

Контактная задача для кольца, подкрепленного упругими тонкими спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса

В.Н. Тарасов, Н.О. Смолева

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

vntarasov@ipm.komisc.ru
nataljafilipp5@gmail.com

Аннотация

В работе рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии колеса со спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса. Используется вариационная постановка, что позволяет учесть перемещения точки приложения силы (центра колеса). Также рассмотрена возможность потери устойчивости спиц, если сжимающая сила достаточно велика. В этом случае возникает контактная задача с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции.

Ключевые слова:

кольцо, вариационная задача, момент, упругая энергия, устойчивость, квадратичное программирование, контактная задача

Введение

Улучшение прочностных характеристик традиционных материалов и использование новых высокопрочных композиционных материалов обусловило появление легких, экономичных тонкостенных конструкций в современном машиностроении. В свою очередь, это привело к необходимости использовать все более точные методы расчета на прочность. Интерес к исследованию контактных задач теории упругости с неизвестной областью активного взаимодействия контактирующих элементов обусловлен, с одной стороны, необходимостью расчета все более сложных конструкций, встречающихся в инженерной практике, с другой — фундаментальными результатами, полученными сравнительно недавно в теории оптимизации, негладкого выпуклого и невыпуклого анализов. Основное отличие таких задач от задач с известной границей контакта заключается в том, что при их математической формализации используются неравенства или (при вариационной постановке) могут возникнуть негладкие функционалы. Такие задачи не могут быть линеаризованы, они являются конструктивно-нелинейными. При расчетах на прочность при конечномерной аппроксимации они сводят-

Contact problem for a ring reinforced with elastic thin spokes, which is under the action of a force applied to the wheel axle

V.N. Tarasov, N.O. Smoleva

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

vntarasov@ipm.komisc.ru
nataljafilipp5@gmail.com

Abstract

The paper considers the problem of the stress-strain state of a spoked wheel, which is under the action of a force applied to the wheel axle. A variational formulation is used, which makes it possible to take into account the displacement of the point of application of force (wheel center). The possibility of loss of stability of the spokes is also considered if the compressive force is sufficiently large. In this case, a contact problem arises with an unknown area of active interaction of structural elements.

Keywords:

ring, variational problem, moment, elastic energy, stability, quadratic programming, contact problem

ся к некоторой задаче квадратичного программирования. Методом решения задач квадратичного программирования посвящена книга [1]. В последнее время (применительно, в частности, к задачам конструктивно-нелинейной механики) интенсивно развивается теория вариационных неравенств. Основы теории вариационных неравенств заложены в работах Ж.-Л. Лионса, Г. Дюво и др. [2]. Разнообразным приложениям теории вариационных неравенств, в том числе и к задачам механики, посвящены монографии [3, 4]. Интересные задачи в механике упругих конструкций с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции рассмотрены в работе [5]. Систематическому применению методов оптимизации в решении конструктивно-нелинейных задач, в том числе и задач устойчивости упругих систем с неустойчивыми связями, посвящена книга [6].

В работе рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии колеса со спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса. Используется вариационная постановка, что позволяет учесть перемещения точки приложения силы (центра

колеса). Рассмотрена возможность потери устойчивости спиц, если сжимающая сила достаточно велика. В этом случае возникает контактная задача с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции. Неизвестные перемещения представляются в виде частичной суммы рядов Фурье. Тогда возникает задача выпуклого квадратичного программирования при наличии линейных ограничений неравенств.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу на определение усилий, действующих в спицах велосипедного колеса, и напряжения, возникающего в ободе при приложении к оси колеса силы P (рис. 1). Основание, на которое опирается колесо, можно считать жестким. Число спиц m велико настолько, что позволяет рассматривать спицы не как отдельные стержни, а как непрерывную упругую среду жесткости C (простое винклеровское основание).

