}{E}\frac{AB}{A+B}.$$

В последних выражениях E — модуль Юнга, который без ограничения общности можно положить равным единице. Также можно считать, что $R = 1$.

Обозначим через $P_0 = \min(P_1, P_2)$. Пусть P — значение, полученное в результате решения задачи оптимизации (27)–(29). Тогда при $a \le b$ отношение $\frac{P}{P_0} = 1.35$. Если же $a \ge 1.5b$, то $\frac{P}{P_0} = 1.3968$. В случае $1 < \frac{a}{b} < 1.5$, отношение $\frac{P}{P_0}$ возрастает от значения 1.35 до 1.3968. Если же каждое кольцо подкреплено нитями, расположенными по сторонам правильного M-угольника, то значение критической нагрузки зависит от M. Некоторые результаты при $a = 2.5, b = 1$ приведены в таблице.

Зависимость критической нагрузки от числа подкрепляющих нитей
Dependence of the critical load on number of reinforcing threads

M	4	5	6	7	8	9
P/P_0	2.89	2.91	2.59	4.08	3.94	3.94

Заключение

В работе рассмотрена задача устойчивости системы упругих колец, подкрепленных нерастяжимыми нитями. Данная задача является конструктивно-нелинейной, так как уравнения равновесия не могут быть линеаризованы в связи с тем, что содержат негладкие функции. Исследована проблема поиска точек бифуркации решения некоторой задачи нелинейного программирования при наличии ограничений в виде неравенств. Численные расчеты показали, что односторонние (неудерживающие) связи существенно увеличивают критическую нагрузку даже при небольшом количестве колец и нитей. Результаты работы могут оказаться полезными при проектировании сетчатых оболочек и арочных систем.

Литература

1. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – Москва: Издательство СКАД СОФТ, 2010–2011. – Т. 1. – 686 с.
2. Николаи, Е.Л. Труды по механике / Е.Л. Николаи. – Москва: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 584 с.
3. Динник, А.Н. Устойчивость арок / А.Н. Динник. – Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1946. – 128 с.
4. Silveria, R.A.M. A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints / R.A.M. Silveria, C.L. Nogueira, P.B. Goncalves // Int. J. Solids and Structures. – 2013. – № 50. – P. 147–159. http://dx.doi.org/101155/2008/786220.
5. Крепс, В.Л. О квадратичных формах неотрицательных на ортанте / В.Л. Крепс // Журн. выч. матем. и мат. физ. – 1984. – Т. 24. – № 14. – С. 497–503.
6. Рапопорт, Л.Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе / Л.Б. Рапопорт // Прикл. матем. и мех. – 1986. – Т. 50, вып. 4. – С. 674–679.
7. Сухарев, А.Г. Глобальный экстремум и методы его отыскания / А.Г. Сухарев // Математические методы и исследования операций. – Москва: Изд-во МГУ, 1983. – 193 с.
8. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1967. – 376 с.
9. Andryukova, V.Y. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V.Y. Andryukova, V.N. Tarasov // Abstr. Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. – Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – 268 p. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.
10. Tarasov, V.N. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems / V.N. Tarasov // Abstr. Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. – Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – 268 p. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974024.

References

1. Perelmuter, A.V. Ustoychivost' ravnovesiya konstruktsiy i rodstvennyye problemy [Structural equilibrium stability of structures and related problems] / A.V. Perelmuter, V.I. Slivker. – M.: Izdatel'stvo SKAD SOFT [Publishing house SKAD SOFT], 2010–2011. – Vol. 1. – 686 p.
2. Nikolai, E.L. Trudy po mekhanike [Works on mechanics] / E.L. Nikolai. – Moscow: Izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury [Publishing house of technical and theoretical literature], 1955. – 584 p.
3. Dinnik, A.N. Ustoychivost' arok [Stability of arches] / A.N. Dinnik. – Moscow–Lenongrad: OGIZ [OGIZ], 1946. – 128 p.
4. Silveria, R.A.M. A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints / R.A.M. Silveria, C.L. Nogueira, P.B. Goncalves // Int. J. Solids and Structures. – 2013. – № 50. – P. 147–159. URL: http://dx.doi.org/101155/2008/786220.
5. Kreps, V.L. O kvadratichnykh formakh neotritsatel'nykh na ortante [On quadratic forms that are nonnegative on the orthant] / V.L. Kreps// ZHVMiMF. – 1984. – Vol. 24. – № 14. – P. 497–503.
6. Rapoport, L.B. Ustoychivost' po Lyapunovu i znakoopredelennost' kvadratichnoy formy na konuse [Lyapunov stability and sign-definiteness of a quadratic form on a cone] / L.B. Rapoport // PMM. – 1986. – Vol. 50, Iss. 4. – P. 674–679.
7. Sukharev, A.G. Global'nyy ekstremum i metody yego otyskaniya [Global extremum and methods for finding it] / A.G. Sukharev // Matematicheskiye metody i issledovaniya operatsiy. [Mathematical methods and operations research].– Izdatel'stvo MGU [Moscow: Publishing House of Moscow State University]. – 1983. – P. 4–37.
8. Feodos'ev, V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials] / V.I. Feodos'ev. – Moscow: Nauka, 1967. – 376 p.
9. Andryukova, V.Y. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V.Y. Andryukova, V.N. Tarasov // Abstr. Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. – Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – 268 p. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.
10. Tarasov, V.N. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems / V.N. Tarasov // Abstr. Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. – Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – 268 p. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974024.

Для цитирования:
Андрюкова, В.Ю. Задача об устойчивости круговых колец, связанных между собой / В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 28–33. УДК: 539.1. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-28-33

For citation:
Andryukova, V.Yu. The problem of the stability of circular rings connected to each other / V.Yu. Andryukova, V.N. Tarasov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 28–33. UDC: 539.1. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-28-33

Дата поступления рукописи: 18.08.2022
Received: 18.08.2022