УДК 530.145, 512.81
DOI 10.19110/1994-5655-2023-4-49-56

Пространства постоянной кривизны, уравнение Лиувилля и контракции алгебр Ли

И.В. Костяков, В.В. Куратов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Уравнение Лиувилля эквивалентно двумерному уравнению Лапласа и приводится к нему преобразованием Бэклунда, которое с точки зрения теории групп можно интерпретировать с помощью контракции Иненю-Вигнера. Мы разбираем построение решений уравнения Лиувилля для представления нулевой кривизны с помощью контракции алгебры Ли $sl(2)$ и используем для этого нильпотентные образующие.

Ключевые слова:

уравнение Лиувилля, контракции групп Ли

Spaces of constant curvatere, the Liouville equation and contractions of Lie algebras

I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru

Abstract

The Liouville equation is equivalent to the two-dimensional Laplace equation and is reduced to it by the Lie-Bäcklund transformation, which, from the point of view of group theory, can be interpreted from using the Inönü-Wigner contraction. We analyze the construction of solutions to the Liouville equation to represent zero curvature using the contraction of the Lie algebra $sl(2)$ and use nilpotent generators for this.

Keywords:

Liouville equation, contractions of Lie groups

Введение

В XIX в. Ж. Лиувилль, занимаясь поиском поверхностей постоянной кривизны K, пришел к уравнению [1], которое теперь носит его имя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{K}{2}\mathrm{e}^u, \tag{1}$$

и нашел решение в виде

$$\mathrm{e}^u = \frac{4f_x(x)g_y(y)}{\left(1+Kf(x)g(y)\right)^2}. \tag{2}$$

Здесь x и y — две независимые переменные, $f(x)$ и $g(y)$ — две произвольные функции от x и y соответственно. Нижние индексы означают частные производные. После замены $g(y) \to \frac{1}{Kg(y)}$ решение (2) можно переписать в виде

$$\mathrm{e}^u = -\frac{4f_x(x)g_y(y)}{K\left(f(x)+g(y)\right)^2}. \tag{3}$$

Преобразования

$$x' = X(x), \quad y' = Y(y),$$

$$u' = u - \ln X_x(x) - \ln Y_y(y) \tag{4}$$

не меняют вид уравнения Лиувилля (1), образуя бесконечную группу, содержащую две произвольные функции, и могут служить для построения его решений [2, 3].

Уравнение Лиувилля эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{5}$$

(двумерному уравнению Лапласа в случае римановых пространств или волновому уравнению в случае пространств псевдоримановых), имеет ту же группу симметрии и приводится к уравнению (5) одним из двух преобразований Ли-Бэклунда

$$u = \ln\left(-\frac{4\tilde{u}_x\tilde{u}_y}{K\tilde{u}^2}\right), \quad u = \ln\left(-\frac{4\tilde{u}_x\tilde{u}_y}{K\cos^2\tilde{u}}\right), \tag{6}$$

найденных еще Лиувиллем [2, 3]. Для любого решения $\tilde{u}(x,y)$ уравнения (5), формулы (6) дают решения уравнения (1). Уравнение Лиувилля вошло в учебники [4, 5] и остается интересной задачей как для математиков [6, 7], так и для физиков.

Поскольку группы движений плоских пространств можно получить предельными переходами из групп движений пространств постоянной кривизны ($K \neq 0$), то преобразования Бэклунда, переводящие уравнение Лиувилля в уравнение Лапласа или волновое, также можно связать с контракциями соответствующих групп (алгебр) [8–10].

Контракции алгебр Ли были впервые введены в работе Иненю и Вигнера [11] и в наиболее простой реализации заключаются в умножении некоторых ее элементов на параметры ε_i с последующим независимым устремлением их к нулю таким образом, чтобы в пределе получались новые алгебры Ли. Возможен и алгебраический подход к контракциям [12], заключающийся в использовании алгебры Пименова $\mathbf{P}_n(\iota)$, при котором вместо параметров ε используются нильпотентные элементы этой алгебры.

В общем случае, как было отмечено [8–10], преобразования Бэклунда связаны с контракциями Иненю-Вигнера. Если гамильтониан имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{H}_I$, где постоянная взаимодействия ε совпадает с параметром контракции, то при устремлении ε к нулю задача сводится к системе, описываемой свободным гамильтонианом $\hat{H}_0$, а общее решение можно строить из связанных с ним свободных полей.

Например, нелинейное уравнение Лиувилля описывается в терминах алгебры Ли $sl(2)$ или $so(3)$, а связанное с ним линейное уравнение Лапласа (5), решения которого играют роль асимптотических полей, связано с группой движений плоскости, которая может быть получена контракцией из $sl(2)$ или $so(3)$. При этом контракционный параметр, равный постоянной взаимодействия, можно интерпретировать и как кривизну K соответствующего пространства.

Также для цепочки Тоды контракция соответствующей алгебры Ли позволяет строить общее решение. Предельные переходы в Тода системах, перестройка диаграмм Дынкина, влияние на гамильтониан взаимодействия, понижение размерности получающейся Тода системы и появление свободных уравнений исследованы в [13], а связь контракций и преобразований Бэклунда для A_n- цепочки Тоды отмечена в [14].

