УДК 517.977 + 62-50
DOI 10.19110/1994-5655-2023-4-10-17

Оптимальное ℓ_1-робастное слежение для авторегрессионного объекта с неизвестной номинальной моделью

В.Ф. Соколов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

sokolov@ipm.komisc.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача оптимального робастного слежения для дискретного объекта с неизвестными параметрами авторегрессионной номинальной модели и неизвестным смещением внешнего ограниченного возмущения. Верхние границы несмещенного внешнего возмущения и норм операторных возмущений по выходу и управлению предполагаются известными. Задача оптимального слежения заключается в минимизации наихудшей гарантированной асимптотической верхней границы ошибки отслеживания заданного ограниченного сигнала. Решение задачи основано на оптимальном множественном оценивании неизвестных и неидентифицируемых параметров и использовании показателя качества задачи слежения как идентификационного критерия. Численная реализация оптимального множественного оценивания в режиме онлайн оказывается возможной благодаря тому, что показатель качества слежения в рассматриваемой задаче является дробно-линейной функцией оцениваемых параметров.

Ключевые слова:

оптимальное управление, робастное управление, адаптивное управление, неопределенность, ограниченное возмущение, множественное оценивание

Optimal ℓ_1-robust tracking for autoregressive plant with unknown nominal model

V.F. Sokolov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

sokolov@ipm.komisc.ru

Abstract

This paper addresses the problem of adaptive optimal robust tracking for a discrete-time plant with unknown parameters of autoregressive nominal model and unknown bias of bounded external disturbance. Upper bounds of unbiased external disturbance and gains of uncertainties in output and control are assumed to be know. The optimal tracking problem is to minimize the guaranteed worst-case steady-state upper bound of the tracking error for a given bounded reference signal. Solution of the problem is based on optimal set-membership estimation of unknown non-identifiable parameters and treating the control criterion as the identification criterion. Optimal on-line set-membership estimation becomes computationally tractable due to a linear-fractional representation of the control criterion.

Keywords:

optimal control, robust control, adaptive control, uncertainty, bounded disturbance, set-membership estimation

Введение

Предметом теории адаптивного управления, зародившейся в 1960-х гг., являются задачи управления системами с неизвестными параметрами. Один из двух известных подходов к синтезу адаптивного управления заключается в прямой настройке по данным измерений параметров регулятора и называется прямым адаптивным управлением. Другой подход базируется на онлайн оценивании неизвестных параметров объекта управления с последующей настройкой регулятора. Этот подход называют идентификационным или непрямым адаптивным управлением. Алгоритмами оценивания в рамках идентификационного подхода служат различные модификации градиентного (проекционного) алгоритма минимизации невязки в уравнении модели управляемого объекта или модификации метода наименьших квадратов. В середине 1980-х гг. в знаменитой статье [1] было показано, что полученные к тому времени алгоритмы адаптивной стабилизации не гарантируют устойчивости даже при малых внешних или операторных возмущениях (немоделируемой динамике). Это стимулировало, с одной стороны, разработку модификаций алгоритмов оценивания для обеспечения устойчивости адаптивных систем при наличии возмущений и, с другой стороны, развитие теории робастного управления, посвященной системам с операторными возмущениями и ставшей главным направлением теории автоматического управления с конца 1970-х гг. на последующие два десятилетия [2]. Однако последующие результаты в теории робастного адаптивного управления базировались в основном на аппарате функций Ляпунова, ограничивались задачами обеспечения устойчивости и не коррелировали с результатами теории робастного управления, в основе которой лежала теорема о малом коэффициенте усиления (small gaim theorem).

Модель внешних ограниченных возмущений породила направление в теории идентификации систем, основанное на использовании множественных оценок неизвестных параметров. Почти все многочисленные публикации этого направления относятся к системам, аффинным относительно неизвестных параметров, и предполагают известными верхние границы возмущений. Множества не сфальсифицированных данными измерений неизвестных параметров таких систем описываются ограниченными многогранниками. Поскольку число линейных неравенств в описании этих многогранников может неограниченно возрастать с ростом числа измерений, основные усилия в этом подходе направлены на получение верхних по включению множественных оценок, имеющих описание ограниченной сложности (параллелотопы, зонотопы, многогранники с заданными направлениями граней, эллипсоиды и т.п.). Однако до настоящего времени нет приложений этих исследований к адаптивному управлению со строгим математическим обоснованием.

В начале 1990-х гг. были получены фундаментальные результаты по устойчивости и робастному качеству систем с неопределенностью и ограниченным внешним возмущением [3]. Позднее были получены явные представления для асимптотических показателей качества таких систем, в том числе для систем слежения [4–7]. Теория робастного управления для таких систем получила название ℓ_1-теории, поскольку индуцированные нормы линейных стационарных операторов на пространстве ограниченных последовательностей ℓ_∞ выражаются через ℓ_1-нормы их импульсных характеристик. Полученные результаты позволили сформулировать общий метод синтеза адаптивного оптимального робастного управления, основанный на идеях множественного оценивания и использования показателя качества задачи управления как идентификационного критерия [8]. Трудность применения метода заключается в сложности онлайн минимизации невыпуклого в общем случае показателя качества на текущих оценках множеств не сфальсифицированных измерениями неизвестных параметров. Однако такая минимизация оказывается возможной для специальных систем.

