Векторная частица с аномальным магнитным моментом во внешнем однородном электрическом поле

А.В. Ивашкевич[1], **Я.А. Войнова**[2]

[1]Институт физики им. Б.И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь
[2]Минское суворовское военное училище,
г. Минск, Беларусь

ivashkevich.alina@yandex.by
voinovayanina@mail.ru

Аннотация

Исследуется частица со спином 1 и аномальным магнитным моментом в присутствии внешнего однородного электрического поля. Используется обобщенное уравнение Даффина-Кеммера, записанное в декартовых координатах (t, x, y, z). На его решениях диагонализируются операторы энергии и операторы проекций импульса P_x и P_y. Внешнее электрическое поле направлено вдоль оси z. Найдена система из 10 дифференциальных уравнений по переменной z. С использовнием генератора j^{03} для 10-компонентного поля вводятся три проективных оператора, которые позволяют представить полную волновую функцию в виде суммы трех частей. Одна из проективных составляющих, зависящая от четырех функций, выбирается как основная, две других определяются через нее. Для этих четырех функций выведены одно линейное условие связи и система из трех уравнений 2-го порядка для трех функций. Эта система после необходимого линейного преобразования приводится к виду трех несвязанных уравнений для трех новых функций. Они решаются в терминах вырожденных гипергеометрических функций, исследованы свойства найденных решений.

Ключевые слова:

векторная частица, аномальный магнитный момент, внешнее электрическое поле, метод проективных операторов, точные решения

Vector particle with anomalous magnetic moment in an external uniform electric field

A.V. Ivashkevich[1], **Ya.A. Voynova**[2]

[1]B.I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus
[2]Minsk Suvorov Military School,
Minsk, Belarus

ivashkevich.alina@yandex.by
voinovayanina@mail.ru

Abstract

In the paper, spin 1 particle with an anomalous magnetic moment is examined in presence of an external uniform electric field. The generalized ten-dimensional Duffin-Kemmer equation is specified in Cartesian coordinates (t, x, y, z) . On its solutions there are diagonalized operators of energy and linear momentums P_x and P_y. The external electric field is oriented along the axes z. The system of ten differential equations in the variable z is derived. With the use of the generator j^{03} for ten-component field we introduce three projective operators which permit us to divide the complete ten-component wave function into three projective constituents. One of them is taken as the primary constituent, it depends on four functions; the two remaining projective constituents are defined by the primary one. For these four functions we derive one linear constraint and the system of second order equations for three functions. This system after linear transformation is reduced to three separated equations for three new variables. Their solutions are constructed in terms of confluent hypergeometric functions. Properties of the obtained solutions are studied.

Keywords:

vector particle, anomalous magnetic moment, external electric field, method of projective operators, exact solutions

Введение

В настоящей работе будут найдены точные решения уравнения Даффина-Кеммера для частицы со спином 1 и дополнительной электромагнитной характеристикой — аномальным магнитным моментом [1–7]. Используется декартовая система координат. Для 10-компонентного поля вводятся три проективных оператора [8], которые позволяют разложить волновую функцию в сумму трех частей. Одна из составляющих, зависящая от четырех функций, является основной, две другие могут быть выражены через нее. Для этих четырех функций выведено линейное условие связи, в результате возникает система из трех связанных дифференциальных уравнений 2-го порядка для трех функций. Эта система после специального линейного преобразования приводится к трем несвязанным уравнениям для трех новых функций. Их решения построены в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

1. Обобщенное уравнение Даффина-Кеммера, разделение переменных

Исходим из общего уравнения для частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом

$$\Big\{\beta^c(\partial_c - ieA_c) + \lambda\frac{1}{2}F_{ab}(x)J^{ab}P - M\Big\}\Psi = 0,$$

$$P = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где P — проективный оператор, выделяющий векторную компоненту из волновой функции. В однородном электрическом поле $A_t = -Ez$, $F_{tz} = F_{03} = E$ уравнение записывается в виде

$$\Big[\beta^0\left(\frac{\partial}{\partial z} + iEz\right) + \beta^1\frac{\partial}{\partial x} + \beta^2\frac{\partial}{\partial y} + \\ + \beta^3\frac{\partial}{\partial z} + \Gamma J^{03}P - M\Big]\Psi = 0, \qquad (2)$$

где размерности величин такие:

$$[M] = 1/L,\ \Gamma = i\lambda E, |,\ [\Gamma] = 1/L,$$
$$[E] = 1/L^2,\ [t] = 1/L;$$

величина Γ — чисто мнимая. Для волновой функции используем подстановку

$$\Psi = e^{-i\epsilon t}e^{iax}e^{iby}\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = (h_0(z), h_1(z), h_2(z), h_3(z))^t,$$

$$H_2 = (E_1(z), E_2(z), E_3(z), B_1(z), B_2(z), B_3(z))^t,$$

где t обозначает транспонирование. Соответственно, уравнение принимает вид

$$\Big[i(Ez - \epsilon)\beta^0 + ia\beta^1 + ib\beta^2 + \\ + \beta^3\frac{d}{dz} + \Gamma j^{03}P - M\Big]\Psi(z) = 0. \qquad (3)$$

При использовании блочной формы

$$\beta^a = \begin{pmatrix} 0 & L^a \\ K^a & 0 \end{pmatrix}$$

имеем два уравнения

$$\Big[i(Ez - \epsilon)L^0 + iaL^1 + ibL^2 + \\ + L^3\frac{d}{dz}\Big]H_2 + \Gamma j_1^{03}H_1 - MH_1 = 0, \qquad (4)$$

$$\Big[i(Ez - \epsilon)K^0 + iaK^1 + ibK^2 + \\ + K^3\frac{d}{dz}\Big]H_1 - MH_2 = 0. \qquad (5)$$