В работе [15], основываясь на системе уравнений, из которой следует уравнение нулевой кривизны [10, 16], были найдены преобразования Бэклунда для A_n–цепочки Тоды, связывающие ее с A_{n-1}– цепочкой Тоды и свободным уравнением Лапласа. Аналогичный результат получен для B_n, C_n и G_2–цепочек Тоды. Отсюда следует, что с $L-A$ парой ассоциируются две алгебры Ли, отвечающие первоначальному уравнению и уравнению, связанному с ним преобразованием Беклунда и что саму $L-A$ пару можно понимать как результат некоторой композиции двух алгебр Ли — исходной и контрактированной.

А. Пуанкаре использовал уравнение Лиувилля в задаче об униформизации римановых поверхностей [17] и доказал существование решения уравнения Лиувилля для полной конформной метрики отрицательной кривизны с определенными асимптотиками в окрестностях особых точек. Такое решение определяет на сфере с выколотыми точками полную метрику отрицательной кривизны. Решения уравнения Лиувилля, с определенными асимптотиками в проколотых точках и сингулярностями определенного типа на замкнутых контурах, интерпретируемые как горизонт черной дыры, могут трактоваться как решения типа черных дыр. На основе результатов магистерской диссертации В.И. Смирнова 1918 г. для случая четырех проколов были явно описаны все решения типа черных дыр [18]. У уравнения Лиувилля есть и солитонные решения [19, 20].

Классическая теория Лиувилля — это теория поля, связанная с гиперболическими римановыми поверхностями. Полные конформные метрики на римановой поверхности являются классическими полями теории, а уравнение Лиувилля — уравнением Эйлера-Лагранжа для соответствующего функционала [21]. Пример классического поля Лиувилля разобран в [22].

Решения (2) лежат в основе квантовой модели Лиувилля — базового примера конформной теории поля. Функции f и g играют здесь роль свободных полей и нулевых мод [23]. В теории струн квантовое поле Лиувилля возникает как конформная аномалия и играет важную роль [24].

В данной работе предложено использовать нильпотентные образующие и алгебраический вариант контракций [12] для представления уравнений Лиувилля и Лапласа через уравнение нулевой кривизны и нахождения связи их решений.

1. Геометрии Кэли-Клейна и уравнение Лиувилля

Согласно программе Ф. Клейна, проективная геометрия и ее группа движений могут служить базой для построения геометрий. Каждой из девяти геометрий Кэли-Клейна отвечает подгруппа проективной группы, т.е. подгруппа матриц 3×3, которая задается соответствующим абсолютом. Некоторые из этих подгрупп связаны предельными переходами. Существует также глубокая связь различных видов комплексных и гиперкомплексных чисел с геометриями Кэли-Клейна [25]. Отметим подход к построению геометрий, основанный на принципе феноменологической симметрии [26, 27].

Мы следуем подходу, предложенному Р.И. Пименовым [28], где двумерные геометрии Кэли-Клейна (рис. 1) моделируются в виде двумерной сферы с именованными координатами, которые могут быть вещественными, мнимыми и нильпотентными [12, 28, 29]. Используя параметры $j_k = 1, \iota_k, i$, именованные координаты можно представить в виде $x_0, j_1x_1, j_1j_2x_2, x_k \in \mathbb{R}$ и с помощью них реализовать девять геометрий на поверхностях

$$x_0^2 + j_1^2 x_1^2 + j_1^2 j_2^2 x_2^2 = R^2, \tag{7}$$

в пространствах с метрикой

$$ds^2 = (dx_0)^2 + j_1^2 (dx_1)^2 + j_1^2 j_2^2 (dx_2)^2. \tag{8}$$

Группа движений сферы изоморфна ортогональной группе $SO(3)$. Группы движений остальных двумерных геометрий Кэли-Клейна могут быть получены из $SO(3)$ контракциями и аналитическими продолжениями [12]. Генераторы соответствующих алгебр Ли получаются из генераторов алгебры Ли $so(3)$ домножением на параметры j_k

$$X \to j_1 X, \quad Y \to j_2 Y, \quad Z \to j_1 j_2 Z,$$

где X, Y, Z — генераторы вращений в двумерных плоскостях $\{x_0, x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_0, x_2\}$ соответственно. Эти преобразования при нильпотентных значениях j_k соответствуют преобразованиям контракций Иненю-Вигнера. Коммутационные соотношения имеют вид [12]

$$[X, Y] = Z, \quad [Y, Z] = j_1^2 X, \quad [Z, X] = j_2^2 Y. \tag{9}$$

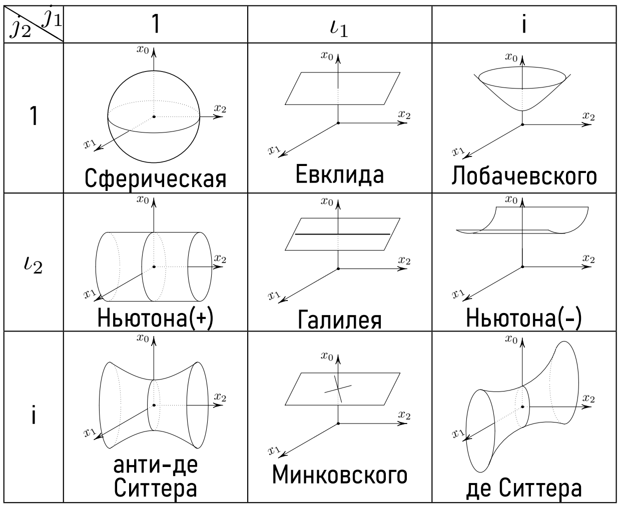

Рисунок 1. Двумерные пространства Кэли-Клейна.
Figure 1. Two-dimensional Cayley-Klein spaces.