В статье [9] решалась задача адаптивной оптимальной стабилизации авторегрессионного объекта с неизвестными параметрами номинального объекта, внешнего возмущения и неопределенностей по выходу и управлению при специальном дополнительном предположении о непреднамеренности неопределенности по управлению. Более сложная по сравнению со стабилизацией задача оптимального слежения решалась в работе [10] для объекта с дробно-рациональной передаточной функцией без неопределенности по управлению. Для указанных объектов показатель качества задачи управления является дробно-линейной функцией неизвестных параметров, что делает возможной его онлайн минимизацию. В настоящей статье более сложная задача адаптивного слежения рассматривается для авторегрессионного объекта с неизвестными параметрами номинального объекта и неизвестным смещением внешнего возмущения. Для обеспечения дробно-рационального вида показателя качества верхние границы внешнего несмещенного возмущения и коэффициенты усиления неопределенностей предполагаются известными. Известно, что задача минимизации дробно-рациональных функций при линейных ограничениях сводится к линейному программированию [11], что позволяет применять современное программное обеспечение для синтеза адаптивного оптимального управления для рассматриваемого объекта управления.

Используемые обозначения:
$|\varphi|$ — евклидова норма вектора $\varphi \in \mathbb{R}^n$;
ℓ_e — линейное пространство вещественных последовательностей $x = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$,
$x_s^t = (x_s, x_{s+1}, \ldots, x_t)$ для $x \in \ell_e$;
$|x_s^t| = \max_{s \leqslant k \leqslant t} |x_k|$;
ℓ_∞ — нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup_t |x_t|$;
$\|x\|_{ss} = \limsup_{t\to+\infty} |x_t|$;
ℓ_1 — нормированное пространство абсолютно суммируемых последовательностей с нормой $\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$;
$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k| = \|g\|_1$ — индуцированная норма устойчивой линейной стационарной системы $G : \ell_\infty \to \ell_\infty$ с передаточной функцией $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления с дискретным временем, описываемый уравнением

$$a(q^{-1})y_t = b_1 u_{t-1} + v_t\,, \quad t = 1, 2, 3, \ldots\,, \tag{1}$$

где $y_t \in \mathbb{R}$ — выход объекта в момент времени t, $u_t \in \mathbb{R}$ — управление, $v_t \in \mathbb{R}$ — суммарное возмущение в объекте,

$$a(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}$$

и q^{-1} — оператор сдвига назад ($q^{-1}y_t = y_{t-1}$) на линейном пространстве ℓ_e. Начальные значения $y_{1-n}^0 = (y_{1-n}, \ldots, y_0)$ произвольные, $y_k = 0$ при $k < 1 - n$ и $u_k = 0$ при $k < 0$.

Априорная информация об объекте управления состоит из четырех априорных предположений **АП1–АП4**.

АП1. Вектор коэффициентов

$$\xi := (a_1, \ldots, a_n, b_1)^T \tag{2}$$

номинальной модели (т.е. модели без суммарного возмущения v) принадлежит известному ограниченному многограннику Ξ,

$$\xi \in \Xi = \{\, \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geqslant p \,\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{3}$$

где $P \in \mathbb{R}^{l\times(n+m)}$, $p \in \mathbb{R}^l$ и $b_1 \neq 0$ для любого $\xi \in \Xi$.

АП2. Суммарное возмущение v имеет вид

$$v_t = c^w + \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t\,, \tag{4}$$

где $w \in \ell_\infty$ — *неизвестная* последовательность,

$$\|w\|_\infty \leqslant 1\,, \tag{5}$$

$\delta^w \geqslant 0$ — верхняя граница несмещенного внешнего возмущения $\delta^w w$, c^w — смещение *ограниченного внешнего возмущения* $c^w + \delta^w w$. Операторы $\Delta^1 : \ell_e \to \ell_e$ и $\Delta^2 : \ell_e \to \ell_e$ удовлетворяют при всех t ограничениям

$$|\Delta^1(y)_t| \leqslant |y_{t-\mu}^{t-1}|, \quad |\Delta^2(u)_t| \leqslant |u_{t-\mu}^{t-1}|\,. \tag{6}$$

Параметры $\delta^y \geqslant$ и $\delta^u \geqslant 0$ в (4) — верхние границы индуцированных норм (коэффициентов усиления) операторных возмущений (неопределенностей) Δ^1 и Δ^2 по выходу и управлению соответственно. Параметр μ в неравенствах (6) характеризует память неопределенностей. Она может быть выбрана конструктором сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для качества синтезируемого ниже адаптивного управления.

АП3. Набор верхних границ

$$\delta = (\delta^w, \delta^y, \delta^u) \tag{7}$$

предполагается **известным**, вектор параметров

$$\theta = (\xi^{\mathrm{T}}, c^w)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+2} \tag{8}$$

— **неизвестным**, и $|c^w| \leqslant C^w$ с известной верхней границей $C^w > 0$.

Предположение об известной верхней границе C^w в **АП3** используется только для упрощения доказательств и не ограничительно, поскольку C^w может быть выбрано сколь угодно большим.

В разделе 2 будет сформулировано дополнительное необходимое априорное предположение о робастной стабилизируемости объекта (1).

