УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2023-4-69-76

Безмассовая частица Штюкельберга, решения с цилиндрической симметрией

О.А. Семенюк[1], В.А. Плетюхов[1], А.В. Бурый[2], А.В. Ивашкевич[2], В.М. Редьков[2]

[1]Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест, Беларусь
[2]Институт физики имени Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, г. Минск, Беларусь

olya.vasiluyk.97@yandex.by
vladimir.pletyukhov@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
ivashkevich.alina@yandex.by
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Аннотация

Безмассовое поле Штюкельберга исследуется в цилиндрических координатах. Полевая функция состоит из скаляра, 4-вектора и антисимметричного тензора. Физически наблюдаемыми величинами являются только скаляр и 4-вектор. Используется матричное уравнение Штюкельберга, обобщенное на произвольное риманово пространство, в том числе и на любые криволинейные координаты пространства Минковского. Строятся решения этого уравнения с цилиндрической симметрией, при этом диагонализируются операторы энергии, третьей проекции полного углового момента и третьей проекции импульса. После разделения переменных в цилиндрической системе координат получена система из 11 дифференциальных уравнений по полярной координате. Она решается с использованием метода Федорова–Гронского. В соответствии с этим методом, 11 функций выражаются через три основные. По известной методике накладываются дифференциальные условия связи, которые совместны с полученными 11 уравнениями и позволяют преобразовать эти уравнения в алгебраические. Эта алгебраическая система решается стандартными методами. В результате найдены пять независимых решений. Вопрос об устранении калибровочных степеней свободы будет рассмотрен в отдельной работе.

Ключевые слова:

безмассовое поле Штюкельберга, цилиндрическая симметрия, метод проективных операторов, точные решения

Massless Stueckelberg particle, solutions with cylindric symmetry

O.A. Semenyuk[1], V.A. Pletyukhov[1], A.V. Bury[2], A.V. Ivashkevich[2], V.M. Red'kov[2]

[1]Brest State University named after A.S. Pushkin, Brest, Belarus
[2]B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

olya.vasiluyk.97@yandex.by
vladimir.pletyukhov@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
ivashkevich.alina@yandex.by
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Abstract

The massless Stueckelberg field is studied in cylindrical coordinates. The field function consists of the scalar, 4-vector, and antisymmetric tensor. Physically observable components are the scalar and 4-vector. We apply the Stueckelberg tetrad-based matrix equation, generalized to arbitrary Riemannian space, including any curvilinear coordinates in the Minkowski space. We construct solutions with cylindric symmetry, while the operators of energy, of the third projection of the total angular momentum, and the third projection of the linear momentum are diagonalized. After separating the variables we derive the system of 11 first-order differential equations in polar coordinate. It is solved with the use of the Fedorov–Gronskiy method. According to this method, all 11 functions are expressed through 3 main funcions. According to the known procedure we impose the differential constraints, which are consistent with the all 11 equations and allow us to transform these equations to algebraic form. This algebraic system is solved by standard methods. As a result, we obtain 5 linearly independent solutions. The problem of eliminating the gauge solutions will be studied in a separate paper.

Keywords:

massless Stueckelberg field, cylindrical symmetry, the method of projective operators, exact solutions

Введение

В настоящей работе будем находить все независимые точные решения обобщенного 11-мерного уравнения Даффина–Кеммера для безмассового поля Штюкельберга [1–8]. Система тензорных уравнений для этой частицы имеет в декартовых координатах следующий вид:

$$\partial^a \Psi_a = 0, \quad \partial_a \Psi + \partial^b \Psi_{ab} = \Psi_a,$$

$$\partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a = 0. \qquad (1)$$

В качестве волновой функции будем использовать 11-мерный столбец

$$\Phi = (\Psi; \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3; \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{03},$$
$$\Psi_{23}, \Psi_{31}, \Psi_{12}) = (H, H_1, H_2). \qquad (2)$$

Система уравнений (1) может быть представлена в блочной матричной форме:

$$D_a G^a H_1 = 0, \quad \Delta^a D_a H + K^a D_a H_2 - H_1 = 0,$$
$$D_a L^a H_1 = 0 \qquad (3)$$

или в 11-мерном виде

$$(D_a \Gamma^a - P)\Phi = 0, \qquad (4)$$

где

$$\Phi = (H, H_1, H_2)^t,$$

$$\Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & G^a & 0 \\ \Delta^a & 0 & K^a \\ 0 & L^a & 0 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{4\times 4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_0 = (1000), \; G_1 = (0-100),$$

$$G_2 = (00-10), \; G_3 = (000-1),$$

$$\Delta^0 = (1,0,0,0)^t, \; \Delta^1 = (0,1,0,0)^t,$$

$$\Delta^2 = (0,0,1,0)^t, \; \Delta^3 = (0,0,0,1)^t,$$

$$K^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее t обозначает транспонирование.