Приводим явный вид всех матриц в декартовом базисе

$$L^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$j_1^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$j_2^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После простых вычислений получаем систему уравнений по переменной z

$$\begin{aligned}
&-iaE_1 - ibE_2 + \Gamma h_3 - E_3' = mh_0,\\
&-ibB_3 - i(Ez-\epsilon)E_1 + B_2' = Mh_1,\\
&\ iaB_3 - i(Ez-\epsilon)E_2 - B_1' = Mh_2,\\
&\ ibB_1 - iaB_2 - i(Ez-\epsilon)E_3 + \Gamma h_0 = Mh_3,\\
&-iah_0 + i(Ez-\epsilon)h_1 = ME_1,\\
&-ibh_0 + i(Ez-\epsilon)h_2 = ME_2,\\
&\ i(Ez-\epsilon)h_3 - h_{0'} = ME_3,\\
&\ ibh_3 - h_2' = MB_1,\\
&-iah_3 + h_1' = MB_2,\\
&-ibh_1 + iah_2 = MB_3,
\end{aligned} \tag{6}$$

где штрих обозначает производную по z.

2. Проективные операторы, метод Федорова-Гронского

Ниже будем использовать метод Федорова-Гронского [8]. Пусть

$$Y = \begin{pmatrix} j_1^{03} & 0 \\ 0 & J_2^{03} \end{pmatrix}.$$

Убеждаемся, что выполняется минимальное уравнение $Y(Y-1)(Y+1)=0$. Это уравнение позволяет ввести три проективных оператора

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}Y(Y+1), \quad \Pi_2 = \frac{1}{2}Y(Y-1), \quad \Pi_3 = 1 - Y^2. \tag{7}$$

С учетом их явного вида получаем выражения для трех проективных составляющих

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = \Pi_1\Psi =\\
&= (h_0, \frac{1}{2}h_1, \frac{1}{2}h_2, h_3, E_1, E_2, \frac{1}{2}E_3, B_1, B_2, \frac{1}{2}B_3)^t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi_2 = \Pi_2\Psi =\\
&= (0, -\frac{1}{2}h_1, -\frac{1}{2}h_2, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}E_3, 0, 0, -\frac{1}{2}B_3)^t,\\
&\Psi_3 = \Pi_3\Psi = (0, h_1, h_2, 0, 0, 0, E_3, 0, 0, B_3)^t.
\end{aligned}$$

Будем рассматривать переменную Ψ_3 как основную, она зависит от функций h_1, h_2, E_3, B_3. Сначала шесть уравнений из системы (6) решаем как алгебраические относительно неосновных переменных $h_0, h_3, E_1, E_2, B_1, B_2$, это дает

$$\begin{aligned}
h_0 = -&\frac{1}{(a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^2}\big[-ah_1(a^2+b^2+M^2)\cdot\\
&\cdot(Ez-\epsilon) - a^2bEzh_2 + a^2b\epsilon h_2 + a^2ME_3' + ia\Gamma Mh_1' +\\
&+ b^3(-E)zh_2 + b^3\epsilon h_2 + b^2ME_3' - bM^2Ezh_2 + bM^2\epsilon h_2 +\\
&+ ib\Gamma Mh_2' + M^3E_3' + i\Gamma M^2E_3(Ez-\epsilon)\big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3 = -&\frac{1}{(a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^2}\big[i(a^3h_1' + ME_3\times\\
&\times(a^2+b^2+M^2)(Ez-\epsilon) + b(a^2+b^2+M^2)h_2' + ab^2h_1' +\\
&+ aM^2h_1' + ia\Gamma Mh_1(Ez-\epsilon) + ib\Gamma MEzh_2 -\\
&- ib\Gamma M\epsilon h_2 - i\Gamma M^2E_3)\big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1 = -&\frac{1}{M(a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^3}\big[i(a(bh_2\times\\
&\times(a^2+b^2+M^2)(Ez-\epsilon) - M((a^2+b^2+M^2)E_3' +\\
&+ i\Gamma(ah_1'+bh_2))) - h_1(Ez-\epsilon)((b^2+M^2)(a^2+b^2+M^2) -\\
&- \Gamma^2M^2) - ia\Gamma M^2E_3(Ez-\epsilon))\big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 = -&\frac{1}{M(a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^3}\big[i(a^4Ezh_2 -\\
&- a^4\epsilon h_2 - abh_1(a^2+b^2+M^2)(Ez-\epsilon) +\\
&+ a^2b^2Ezh_2 - a^2b^2\epsilon h_2 + a^2bME_3' +\\
&+ 2a^2M^2Ezh_2 - 2a^2M^2\epsilon h_2 + iab\Gamma Mh_1' +\\
&+ b^3ME_3' + b^2M^2Ezh_2 - b^2M^2\epsilon h_2 + ib^2\Gamma Mh_2' +\\
&+ bM^3E_3' + ib\Gamma M^2E_3(Ez-\epsilon) + M^4Ezh_2 -\\
&- M^4\epsilon h_2 - \Gamma^2M^2Ezh_2 + \Gamma^2M^2\epsilon h_2)\big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = &\frac{1}{M(a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^3}\big[bM((Ez-\epsilon)\times\\
&\times(E_3(a^2+b^2+M^2) + i\Gamma(ah_1+bh_2)) - i\Gamma ME_3') -\\
&- ah_2'((a^2+M^2)(a^2+b^2+M^2) - \Gamma^2M^2) +\\
&+ ab(a^2+b^2+M^2)h_1'\big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = &\frac{1}{M(a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^3}[-aME_3\times\\
&\times(a^2+b^2+M^2)(Ez-\epsilon) - ab(a^2+b^2+M^2)h_2' +\\
&+ a^2b^2h_1' + a^2M^2h_1' - ia^2\Gamma Mh_1(Ez-\epsilon) -\\
&- iab\Gamma MEzh_2 + iab\Gamma M\epsilon h_2 + ia\Gamma M^2E_3' +\\
&+ b^4h_1' + 2b^2M^2h_1' + M^4h_1' - \Gamma^2M^2h_1'\big].
\end{aligned}$$