Априорное предположение **АП2** сформулировано в терминах теории робастного управления в ℓ_1 постановке для удобства последующих ссылок. Согласно этой теории, предположение **АП2** для классов линейных нестационарных или нелинейных операторов Δ^1 и Δ^2 может быть представлено в следующем компактном виде:

$$|v_t - c^w| \leqslant \delta^w + \delta^y p_t^y + \delta^u p_t^u\,, \tag{9}$$

где

$$p_t^y = |y_{t-\mu}^{t-1}|, \quad p_t^u = |u_{t-\mu}^{t-1}|\,. \tag{10}$$

Содержательная постановка рассматриваемой в статье задачи заключается в построении причинной обратной связи вида $u_t = U_t(y_{1-n}^t, u_0^{t-1})$ (но с конечной памятью), гарантирующей как можно меньшую верхнюю границу для асимптотического показателя качества

$$J_\mu(\theta, \delta) = \sup_v \limsup_{t\to+\infty} |y_t - r_t|\,, \tag{11}$$

где r — заданный командный сигнал, т.е. желаемая последовательность выходов объекта управления (1), и sup берется на множестве возмущений v, удовлетворяющих предположению **АП2**. То есть задача заключается в минимизации гарантированной асимптотической верхней границы для модуля ошибки слежения

$$e_t = y_t - r_t \tag{12}$$

в классе возмущений, удовлетворяющих неравенствам (9).

Главная сложность сформулированной оптимальной задачи заключается в неидентифицируемости неизвестного вектора параметров θ.

Строгая формулировка задачи приведена в конце раздела 2 после получения представления для неконсервативной верхней оценки показателя качества J_μ.

2. Оптимальная система с известной номинальной моделью

Для объекта с известным вектором ξ параметров номинальной модели и при известном смещении c^w регулятор

$$u_t = \frac{1}{b_1}[(a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + r_{t+1} - c^w] \tag{13}$$

гарантирует при всех t равенства

$$\begin{aligned} &y_{t+1} - r_{t+1} = v_{t+1} - c^w = \\ &= \delta^w w_{t+1} + \delta^y \Delta^1(y)_{t+1} + \delta^u \Delta^2(u)_{t+1}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Из непредсказуемости и произвольности значений правой части (14) в момент вычисления управления u_t следует, что регулятор (13) является оптимальным для показателя качества (11). Введем обозначение для передаточной функции от y к u регулятора (13) :

$$G^\xi(\lambda) = \frac{a(\lambda) - 1}{b_1 \lambda} = \frac{1}{b_1}\sum_{k=1}^n a_k\,\lambda^{k-1}\,,$$

благодаря чему регулятор (13) принимает вид

$$u_t = G^\xi(q^{-1})y_t + r_{t+1}/b_1 - c^w/b_1\,, \tag{15}$$

и

$$\|G^\xi\| = \frac{1}{|b_1|}\sum_{k=1}^n |a_k|\,. \tag{16}$$

Определение 1. Замкнутая система (1), (13) называется *робастно устойчивой* в классе возмущений (4), если значение показателя качества (11) конечно.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $|r|$ равномерно часто попадает в окрестности верхнего предела $\|r\|_{ss}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T > 0$ и возрастающая последовательность $(t_1, t_2, \dots)$ такие, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad 0 < t_{j+1} - t_j \leqslant T \wedge |r_{t_{j+1}}| \geqslant \|r\|_{ss} - \varepsilon\,.$$

Качество оптимальной системы (1), (13) представлено в теореме 1.

Теорема 1. Для замкнутой системы (1), (13) справедливы следующие утверждения.

1. Система робастно устойчива при $\mu = +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\delta^y + \delta^u \|G^\xi\| < 1\,. \tag{17}$$

Для системы с нулевыми начальными данными y_{1-n}^0

$$J_{+\infty}(\theta,\delta)=\frac{\delta^w+\delta^y\|r\|_{ss}+\dfrac{\delta^u}{|b_1|}(|c^w|+\|r\|_{ss})}{1-\delta^y-\delta^u\|G^\xi\|}. \tag{18}$$

2. Для системы с любыми начальными данными y_{1-n}^0

$$J_\mu(\theta,\delta)\leqslant J_{+\infty}(\theta,\delta)$$

для любой памяти $\mu>0$. Если в любую окрестность верхнего предела $\|r\|_{ss}$ последовательность $|r|$ попадает равномерно часто, то при любых начальных данных

$$J_\mu(\theta,\delta)\nearrow J_{+\infty}(\theta,\delta)=:J(\theta,\delta)\,, \tag{19}$$

где знак $\nearrow$ означает монотонную сходимость снизу при $\mu\to+\infty$.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы представим замкнутую систему (1), (13) в стандартной $M-\Delta$ форме, изображенной на рис. 1 и описываемой уравнениями

$$\begin{pmatrix} e\\ z\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} f\\ w\\ \xi\end{pmatrix},\quad \xi=\Delta z\,, \tag{20}$$

где e — ошибка слежения (12), z и ξ — соответственно вход и выход структурированной неопределенности Δ,

$$z_t=\begin{pmatrix} y_t\\ u_t\end{pmatrix},\ \xi=\begin{pmatrix}\Delta^1 & 0\\ 0 & \Delta^2\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}\Delta^1(y)\\ \Delta^2(u)\end{pmatrix},$$

f — фиксированный входной сигнал, включающий отслеживаемый сигнал r и постоянный сигнал, равный $\mathbf{1}$:

$$f=\begin{pmatrix} r\\ \mathbf{1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{1}:=(1,1,\ldots)\in\ell_\infty\,.$$