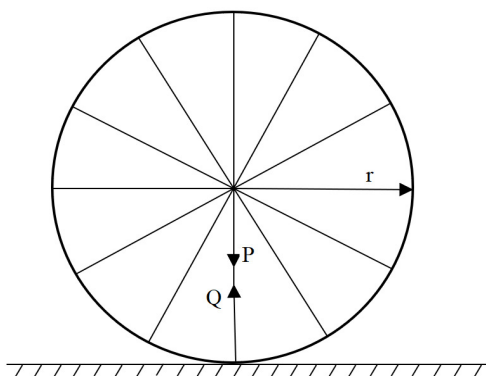


Рисунок 1. Кольцо, подкрепленное спицами и нагруженное силой P .
Figure 1. Ring backed by spokes and loaded with force P .

Пусть кольцо в недеформированном состоянии является кругом радиуса R , декартовы координаты которого определяются формулами

$$\begin{cases} x = R \cos \vartheta, \\ y = R \sin \vartheta, \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

где $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ – центральный угол. Обозначим через $\xi = (-\cos \vartheta, -\sin \vartheta)$ нормаль, а через $\eta = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$ – касательный вектор. Перемещение точек кольца в результате плоской деформации описывается вектором

$$W = u(\vartheta)\xi + w(\vartheta)\eta.$$

Здесь под u принимается нормальное перемещение точек кольца, а под w – тангенциальное перемещение. Тогда декартовы координаты деформированного кольца описываются уравнениями

$$\begin{cases} x = (R - u) \cos \vartheta - w \sin \vartheta, \\ y = (R - u) \sin \vartheta + w \cos \vartheta. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим после деформации нормальный и касательный векторы к упругой линии через ξ_* , η_* . Векторы ξ , η могут быть переведены в векторы ξ_* , η_* путем поворота

на малый угол β . Предполагая, что перемещения являются малыми, можно записать

$$\beta = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\vartheta} + w \right), \quad (3)$$

а изменение кривизны дуги кольца определяется формулой [7]

$$\delta q = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + \frac{dw}{d\vartheta} \right).$$

Кроме того, выполнено условие несжимаемости

$$u = w'. \quad (4)$$

Расчетными характеристиками при деформациях криволинейных стержней являются

$$M = -\frac{EJ}{R^2}(u'' + u), \quad Q = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\vartheta}$$

– момент и перерезывающая сила, распределенные по ободу кольца. По известным M и Q вычисляются напряжения. Пусть J – момент инерции сечения кольца, F – площадь поперечного сечения спицы, E – модуль Юнга, $B = EJ$. Энергия упругой деформации кольца, с учетом условия несжимаемости, в квадратичном приближении определяется формулой

$$U = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} \delta q^2 d\vartheta = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta. \quad (5)$$

Энергия деформации спиц в случае неподвижного центра кольца имеет вид

$$U_1 = \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta.$$

Полная энергия записывается следующим образом

$$U + U_1 = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (u'' + u)^2 d\vartheta + \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta. \quad (6)$$

Кроме того, должны быть выполнены граничные условия периодичности и условия $y(\frac{3}{2}\pi) \geq -R$, что приводит к неравенству $u(\frac{3}{2}\pi) \geq 0$.

В положении равновесия полная энергия (6) минимальна, поэтому выполнено уравнение Эйлера

$$\frac{B}{R^3} (u^{IV} + 2u'' + u) + Cu = 0. \quad (7)$$

Если продифференцировать последнее уравнение по ϑ , то оно совпадет с уравнением равновесия

$$\frac{d^5 w}{d\vartheta^5} + 2 \frac{d^3 w}{d\vartheta^3} + a^2 \frac{dw}{d\vartheta} = 0, \quad (8)$$

где

$$a^2 = \frac{R^4 \eta}{EJ} + 1, \quad \eta = \frac{EFm}{2\pi R^2},$$

а m – число спиц. Решение этой задачи приведено в книге В.И. Феодосьева [5], где отмечено, что впервые она была рассмотрена Н.Е. Жуковским. Предполагая, что спицы расположены достаточно часто, их можно представить как

непрерывную упругую среду, тогда для любой точки обода колеса сила, действующая со стороны спиц, пропорциональна радиальному смещению $u(\vartheta)$. Также в работе [5] получено уравнение равновесия (8).