Для римановых ($j_2 = 1$) и псевдоримановых ($j_2 = i$) двумерных пространств постоянной кривизны метрику

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{10}$$

можно представить в конформном виде [4, 5]

$$ds^2 = \mathrm{e}^u \left(dx^2 + j_2^2 dy^2\right) = \mathrm{e}^u dz\, d\bar{z}, \tag{11}$$

$$\mathrm{e}^{-u} = \left(1 + K\left(x^2 + j_2^2 y^2\right)\right)^2 = \left(1 + K z\bar{z}\right)^2, \tag{12}$$

где $z = x + i j_2 y$, $\bar{z} = x - i j_2 y$. В этом случае гауссова кривизна K имеет вид [4, 5]

$$K = -\frac{\mathrm{e}^u}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + j_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = -2\mathrm{e}^{-u}\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}. \tag{13}$$

Если кривизна постоянна, то для функции $u = u(z, \bar{z})$ получаем уравнение Лиувилля (1)

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + j_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{K}{2}\mathrm{e}^u. \tag{14}$$

Любая поверхность с римановой метрикой (11) ($j_2 = 1$) постоянной кривизны K локально изометрична сфере $\mathbb{S}^2$ при $K > 0$, евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ при $K = 0$ или плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ при $K < 0$, которые являются универсальными накрывающими поверхностями для всех поверхностей соответственно положительной, нулевой и отрицательной кривизны [4, 5]. Любая псевдориманова поверхность ($j_2 = i$) с метрикой вида (11) постоянной кривизны локально изометрична однополостному гиперболоиду $\mathbb{L}_2$ ($K \neq 0$) или плоскости Минковского $\mathbb{R}_{1,1}$ ($K = 0$). Таким образом, уравнение Лиувилля имеет отчетливый геометрический смысл и связана с внутренней геометрией поверхностей в евклидовом или псевдоевклидовом пространствах.

Рассмотрим более подробно, как получаются эти формулы, и начнем с трех римановых геометрий Кэли-Клейна ($j_2 = 1$) — сферы, плоскостей Евклида и Лобачевского. Сфера радиуса R (рис. 2) задается уравнениями (7) и (8) с $j_1 = j_2 = 1$. При стереографической проекции на экваториальную плоскость $x_0 = 0$ из точки $(R, 0, 0)$ метрика сферы принимает конформный вид (11) [4, 5]

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\left(1 + K\left(x^2 + y^2\right)\right)^2} = \frac{4dz\, d\bar{z}}{\left(1 + K|z|^2\right)^2}. \tag{15}$$

Здесь $z = x + iy$ – координаты стереографической проекции соответствующей точки сферы $M(x_0, x_1, x_2)$, $K = \dfrac{1}{R^2}$ — гауссова кривизна сферы.

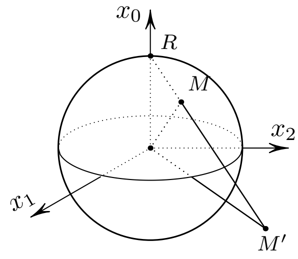

Рисунок 2. Стереографическая проекция сферы $\mathbb{S}_2$. Сферическая плоскость.
Figure 2. Stereographic projection of the sphere $\mathbb{S}_2$. Spherical plane.

К плоскости Лобачевского ($j_1 = i$, $j_2 = 1$) можно прийти, рассматривая псевдосферу радиуса R (рис. 3)

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = R^2 \tag{16}$$

в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_1^3$ с метрикой

$$ds^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2. \tag{17}$$

При стереографической проекции верхней половины гиперболоида на плоскость $x_0 = 0$ из точки $(-R, 0, 0)$ метрика на плоскости Лобачевского (модель Пуанкаре) принимает конформный вид (11), (15), где $K = -\dfrac{1}{R^2}$, $\quad |z| < 1$ [4, 5].

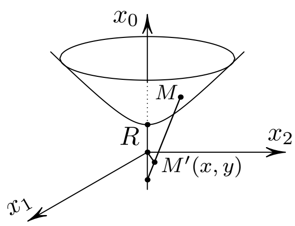

Рисунок 3. Стереографическая проекция гиперболоида. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского $\mathbb{H}_2$.
Figure 3. Stereographic projection of a hyperboloid. The Poincare model of the Lobachevsky plane $\mathbb{H}_2$.