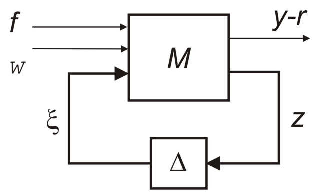

Рисунок 1. $M-\Delta$ форма системы (1), (13).
Figure 1. $M-\Delta$ form of system (1), (13)

Матрицу M в (20) представим в блочной форме, соответствующей входным и выходным сигналам на рис. 1:

$$M=\begin{pmatrix} M_{ef} & M_{ew} & M_{e\xi}\\ M_{zr} & M_{zw} & M_{z\xi}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Для системы (1), (13) эта блочная форма имеет вид

$$M=\left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 0 & \delta^w & \delta^y & \delta^u\\ \hline 1 & 0 & \delta^w & \delta^y & \delta^u\\ \dfrac{q}{b_1} & -\dfrac{c^w}{b_1} & \delta^w G^\xi & \delta^y G^\xi & \delta^u G^\xi\end{array}\right), \tag{22}$$

где q — оператор сдвига вперед ($qr_t=r_{t+1}$). Первая строка матрицы M в (22) соответствует правой части равенства (14), а вторая строка получается переносом r_t в правую часть этого равенства. Третья строка M соответствует представлению оптимального регулятора в виде (15).

Необходимое и достаточное условие робастной устойчивости (17) следует из теоремы 7 в [6], примененной к системе (1), (13).

Для доказательства представления (18) для показателя качества $J_{+\infty}(\theta,\delta)$ достаточно применить теоремы 5 и 6 из статьи [6] (или теоремы 2.18 и 2.22 работы [7]). Введем обозначение

$$[A]_1:=\begin{pmatrix}\|A_{11}\|_1 & \cdots & \|A_{1q}\|_1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \|A_{p1}\|_1 & \cdots & \|A_{pq}\|_1\end{pmatrix}$$

для произвольной $p\times q$ матрицы A импульсных откликов $A_{ij}\in\ell_1$. Для блочной матрицы M из (21) положим

$$M_{ss}(f):=\begin{pmatrix}[M_{ef}f]_{ss}+[M_{ew}]_1 & [M_{e\xi}]_1\\ [M_{zf}r]_{ss}+[M_{zw}]_1 & [M_{z\xi}]_1\end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 5 из [6],

$$\begin{aligned} J_{+\infty}(\theta,\delta)&=[M_{er}r]_{ss}+[M_{ew}]_1+\\ &+[M_{y\xi}]_1(I-[M_{z\xi}]_1)^{-1}([M_{zr}r]_{ss}+[M_{zw}]_1)\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Для рассматриваемой системы с матрицей (22) матрица $M_{ss}(f)$ принимает вид

$$\begin{pmatrix}\delta^w & \delta^y & \delta^u\\ \|r\|_{ss}+|\delta^w| & \delta^y & \delta^u\\ (\|r\|_{ss}+|c^w|)/b_1+\delta^w\|G^\xi\| & \delta^y\|G^\xi\| & \delta^u\|G^\xi\|\end{pmatrix}. \tag{24}$$

Применив формулу (23) к матрице (24), получаем

$$\begin{aligned} &J(\theta,\delta)=\\ &=\delta^w+(\delta^y\ \ \delta^u)\left(I-\begin{pmatrix}\delta^y & \delta^u\\ \delta^y\|G^\xi\| & \delta^u\|G^\xi\|\end{pmatrix}\right)^{-1}\times\\ &\times\begin{pmatrix}\|r_{ss}\|+\delta^w\\ (\|r\|_{ss}+|c^w|)/b_1+\delta^w\|G^\xi\|\end{pmatrix}=\\ &=\delta^w+\frac{1}{1-\delta^y-\delta^u\|G^\xi\|}\,(\delta^y\ \ \delta^u)\times\\ &\times\begin{pmatrix}1-\delta^u\|G^\xi\| & \delta^u\\ \delta^y\|G^\xi\| & 1-\delta^y\end{pmatrix}\times\\ &\times\begin{pmatrix}\|r_{ss}\|+\delta^w\\ (\|r\|_{ss}+|c^w|)/b_1+\delta^w\|G^\xi\|\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$(\delta^y\ \ \delta^u)\begin{pmatrix}1-\delta^u\|G^\xi\| & \delta^u\\ \delta^y\|G^\xi\| & 1-\delta^y\end{pmatrix}=(\delta^y\ \ \delta^u)\,,$$

получаем представление (18)

$$\begin{aligned} J(\theta,\delta)&=\delta^w+\frac{1}{1-\delta^y-\delta^u\|G^\xi\|}\times\\ &\times(\delta^y\ \ \delta^u)\begin{pmatrix}\|r_{ss}\|+\delta^w\\ (\|r\|_{ss}+|c^w|)/b_1+\delta^w\|G^\xi\|\end{pmatrix}=\\ &=\frac{\delta^w+\delta^y\|r\|_{ss}+\delta^u\|r\|_{ss}/|b_1|+\delta^u|c^w/b_1|)}{1-\delta^y-\delta^u\|G^\xi\|}\,.\end{aligned} \tag{25}$$

Неравенство $J_\mu(\theta,\delta) \leqslant J_{+\infty}(\theta,\delta)$ во втором утверждении теоремы 1 очевидно следует из того, что множество операторных возмущений с ограниченной памятью μ является подмножеством операторных возмущений с бесконечной памятью. Монотонность последовательности $J_\mu(\theta,\delta)$ относительно μ следует из строгого возрастания по μ множеств допустимых операторных возмущений. Наконец, сходимость $J_\mu(\theta,\delta)$ к $J(\theta,\delta)$ гарантируется теоремой 6 из [6]. Теорема 1 доказана.

