УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2023-4-63-68

Безмассовое поле Штюкельберга, точные решения в декартовых координатах и калибровочные степени свободы

О.А. Семенюк[1], А.В. Ивашкевич[2], А.В. Бурый[2], В.А. Плетюхов[1], В.М. Редьков[2]

[1]Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест, Беларусь
[2]Институт физики имени Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, г. Минск, Беларусь

olya.vasiluyk.97@yandex.by
ivashkevich.alina@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
vladimir.pletyukhov@yandex.by
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Аннотация

В работе исследуется безмассовое поле Штюкельберга. Среди 11 компонент полевой функции антисимметричный тензор представляет компоненты, меняющиеся при калибровочных преобразованиях, а скаляр и вектор соответствуют физически наблюдаемым величинам. Показано, что в декартовых координатах система уравнений Штюкельберга допускает существование пяти линейно независимых решений, описывающих разные состояния частицы. Получено выражение для тензора энергии-импульса безмассового поля Штюкельберга. Этот тензор вычисляется для произвольной линейной комбинации пяти найденных решений. Выделены четыре комбинации из пяти решений, которые не дают вклада в тензор энергии-импульса. Существует только одно решение, соответствующее ненулевому тензору энергии-импульса. Оно описывает физически наблюдаемые состояния безмассового поля Штюкельберга со структурой плоской волны.

Ключевые слова:

безмассовое поле Штюкельберга, декартовые координаты, точные решения, тензор энергии-импульса, калибровочные решения

Massless Stueckelberg field, exact solutions in Cartesian coordinates and gauge degrees of freedom

O.A. Semenyuk[1], A.V. Ivashkevich[2], A.V. Bury[2], V.A. Pletyukhov[1], V.M. Red'kov[2]

[1]Brest State University named after A.S. Pushkin, Brest, Belarus
[2]B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

olya.vasiluyk.97@yandex.by
ivashkevich.alina@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
vladimir.pletyukhov@yandex.by
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Abstract

In the paper we examine the massless Stueckelberg field. Among the eleven field function components, the antisymmetric tensor represents the gauge variables, whereas the scalar and vector correspond to physically observable quantities. It is shown that in Cartesian coordinates the Stueckelberg equations permit the existence of five independent solutions which describe the different states of the field. We have derived an expression for the energy-momentum tensor of the massless Stueckelberg field. We find its explicit form for arbitrary linear combination of five established solutions. We have found four combinations of five solutions which do not contribute to energy-momentum tensor, therefore they correspond to purely gauge states. There exists only one solution which corresponds to nonvanishing energy-momentum tensor, it relates to physically observable states of the massless Stueckelberg field.

Keywords:

massless Stueckelberg field, Cartesian coordinates, exact solutions, energy-momentum tensor, gauge solutions

Введение

В работе исследована система 11 уравнений, описывающих безмассовое поле Штюкельберга [1–8]. Показано, что в декартовых координатах эти уравнения допускают существование пяти линейно независимых решений, описывающих разные состояния частицы. Они найдены в явном виде.

Среди 11 компонент полевой функции Штюкельберга антисимметричный тензор представляет калибровочные переменные, а скаляр и вектор соответствуют физически наблюдаемым величинам. Для того, чтобы в явном виде выделить решения, соответствующие физически наблюдаемым состояниям, исследуется выражение для тензора энергии-импульса поля Штюкельберга. Этот тензор вычисляется для произвольной линейной комбинации пяти решений. Выделены четыре линейно независимые комбинации этих решений, которые не дают вклада в тензор энергии-импульса. Найдена одна независимая комбинация решений, соответствующая ненулевому тензору энергии-импульса. Она описывает физически наблюдаемое состояние безмассового поля Штюкельберга со структурой плоской волны.