Полученные выражения подставляем в оставшиеся четыре уравнения; в результате находим уравнения для основных функций h_1, h_2, E_3, B_3. Будем использовать новые переменные

$$G = ah_1 + bh_2, \quad H = bh_1 - ah_2, \tag{8}$$

тогда уравнения для функций G, H, E_3, B_3 запишутся так:

$$\begin{aligned}
1)\quad &-\frac{a\big(a^2E + b^2E + M\big(ME - i\Gamma(\epsilon - Ez)^2\big)\big)}{(a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^2}E_3 +\\
&+ \frac{ia\Gamma M}{(a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^2}E_3'' +\\
&+ \frac{aM(a^2+b^2-\Gamma^2+M^2)}{(a^2+b^2)\big((a^2+b^2+M^2)^2 - \Gamma^2M^2\big)}G'' +
\end{aligned}$$

$$+\frac{b}{(a^2+b^2)M}H''-\frac{b\big(M^2-(\epsilon-Ez)^2\big)}{M(a^2+b^2)}H-$$

$$-\frac{1}{(a^2+b^2)\big((a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2\big)}a\big[a^4M+$$

$$+a^2(2b^2M+2M^3-M(\epsilon-Ez)^2+i\Gamma E)+b^4M+$$

$$+b^2(2M^3-M(\epsilon-Ez)^2+i\Gamma E)+M(M-\Gamma)(\Gamma+M)\times$$

$$\times\big(M^2-(\epsilon-Ez)^2\big)\big]G-ibB_3=0,$$

$$2)\quad -\frac{b\big(a^2E+b^2E+M\big(ME-i\Gamma(\epsilon-Ez)^2\big)\big)}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}E_3+$$

$$+\frac{ia\Gamma M}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}E_3''+$$

$$+\frac{bM(a^2+b^2-\Gamma^2+M^2)}{(a^2+b^2)((a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2)}G''-$$

$$-\frac{a}{M(a^2+b^2}H''+\frac{a(M^2-(\epsilon-Ez)^2)}{M(a^2+b^2)}H-$$

$$-\frac{1}{(a^2+b^2)\big((a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2\big)}b\big[a^4M+$$

$$+a^2\big(2b^2M+2M^3-M(\epsilon-Ez)^2+i\Gamma E\big)+b^4M+$$

$$+b^2\big(2M^3-M(\epsilon-Ez)^2+i\Gamma E\big)+M(M-\Gamma)(\Gamma+M)\times$$

$$\times\big(M^2-(\epsilon-Ez)^2\big)\big]G+iaB_3=0,$$

$$3)\quad \frac{M(a^2+b^2+M^2)}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}E_3''+$$

$$+\frac{1}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}M\big[-a^4+a^2(-2b^2-$$

$$-2M^2+(\epsilon-Ez)^2)-b^4+b^2((\epsilon-Ez)^2-2M^2)+$$

$$+M\big(-M^3+M\big(\Gamma^2+(\epsilon-Ez)^2\big)+i\Gamma E\big)\big]E_3+$$

$$+\frac{i\Gamma M}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}G''-$$

$$-\frac{\big(a^2E+b^2E+M\big(ME-i\Gamma(\epsilon-Ez)^2\big)\big)}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}G=0,$$

$$4)\quad -MB_3-iH=0\Rightarrow B_3=-\frac{i}{M}H.$$

Складываем и вычитаем уравнения 1) и 2), в результате получаем

$$\frac{i\Gamma M(a+b)}{(a^2+b^2+M^2)-\Gamma^2M^2}E_3''-$$

$$-\frac{(a+b)\big(a^2E+b^2E+M\big(ME-i\Gamma(\epsilon-Ez)^2\big)\big)}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}E_3+$$

$$+\frac{(b-a)}{M(a^2+b^2)}H''+\frac{(a-b)\big(M^2-(\epsilon-Ez)^2\big)}{M(a^2+b^2)}H+$$

$$+\frac{M(a+b)(a^2+b^2-\Gamma^2+M^2)}{(a^2+b^2)\big((a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2\big)}G''+$$

$$+\frac{1}{(a^2+b^2)\big((a^2+b^2+M^2)-\Gamma^2M^2\big)}(a+b)\big[a^4(-M)+$$

$$+a^2\big(-2b^2M-2M^3+M(\epsilon-Ez)^2-i\Gamma E\big)-b^4M+$$

$$+b^2\big(-2M^3+M(\epsilon-Ez)^2-i\Gamma E\big)-M(M^2-\Gamma^2)\times$$

$$\times(M+Ez-\epsilon)(M-Ez+\epsilon)\big]G+i(a-b)B_3=0;$$

$$\frac{i\Gamma M(a-b)}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}E_3''-$$