Последнее априорное предположение **АП4** об управляемом объекте диктуется условием робастной стабилизируемости (17).

АП4. Неизвестный вектор параметров θ удовлетворяет неравенству

$$\delta^y + \delta^u \|G^\xi\| \leqslant \bar{\delta} < 1 \tag{26}$$

с известным числом $\bar{\delta}$.

Число $\bar{\delta} > 0$ может быть сколь угодно близким к 1 и выбирается конструктором на основе априорной информации или вовсе без нее и исключает из рассмотрения неприемлемые для практических приложений модели, слишком близкие к границе области робастно стабилизируемых объектов.

Задача. Требуется построить обратную связь вида $u_t = U_t(y_{1-n}^t, u_0^{t-1})$, имеющую конечную память и гарантирующую выполнение с заданной точностью неравенства

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t - r_t| \leqslant J(\theta,\delta) \tag{27}$$

при справедливости априорных предположений **АП1–АП4**.

Главная сложность задачи заключается в неидентифицируемости вектора коэффициентов ξ номинальной модели и смещения c^w, необходимых для использования оптимального регулятора (13).

3. Субоптимальное слежение

Решение поставленной задачи базируется на оптимальном оценивании, в котором показатель качества задачи управления используется как идентификационный критерий и минимизируется на текущих оценках множества неизвестных параметров, согласованных с данными измерений. Вычисление множественных оценок основано на следующем простом утверждении.

Лемма 1. Если для некоторой оценки

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w)^T, \quad \hat{\xi} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{b}_1)^T \in \Xi$$

неизвестного вектора θ при всех t справедливы неравенства

$$|\hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1} - \hat{c}^w| \leqslant \delta^w + \delta^y p_t^y + \delta^u p_t^u, \tag{28}$$

то объект управления (1) с вектором параметров $\hat{\theta}$ удовлетворяет уравнению (1) и априорным предположениям **АП1, АП2** при всех t.

Лемма 1 является частным случаем Леммы 1 работы [9], в которой дополнительно предполагаются неизвестными параметры $\delta^w, \delta^y, \delta^u$.

Из Леммы 1 следует, что при любом управлении объектом (1) полная информация о векторе неизвестных параметров θ к моменту времени t имеет вид включения

$$\theta \in S_t = \{\, \hat{\theta} \in \Theta_0 \mid |\hat{a}(q^{-1})y_k - \hat{b}_1 u_{k-1} - \hat{c}^w| \leqslant \\ \leqslant \delta^w + \delta^y p_k^y + \delta^u p_k^u \; \forall k \leqslant t \,\},$$

где

$$\Theta_0 = \{\, \hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w)^T \mid \hat{\xi} \in \Xi,\ |c^w| \leqslant C^w, \\ \hat{\delta}^y + \hat{\delta}^u \|G^{\hat{\xi}}\| \leqslant \bar{\delta} \,\} \tag{29}$$

— априорное множество допустимых параметров θ.

Заметим, что никаким ограниченным управлением нельзя обеспечить сходимости множеств S_t к множеству с одним элементом θ, поскольку априорные верхние границы $\delta^w, \delta^y, \delta^u$, как правило, являются неточными, и конкретные реализации всех возмущений даже при точных верхних границах только в исключительных случаях неоднократно и одновременно принимают значения, соответствующие их верхним границам. Это означает, что вектор неизвестных параметров θ не идентифицируем с помощью ограниченного управления.

Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления заключается в построении сходящейся последовательности оценок $\theta_t \to \theta_\infty$ при $t \to +\infty$, достаточно точно удовлетворяющих *целевым неравенствам* (28) при всех достаточно больших t. В отличие от задач адаптивной стабилизации, этого недостаточно для решения поставленной оптимальной задачи. Действительно, если $\theta_t \to \theta_\infty$ и выполнены целевые неравенства, то в силу теоремы 1 и непрерывности функции $J(\theta,\delta)$ следует неравенство

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t| \leqslant J(\theta_\infty, \delta)\,.$$

Однако для решения поставленной оптимальной задачи этого неравенства недостаточно и необходимо гарантировать выполнение с заданной точностью дополнительного неравенства

$$J(\theta_\infty, \delta) \leqslant J(\theta, \delta) \tag{30}$$

с неизвестным и не идентифицируемым вектором θ. Из этого следует необходимость использования показателя качества $J(\theta,\delta)$ задачи управления в роли идентификационного критерия, т.е. использования оптимального оценивания вида

$$\theta_t = \operatorname*{argmin}_{\hat{\theta}\in S_t} J(\hat{\theta})\,. \tag{31}$$

Непосредственное использование оптимальной идентификации (31) в режиме онлайн невозможно, ввиду возможного неограниченного роста числа целевых неравенств в описании множеств S_t. Для преодоления этой трудности будут использованы верхние по включению оценки множеств S_t с ограниченным числом обновлений за счет введения мертвой зоны при обновлении оценок.

Выберем число $\varepsilon > 0$ в качестве параметра мертвой зоны, при этом точность решения поставленной оптимальной задачи слежения будет пропорциональна ε. В каждый момент времени t будут вычисляться векторные оценки

$$\theta_t = (\xi_t^T, c_t^w)^T, \quad \xi_t = (a_1^t, \ldots, a_n^t, b_1^t)$$

и множественные оценки Θ_t неизвестного вектора ξ.