1. Декартовые координаты

Рассмотрим систему безмассовых уравнений Штюкельберга в декартовых координатах [7–10]:

$$\partial^a \Psi_a = 0, \quad \partial_a \Psi + \partial^b \Psi_{ab} = \Psi_a,$$
$$\partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a = 0. \qquad (1)$$

Как и должно быть, в системе уравнений отсутствует параметр с размерностью обратной длины (иначе, массы). Размерности компонент такие:

$$\left[\frac{1}{L}\Psi\right] = \left[\frac{1}{L}\Psi_{ab}\right] = [\Psi_a].$$

Перейдем к матричной форме представления уравнений (1). В качестве полевой функции будем использовать 11-мерный столбец

$$\Phi = (\Psi; \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3; \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{03},$$
$$\Psi_{23}, \Psi_{31}, \Psi_{12})^t = (H, H_1, H_2)^t. \qquad (2)$$

Здесь и далее t обозначает транспонирование. Систему уравнений (1) можно записать в блочной форме:

$$G^a \partial_a H_1 = 0, \quad \Delta^a \partial_a H + K^a \partial_a H_2 - H_1 = 0,$$
$$L^a \partial_a H_1 = 0 \qquad (3)$$

или

$$(\Gamma^a \partial_a - P)\Phi = 0, \ \Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & G^a & 0 \\ \Delta^a & 0 & K^a \\ 0 & L^a & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{4\times 4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} H \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Приведем явный вид всех матричных блоков:

$$G_0 = (1,0,0,0), \ G_1 = (0,-1,0,0),$$
$$G_2 = (0,0,-1,0), \ G_3 = (0,0,0,-1),$$
$$\Delta^0 = (1,0,0,0)^t, \ \Delta^1 = (0,1,0,0)^t,$$
$$\Delta^2 = (0,0,1,0)^t, \ \Delta^3 = (0,0,0,1)^t,$$

$$K^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем искать решения в виде плоских волн:

$$\Psi = fK(x), \quad \Psi_a = f_a K(x), \quad \Psi_{ab} = f_{ab} K(x),$$
$$K(x) = e^{-i\epsilon x^0} e^{-ik_1 x^1} e^{-ik_2 x^2} e^{-ik_3 x^3},$$
$$\vec{k} = (k^1, k^2, k^3). \qquad (5)$$

В уравнениях используем замены $\partial_a \Rightarrow -ik_a$, $a = 0,1,2,3$, $k_0 = k^0 = \epsilon$. Уравнение (4) удобно представлять в блочной форме

$$(-iG^0 k_0 - iG^1 k_1 - iG^2 k_2 - iG^3 k_3) H_1 = 0,$$
$$(-i\Delta^0 k_0 - i\Delta^1 k_1 - i\Delta^2 k_2 - i\Delta^3 k_3) H +$$
$$+(-iK^0 k_0 - iK^1 k_1 - iK^2 k_2 - iK^3 k_3) H_2 - H_1 = 0,$$
$$(-iL^0 k_0 - iL^1 k_1 - iL^2 k_2 - iL^3 k_3) H_1 = 0,$$
$$H = f, \ H_1 = (f_0, f_1, f_2, f_3)^t, \ H_2 = (E_j, B_j)^t. \qquad (6)$$

Из системы (6) находим алгебраическую систему

$$-ik_0 f_0 + ik_1 f_1 + ik_2 f_2 + ik_3 f_3 = 0;$$
$$-k_0 f + if_0 + k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0,$$

$$k_1 f - i f_1 - k_0 E_1 + k_3 B_2 - k_2 B_3 = 0,$$
$$-k_2 f + i f_2 + k_0 E_2 + k_3 B_1 - k_1 B_3 = 0,$$
$$k_3 f - i f_3 - k_0 E_3 + k_2 B_1 - k_1 B_2 = 0;$$
$$k_1 f_0 - k_0 f_1 = 0, \quad k_2 f_0 - k_0 f_2 = 0,$$
$$k_3 f_0 - k_0 f_3 = 0, \quad k_3 f_2 - k_2 f_3 = 0,$$
$$-k_3 f_1 + k_1 f_3 = 0, \quad k_2 f_1 - k_1 f_2 = 0. \qquad (7)$$