$$-\frac{(a-b)\big(a^2E+b^2E+M\big(ME-i\Gamma(\epsilon-Ez)^2\big)\big)}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}E_3+$$

$$+\frac{(a+b)}{a^2M+b^2M}H''-\frac{(a+b)\big(M^2-(\epsilon-Ez)^2\big)}{M(a^2+b^2)}H+$$

$$+\frac{M(a-b)(a^2+b^2-\Gamma^2+M^2)}{(a^2+b^2)\big((a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2\big)}G''+$$

$$+\frac{1}{(a^2+b^2)\big((a^2+b^2+M^2)-\Gamma^2M^2\big)}(a+b)\big[a^4(-M)+$$

$$+a^2\big(-2b^2M-2M^3+M(\epsilon-Ez)^2-i\Gamma E\big)-b^4M+$$

$$+b^2\big(-2M^3+M(\epsilon-Ez)^2-i\Gamma E\big)-M(M^2-\Gamma^2)\times$$

$$\times(M+Ez-\epsilon)(M-Ez+\epsilon)\big]G-i(a+b)B_3=0.$$

Данные уравнения можно записать в более короткой форме, если использовать обозначения

$$K=\frac{i\Gamma M}{D},$$

$$L=\frac{a^2E+b^2E+M\big(ME-i\Gamma(\epsilon-Ez)^2\big)}{D},$$

$$N=-\frac{1}{M(a^2+b^2)},\quad P=\frac{M^2-(\epsilon-Ez)^2}{M(a^2+b^2)},$$

$$O=\frac{M(a^2+b^2-\Gamma^2+M^2)}{(a^2+b^2)D},$$

$$T=\frac{1}{(a^2+b^2)D}\big[-Ma^4+a^2\big(-2b^2M-2M^3+$$

$$+M(\epsilon-Ez)^2-i\Gamma E\big)-b^4M+b^2\big(-2M^3+M(\epsilon-Ez)^2-$$

$$-i\Gamma E\big)-M(M^2-\Gamma^2)\big(M^2-(\epsilon-Ez)^2\big)\big],$$

$$D=(a^2+b^2+M^2)-\Gamma^2M^2.$$

Тогда они примут вид

$$(a+b)\left[K\frac{d^2}{dz^2}-L\right]E_3+(a-b)\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P\right]H+$$

$$+(a+b)\left[O\frac{d^2}{dz^2}+T\right]G+i(a-b)B_3=0,$$

$$(a-b)\left[K\frac{d^2}{dz^2}-L\right]E_3-(a+b)\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P\right]H+$$

$$+(a-b)\left[O\frac{d^2}{dz^2}+T\right]G-i(a+b)B_3=0. \quad (9)$$

В (9) первое уравнение разделим на $(a+b)$, а второе — на $(a-b)$

$$\left[K\frac{d^2}{dz^2}-L\right]E_3+\frac{a-b}{a+b}\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P\right]H+$$

$$+\left[O\frac{d^2}{dz^2}+T\right]G+i\frac{a-b}{a+b}B_3=0,$$

$$\left[K\frac{d^2}{dz^2}-L\right]E_3-\frac{a+b}{a-b}\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P\right]H+$$

$$+\left[O\frac{d^2}{dz^2}+T\right]G-i\frac{a+b}{a-b}B_3=0 \qquad (10)$$

и вычтем результаты, получим

$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left\{\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P\right]H+iB_3\right\}=0.$$

Откуда следует

$$\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P\right]H+iB_3=0. \qquad (11)$$

Из (11), учитывая четвертое уравнение

$$iB_3=\frac{H}{M}, \qquad (12)$$

находим уравнение для функции H:

$$\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P+\frac{1}{M}\right]H=0. \qquad (13)$$

Теперь первое уравнение в (9) разделим на $(a-b)$, а второе — на $(a+b)$

$$\frac{a+b}{a-b}\left[K\frac{d^2}{dz^2}-L\right]E_3+\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P\right]H+$$

$$+\frac{a+b}{a-b}\left[O\frac{d^2}{dz^2}+T\right]G+iB_3=0,$$

$$\frac{a-b}{a+b}\left[K\frac{d^2}{dz^2}-L\right]E_3-\left[N\frac{d^2}{dz^2}+P\right]H+$$

$$+\frac{a-b}{a+b}\left[O\frac{d^2}{dz^2}+T\right]G-iB_3=0. \qquad (14)$$

Складывая два последних уравнения, получаем

$$\left[K\frac{d^2}{dz^2}-L\right]E_3+\left[O\frac{d^2}{dz^2}+T\right]G=0. \qquad (15)$$

Осталось неиспользованным третье уравнение

$$3)\quad \frac{M(a^2+b^2+M^2)}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}E_3''+$$

$$+\frac{1}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}M\big[-a^4+a^2(-2b^2-$$

$$-2M^2+(\epsilon-Ez)^2)-b^4+b^2((\epsilon-Ez)^2-2M^2)+$$

$$+M\big(-M^3+M\big(\Gamma^2+(\epsilon-Ez)^2\big)+i\Gamma E\big)\big]E_3+$$

$$+\frac{i\Gamma M}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}G''-$$

$$-\frac{\big(a^2E+b^2E+M\big(ME-i\Gamma(\epsilon-Ez)^2\big)\big)}{(a^2+b^2+M^2)^2-\Gamma^2M^2}G=0,$$