Адаптивный регулятор. Управление u_t в момент t определяется *адаптивным регулятором*

$$u_t = \frac{1}{b_1^t}(a_1^t y_t + \ldots + a_n^t y_{t-n+1} + r_{t+1} - c_t^w) . \quad (32)$$

Выберем в качестве начальной множественной оценки множество Θ_0, определенное в (29), а качестве начальной векторной оценки

$$\theta_0 = \operatorname*{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_0} J(\hat{\theta}, \delta) .$$

Введем следующие обозначения. После подачи управления u_t в момент времени t и измерения выхода y_{t+1} в момент $t+1$ положим

$$\begin{aligned} &\varphi_t^T = (-y_t, -y_{t-1}, \ldots, -y_{t-n+1}, u_t), \\ &\eta_{t+1} = \mathsf{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^T \xi_t - c_t^w) , \\ &\psi_{t+1} = (\eta_{t+1} \varphi_t^T, \eta_{t+1})^T , \\ &h_{t+1} = \delta^w + \delta^y p_{t+1}^y + \delta^u p_{t+1}^u . \end{aligned}$$

Заметим, что значения всех введенных переменных вычисляются по данным измерений, доступных к моменту $t+1$. Во введенных обозначениях целевое неравенство (28) в момент $t+1$ для текущей оценки θ_t принимает вид

$$\begin{aligned} &|y_{t+1} - \varphi_t^T \xi_t - c_t^w| = \\ &= \eta_{t+1} y_{t+1} - \psi_{t+1}^T \theta_t \leqslant \eta_{t+1} h_{t+1} , \end{aligned}$$

что эквивалентно

$$\psi_{t+1}^T \theta_t \geqslant \eta_{t+1}(y_{t+1} - h_{t+1}) . \quad (33)$$

Алгоритм обновления векторных оценок θ_t и множественных оценок Θ_t имеет следующий вид:

$$\theta_{t+1} = \theta_t , \quad \Theta_{t+1} = \Theta_t , \quad (34)$$

$$\text{если } \psi_{t+1}^T \theta_t \geqslant \eta_{t+1}(y_{t+1} - h_{t+1}) - \varepsilon|\psi_{t+1}| . \quad (35)$$

В противном случае положим

$$\Theta_{t+1} = \Theta_t \cap \Omega_{t+1} , \quad (36)$$

$$\Omega_{t+1} = \{ \hat{\theta} \mid \psi_{t+1}^T \hat{\theta} \geqslant \eta_{t+1}(y_{t+1} - h_{t+1} \} , \quad (37)$$

$$\theta_{t+1} = \operatorname*{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_{t+1}} J(\hat{\theta}, \delta) . \quad (38)$$

Алгоритм оптимального оценивания (34)–(38) имеет простую геометрическую интерпретацию. Каждое целевое неравенство (28) представляет собой полоску в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданную парой линейных неравенств относительно вектора $\hat{\theta}$. Только одно из этих неравенств, именно неравенство (33), может нарушаться для вектора θ_t. Неравенство в (35) означает, что евклидово расстояние от вектора θ_t до полупространства Ω_{t+1}, определенного в (37), не больше ε, и тогда, согласно (34), векторная оценка θ_t и множественная оценка Θ_t не обновляются. В противном случае желаемое неравенство (37) добавляется к списку неравенств, задающих множественную оценку Θ_t, образуя обновленную оценку Θ_{t+1}. При этом некоторые неравенства из старого списка могут оказаться лишними. Один из эффективных алгоритмов удаления лишних неравенств описан в работе [12].

Замечание 1. Введение мертвой зоны с параметром ε гарантирует ограниченность числа возможных обновлений оценок θ_t и Θ_t и тем самым сходимость оценок за конечное время. Формула (38) вычисления оптимальной оценки θ_{t+1} является главной в задаче синтеза адаптивного оптимального управления в условиях неидентифицируемости вектора параметров θ. Она обеспечивает выполнение требуемого неравенства (30) с заданной точностью, пропорциональной параметру мертвой зоны ε.

Субоптимальность адаптивного регулятора (32) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть выполнены априорные предположения **А1-А4**, и параметр мертвой зоны ε в (35) выбран из интервала

$$0 < \varepsilon < \frac{1 - \bar{\delta}}{\sqrt{n} + G_u} , \quad G_u = \max_{\xi \in \Xi} \|G^\xi\| .$$

Тогда для замкнутой системы управления, включающей объект (1), адаптивный регулятор (32) и алгоритм оценивания (34)–(38) справедливы утверждения:

1) Множественные оценки Θ_t и векторные оценки θ_t сходятся к своим предельным значениям Θ_∞ и θ_∞ за конечное время и

$$J(\theta_\infty, \delta) \leqslant J(\theta, \delta) , \quad (39)$$

2)

$$\limsup_{t \to +\infty} |y_t| \leqslant J(\theta_\infty, \delta) + O(\varepsilon) , \quad (40)$$

где $O(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство Теоремы 2 аналогично доказательству Теоремы 2 в статье [10]. Приведем его краткую схему. Согласно данной выше геометрической интерпретации алгоритма оценивания, при нарушениях неравенства (35) из множественных оценок Θ_t заведомо удаляются шары радиуса ε с центрами θ_t и в описание Θ_{t+1} добавляются неравенства из (37). В результате этого шары радиуса $\varepsilon/2$ с центрами θ_t не пересекаются. В силу оптимизации (38)

$$J(\theta_t, \delta) \leqslant J(\theta, \delta)$$

при всех t, так что оценки θ_t остаются в ограниченном множестве в $\mathbb{R}^{n+2}$. Поэтому число исключаемых из оценок Θ_t не пересекающихся шаров радиуса $\varepsilon/2$ конечно ввиду ограниченности множества векторов $\hat{\theta}$, удовлетворяющих неравенству $J(\hat{\theta}_t, \delta) \leqslant J(\theta, \delta)$. Следовательно конечно и число возможных обновлений оценок Θ_t и θ_t.