Эту систему уравнений можно представить в матричном виде $A\Phi = 0$, где столбец Φ задается так:

$$\Phi = (f, f_0, f_1, f_2, f_3, E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3)^t.$$

Ранг матрицы A равен 8, а с учетом условия $k_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ ранг становится равен 6. Убирая четыре нижние строки, убеждаемся, что ранг остается неизменным. В результате получаем неоднородную систему

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_0 & k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ -k_0 & i & 0 & 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & -i & 0 & -k_0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & i & 0 & k_0 \\ 0 & k_1 & -k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} =$$
$$= -(k_3, 0, 0, 0, 0, 0)^t f_3 - (0, k_3, 0, 0, 0, 0)^t E_3 -$$
$$-(0, 0, 0, k_3, 0, 0)^t B_1 - \qquad (8)$$
$$-(0, 0, k_3, 0, 0, 0)^t B_2 - (0, 0, -k_2, -k_1, 0, 0)^t B_3.$$

Детерминант матрицы слева ненулевой: $\det A_{6\times 6} = k_3^4(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$. Находим пять независимых решений (приводим их сразу в 11-мерной форме):

$$\Psi_1 = (i\frac{1}{k_3}, \frac{k_0}{k_3}, \frac{k_1}{k_3}, \frac{k_2}{k_3}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t f_3,$$
$$\Psi_2 = (\frac{k_0}{k_3}, 0, 0, 0, 0, \frac{k_1}{k_3}, \frac{k_2}{k_3}, 1, 0, 0, 0)^t E_3,$$
$$\Psi_3 = \Big(-\frac{k_2}{k_3}, 0, 0, 0, 0, -\frac{k_1 k_2}{k_3 k_0}, -\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_3 k_0}, 0, 1, 0, 0\Big)^t B_1,$$
$$\Psi_4 = \Big(\frac{k_1}{k_3}, 0, 0, 0, 0, \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_3 k_0}, \frac{k_1 k_2}{k_3 k_0}, 0, 0, 1, 0,\Big)^t B_2,$$
$$\Psi_5 = (0, 0, 0, 0, 0, -\frac{k_2}{k_0}, \frac{k_1}{k_0}, 0, 0, 0, 1)^t B_3. \qquad (9)$$

Эти пять решений фиксируются с точностью до произвольных множителей. При этом нужно учитывать, что размерности 11 компонент должны подчиняться правилу $[f] = [E_i, B_i] = [Lf_a]$. Чтобы удовлетворить ему, можно выбрать свободные параметры так:

$$f_3 = k_0, \quad E_3 = 1, \quad B_1 = B_2 = B_3 = 1.$$

В результате получаем

$$\Psi_1 = (i\frac{k_0}{k_3}, \frac{k_0^2}{k_3}, \frac{k_0 k_1}{k_3}, \frac{k_0 k_2}{k_3}, k_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t,$$
$$\Psi_2 = (\frac{k_0}{k_3}, 0, 0, 0, 0, \frac{k_1}{k_3}, \frac{k_2}{k_3}, 1, 0, 0, 0)^t,$$
$$\Psi_3 = \Big(-\frac{k_2}{k_3}, 0, 0, 0, 0, -\frac{k_1 k_2}{k_3 k_0}, -\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_3 k_0}, 1, 0, 0\Big)^t,$$
$$\Psi_4 = \Big(\frac{k_1}{k_3}, 0, 0, 0, 0, \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_3 k_0}, \frac{k_1 k_2}{k_3 k_0}, 0, 0, 1, 0\Big)^t,$$
$$\Psi_5 = (0, 0, 0, 0, 0, -\frac{k_2}{k_0}, \frac{k_1}{k_0}, 0, 0, 0, 1)^t. \qquad (10)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что это действительно пять решений исходной системы (7). Необходимо выяснить, какие решения являются калибровочными, а какие — физически наблюдаемыми. Для этого в следующем разделе построим выражение для тензора энергии–импульса безмассового поля Штюкельберга.