Решением этого уравнения будет

$$w = C_0 + C_1 \operatorname{ch}(\alpha\vartheta) \cos(\beta\vartheta) + C_2 \operatorname{sh}(\alpha\vartheta) \sin(\beta\vartheta) + C_3 \operatorname{ch}(\alpha\vartheta) \sin(\beta\vartheta) + C_4 \operatorname{sh}(\alpha\vartheta) \cos(\beta\vartheta), \quad (9)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a+1}{2}}.$$

Постоянные C_0, \dots, C_4 находятся из следующих граничных условий:

$$\text{при } \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{dw}{d\vartheta} = 0, \quad (10)$$

$$\text{при } \vartheta = \frac{3\pi}{2} \quad Q = -\frac{P}{2}, \quad (11)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} u d\vartheta = 0. \quad (12)$$

Недостатком уравнения (8) является предположение, что центр колеса неподвижен. Учет перемещения центра колеса может существенно повлиять на величину усилий в спицах и на напряженно-деформированное состояние обода колеса.

Обозначим через t перемещение центра кольца вдоль оси y , ε_j — относительное удлинение j -й спицы, $j \in 1..m$. После деформации расстояние между центром колеса и точкой обода определяется формулой

$$\rho = \left(u^2 - 2uR + w^2 + R^2 + 2ut \sin \vartheta - 2wt \cos \vartheta - 2Rt \sin \vartheta + t^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

В линейном приближении относительное удлинение спицы $(\rho - R)/R$ будет иметь вид

$$\varepsilon_j = \frac{1}{R} (-u(\vartheta_j) - t \sin \vartheta_j). \quad (14)$$

Работа внешних сил равна

$$V = Pt, \quad (15)$$

а энергия деформации спицы пропорциональна квадрату относительного удлинения

$$U_j = \frac{EF}{2R} \varepsilon_j^2. \quad (16)$$

В положении равновесия полная потенциальная энергия системы принимает минимальное значение, поэтому

приходим к задаче на экстремум

$$J(u, t) = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2R} EF \varepsilon_i^2 - Pt \rightarrow \min_{u, t}. \quad (17)$$

Перемещения будем искать в виде частичных сумм ряда Фурье

$$w = \sum_{i=1}^n z_i \sin(i\vartheta) + z_{i+n} \cos(i\vartheta), \quad (18)$$

$$u = \sum_{i=1}^n iz_i \cos(i\vartheta) - z_{i+n} i \sin(i\vartheta). \quad (19)$$

При этом должно выполняться условие

$$y \left(\frac{3\pi}{2} \right) \geq -R, \quad (20)$$

что приводит к ограничениям на переменные z . Например, при $n = 20$ неравенство принимает вид

$$\begin{aligned} & -2z_2 + 4z_4 - 6z_6 + 8z_8 - 10z_{10} + 12z_{12} - \\ & -14z_{14} + 16z_{16} - 18z_{18} + 20z_{20} + z_{21} - \\ & -3z_{23} + 5z_{25} - 7z_{27} + 9z_{29} - 11z_{31} + \\ & + 13z_{33} - 15z_{35} + 17z_{37} - 19z_{39} \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы исключить перемещения кольца вдоль оси x как жесткого целого, потребуем выполнение равенства

$$x(0) + x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x(\pi) + x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad (22)$$

откуда получаем (при $n = 20$)

$$\begin{aligned} & -4z_1 - 4z_3 - 12z_5 - 12z_7 - 20z_9 - \\ & -20z_{11} - 28z_{13} - 28z_{15} - 36z_{17} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя (18), (19) в (17) приходим к некоторой задаче выпуклой оптимизации.