Для доказательства неравенства (40) заметим, что после сходимости θ_t к θ_∞ за конечное время для оценки θ_∞ выполняются неравенства (35). Нетрудно показать, что

$$\varepsilon|\psi_{t+1}| \leqslant \varepsilon(\sqrt{n}\, p_{t+1}^y + p_{t+1}^u + 1) . \quad (41)$$

Из (41) и (35) теперь следует, что для оценки θ_∞ выполняются неравенства (28) с правой частью

$$\delta^w + \varepsilon + (\delta^y + \varepsilon\sqrt{n}) p_t^y + (\delta^u + \varepsilon) p_t^u , \quad (42)$$

которой соответствует набор верхних границ возмущений

$$\delta_\varepsilon = (\delta^w + \varepsilon, \delta^y + \varepsilon\sqrt{n}, \delta^u + \varepsilon)\,.$$

Тогда в силу Леммы 1 выход y_t можно считать выходом объекта (1) с вектором параметров $\theta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w)^T$, набором верхних границ δ_ε и управляемого соответствующим оценке θ_∞ оптимальным регулятором. Далее по Теореме 1

$$\limsup_{t\to+\infty}\, |y_t - r_t| \leqslant J\theta_\infty, \delta_\varepsilon)\,. \qquad (43)$$

Остается заметить, что $J(\theta_\infty, \delta_\varepsilon) = J\theta_\infty, \delta) + O(\varepsilon)$. Аналогично [10] можно вычислить постоянную K, представляющую величину $O(\varepsilon)$ в прямой форме $K\varepsilon$.

Замечание 2. Показатель качества $J(\theta, \delta)$, определенный в (18), запишем, используя (16), в виде

$$J(\theta, \delta) = \frac{(\delta^w + \delta^y\|r\|_{ss})|b_1| + \delta^u\|r\|_{ss} + \delta^u|c^w|)}{(1-\delta^y)|b_1| - \delta^u\sum_{k=1}^{n}|a_k|}\,. \qquad (44)$$

Нетрудно заметить, что этот показатель является дробно-линейной функцией оцениваемого вектора θ (для этого каждую абсолютную величину $|x|$ следует записать в виде $x = x^+ - x^-$, где $x^+ \geqslant 0$, $x^- \geqslant 0$. Из этого следует, что оптимизация (38) представляет собой задачу дробно-линейного программирования при линейных ограничениях. Эта задача стандартным образом сводится к задаче линейного программирования [11], для решения которой имеется высокоэффективное современное программное обеспечение. В статье [10] приведены примеры численного моделирования, иллюстрирующие эффективность алгоритмов множественного оценивания для объектов управления с девятью неизвестными параметрами. Заметим, что онлайн уменьшение параметра ε для повышения гарантированной точности решения оптимальной задачи (38) влечет рост числа возможных обновлений оценок и числа неравенств в описании множественных оценок Θ_t, т.е. к повышению вычислительной сложности оптимальной задачи.

Замечание 3. Главное достоинство рассмотренного адаптивного управления заключается в обеспечении оптимальной с заданной точностью асимптотической верхней оценки показателя качества для любого допустимого и не идентифицируемого вектора θ. Главный же недостаток заключается в единой области допустимых значений коэффициентов усиления неопределенностей δ^y и δ^u в виде неравенства (26). В то же время эта единая (универсальная) для всех допустимых θ область является сколь угодно близкой к оптимальной универсальной области за счет выбора достаточно близкого к единице параметра $\bar{\delta}$. Традиционные алгоритмы оценивания на базе градиентного алгоритма или метода наименьших квадратов не только не могли гарантировать никакой оптимальности адаптивного управления, но и допускали только достаточно малые области робастной устойчивости, поскольку обосновывались с помощью метода функций Ляпунова, вносившего значительный консерватизм в результаты по устойчивости по сравнению с ℓ_1-теорией робастного управления. Это проявлялось, в частности, и в том, что в традиционном робастном адаптивном управлении вместо структурированной неопределенности по выходу и управлению рассматривалась неструктурированная неопределенность $\delta = \max(\delta^y, \delta^u)$, вносившая дополнительный консерватизм. Для такой неструктурированной неопределенности наиболее продвинутый результат на основе градиентного алгоритма оценивания был получен в статье [13] именно в контексте ℓ_1-теории при центрированном внешнем возмущении (т.е. при $c^w = 0$) для авторегрессионного объекта с запаздыванием в управлении.