2. Тензор энергии-импульса, калибровочные решения

Обратимся к выделению из всех решений калибровочных. Такие калибровочные решения не должны давать вклада в тензор энергии-импульса поля. Потребуется матрица инвариантной билинейной формы. Она должна удовлетворять соотношениям [6,7]:

$$\eta^{-1}(\Gamma^a)^\dagger \eta = \Gamma^a, \quad \widetilde{\Gamma}^a \eta = \eta \Gamma^a,$$
$$\eta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B_{4\times 4} & 0 \\ 0 & 0 & C_{6\times 6} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Отсюда получаем уравнения для блоков

$$\widetilde{G}^a a = B\Delta^a, \quad \widetilde{\Delta}^a B = aG^a,$$
$$\widetilde{L}^a C = BK^a, \quad \widetilde{K}^a B = CL^a.$$

Учитывая выражения для инвариантов вектора и тензора: $\Psi^a \Psi_a = \text{inv}$, $\Psi^{mn}\Psi_{mn} = \text{inv}$, матрицы B и C ищем в виде

$$B_{4\times 4} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_{6\times 6} = c \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

После простых вычислений находим связь между параметрами: $a = b = -c$. Для определенности пусть $a = 1$.

Найдем тензор энергии-импульса для безмассового поля Штюкельберга. Для этого рассмотрим величину (см. [6,7]):

$$
T^{a}{}_{b} = \Phi^{\dagger}\eta\Gamma^{a}\partial_{b}\Phi - \delta^{a}_{b}\Psi^{\dagger}\eta P\Psi =
$$

$$
= H^{\dagger} a G^{a}\partial_{b}H_{1} + H_{1}^{\dagger}B(\Delta^{a}\partial_{b}H + K^{a}\partial_{b}H_{2}) + \\ + H_{2}^{\dagger}CL^{a}\partial_{b}H_{1} - \delta^{a}_{b}H_{1}^{\dagger}BH_{1}. \qquad (13)
$$

Отсюда, с учетом подстановки для решений в виде плоских волн, получаем

$$
T^{a}{}_{b}(x) = -i\Big[H^{\dagger}AG^{a}k_{b}H_{1} + H_{1}^{\dagger}B(\Delta^{a}k_{b}H + \\ + K^{a}k_{b}H_{2}) + H_{2}^{\dagger}CL^{a}k_{b}H_{1}\Big] - \delta^{a}_{b}H_{1}^{\dagger}BH_{1}. \qquad (14)
$$

Вычисляя этот тензор для пяти независимых решений, убеждаемся, что в каждом случае он обращается в нуль.

Составим произвольную линейную комбинацию пяти решений (10):

$$
\Psi = a_{1}\Psi_{1} + a_{2}\Psi_{2} + a_{3}\Psi_{3} + a_{4}\Psi_{4} + a_{5}\Psi_{5} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\dfrac{(a_{2}+ia_{1})k_{0} + a_{4}k_{1} - a_{3}k_{2}}{k_{3}} \\
\dfrac{a_{1}k_{0}^{2}}{k_{3}} \\
\dfrac{a_{1}k_{1}k_{0}}{k_{3}} \\
\dfrac{a_{1}k_{2}k_{0}}{k_{3}} \\
a_{1}k_{0} \\
\dfrac{a_{2}k_{0}k_{1} - a_{3}k_{2}k_{1} - a_{5}k_{2}k_{3} + a_{4}(k_{1}^{2}+k_{3}^{2})}{k_{3}k_{0}} \\
\dfrac{a_{2}k_{0}k_{2} + a_{4}k_{1}k_{2} + a_{5}k_{1}k_{3} - a_{3}(k_{2}^{2}+k_{3}^{2})}{k_{3}k_{0}} \\
a_{2} \\
a_{3} \\
a_{4} \\
a_{5}
\end{pmatrix}. \qquad (15)
$$