Таким образом, приходим к задаче выпуклого квадратичного программирования

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{B}{2R^3} \sum_{i=1}^n i^2 (i^2 - 1)^2 (z_i^2 + z_{i+n}^2) + \\ & + \frac{EF}{2R} \sum_{j=1}^m (-u(\vartheta_j) - \sin \vartheta_j z_{2n+1})^2 - \\ & - z_{2n+1} P \rightarrow \min_{z \in R^{2n+1}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\vartheta_j = \frac{2\pi(j-1)}{m}, \quad j = 1, \dots, m, \quad z_{2n+1} = t$$

при ограничениях (20), (22).

2. Результаты численных экспериментов

Результаты расчетов приведены на рис. 2-4 при следующих данных: $E = 2.05 \times 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, $P = 40 \text{ кг}$, радиус колеса – 31 см, момент инерции сечения обода – 0.3 см^4 , диаметр спиц – $2r = 0.2 \text{ см}$.

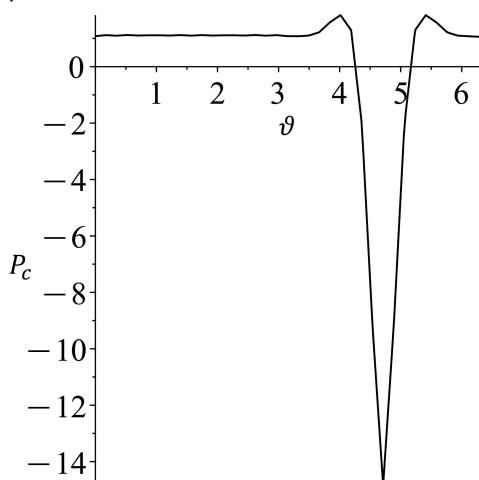


Рисунок 2. Распределение усилий по спицам колеса.
Figure 2. The distribution of forces on the spokes of the wheel.

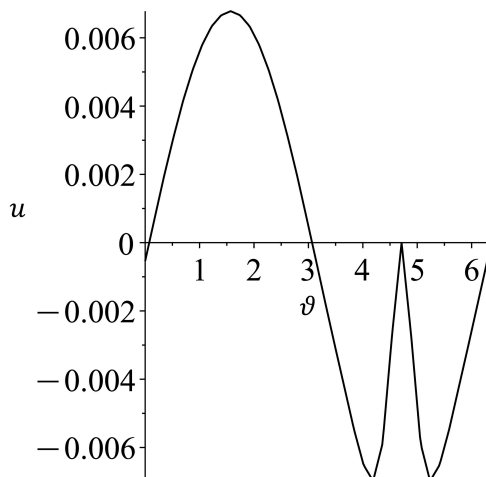


Рисунок 3. Радиальное перемещение точек обода колеса.
Figure 3. Radial movement of wheel rim points.

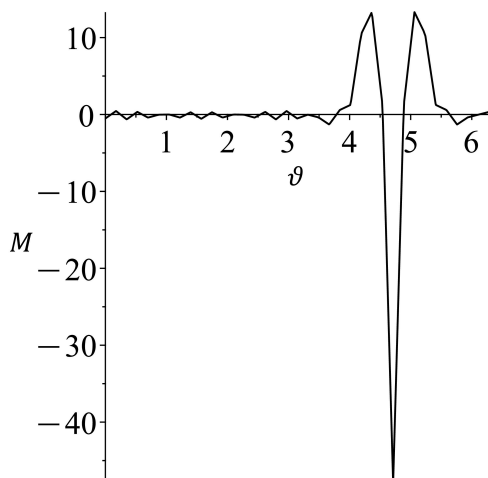


Рисунок 4. Распределение моментов вдоль обода колеса.
Figure 4. Moment distribution along the wheel rim.

Вычисления по формулам (9)-(12) дают аналогичные результаты. В работе [5] приведены графики распределения усилий по спицам и график моментов. Максимальный момент при заданных параметрах равен 88.40 кг·см, максимальное сжимающее усилие на спицу – 11.2 кг.