его можно записать так:

$$\left(O'\frac{d^2}{dz^2}+T'\right)E_3+\left(K\frac{d^2}{dz^2}-L\right)G=0, \qquad (16)$$

где учитываем прежние и добавленные обозначения

$$O'=\frac{1}{D}M(a^2+b^2+M^2),$$

$$T'=\frac{1}{D}\Big[-Ma^4-2Ma^2b^2-2M^3a^2+Ma^2(\epsilon-Ez)^2-$$

$$-Mb^4+Mb^2(\epsilon-Ez)^2-2M^3b^2-M^5+$$

$$+M^3\Gamma^2+M^3(\epsilon-Ez)^2+iM^2\Gamma E\Big].$$

Выпишем уравнения для функций E_3, G (пусть $E_3=F$):

$$\left(K\frac{d^2}{dz^2}-L\right)F+\left(O\frac{d^2}{dz^2}+T\right)G=0,$$

$$\left(O'\frac{d^2}{dz^2}+T'\right)F+\left(K\frac{d^2}{dz^2}-L\right)G=0. \qquad (17)$$

Умножаем первое уравнение в (17) на некоторый параметр α, второе — на параметр β и результаты складываем. Есть две возможности.

Первая возможность:

$$\alpha K+\beta O'=1,\quad \alpha O+\beta K=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d^2}{dz^2}F+(-\alpha L+\beta T')F+(\alpha T-\beta L)G=0,$$

при этом

$$\alpha=\frac{K}{K^2-OO'}=-\frac{i\Gamma(a^2+b^2)}{M},$$

$$\beta=-\frac{O}{K^2-OO'}=\frac{a^2+b^2-\Gamma^2+M^2}{M} \qquad (18)$$

и уравнение 2-го порядка принимает вид

$$\frac{d^2}{dz^2}F+\Bigg(-a^2-b^2+\Gamma^2-M^2+$$

$$+\frac{i\Gamma E}{M}+W^2\Bigg)F+\left(-\frac{E}{M}+i\Gamma\right)G=0. \qquad (19)$$

Вторая возможность:

$$\alpha K+\beta O'=0,\quad \alpha O+\beta K=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-\alpha L+\beta T')F+\frac{d^2}{dz^2}G+(\alpha T-\beta L)G=0,$$

при этом

$$\alpha=\frac{O'}{OO'-K^2}=\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2+M^2)}{M},$$

$$\beta=-\frac{K}{OO'-K^2}=-\frac{i\Gamma(a^2+b^2)}{M} \qquad (20)$$

и уравнение 2-го порядка примет вид

$$\left(-\frac{(a^2+b^2)(E-i\Gamma M)}{M}\right)F+\frac{d^2}{dz^2}G+$$
$$+(-a^2-b^2-M^2+W^2)G=0. \qquad (21)$$

После необходимых вычислений находим явный вид уравнений (19) и (21):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+W^2-a^2-b^2-M^2\right)F=$$
$$=-\Gamma\left(\Gamma+\frac{iE}{M}\right)F-i\left(\Gamma+\frac{iE}{M}\right)G,$$
$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+W^2-a^2-b^2-M^2\right)G=$$
$$=-i(a^2+b^2)\left(\Gamma+\frac{iE}{M}\right)F. \qquad (22)$$

Введем обозначения

$$\Delta=\left(\frac{d^2}{dz^2}+W^2-a^2-b^2-M^2\right),$$
$$a^2+b^2=p^2, \quad \Gamma+\frac{iE}{M}=\sigma=i\lambda E+\frac{iE}{M},$$

тогда система принимает вид

$$\Delta F=-\sigma\Gamma F-i\sigma G, \quad \Delta G=-i\sigma p^2 F,$$

или

$$\Delta\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix}=-\sigma A\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}\Gamma & i\\ ip^2 & 0\end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Найдем преобразование, диагонализирующее матрицу смешивания A:

$$\Delta\Psi=-\sigma A\Psi,\ \Psi'=S\Psi,\ S^{-1}\psi'=\Psi\Rightarrow$$
$$\Delta\Psi'=-\sigma SAS^{-1}\Psi', \quad \Psi'=\begin{pmatrix}\bar F\\ \bar G\end{pmatrix},$$

т. е. получаем уравнение

$$SAS^{-1}=A'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma & i\\ ip^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix}\Gamma-\lambda_1 & ip^2\\ i & -\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11}\\ s_{12}\end{pmatrix}=0,$$
$$\begin{pmatrix}\Gamma-\lambda_2 & ip^2\\ i & -\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{21}\\ s_{22}\end{pmatrix}=0.$$

С учетом уравнения для диагональных элементов $-\Gamma\lambda+\lambda^2+p^2=0$ находим следующее решение:

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\Gamma-\sqrt{\Gamma^2-4p^2}\right)=\frac{i}{2}\left(\lambda E-\sqrt{\lambda^2E^2+4p^2}\right),$$
$$is_{11}=\lambda_1 s_{12}, \quad s_{11}=-i\Rightarrow s_{12}=\frac{1}{\lambda_1};$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left(\Gamma+\sqrt{\Gamma^2-4p^2}\right)=\frac{i}{2}\left(\lambda E+\sqrt{\lambda^2E^2+4p^2}\right),$$
$$is_{21}=\lambda_2 s_{22}, \quad s_{21}=-i\Rightarrow s_{22}=\frac{1}{\lambda_2}. \qquad (24)$$

Таким образом, матрица преобразования S задается соотношениями

$$S=\begin{pmatrix}-i & \dfrac{1}{\lambda_1}\\ -i & \dfrac{1}{\lambda_2}\end{pmatrix},$$
$$S^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{i\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & -\dfrac{i\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\\ -\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} & \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\end{pmatrix}. \qquad (25)$$

После выполненного преобразования имеем два раздельных уравнения:

$$(\Delta+\sigma\lambda_1)\bar F=0, \quad (\Delta+\sigma\lambda_2)\bar G=0,$$
$$\Delta=\frac{d^2}{dz^2}+W^2-p^2-M^2. \qquad (26)$$

Их решения будут приведены в следующем разделе.