После выполнения необходимых вычислений находим выражение для тензора энергии-ипмульса, соответствующее линейной суперпозиции пяти решений. С использованием обозначений

$$
a_{i}b_{j} + b_{i}a_{j} = a_{i}a_{j}^{*} + a_{i}^{*}a_{j} = \\ = 2Re\, a_{i}a_{j}^{*} = r_{ij}, \quad r_{ij}^{*} = r_{ij}
$$

этот тензор представляем в следующем виде:

$$
T = (T^{a}{}_{b}) = \begin{pmatrix}
T^{0}_{0} & T^{0}_{1} & T^{0}_{2} & T^{0}_{3} \\
T^{1}_{0} & T^{1}_{1} & T^{1}_{2} & T^{1}_{3} \\
T^{2}_{0} & T^{2}_{1} & T^{2}_{2} & T^{2}_{3} \\
T^{3}_{0} & T^{3}_{1} & T^{3}_{2} & T^{3}_{3}
\end{pmatrix} = 2ik_{0}\times
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
-\dfrac{r_{41}k_{0}^{2}k_{1}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{31}k_{0}^{2}k_{2}}{k_{3}^{2}} - \dfrac{r_{21}k_{0}^{3}}{k_{3}^{2}} &
-\dfrac{r_{21}k_{1}k_{0}^{2}}{k_{3}^{2}} - \dfrac{r_{41}k_{1}^{2}k_{0}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{31}k_{1}k_{2}k_{0}}{k_{3}^{2}} &
-\dfrac{r_{21}k_{2}k_{0}^{2}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{31}k_{2}^{2}k_{0}}{k_{3}^{2}} - \dfrac{r_{41}k_{1}k_{2}k_{0}}{k_{3}^{2}} &
-\dfrac{r_{21}k_{0}^{2}}{k_{3}} - \dfrac{r_{41}k_{1}k_{0}}{k_{3}} + \dfrac{r_{31}k_{2}k_{0}}{k_{3}} \\
\dfrac{r_{21}k_{0}^{2}k_{1}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{41}k_{0}k_{1}^{2}}{k_{3}^{2}} - \dfrac{r_{31}k_{0}k_{1}k_{2}}{k_{3}^{2}} &
\dfrac{r_{41}k_{1}^{3}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{21}k_{0}k_{1}^{2}}{k_{3}^{2}} - \dfrac{r_{31}k_{2}k_{1}^{2}}{k_{3}^{2}} &
\dfrac{r_{41}k_{2}k_{1}^{2}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{21}k_{2}k_{0}k_{1}}{k_{3}^{2}} - \dfrac{r_{31}k_{2}^{2}k_{1}}{k_{3}^{2}} &
\dfrac{r_{41}k_{1}^{2}}{k_{3}} + \dfrac{r_{21}k_{0}k_{1}}{k_{3}} - \dfrac{r_{31}k_{2}k_{1}}{k_{3}} \\
\dfrac{r_{21}k_{0}^{2}k_{2}}{k_{3}^{2}} - \dfrac{r_{31}k_{0}k_{2}^{2}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{41}k_{0}k_{1}k_{2}}{k_{3}^{2}} &
\dfrac{r_{41}k_{2}k_{1}^{2}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{21}k_{2}k_{0}k_{1}}{k_{3}^{2}} - \dfrac{r_{31}k_{2}^{2}k_{1}}{k_{3}^{2}} &
-\dfrac{r_{31}k_{2}^{3}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{21}k_{0}k_{2}^{2}}{k_{3}^{2}} + \dfrac{r_{41}k_{1}k_{2}^{2}}{k_{3}^{2}} &
-\dfrac{r_{31}k_{2}^{2}}{k_{3}} + \dfrac{r_{21}k_{0}k_{2}}{k_{3}} + \dfrac{r_{41}k_{1}k_{2}}{k_{3}} \\
\dfrac{r_{21}k_{0}^{2}}{k_{3}} + \dfrac{r_{41}k_{0}k_{1}}{k_{3}} - \dfrac{r_{31}k_{0}k_{2}}{k_{3}} &
\dfrac{r_{41}k_{1}^{2}}{k_{3}} + \dfrac{r_{21}k_{0}k_{1}}{k_{3}} - \dfrac{r_{31}k_{2}k_{1}}{k_{3}} &
-\dfrac{r_{31}k_{2}^{2}}{k_{3}} + \dfrac{r_{21}k_{0}k_{2}}{k_{3}} + \dfrac{r_{41}k_{1}k_{2}}{k_{3}} &
r_{41}k_{1} - r_{31}k_{2} + r_{21}k_{0}
\end{pmatrix}.
$$