Отрицательные усилия на спицах являются сжимающими, поэтому при достаточно большой нагрузке спицы могут потерять устойчивость. Критическая сила Эйлера при граничных условиях шарнирного опирания для спиц равна

$$P_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 E J_c}{l^2} = \frac{2.05 \cdot 10^6 \pi^2 \cdot J_c}{31^2} = 0.53 \text{ кг},$$

где момент инерции сечения спицы $J_c = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{7.85}{10^5}$. Предположим, что спицы потеряли устойчивость. Тогда упругая энергия спиц вычисляется по формуле

$$U_c = \frac{EF}{2R} \sum_{j=1}^m \varepsilon_{j+}^2,$$

где

$$\varepsilon_{j+}^2 = \max\{0, \varepsilon_j\} = \frac{|\varepsilon_j| + \varepsilon_j}{2}.$$

Введем дополнительные переменные $z_{2n+2}, z_{2n+3}, \dots, z_{2n+m+1}$ и рассмотрим задачу

$$f(z) = \frac{B}{2R^3} \sum_{i=1}^n (i^2(i^2 - 1)^2 z_i^2 + z_{i+n}^2) + \frac{1}{2R} \sum_{j=1}^m (-u(\vartheta_j) - z_{2n+1} \sin \vartheta_j + z_{2n+1+j})^2 \rightarrow \min_z, \quad (25)$$

при ограничениях

$$z_{2n+1+j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (26)$$

и при выполнении ограничений (20) и (22). Результаты решения задачи (25), (26), (21) и (23) представлены на рис. 3-5.

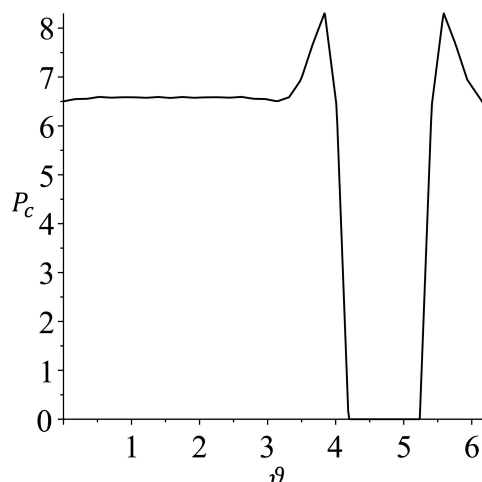


Рисунок 5. Распределение усилий по спицам колеса.
Figure 5. The distribution of forces on the spokes of the wheel.

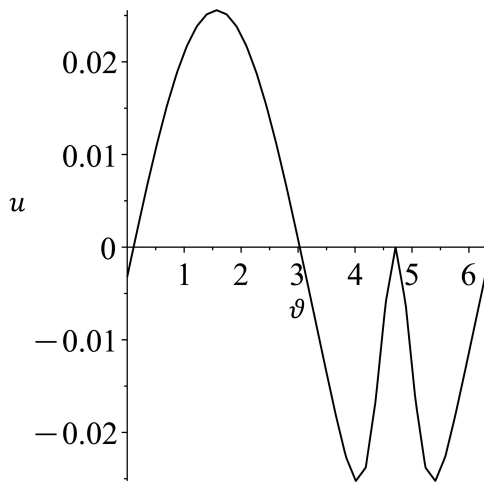


Рисунок 6. Радиальное перемещение точек обода колеса.
Figure 6. Radial movement of wheel rim points.

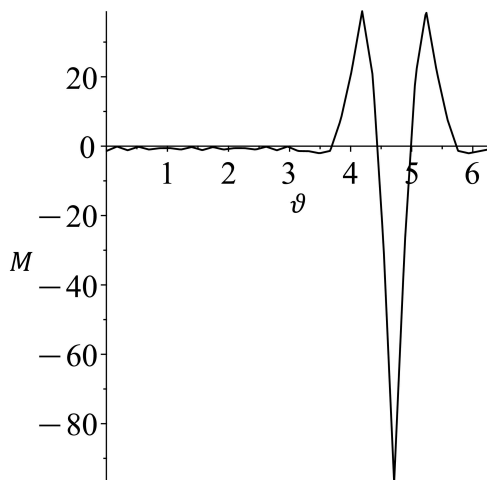


Рисунок 7. Распределение моментов вдоль обода колеса.
Figure 7. Moment distribution along the wheel rim.