3. Построение решений основного уравнения

Уравнения (26) имеют ту же структуру, что и в случае обычной скалярной частицы во внешнем электрическом поле

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+(Ez+\epsilon)^2-\mu^2\right)\Phi(z)=0. \qquad (27)$$

Преобразуем уравнение (27) к новой переменной (предполагаем, что $E>0$): $Z=i(Ez+\epsilon)^2/E$, $\sigma=\mu^2/4E$, в результате получаем

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2}+\frac{1/2}{Z}\frac{d}{dZ}-\frac{1}{4}+\frac{i\sigma}{Z}\right)\Phi(Z)=0. \qquad (28)$$

Это уравнение с двумя особыми точками. Точка $Z=0$ регулярная, поведение решений около нее задается формулами $Z\to 0$, $\Phi(Z)=Z^A$, $A=0,\frac{1}{2}$. Точка $Z=\infty$ нерегулярная, ее ранг равен 2. Действительно, переходя к обратной переменной $y=Z^{-1}$, получим

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\frac{3/2}{y}\frac{d}{dy}-\frac{1}{4y^4}+\frac{i\sigma}{y^3}\right)\Phi=0. \qquad (29)$$

Асимптотическое поведение при $y\to 0$ должно иметь структуру $\Phi=y^Ce^{D/y}$, откуда следует

$$D_1=\frac{1}{2}, \quad C_1=\frac{1}{4}+i\sigma;$$
$$D_2=-\frac{1}{2},\ C_2=\frac{1}{4}-i\sigma. \qquad (30)$$

На бесконечности возможны два типа асимптотик:

$$Z\to\infty, \quad \Phi=Z^{-C}e^{DZ}=$$

$$= \begin{cases} Z^{-C_1} e^{D_1 Z} = Z^{-1/4 - i\sigma} e^{Z/2} \\ Z^{-C_2} e^{D_2 Z} = Z^{-1/4 + i\sigma} e^{-Z/2}, \end{cases} \quad (31)$$

где (используем главную ветвь логарифмической функции)

$$Z = i\frac{(\epsilon + Ez)^2}{E} = iZ_0,$$

$$Z_0 > 0, \quad e^{\pm Z/2} = e^{\pm iZ_0/2},$$

$$Z^{-1/4 \mp i\sigma} = (e^{lniZ_0})^{-1/4 \mp i\sigma} = \left(e^{lnZ_0 + i\pi/2}\right)^{-1/4 \mp i\sigma}.$$

Найдем решения во всей области изменения переменной Z. Для этого применим подстановку $\Phi(Z) = Z^A e^{BZ} f(Z)$, что приводит к

$$\left[Z\frac{d^2}{dZ^2} + \left(2A + \frac{1}{2} + 2BZ\right)\frac{d}{dZ} + \sigma\right] f(Z) = 0.$$

Учитывая ограничения $A = 0, 1/2,\ B = -1/2$, упрощаем уравнение до следующего:

$$\left[Z\frac{d^2}{dZ^2} + \left(2A + 1/2 - Z\right)\frac{d}{dy} - \left(A + 1/4 - i\sigma\right)\right] f(Z) = 0,$$

Данное уравнение вырожденного гипергеометрического типа с параметрами

$$a = A + \frac{1}{4} - i\sigma, \quad c = 2A + \frac{1}{2},$$

$$f(Z) = Z^A e^{-Z/2} F(a, c; Z). \quad (32)$$

Без потери общности полагаем

$$A = 0, \quad a = \frac{1}{4} - i\sigma, \quad c = \frac{1}{2},$$

$$\Phi(Z) = e^{-Z/2} f(Z). \quad (33)$$

Уравнение вырожденного гипергеометрического типа имеет разные наборы линейно независимых решений. Сначала рассмотрим следующую пару:

$$Y_1(Z) = F(a, c; Z) = e^Z F(c - a, c; -Z), \quad (34)$$

$$Y_2(Z) = Z^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c; Z) =$$

$$= Z^{1-c} e^Z F(1 - a, 2 - c; -Z). \quad (35)$$

Это приводит к полным решениям в виде

$$\Phi_1 = e^{-Z/2} F(a, c; Z) = e^{Z/2} F(c - a, c; -Z), \quad (36)$$

$$\Phi_2 = e^{-Z/2} Z^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c; Z) =$$

$$= Z^{1-c} e^{+Z/2} F(1 - a, 2 - c; -Z). \quad (37)$$

Учитывая тождества

$$c = \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{4} - i\sigma,$$

$$c - a = \frac{1}{4} + i\sigma = a^*,\ c = c^* = \frac{1}{2},\ Z^* = -Z,$$

$$a - c + 1 = \frac{3}{4} - i\sigma = (1 - a)^*,\ (2 - c) = (2 - c)^* = \frac{3}{2},$$