Тензор с нижними индексами (T_{cb}) отличается от $(T^{a}{}_{b})$ умножением строк с номерами 2–4 на -1. Этот тензор симметричный с нулевым следом (убираем несущественный множитель $2ik_{0}$):

$$
T^{a}{}_{a} = \frac{1}{k_{3}^{2}}\Big(-r_{21}k_{0} + r_{31}k_{2} - r_{41}k_{1}\Big)\times \\ \times (k_{0}^{2} - k_{1}^{2} - k_{2}^{2} - k_{3}^{2}) = 0. \qquad (16)
$$

Напомним, что $k_{0} = \sqrt{k_{1}^{2} + k_{2}^{2} + k_{3}^{2}}$. Если ввести обозначение $\varphi = -r_{21}k_{0} + r_{31}k_{2} - r_{41}k_{1}$, то найденное выражение для тензора энергии-импульса можно записать короче (общий множитель k_{3}^{2} в знаменателях опускаем)

$$
T_{cb} = \varphi \begin{pmatrix}
k_{0}^{2} & k_{0}k_{1} & k_{0}k_{2} & k_{0}k_{3} \\
k_{0}k_{1} & k_{1}^{2} & k_{1}k_{2} & k_{1}k_{3} \\
k_{0}k_{2} & k_{1}k_{2} & k_{2}^{2} & k_{2}k_{3} \\
k_{0}k_{3} & k_{1}k_{3} & k_{2}k_{3} & k_{3}^{2}
\end{pmatrix}. \qquad (17)
$$

Напомним равенства (коэффициент 2 при φ убираем)

$$
\Psi = a_{1}\Psi_{1} + a_{2}\Psi_{2} + a_{3}\Psi_{3} + a_{4}\Psi_{4} + a_{5}\Psi_{5},
$$

$$
\varphi = -Re\, a_{2}a_{1}^{*}k_{0} + Re\, a_{3}a_{1}^{*}k_{2} - Re\, a_{4}a_{1}^{*}k_{1}. \qquad (18)
$$

Дальше будем использовать обозначения

$$a_1^*a_2 = \beta_2,\ a_1^*a_3 = \beta_3,\ a_1^*a_4 = \beta_4,$$
$$\varphi = Re[-\beta_2 k_0 + \beta_3 k_2 - \beta_4 k_1].$$

Возможны следующие варианты:

$$T \neq 0,\ \varphi \neq 0; \quad T = 0,\ \varphi = 0, \tag{19}$$
$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ a_5 \neq 0;$$
$$a_1 = 1,\ a_2 \neq 0, a_3 \neq 0, a_4 \neq 0, a_5 = 0; \tag{20}$$
$$Re[-\beta_2 k_0 + \beta_3 k_2 - \beta_4 k_1] = 0,\ a_5 = 0\ (\textit{два решения}).$$