Таким образом, конформную метрику и уравнения Лиувилля для сферы, плоскостей Евклида и Лобачевского для $K = \dfrac{j_1^2}{R^2}$ можно записать в виде (11),(12) и (14). Делая преобразование $z \to f(z)$, получаем метрику и общее решение

$$ds^2 = \frac{4|f_z|^2}{\left(1 + K|f|^2\right)^2} dz\, d\bar{z}, \quad \mathrm{e}^u = \frac{4|f_z|^2}{\left(1 + K|f|^2\right)^2}. \tag{18}$$

Отметим, что если у нас есть какое-нибудь решение $u(z, \bar{z})$ уравнения Лиувилля, то функция

$$U(z, \bar{z}) = u\left(f(z), \bar{f}(\bar{z})\right) f_z(z) \bar{f}_{\bar{z}}(\bar{z}) \tag{19}$$

тоже будет решением, которое можно получить и с помощью симметрий (4).

Аналогично можно рассмотреть псевдоримановы пространства постоянной кривизны ($j_2 = i$), уравнения Лиувилля для них и получить формулы (11)–(14). Здесь есть три типа прямых — времениподобные, пространственноподобные и световые, не совмещаемых друг с другом движениями. Эти геометрии применяются для моделей пространства-времени — анти-де Ситтера, Минковского и де Ситтера (рис. 4).

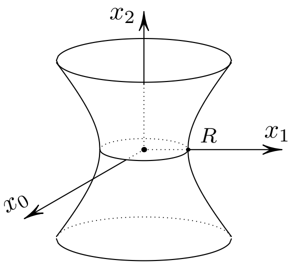

Рисунок 4. Однополостной гиперболоид $\mathbb{L}_2$ (пространство-время анти-де Ситтера AdS_2).
Figure 4. One-sheeted hyperboloid $\mathbb{L}_2$ (anti-de Sitter space-time AdS_2).

В полуримановых пространствах с $j_2 = \iota_2$ появляются два типа прямых, не совмещающихся движениями этих геометрий. Одна из них моделируется дуальным числом, что приводит к возникновению двух метрик: в базе и слое. Это позволяет применять полуримановы геометрии к описанию двух разных физических величин, например времени и пространства, т. е. служить моделями пространства-времени [12, 28, 29]. Мы их здесь рассматривать не будем.

Дифференцируя уравнение Лиувилля (14) по z

$$u_{zz\bar{z}} = -\frac{K}{2}\mathrm{e}^u u_z = u_{z\bar{z}} u_z, \tag{20}$$

получаем, что $W_2(u_{zz}, u_z) = W(z)$, где

$$W(z) = u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 \tag{21}$$

является голоморфной функцией от z

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2\right) = 0. \tag{22}$$

Обозначая $p = u_z$, получаем уравнение Риккати

$$p_z - \frac{1}{2}p^2 = W(z), \tag{23}$$

которое легко интегрируется.

Отметим, что функция $\psi = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u}$ играет важную роль в теории уравнения Лиувилля и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{2}W\psi = 0. \tag{24}$$

В квантовой теории Лиувилля поле ψ описывает вырожденный на уровне 2 вектор в модуле Верма алгебры Вирасоро [18]. С уравнением (24), в котором функция $W(z)$ в случае n особых точек имеет вид

$$W(z) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2(z - z_k)^2} + \frac{c_k}{z - z_k}\right), \tag{25}$$

Ф. Клейн и А. Пуанкаре связывали задачу об униформизации римановых поверхностей, а А.М. Поляков обнаружил [24, 30], что действие уравнения Лиувилля S, вычисленное на классическом решении, является производящей функцией для акцессорных параметров c_k, где

$$c_k = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial S}{\partial z_k}.$$

2. Представление нулевой кривизны уравнения Лиувилля

Уравнение Лиувилля (14) с $K = \dfrac{j_1^2}{R^2}$, $j_1 = 1, \iota_1$ может быть записано с помощью представления нулевой кривизны для алгебры Ли $sl(2)$ или $so(3)$. Мы разберем здесь вариант алгебры $sl(2)$. Для алгебры $so(3, j)$ вида (9) все аналогично. Уравнение (14) является условием совместности

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial V}{\partial z} + [U, V] = 0 \tag{26}$$

для переопределенной системы уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = U(z, \bar{z})\Psi, \ \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = V(z, \bar{z})\Psi,$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ j_1\Psi_2 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где

$$U = v_1\mathbf{h} + w_1\mathbf{e}, \quad V = v_2\mathbf{h} + w_2\mathbf{f}. \tag{28}$$

Здесь v_i, w_i — функции от z и $\bar{z}$ соответственно $u = \ln(-4w_1w_2)$, $\mathbf{h}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ — генераторы алгебры $sl(2, j_1)$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{j_1}{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{j_1}{R} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

коммутационные соотношения между которыми имеют вид

$$[\mathbf{e}, \mathbf{f}] = K\mathbf{h}, \qquad [\mathbf{h}, \mathbf{e}] = 2\mathbf{e}, \quad [\mathbf{h}, \mathbf{f}] = -2\mathbf{f}. \tag{30}$$

Кривизна K, которую можно интерпретировать как постоянную взаимодействия в (14), играет роль параметра контракции алгебры Ли $sl(2)$ (30). При $K = 0$ ($j_1 = \iota_1$) алгебра Ли $sl(2)$ переходит в алгебру Ли группы движений плоскости, а уравнение Лиувилля — в двумерное уравнение Лапласа вида (5) [9, 10], решения которого хорошо известны

$$\phi(z, \bar{z}) = f(z) + g(\bar{z}). \tag{31}$$

Система (27) и условие совместности (26) допускают естественную геометрическую интерпретацию [16]. U и V можно рассматривать как локальные коэффициенты связности в тривиальном расслоении $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2$, где $\mathbb{C}$ играет роль базы, а Ψ лежит в слое $\mathbb{C}^2$. При этом вектор Ψ ковариантно постоянен, а связность (U, V) имеет нулевую кривизну. Когда параметр j_1 равен дуальному числу, в слое Ψ есть выделенное направление.