заключаем, что решение для $\Phi_1(Z)$ задается вещественной функцией, а второе решение $\Phi_2(Z)$ обладает простой симметрией относительно комплексного сопряжения:

$$\Phi_1(Z) = [\Phi_1(Z)]^*, \quad \Phi_2(Z) = i[\Phi_2(Z)]^*. \quad (38)$$

Это свойство можно представить иначе, если воспользоваться другой нормировкой:

$$\bar{\Phi}_2(Z) = \frac{1 - i}{\sqrt{2}} \Phi_2(Z) =$$

$$= \left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}} \Phi_2(Z)\right)^* = \left(\bar{\Phi}_2(Z)\right)^*. \quad (39)$$

При малых Z решения ведут себя так:

$$Y_1(Z) \approx 1, \quad Y_2(Z) \approx \sqrt{Z} =$$

$$= \sqrt{iZ_0} = \sqrt{\frac{i}{eE}} (\epsilon + eEz); \quad (40)$$

$$\Phi_1(Z) \approx 1, \quad \Phi_2(Z) \approx \sqrt{Z} =$$

$$= \sqrt{iZ_0} = \sqrt{\frac{i}{eE}} (\epsilon + eEz). \quad (41)$$

При больших $Z = iZ_0,\ Z_0 \to +\infty$ имеем следующую асимптотическую формулу:

$$F(a, c, Z) = \left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c - a)} (-Z)^{-a} + \ldots\right) +$$

$$+ \left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^Z Z^{a-c} + \ldots\right). \quad (42)$$

Учитывая тождества

$$(-Z)^{-a} = (-iZ_0)^{-1/4 + i\sigma} = \left(e^{\ln Z_0 - i\pi/2}\right)^{-1/4 + i\sigma} =$$

$$= e^{-(-1/4 + i\sigma) i\pi/2} e^{(-1/4 + i\sigma) \ln Z_0},$$

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c - a)} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 + i\sigma)}, \quad \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - i\sigma)},$$

получаем

$$Y_1(Z) = F(a, c, Z) = e^{iZ_0/2} \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 + i\sigma)} \times \right.$$

$$\times e^{-(-1/4 + i\sigma) i\pi/2} e^{(-1/4 + i\sigma) \ln Z_0} e^{-iZ_0/2} + \quad (43)$$

$$\left. + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - i\sigma)} e^{(-1/4 - i\sigma) i\pi/2} e^{(-1/4 - i\sigma) \ln Z_0} e^{+iZ_0/2} \right\}.$$

Отсюда, после перехода к полной функции $\Phi_1(Z)$, получим

$$\Phi_1(Z) = \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 + i\sigma)} \times \right.$$

$$\times e^{-(-1/4 + i\sigma) i\pi/2} e^{(-1/4 + i\sigma) \ln Z_0} e^{-iZ_0/2} + \quad (44)$$

$$\left. + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - i\sigma)} e^{+(-1/4 - i\sigma) i\pi/2} e^{(-1/4 - i\sigma) \ln Z_0} e^{+iZ_0/2} \right\}.$$

В (44) можно увидеть два сопряженных друг другу слагаемых. Аналогично исследуется поведение и второго решения

$$F(a-c+1,2-c,Z)=\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}(-Z)^{-a+c-1}+$$

$$+\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}e^{Z}Z^{a-1}. \qquad (45)$$

Отсюда, с учетом равенств

$$(-Z)^{-a+c-1}=$$

$$=(-iZ_0)^{-3/4+i\sigma}=(e^{\ln Z_0-i\pi/2})^{-3/4+i\sigma}=$$

$$=e^{-(-3/4+i\sigma)i\pi/2}e^{(-3/4+i\sigma)\ln Z_0},$$

$$Z^{a-1}=(iZ_0)^{-3/4-i\sigma}=(e^{\ln Z_0+i\pi/2})^{-3/4-i\sigma}=$$

$$=e^{(-3/4-i\sigma)i\pi/2}e^{(-3/4-i\sigma)\ln Z_0},$$

$$\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)},$$

$$\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)},$$

получаем следующее поведение на бесконечности

$$F(a-c+1,2-c,Z)=e^{iZ_0/2}\Big\{\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)}\times$$

$$\times e^{-(-3/4+i\sigma)i\pi/2}e^{(-3/4+i\sigma)\ln Z_0}e^{-iZ_0/2}+$$

$$+\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)}e^{(-3/4-i\sigma)i\pi/2}\times$$

$$\times e^{(-3/4-i\sigma)\ln Z_0}e^{+iZ_0/2}\Big\}. \qquad (46)$$

Соотвественно, для функции $\Phi_2(Z)$ находим выражение (учтем, что $\sqrt{Z}=e^{(1/2)(\ln Z_0+i\pi/2)}$)

$$\Phi_2(Z)=\sqrt{Z}Z^{1/2}F(a-c+1,2-c,Z)=$$

$$=e^{i\pi/4}\Big\{\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)}e^{-(-3/4+i\sigma)i\pi/2}\times$$

$$\times e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0}e^{-iZ_0/2}+$$

$$+\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)}e^{(-3/4-i\sigma)i\pi/2}\times$$

$$\times e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0}e^{+iZ_0/2}\Big\}. \qquad (47)$$

Можно построить два решения, которые на бесконечности будут вести себя как комплексно сопряженные функции. Для этого нужно использовать другую пару решений гипергеометрического уравнения:

$$Y_5(Z)=\Psi(a,c;Z),\quad Y_7(Z)=e^{Z}\Psi(c-a,c;-Z).$$

Две пары $\{Y_5,Y_7\}$ и $\{Y_1,Y_2\}$ связаны преобразованиями Кеммера

$$Y_5=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}Y_1+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}Y_2,$$

$$Y_7=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)}Y_1-\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi c}Y_2. \qquad (48)$$