Поскольку решения $\Psi_1, \ldots, \Psi_5$ определены с точностью до произвольных комплексных множителей, то в разложениях (18) все коэффициенты $a_1, \ldots, a_5$ можно считать вещественными. Тогда вместо (18) получаем

$$\Psi = a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2 + a_3\Psi_3 + a_4\Psi_4 + a_5\Psi_5, \tag{21}$$
$$\varphi = a_1(-k_0 a_2 + k_2 a_3 - k_1 a_4).$$

Сначала рассмотрим состояния с нулевым тензором энергии-импульса. Первое решение такое:

$$\Phi_1, \quad T = 0,$$
$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ a_5 = 1. \tag{22}$$

Еще три состояния с нулевым тензором энергии-импульса должны описываться соотношениями:

$$\Phi_2, \quad a_1 = 1,\ a_2 = \frac{k_2}{k_0},\ a_3 = 1,\ a_4 = 0,\ a_5 = 0;$$
$$\Phi_3, \quad a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{k_1}{k_0},\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0;$$
$$\Phi_4, \quad a_1 = 0,\ a_2 =?,\ a_3 =?,\ a_4 =?,\ a_5 = 0. \tag{23}$$

Пока коэффициенты a_2, a_3, a_4 , описывающие решение Φ_4, неизвестны. Зафиксируем их так:

$$\Phi_4, \quad a_1 = 0,\ a_2 = (k_2 - k_1)/k_0,$$
$$a_3 = 1,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0.$$

Полученные векторы Φ_2, Φ_3, Φ_4 можно описать матрицей с размерностью 3×5:

$$A_{3\times5} = \begin{pmatrix} 0 & (k_2 - k_1)/k_0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k_2/k_0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k_1/k_0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой матрицы равен 3, то векторы Φ_2, Φ_3, Φ_4 линейно независимы. Очевидно, что линейно независимыми являются все четыре решения Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 (их компоненты можно представить как строки матрицы)

$$A_{4\times5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_2-k_1}{k_0} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{k_2}{k_0} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{k_1}{k_0} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Остается зафиксировать параметры, определяющие физическое решение Φ_{phys} с ненулевым тензором энергии-импульса:

$$\Phi_{phys}, \quad T \neq 0,\ a_1 = 1,$$
$$-k_0 a_2 + k_2 a_3 - k_1 a_4 \neq 0,\ a_5 = 0. \tag{25}$$

Нужно подобрать коэффициенты a_2, a_3, a_4 так, чтобы пять выделенных решений (сопоставляем им матрицу $A_{5\times5}$) были линейно независимы. Для этого требуем, чтобы определитель матрицы был отличен от нуля

$$A_{5\times5} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (k_2 - k_1)/k_0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k_2/k_0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k_1/k_0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det A_{5\times5} = -\frac{2(a_2 k_0 - a_3 k_2 + a_4 k_1)}{k_0} \neq 0;$$

одно из возможных решений такое:

$$a_2 = -1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ \text{Rank}\, A_{5\times5} = 5. \tag{26}$$

Таким образом, найдены пять решений, одно из которых является физически наблюдаемым, а остальные — калибровочными:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{phys} \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_2-k_1}{k_0} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{k_2}{k_0} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{k_1}{k_0} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

В явном виде эти пять решений имеют следующую структуру:

$$\Phi_{phys} = \Psi_1 - \Psi_2, \quad \Phi_1 = \Psi_5,$$
$$\Phi_2 = \frac{k_2 - k_1}{k_0}\Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4, \tag{28}$$
$$\Phi_3 = \Psi_1 + \frac{k_2}{k_0}\Psi_2 + \Psi_3, \quad \Phi_4 = \Psi_1 - \frac{k_1}{k_0}\Psi_2 + \Psi_4.$$