Заключение

Традиционные алгоритмы оценивания неизвестных параметров объекта управления с детерминированными возмущениями представляют собой модификации градиентного алгоритма или алгоритма метода наименьших квадратов и не могут гарантировать оптимальности адаптивного управления. Более сложные алгоритмы множественного оценивания открывают возможности синтеза адаптивного оптимального управления при использовании показателя качества задачи управления как идентификационного критерия. В данной работе рассмотрена задача оптимального робастного слежения для авторегрессионного объекта с неизвестной номинальной моделью и неизвестным смещением ограниченного внешнего возмущения, но с известными коэффициентами усиления неопределенностей по выходу и управлению и известной верхней границей несмещенного внешнего возмущения. Благодаря дробно-линейному виду показателя качества в виде асимптотически наихудшего возможного отклонения выхода объекта от отслеживаемого сигнала, вычисление текущих оптимальных оценок сводится к линейному программированию и реализуемо в режиме онлайн по крайней мере для объектов невысокого порядка.

Литература

1. Rohrs, C.E. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics / C.E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1985. – Vol. 30. – № 9. – P. 881–889.
2. Zhou, K. Essentials of robust control / K. Zhou, G.C. Doyle // Prentice Hall, 1998. – 430 p.
3. Khammash, M. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty / M. Khammash, J. Pearson // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36, № 4. – P. 398–412.
4. Khammash, M. Robust steady-state tracking / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1995. – Vol. 40, № 11. – P. 1872–1880.
5. Khammash, M. Robust performance: unknown disturbances and known fixed inputs / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42, № 12. – P. 1730–1734.
6. Sokolov, V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty / V.F. Sokolov // Syst. Control Lett. – 2001. – Vol. 42, № 5. – P. 363–377.
7. Соколов, В.Ф. Робастное управление при ограниченных возмущениях / В.Ф. Соколов. – Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2011. – 218 с.

8. Sokolov, V.F. Adaptive ℓ_1 robust control for SISO system / V.F. Sokolov // Systems and Control Letters. – 2001. – Vol. 42, № 5. – P. 379–393.
9. Соколов, В.Ф. Адаптивная оптимальная робастная стабилизация авторегрессионного объекта со смещенным внешним возмущением / В.Ф. Соколов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 20–27.
10. Соколов, В.Ф. Адаптивное оптимальное слежение для дискретного минимально-фазового объекта с неопределенностью в канале выхода / В.Ф. Соколов // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 8. – С. 108–128.
11. Boyd, S. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. – New York: Cambridge University Press, 2004. – 742 p.
12. Walter, E. Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded error / E. Walter, H. Piet-Lahanier // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1989. – Vol. 34, № 8. – P. 911–915.
13. Weyer, E. Limitations of robust adaptive pole placement control / E. Weyer, I. Mareels, J. Polderman // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1994.– Vol. 39, № 8. – P. 1665–1671.

References

1. Rohrs, C.E. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics / C.E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1985. – Vol. 30, № 9. – P. 881–889.
2. Zhou, K. Essentials of robust control / K. Zhou, G.C. Doyle // Prentice Hall, 1998. – 430 p.
3. Khammash, M. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty / M. Khammash, J. Pearson // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36, № 4. – P. 398–412.
4. Khammash, M. Robust steady-state tracking / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1995. – Vol. 40, № 11. – P. 1872–1880.
5. Khammash, M. Robust performance: unknown disturbances and known fixed inputs / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42, № 12. – P. 1730–1734.
6. Sokolov, V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty / V.F. Sokolov // Syst. Control Lett. – 2001. – Vol. 42, № 5. – P. 363–377.
7. Sokolov,V.F. Robastnoye upravleniye pri ogranichennykh vozmushcheniyakh [Robust control under bounded dicturbances] / V.F. Sokolov. – Syktyvkar: Komi Sience Center, UB RAS, 2011. – 218 p.
8. Sokolov, V.F. Adaptive ℓ_1 robust control for SISO system / V.F. Sokolov // Systems and Control Letters. – 2001. – Vol. 42, № 5. – P. 379–393.
9. Sokolov, V.F. Adaptivnaja optimal'naja robastnaja stabilizacija avtoregressionnogo ob"ekta so smeshhennym vneshnim vozmushheniem [Adaptive optimal robust stabilization of autoregressive plant under biased external disturbance] / V.F. Sokolov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 20–27.
10. Sokolov, V.F. Adaptivnoe optimal'noe slezhenie dlya diskretnogo minimal'no-fazovogo ob"ekta s neopredelennost'yu v kanale vyhoda [Adaptive optimal tracking of a discrete-time minimum-phase plant under output uncertainty] / V.F. Sokolov // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, № 8. – P. 108–128.
11. Boyd, S. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. – New York: Cambridge University Press, 2004. – 742 p.
12. Walter E. Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded error / E. Walter, H. Piet-Lahanier // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1989. – Vol. 34, № 8. – P. 911–915.
13. Weyer E. Limitations of robust adaptive pole placement control / E. Weyer, I. Mareels, J. Polderman // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1994.– Vol. 39. № 8. – P. 1665–1671.

Для цитирования:
Соколов, В.Ф. Оптимальное ℓ_1-робастное слежение для авторегрессионного объекта с неизвестной номинальной моделью / В.Ф. Соколов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 10–17.

For citation:
Sokolov, V.F. Optimal'noe ℓ_1-robastnoe slezhenie dlya avtoregressionnogo ob"ekta s neizvestnoj nominal'noj model'yu [Optimal ℓ_1-robust tracking for autoregressive plant with unknown nominal model] / V.F. Sokolov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 10–17.

Дата поступления статьи: 03.07.2023
Received: 03.07.2023