Представление уравнения Лиувилля в виде условия (26) справедливо для целого класса калибровочно эквивалентных связностей U и V

$$U \to \frac{\partial G}{\partial z}G^{-1} + GUG^{-1},$$
$$V \to \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}G^{-1} + GVG^{-1} \tag{32}$$

и означает существование бесконечного набора интегралов движения — законов сохранения [16]. Наличие интеграла $W(z)$ (21), не зависящего от кривизны K, позволяет написать равенство [9]

$$u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 = \phi_{zz} - \frac{1}{2}\phi_z^2, \tag{33}$$

которое и является преобразованием Бэклунда, связывающим решение уравнения Лиувилля u с решением уравнения Лапласа ϕ. В эквивалентном виде его можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-\phi}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\phi-u)}\right) = 0, \tag{34}$$

проинтегрировать и получить решение вида (2) [9]

$$\mathrm{e}^u = \frac{4f_z g_{\bar{z}}}{(1+Kfg)^2}, \tag{35}$$

где f и g — произвольные функции от z и $\bar{z}$ соответственно. Таким образом, решения уравнения Лапласа, которое получается при $j_1 = \iota_1$ и контракции $sl(2)$, позволяют строить решения уравнения (14).

Пользуясь калибровочными преобразованиями (32) связностей U и V, выберем функции v_i и w_i в виде

$$v_1 = -\frac{u_z}{2}, \quad w_1 = -\frac{a}{2}, \quad v_2 = 0, \quad w_2 = \frac{\mathrm{e}^u}{2a}, \tag{36}$$

где a — произвольный параметр, и распишем подробнее систему уравнений (27)

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial}{\partial z}\Psi_1 = -u_z\Psi_1 - \dfrac{j_1^2 a}{R}\Psi_2, \\ 2\dfrac{\partial}{\partial z}\Psi_2 = u_z\Psi_2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\Psi_1 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\Psi_2 = \dfrac{\mathrm{e}^u}{2aR}\Psi_1. \end{cases} \tag{37}$$

Продифференцировав первое равенство первой системы по z, получим для функции Ψ_1 уравнение типа (24)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_1 + \frac{1}{2}\left(u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2\right)\Psi_1 = 0. \tag{38}$$

Дифференцируя (38) по $\bar{z}$ можно еще раз убедиться в том, что $W(z)$ (21) является интегралом движения и не зависит от $\bar{z}$ и кривизны K. Обозначая $\eta = \ln\dfrac{\Psi_2}{\Psi_1}$ и вводя функцию $\phi = u - 2\eta$, можно переписать системы (37) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}(\phi - u) = \dfrac{aj_1^2}{R}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(u+\phi)}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(\phi + u) = \dfrac{1}{aR}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(u-\phi)}, \end{cases} \tag{39}$$

которая является преобразованием Бэклунда и связывает решения $u(z,\bar{z})$ уравнения Лиувилля (14) и решения $\phi(z,\bar{z})$ уравнения Лапласа (31). В работе [15] было отмечено, что в такой записи уравнения нулевой кривизны приобретают более симметричную форму, и выявляется их дополнительная структура, которая говорит о том, что с ними ассоциируются две алгебры Ли — одна, отвечающая уравнению Лиувилля, и другая, отвечающая уравнению Лапласа. Используя представления (29), (30), мы описываем две алгебры: исходную и контрактированную, действующие в двух разных двумерных комплексных пространствах Ψ (27), одно из которых имеет выделенное направление, описываемое дуальным числом. Эта же конструкция для внутреннего пространства лептонов и кварков в электрослабой модели использовалась в [12]. Инвариант (33) сохраняется в обоих пространствах.

Переход к переменной проективного типа η позволяет дать интерпретацию и на языке проективной геометрии. В этом случае имеем два проективных пространства $\mathbb{C}P^1$, на одном из которых введен абсолют $\mathbb{R}P^1$.

Связности U и V можно представить в виде

$$U = g_z g^{-1}, \quad V = g_{\bar{z}} g^{-1},$$
$$g = \begin{pmatrix} A & j_1 B \\ j_1 C & D \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Воспользовавшись (32) и (36) и расписывая уравнения

$$g_z = Ug, \qquad g_{\bar{z}} = Vg, \tag{41}$$

имеем

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial}{\partial z}A = -u_z A - a\frac{j_1^2}{R}C, && \frac{\partial}{\partial \bar{z}}A = 0, \\ &2\frac{\partial}{\partial z}C = u_z C, && 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}C = \frac{\mathrm{e}^u}{aR}A, \\ &2\frac{\partial}{\partial z}B = -u_z B - \frac{a}{R}D, && \frac{\partial}{\partial \bar{z}}B = 0, \\ &2\frac{\partial}{\partial z}D = u_z D, && \frac{\partial}{\partial \bar{z}}D = \frac{j_1^2\mathrm{e}^u}{aR}B. \end{aligned} \tag{42}$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и (37). Легко выводится, что отношения A/B и C/D не зависят от z и $\bar{z}$ соответственно и являются функциями, с помощью которых строится решение (35) [23]. Так же, как и в (37), несложно получить интеграл движения $W(z)$ и преобразования Бэклунда.