Приведем 11-мерный столбец, соответствующий физически наблюдаемому состоянию (записываем его в виде строки)

$$\Phi_{phys} = \Big(\frac{(i-1)k_0}{k_3}, \frac{k_0^2}{k_3}, \frac{k_0 k_1}{k_3}, \frac{k_0 k_2}{k_3},$$
$$k_0, -\frac{k_1}{k_3}, -\frac{k_2}{k_3}, -1, 0, 0, 0\Big)^t.$$

Заключение

Показано, что в декартовых координатах система уравнений Штюкельберга допускает существование пяти линейно независимых решений, описывающих разные состояния частицы. Получено выражение для тензора энергии-импульса этого поля. Тензор энергии-импульса вычислен для произвольной линейной комбинации пяти найденных решений. Выделены четыре комбинации, которым соответствует нулевой тензор энергии-импульса. Существует только одно решение, приводящее к ненулевому тензору энергии-импульса. Оно описывает физически наблюдаемые состояния безмассового поля Штюкельберга со структурой плоской волны.

Литература

1. Duffin, R.I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R.I. Duffin // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 54, № 12. – P. 1114–1117.
2. Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // Proc. Roy. Soc. London. A. 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
3. Огивецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И. Огивецкий, И.В. Полубаринов // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
4. Stueckelberg, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E.C.G. Stueckelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312, P. 312–328.
5. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
6. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Беларус. навука, 2009. – 486 с.
7. Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В.А. Плетюхов, В.М. Редьков, В.И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.
8. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc, 2018.
9. Овсиюк, Е.М. Частица Штюкельберга во внешнем магнитном поле. Метод проективных операторов / Е.М. Овсиюк, А.П. Сафронов, А.В. Ивашкевич, О.А. Семенюк // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 69–78.
10. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E.M. Ovsiyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.

References

1. Duffin, R.I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R.I. Duffin // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 54, № 12. – P. 1114–1117.
2. Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
3. Ogievetsky, V.I. Notof i ego vozmojnie vzaimodeistviya [The notoph and its possible interactions] / V.I. Ogievetsky, I.V. Polubarinov // Yad. Fiz. – 1966. – Vol. 4. – P. 216–223 [Sov. J. Nucl. Phys. – 1967. – Vol. 4. – P. 156–161].
4. Stueckelberg, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E.C.G. Stueckelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Vol. 11, – P. 299–312, P. 312–328.
5. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 119, – P. 3265–3348.
6. Red'kov, V.M. Polay chastis v rimanovskom prostranstve i gruppa Lorensa [Fields in Riemannian space and the Lorentz group] / V.M. Red'kov. – Minsk: Belarus. navuka, 2009. – 486 p.
7. Pletyukhov, V.A. Relativistkie volnlvie uravneniya i vnutrennie stepeni svobodi [Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom] / V.A. Pletukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk: Belarus. navuka, 2015. – 328 p.
8. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc, 2018.
9. Ovsiyuk, E.M. Chastisa Shtukelberga vo vneshnem magnitnom pole. Metod proektivnih operatorov [Stuckelberg particle in external magnetic field, and the method of projective operators] / E.M. Ovsiyuk, A.P. Safronov, A.V. Ivashkevich, O.A. Semenyuk // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 69–78.
10. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E.M. Ovsiyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.

Для цитирования:

Семенюк, О.А. Безмассовое поле Штюкельберга, точные решения в декартовых координатах и калибровочные степени свободы / О.А. Семенюк, А.В. Ивашкевич, А.В. Бурый, В.А. Плетюхов, В.М. Редьков // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 63–68.

For citation:

Semenyuk, O.A. Bezmassovoe pole Shtyukel'berga, tochnye resheniya v dekartovyh koordinatah i kalibrovochnye stepeni svobody [Massless Stueckelberg field, exact solutions in Cartesian coordinates and gauge degrees of freedom] / O.A. Semenyuk, A.V. Ivashkevich, A.V. Bury, V.A. Pletyukhov, V.M. Red'kov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 63–68.

Дата поступления статьи: 12.05.2023
Received: 12.05.2023