Уравнение (4) обобщается с использованием тетрадного формализма на случай римановой геометрии пространства–времени (в том числе и на использование любых криволинейных координат в пространстве Минковского) в соответствии со стандартной методикой [6]. Для этого при заданной метрике $g_{\alpha\beta}(x)$ нужно выбрать некоторую тетраду:

$$dS^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta, \quad g_{\alpha\beta}(x) \to e_{(a)\alpha}(x), \qquad (5)$$

тогда уравнение (4) должно записываться в пространстве (5) так:

$$\left[\Gamma^\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Sigma_\alpha(x)\right) - P\right]\Psi(x) = 0. \qquad (6)$$

Локальные матрицы $\Gamma^\alpha(x)$ определяются с использованием тетрады

$$\Gamma^\alpha(x) = e^\alpha_{(a)}(x)\Gamma^a =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -G^a e^\alpha_{(a)} & 0 \\ \Delta^a e^\alpha_{(a)} & 0 & K^a e^\alpha_{(a)} \\ 0 & L^a e^\alpha_{(a)} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Связность $\Sigma_\alpha(x)$ задается соотношениями

$$J^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1^{ab} & 0 \\ 0 & 0 & J_2^{ab} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e^\beta_{(a)}(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\Sigma_1)_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (\Sigma_2)_\alpha \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

где

$$\Sigma_1(x) = \frac{1}{2} J^{ab}_{(1)} e^\beta_{(a)}(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x),$$

$$\Sigma_2(x) = \frac{1}{2} J^{ab}_{(2)} e^\beta_{(a)}(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x),$$

а $J^{ab}_{(1)}$ и $J^{ab}_{(2)}$ обозначают генераторы соответственно для вектора $\Psi_k(x)$ и антисимметричного тензора $\Psi_{mn}(x)$. Уравнение (6) записывается короче с использованием коэффициентов вращения Риччи:

$$\left[\Gamma^c\left(e^\alpha_{(c)}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2}J^{ab}\gamma_{abc}\right) - P\right]\Psi(x) = 0,$$

$$\gamma_{[ab]c} = -\gamma_{[ba]c} = e_{(b)\rho;\sigma} e^{\rho}_{(a)} e^{\sigma}_{(c)}. \qquad (9)$$

1. Цилиндрические координаты, разделение переменных

Будем рассматривать уравнение (9) в цилиндрических координатах (r, φ, z). В работе [9] после разделения переменных была получена система уравнений по переменной r для массивной частицы Штюкельберга в магнитном поле (аналогичный анализ в кулоновском поле был сделан в работе [10]). В статье [9] использовалась следующая подстановка для волновой функции в циклическом базисе (в котором генераторы J_1^{12}, J_2^{12} диагональны):

$$\Psi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} (H, H_1, H_2)^t, \; H = h(r),$$
$$H_1 = (h_0(r), h_1(r), h_2(r), h_3(r))^t,$$
$$H_2 = (E_i(r), B_i(r))^t.$$

Из этой системы уравнений, учитывая отсутствие магнитного поля и ограничения, связанные с безмассовостью частицы, получаем следующие 11 уравнений:

$$-i\epsilon h_0 - ikh_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_1' - \frac{2m-2}{2\sqrt{2}r} h_1 -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} h_3' - \frac{2m+2}{2\sqrt{2}r} h_3 = 0; \qquad (10)$$

$$-i\epsilon h - ikE_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} E_1' - \frac{2m-2}{2\sqrt{2}r} E_1 -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} E_3' - \frac{2m+2}{2\sqrt{2}r} E_3 = h_0,$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} h' - \frac{m}{\sqrt{2}r} h + \frac{1}{\sqrt{2}} B_2' +$$
$$+\frac{2m}{2\sqrt{2}r} B_2 - ikB_3 + i\epsilon E_1 = h_1,$$
$$ikh + i\epsilon E_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} B_1' - \frac{2m+2}{2\sqrt{2}r} B_1 -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} B_3' + \frac{2m-2}{2\sqrt{2}r} B_3 = h_2,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} h' - \frac{m}{\sqrt{2}r} h + \frac{1}{\sqrt{2}} B_2' -$$
$$-\frac{2m}{2\sqrt{2}r} B_2 + ikB_1 + i\epsilon E_3 = h_3; \qquad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} h_0' + \frac{2m}{2\sqrt{2}r} h_0 - i\epsilon h_1 = 0,$$
$$-ikh_0 - i\epsilon h_2 = 0,$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} h_0' + \frac{2m}{2\sqrt{2}r} h_0 - i\epsilon h_3 = 0,$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} h_2' + \frac{2m}{2\sqrt{2}r} h_2 + ikh_3 = 0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} h_1' - \frac{2m-2}{2\sqrt{2}r} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_3' + \frac{2m+2}{2\sqrt{2}r} h_3 = 0,$$
$$-ikh_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} h_2' - \frac{2m}{2\sqrt{2}r} h_2 = 0; \qquad (12)$$