Преобразования Бэклунда и связанные с ними контракции алгебры Ли можно сопоставить с обычной теорией возмущений [9], отождествляя постоянную взаимодействия

K с параметром контракции алгебры $sl(2)$. Решим уравнение (1), разлагая u в ряд по параметру K

$$u(x,y) = \Phi_0(x,t) + K\Phi_1(x,y) + K^2\Phi_2(x,y) + \dots .$$

Уравнения для Φ_i имеют вид [17]

$$\begin{aligned}
&(\Phi_0)_{xy} = 0, \quad (\Phi_1)_{xy} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\Phi_0}, \\
&(\Phi_2)_{xy} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\Phi_0+\Phi_1} - \mathrm{e}^{\Phi_0}\right), \\
&(\Phi_3)_{xy} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2} - \mathrm{e}^{\Phi_0+\Phi_1}\right), \quad \dots .
\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем ряд теории возмущений, члены которого являются функциями от решения уравнения Лапласа.

Заключение

Мы использовали представление нулевой кривизны и ввели определенным образом параметр j_1. Значению $j_1 = 1$ соответствуют уравнение Лиувилля, алгебра Ли $sl(2)$ и слой $\mathbb{C}_2$ для вектор-функции Ψ. При $j_1 = \iota_1$ получаем уравнение Лапласа, алгебру Ли $e(2)$ и слой $\mathbb{C}_2(\iota_1)$, в котором есть выделенное направление. Интеграл движения, который не зависит от этого параметра, связывает решения уравнения Лиувилля и Лапласа и является преобразованием Бэклунда.

Таким образом, алгебраический вариант контракции $sl(2)$ позволяет, находясь в рамках представления матрицами 2×2, единым образом описать уравнения Лиувилля и Лапласа для представления нулевой кривизны и связать их решения посредством преобразования Бэклунда. Этот метод можно использовать и для исследования интегрируемых моделей для алгебр серий A_n, B_n и т.д.

Литература

1. Liouville, J. Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2 \log\lambda}{dudv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$ / J. Liouville // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1853. – Vol. 18. – P. 71–72.
2. Жибер, А.В. Уравнения типа Лиувилля / А.В. Жибер, Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249, № 1. – С. 26–29.
3. Ибрагимов, Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 280 с.
4. Дубровин, Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – Москва: Наука, 1986. – 760 с.
5. Катанаев, М.О. Геометрические методы в математической физике / М.О. Катанаев // arXiv:1311.0733 [math-ph]. – 2006 с.
6. Векуа, И.Н. Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = -2K\mathrm{e}^u$ / И.Н. Векуа // Сиб. матем. журн. – 1960. – Т. 1, № 3. – С. 331–342.
7. Попов, А.Г. Точные формулы построения решений уравнения Лиувилля $\Delta_2 u = \mathrm{e}^u$ по решениям уравнения Лапласа $\Delta_2 v = 0$ / А.Г. Попов // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333, № 4. – С. 440–441.
8. Лезнов, А.Н. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем / А.Н. Лезнов, М.В. Савельев. – Москва: Наука, 1985. – 280 с.
9. Лезнов, А.Н. Нелинейные уравнения и градуированные алгебры Ли / А.Н. Лезнов, М.В. Савельев // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. – 1984. – Т. 22. – С. 101–136.
10. Лезнов, А.Н. Точно решаемые квантово-механические и двумерные квантово-полевые модели / А.Н. Лезнов, М.В. Савельев, И.А. Федосеев // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1985. – Т. 16, вып. 1. – С. 183–233.
11. Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E.P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39. – № 6. – P. 510–524.
12. Громов, Н.А. Контракции классических и квантовых групп / Н.А. Громов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 318 с.
13. Громов, Н.А. Предельные переходы в Тода системах / Н.А. Громов, И.В. Костяков, В.В. Куратов // Алгебра, дифференциальные уравнения и теория вероятностей (Труды Коми НЦ УрО РАН, № 151). – Сыктывкар, 1997. – С. 51–59.
14. Костяков, И.В. Преобразования Бэклунда для A_n–цепочки Тода и контракции / И.В. Костяков, В.В. Куратов // Тез. докл. XIII Коми респуб. молод. науч. конф. – Сыктывкар, 1997. – С. 219.
15. Андреев, В.А. Преобразования Беклунда цепочек Тоды / В.А. Андреев // ТМФ. – 1988. – Т. 75, № 3. – С. 340–352.
16. Тахтаджян, Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – Москва: Наука, 1986. – 528 с.
17. Пуанкаре, А.Ж. Избранные труды: сборник научных трудов. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре / А.Ж. Пуанкаре. – Москва: Наука, 1974. – Т. 3. – 772 с.
18. Тахтаджян, Л.А. О вещественных проективных связностях, подходе В.И. Смирнова и решениях уравнения Лиувилля типа черных дыр / Л.А. Тахтаджян // ТМФ. – 2014. – Т. 181, № 1. – С. 206–217.
19. Андреев, В.А. Применение метода обратной задачи рассеяния к уравнению $\sigma_{xt} = \mathrm{e}^{\sigma}$ / В.А. Андреев // ТМФ. – 1976. – Т. 29, № 2. – С. 213–220.
20. Лезнов, А.Н. Симметрии и солитонные решения нелинейных уравнений / А.Н. Лезнов, В.И. Манько, С.М. Чумаков // ТМФ. – 1985. – Т. 63, № 1. – С. 50–63.
21. Takhtajan, L.A. Quantum Liouville theory in the background field formalism I. Compact Riemann surfaces / L.A. Takhtajan, L.-P. Teo // Commun. Math. Phys. – 2006. – Vol. 268. – P. 135–197.
22. Погребков, А.К. Теория поля Лиувилля / А.К. Погребков, М.К. Поливанов // Математическая физика и комплексный анализ: сборник обзорных статей 4. К 50-летию Института. Тр. МИАН СССР. – 1987. – Т. 176. – С. 86–96.
23. Фаддеев, Л.Д. Нулевые моды для квантовой модели