Потеря устойчивости спиц существенно влияет на напряженно-деформированное состояние колеса: радиальные перемещения по величине отличаются в три раза. Ясно, что в этом случае спицы не испытывают сжимающих усилий, максимальный момент в два раза больше, чем в случае решения задачи (25), (22), (23), (26).

Потеря устойчивости спиц является нежелательным явлением, поэтому при сборке колец используется предварительное натяжение спиц. Предположим, что первоначальная длина спицы l меньше радиуса кольца: $l = R - d$. После деформации длина спицы изменяется на величину

$$\rho = \left(u^2 - 2uR + w^2 + R^2 + 2ut \sin \vartheta - 2wt \cos \vartheta - 2Rt \sin \vartheta + t^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Тогда для относительного удлинения вместо формулы (14) надо использовать формулу

$$\varepsilon_j = \frac{1}{R - d} (-u(\vartheta_j) - t \sin \vartheta_j + d).$$

Таким образом, приходим к задаче квадратичного про-

граммирования

$$f(z) = \frac{B}{2R^3} \sum_{i=1}^n i^2 (i^2 - 1)^2 (z_i^2 + z_{i+n}^2) + \frac{EF}{2(R-d)} \sum_{j=1}^m (-u(\vartheta_j) - z_{2n+1} \sin \vartheta_j + d)^2 - z_{2n+1} P \rightarrow \min_{z \in R^{2n+1}}, \quad (28)$$

$$\vartheta_j = \frac{2\pi(j-1)}{m}, \quad z_{2n+1} = t.$$

На рис. 8 и 10 представлены результаты вычислений при $d = \frac{R}{4000} = \frac{31}{4000} = 0.0078$. В данном случае спицы вообще не испытывают сжимающих усилий, момент в два раза меньше, чем в случае, когда спицы могут потерять устойчивость (рис. 7).

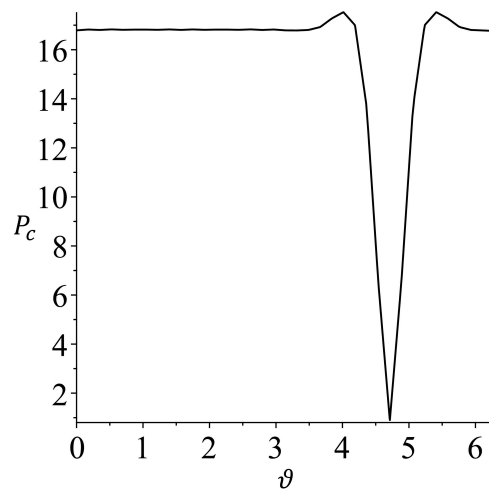


Рисунок 8. Распределение усилий по спицам колеса.
Figure 8. The distribution of forces on the spokes of the wheel.

На рис. 9 представлены результаты вычислений при $d = \frac{R}{4500} = \frac{31}{4500} = 0.0069$. Сравнение этих результатов показывает, что небольшое изменение предварительного натяжения спиц незначительно влияет на напряженно-деформированное состояние колеса.

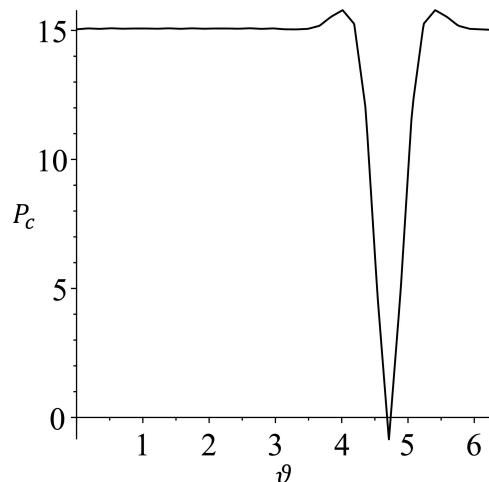


Рисунок 9. Распределение усилий по спицам колеса.
Figure 9. The distribution of forces on the spokes of the wheel.