С учетом этого легко находим поведение функций при $|Z|\to\infty$

$$Y_5=\Psi(a,c;Z)=Z^{-a}=$$

$$=(iZ_0)^{-1/4+i\sigma}=\left(e^{\ln Z_0+i\pi/2}\right)^{-1/4+i\sigma},$$

$$Y_7(Z)=e^{Z}\Psi(c-a,c;-Z)=e^{Z}\,(-iZ_0)^{a-c}=$$

$$=e^{iZ_0}\,(-iZ_0)^{-1/4-i\sigma}=$$

$$=e^{iZ_0}\left(e^{\ln Z_0-i\pi/2}\right)^{-1/4-i\sigma} \qquad (49)$$

или

$$\Phi_5=e^{-Z/2}Y_5=$$

$$=e^{-iZ_0/2}\left(e^{\ln Z_0+i\pi/2}\right)^{-1/4+i\sigma},$$

$$\Phi_7=e^{-Z/2}Y_7(Z)=$$

$$=e^{+iZ_0/2}\left(e^{\ln Z_0-i\pi/2}\right)^{-1/4-i\sigma}. \qquad (50)$$

Эти функции комплексно сопряжены друг другу.

Заключение

Решенная задача допускает обобщение по нескольким направлениям. Так, можно построить решения с цилиндрической симметрией. При этом возникает система из 10 уравнений в частных производных. Зависимость 10 функций от полярной координаты r может быть зафиксирована с использованием проективных операторов, строящихся на основе генератора j^{12}, после чего система из 10 уравнений по координате z решается с применением метода, использованного в настоящей работе. Можно аналогичным способом исследовать уравнение для такой частицы в присутствии внешнего однородного электрического поля, а также учесть два внешних поля одновременно. Наконец, похожий метод исследования применим и в ситуации, когда учитываются две дополнительные характеристики — аномальный магнитный момент и квадрупольный электрический момент. По существу, во всех этих ситуациях срабатывает один и тот же метод Федорова-Гронского, впервые примененный в работе 1960 г. [8]. Можно добавить, что такой подход с использованием проективных операторов применим и в теориях частиц с более высокими значениями спинов, в частности со спинами 3/2 и 2.

Литература

1. Bogush, A.A. Duffin-Kemmer-Petiau formalism reexamined: nonrelativistic approximation for spin 0 and spin 1 particles in the Riemannian space-time / A.A. Bogush, V.V. Kisel, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 2007. – Vol. 32. – № 2–3. – P. 355–381.
2. Kisel, V. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform magnetic field / V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20. – № 1. – P. 21–39.
3. Ovsiyuk, E.M. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform electric field / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Quaternions: Theory and Applications. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 47–84.
4. Ovsiyuk, E.M. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Quaternions: Theory and Applications. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 11–46.
5. Ovsiyuk, E.M. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform electric field / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2018. – Vol. 21. – № 1. – P. 1–20.
6. Kisel, V.V. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol I. General theory / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan [et al.]. – New York: Nova Science Publishers, 2018. – 404 p.
7. Kisel, V.V. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol II. Physical problems / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan [et al.]. – New York: Nova Science Publishers, 2018. – 402 p.
8. Гронский, В.К. Магнитные свойства частицы со спином 3/2 / В.К. Гронский, Ф.И. Федоров // Доклады НАН Беларуси. – 1960. – Т. 4. – № 7. – С. 278–283.

References

1. Bogush, A.A. Duffin-Kemmer-Petiau formalism reexamined: nonrelativistic approximation for spin 0 and spin 1 particles in the Riemannian space-time / A.A. Bogush, V.V. Kisel, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 2007. – Vol. 32. – № 2–3. – P. 355–381.
2. Kisel, V. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform magnetic field / V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20. – № 1. – P. 21–39.
3. Ovsiyuk, E.M. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform electric field / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Quaternions: Theory and Applications. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 47–84.
4. Ovsiyuk, E.M. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Quaternions: Theory and Applications. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 11–46.
5. Ovsiyuk, E.M. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform electric field / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2018. – Vol. 21. – № 1. – P. 1–20.
6. Kisel, V.V. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol I. General theory / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan [et al.]. – New York: Nova Science Publishers, 2018. – 404 p.
7. Kisel, V.V. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol II. Physical problems / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan [et al.]. – New York: Nova Science Publishers, 2018. – 402 p.
8. Gronskiy, V.K. Magnitnyye svoystva chastitsy so spinom 3/2 [Magnetic properties of a particle with spin 3/2] / V.K. Gronskiy, F.I. Fedorov // Doklady NAN Belarusi [Doklady NAS of Belarus]. – 1960. – Vol. 4. – № 7. – P. 278–283.

Для цитирования:
Ивашкевич, А.В. Векторная частица с аномальным магнитным моментом во внешнем однородном электрическом поле / А.В. Ивашкевич, Я.А. Войнова // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 51–59. УДК: 539.12. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-51-59

For citation:
Ivashkevich, A.V. Vector particle with anomalous magnetic moment in an external uniform electric field / A.V. Ivashkevich, Ya.A. Voynova // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 51–59. UDC: 539.12. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-51-59

Дата поступления рукописи: 15.08.2022
Received: 15.08.2022