Лиувилля / Л.Д. Фаддеев // Функц. анализ и его прил. – 2014. – Т. 48, № 3. – С. 14–23.
24. Polyakov, A.M. Quantum geometry of bosonic strings / A.M. Polyakov // Physics Letters B. 1981. – Vol. 103, № 3. – P. 207–210.
25. Яглом, И.М. Проективные метрики / И.М. Яглом, Б.А. Розенфельд, Е.У. Ясинская // Успехи мат. наук. – 1964. – Т. 19, № 5(119). – С. 51–113.
26. Кулаков, Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 193, № 5. – С. 985–987.
27. Михайличенко, Г.Г. Двумерные геометрии / Г.Г. Михайличенко // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 4. – С. 803–805.
28. Пименов, Р.И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений / Р.И. Пименов // Литовский мат. сб. – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 457–486.
29. Пименов, Р.И. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени) / Р.И. Пименов. – Ленинград: Наука, 1968. – 496 с.
30. Zamolodchikov, A.B. Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory / A.B. Zamolodchikov, Al.B. Zamolodchikov // Nucl. Phys. B. – 1996. – Vol. 477. – P. 577–605.

References

1. Liouville, J. Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2\log\lambda}{dudv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$ / J. Liouville // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1853. – Vol. 18. – P. 71–72.
2. Zhiber, A.V. Uravneniya tipa Liuvillya [Equations of Liouville type] / A.V. Zhiber, N.H. Ibragimov, A.B. Shabat // Dokl. Akad. Nauk SSSR – 1979. – Vol. 249, № 1. – P. 26–29.
3. Ibragimov, N.H. Transformation groups applied to mathematical physics / N.H. Ibragimov. – Springer Dordrecht, 1985. – 394 p.
4. Dubrovin, B.A. Modern geometry — methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields / B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko. – Springer New York, 1991. – 470 p.
5. Katanaev, M.O. Geometrical methods in mathematical physics / M.O. Katanaev // arXiv:1311.0733[math-ph]. – 2006 p.
6. Vekua, I.N. Zamechaniya o svojstvah reshenij uravneniya $\Delta u = -2K\mathrm{e}^u$ [Remarks on properties of solutions of the equation $\Delta u = -2K\mathrm{e}^u$] / I.N. Vekua // Sibirsk. Mat. Zh. – 1960. – Vol. 1, № 3. – P. 331–342.
7. Popov, A.G. Tochnye formuly postroeniya reshenij uravneniya Liuvillya $\Delta_2 u = \mathrm{e}^u$ po resheniyam uravneniya Laplasa $\Delta_2 v = 0$ [Exact formulas for constructing solutions of the Liouville equation $\Delta_2 u = \mathrm{e}^u$ from solutions of the Laplace equation $\Delta_2 v = 0$] / A.G. Popov // Doklady Akademii Nauk. – 1993. – Vol. 333, № 4. – P. 440–441.
8. Leznov, A.N. Group-theoretical methods for integration of nonlinear dynamical systems / A.N. Leznov, M.V. Saveliev.– Progress in Mathematical Physics. Vol. 15. Birkhäuser Basel, 1992. – 292 p.
9. Leznov, A.N. Nonlinear equations and graded Lie algebras / A.N. Leznov, M.V. Savel'ev // Journal of Soviet Mathematics. – 1987. – Vol. 36, № 6. – P. 699–721.
10. Leznov, A.N. Tochno reshaemye kvantovo-mekhanicheskie i dvumernye kvantovo-polevye modeli [Exactly integrable quantum-mechanical and two-dimensional quantum-field systems] / A.N. Leznov, M.V. Saveliev, I.A. Fedoseev // Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei. – 1985. – Vol. 16, № 1. – P. 183–233.
11. Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E.P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39, № 6. – P. 510–524.
12. Gromov, N.A. Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups] / N.A. Gromov. – Moscow: FIZMATLIT, 2012. – 318 p.
13. Gromov, N.A. Predel'nye perekhody v Toda sistemah [Limit transitions in Toda systems] / N.A. Gromov, I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov // Algebra, differencial'nye uravneniya i teoriya veroyatnostej [Algebra, differential equations and probability theory] (Trudy Komi NC UrO RAN, № 151). – Syktyvkar, 1997. – P. 51–59.