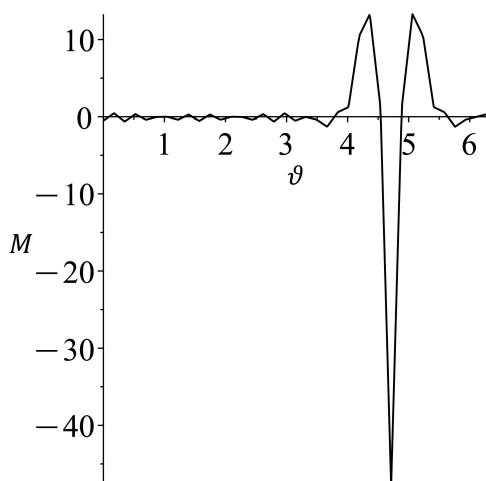


Рисунок 10. Распределение моментов вдоль обода колеса.
Figure 10. Moment distribution along the wheel rim.

Заключение

Таким образом, вариационная постановка задачи расчета колеса со спицами позволяет учесть эффект предварительного натяжения спиц. Этот эффект приводит к существенно другим результатам, и его необходимо учитывать при расчетах.

Литература

1. Даугавет, В.А. Численные методы квадратичного программирования / В.А. Даугавет. – Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербург. гос. университета, 2004. – 128 с.
2. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер. – Москва: Мир, 1979. – 574 с.
3. Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос. – Москва: Мир, 1989. – 494 с.
4. Байокки, К. Вариационные и квазिवариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей / К. Байокки, А. Капело. – Москва: Наука, 1988. – 448 с.

Для цитирования:

Тарасов, В.Н. Контактная задача для кольца, подкрепленного упругими тонкими спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса / В.Н. Тарасов, Н.О. Смолева // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 30–35.

For citation:

Tarasov, V.N. Kontaktnaya zadacha dlya kol'ca, podkreplennogo uprugimi tonkimi spicami, nahodyashchegosya pod dejstviem sily, prilozhennoj k osi koleasa [Contact problem for a ring reinforced with elastic thin spokes, which is under the action of a force applied to the wheel axle] / V.N. Tarasov, N.O. Smoleva // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 30–35.

Дата поступления рукописи: 03.07.2023

Received: 03.07.2023

5. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1967. – 376 с.
6. Тарасов, В.Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем / В.Н. Тарасов. – Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2013. – 238 с.
7. Николаи, Е.Л. Труды по механике / Е.Л. Николаи. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 583 с.

References

1. Daugavet, V.A. Chislennyye metody kvadrachnogo programirovaniya [Numerical methods of quadratic programming] / V.A. Daugavet. – Saint Petersburg: St. Petersburg State Univ. Publ. House, 2004. – 128 p.
2. Glovinski, R. Chislennoe issledovanie variacionnyh neravenstv [Numerical study of variational inequalities] / R. Glovinski, Zh.L. Lions, R. Tremol'er. – Moscow: Mir, 1979. – 574 p.
3. Panagiotopulos, P. Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevypuklyye funktsii energii [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy function] / P. Panagiotopulos. – Moscow: Mir, 1989. – 494 p.
4. Bajokki, K. Variacionnye i kvazivariacionnye neravenstva. Prilozheniya k zadacham so svobodnoj granicej [Variational and quasi-variational inequalities. Applications to Free Boundary Problems] / K. Bajokki, A. Kapelo. – Moscow: Science, 1988. – 448 p.
5. Feodosiev, V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials] / V.I. Feodosiev. – Moscow: Science, 1967. – 376 p.
6. Tarasov, V.N. Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem [Optimization methods in the study of constructive-nonlinear problems in the mechanics of elastic systems] / V.N. Tarasov. – Syktyvkar: Komi Science Centre UB RAS, 2013. – 238 p.
7. Nikolai, E.L. Trudy po mekhanike [Transactions on mechanics] / E.L. Nikolai. – Moscow: Gostekhizdat, 1955. – 583 p.