14. Kostyakov, I.V. Preobrazovaniya Beklunda dlya A_n – cepochki Toda i kontrakcii [Bäcklund transformations for A_n–Toda chains and contractions] / I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov // Tez. dokl. XIII Komi respub. molod. nauch. konf. – Syktyvkar, 1997. – P. 219.
15. Andreev, V.A. Preobrazovaniya Beklunda cepochek Tody [Bäcklund transformations of Toda chains] / V.A. Andreev // Theoretical and Mathematical Physics. – 1988. – Vol. 75, № 3. – P. 567–575.
16. Faddeev, L.D. Hamiltonian methods in the theory of solitons / L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 592 p.
17. Poincaré, H. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = \mathrm{e}^u$ / H. Poincaré // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1898. – Vol. 4. – P. 137–230.
18. Takhtadzhyan, L.A. O veshchestvennyh proektivnyh svyaznostyah, podhode V. I. Smirnova i resheniyah uravneniya Liuvillya tipa chernyh dyr [Real projective connections, V. I. Smirnov's approach, and black-hole-type solutions of the Liouville equation] / L.A. Takhtadzhyan // Theoret. Math. Phys. – 2014. – Vol. 181, № 1. – P. 1307–1316.
19. Andreev, V.A. Primenenie metoda obratnoj zadachi rasseyaniya k uravneniyu $\sigma_{xt} = \mathrm{e}^\sigma$ [Application of the inverse scattering method to the equation $\sigma_{xt} = \mathrm{e}^\sigma$] / V.A. Andreev // Theor. Math. Phys. – 1976. – Vol. 29. – P. 1027–1032.
20. Leznov, A.N. Simmetrii i solitonnye resheniya nelinejnyh uravnenij [Symmetries and soliton solutions of nonlinear equations] / A.N. Leznov, V.I. Man'ko, S.M. Chumakov // Theor. Math. Phys. – 1985. – Vol. 63. – P. 356–365.
21. Takhtajan, L.A. Quantum Liouville theory in the background field formalism I. Compact Riemann surfaces / L.A. Takhtajan, L.-P. Teo // Commun. Math. Phys. – 2006. – Vol. 268. – P. 135–197.
22. Pogrebkov, A.K. Teoriya polya Liuvillya [Liouville field theory] / A.K. Pogrebkov, M.K. Polivanov // Proc. Steklov Inst. Math. – 1988. – Vol. 176. – P. 89–99.

23. Faddeev, L.D. Nulevye mody dlya kvantovoj modeli Liuvillya [Zero modes for the quantum Liouville model] / L.D. Faddeev // Functional Analysis and Its Applications. – 2014. – Vol. 48, № 3. – P. 166–174.
24. Polyakov, A.M. Quantum geometry of bosonic strings / A.M. Polyakov // Physics Letters B. 1981. – Vol. 103, № 3. – P. 207–210.
25. Yaglom, I.M. Projective metrics / I.M. Yaglom, B.A. Rozenfel'd, E.U. Yasinskaya // Russian Mathematical Surveys. – 1964. – Vol. 19, № 5. – P. 49–107.
26. Kulakov, Yu.I. Geometriya prostranstv postoyannoj krivizny kak chastnyj sluchaj teorii fizicheskih struktur [The geometry of spaces of constant curvature as a special case of the theory of physical structures] / Yu.I. Kulakov // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1970. – Vol. 193, № 5. – P. 985–987.
27. Mikhailichenko, G.G. Dvumernye geometrii [Two-dimensional geometry] / G.G. Mikhailichenko // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1981. – Vol. 260, № 4. – P. 803–805.
28. Pimenov, R.I. Edinaya aksiomatika prostranstv s maksimal'noj gruppoj dvizhenij [Unified axiomatics of spaces with maximal movement group] / R.I. Pimenov // Lithuanian Math. J. – 1965. – Vol. 5, № 3. – P. 457–486.
29. Pimenov, R.I. Kinematic spaces: mathematical theory of space-time / R.I. Pimenov. – New York: Consultants Bureau, 1970. – 185 p.
30. Zamolodchikov, A.B. Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory / A.B. Zamolodchikov, Al.B. Zamolodchikov // Nucl. Phys. B. – 1996. – Vol. 477. – P. 577–605.

Для цитирования:
Костяков, И.В. Пространства постоянной кривизны, уравнение Лиувилля и контракции алгебр Ли / И.В. Костяков, В.В. Куратов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 49–56.

For citation:
Kostyakov, I.V. Prostranstva postoyannoj krivizny, uravnenie Liuvillya i kontrakcii algebr Li [Spaces of constant curvatere, the Liouville equation and contractions of Lie algebras] / I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 49–56.

Дата поступления статьи: 09.06.2023
Received: 09.06.2023