переменные $E_{1,2,3}, \; B_{1,2,3}$ относятся к шести компонентам антисимметричного тензора; $h, h_{0,1,2,3}$ относятся к скаляру и 4-вектору. Размерности этих компонент подчиняются правилу

$$[h] = 1, \quad [E_i] = 1, \quad [B_i] = 1,$$
$$[h_0], [h_1], [h_2], [h_3] = \frac{1}{L}. \qquad (13)$$

Введем сокращающие обозначения

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} \right), \; b_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} \right),$$
$$a_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} \right),$$
$$b_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{m+1}{r} \right),$$
$$a_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m-1}{r} \right),$$
$$b_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r} \right), \qquad (14)$$

тогда система уравнений примет вид

$$-i\epsilon h_0 - ikh_2 + b_{m-1} h_1 - a_{m+1} h_3 = 0; \qquad (15)$$

$$-i\epsilon h - ikE_2 + b_{m-1} E_1 - a_{m+1} E_3 = h_0,$$
$$-a_m h + a_{m+1} B_2 - ikB_3 + i\epsilon E_1 = h_1,$$
$$ikh + i\epsilon E_2 - a_{m+1} B_1 - b_{m-1} B_3 = h_2,$$
$$b_m h + b_m B_2 + ikB_1 + i\epsilon E_3 = h_3; \qquad (16)$$

$$a_m h_0 - i\epsilon h_1 = 0, \; -ikh_0 - i\epsilon h_2 = 0$$
$$-b_m h_0 - i\epsilon h_3 = 0, \; -b_m h_2 + ikh_3 = 0,$$
$$b_{m-1} h_1 + a_{m+1} h_3 = 0, \; -ikh_1 - a_m h_2 = 0. \qquad (17)$$

Дальше будем использовать метод Федорова–Гронского [11]. Для этого введем оператор третьей проекции спина $Y = -iJ^{12}$ (он относится к циклическому базису). Убеждаемся, что эта 11-мерная матрица удовлетворяет минимальному уравнению $Y(Y-1)(Y+1) = 0$. Оно позволяет ввести три проективных оператора с необходимыми свойствами

$$P_1 = \frac{1}{2} Y(Y-1), \; P_2 = \frac{1}{2} Y(Y+1), \; P_3 = 1 - Y^2;$$
$$P_1^2 = P_1, \; P_2^2 = P_2, \; P_3^2 = P_3, P_1 + P_2 + P_3 = 1. \qquad (18)$$

Соответственно, полную волновую функцию можно разложить в сумму трех частей

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3, \; \Psi_\sigma = P_\sigma \Psi, \; \sigma = 1, 2, 3.$$

Получаем явный вид проективных операторов

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Затем находим структуру проективных составляющих полной волновой функции (учитываем, что в соответствии с методом Федорова–Гронского каждая составляющая должна определяться только одной функцией от переменной r):

$$\Psi_1(r) = (0,0,h_1,0,0,E_1,0,0,0,0,B_3)^t f_1(r),$$
$$\Psi_2(r) = (0,0,0,0,h_3,0,0,E_3,B_1,0,0)^t f_2(r),$$
$$\Psi_3(r) = (h,h_0,0,h_2,0,0,E_2,0,0,B_2,0)^t f_3(r). \quad (19)$$

Действуя проективными операторами на систему уравнений (15)–(17), получаем три подсистемы

$$P_1: \quad -a_m h + a_m B_2 - ikB_3 + imE_1 = h_1,$$
$$a_m h_0 - imh_1 = 0,\ -ikh_1 - a_m h_2 = 0;$$

$$P_2: \quad b_m h + b_m B_2 + ikB_1 + imE_3 = h_3,$$
$$-b_m h_0 - imh_3 = 0,\ -b_m h_2 + ikh_3 = 0;$$

$$P_3: \quad -imh_0 - ikh_2 + b_{m-1}h_1 - a_{m+1}h_3 = 0,$$
$$-imh - ikE_2 + b_{m-1}E_1 - a_{m+1}E_3 = h_0,$$
$$ikh + imE_2 - a_{m+1}B_1 - b_{m-1}B_3 = h_2,$$
$$-ikh_0 - imh_2 = 0, \quad b_{m-1}h_1 + a_{m+1}h_3 = 0.$$

Накладываем условия Федорова–Гронского (эти условия позволяют преобразовать дифференциальные уравнения в алгебраические):

$$P_1$$
$$-a_m f_3(r)h + a_m f_3(r)B_2 - ikf_1(r)B_3 +$$
$$+imf_1(r)E_1 = f_1(r)h_1 \Rightarrow a_m f_3 = C_1 f_1,$$
$$a_m f_3(r)h_0 - imf_1(r)h_1 = 0 \Rightarrow a_m f_3 = C_1 f_1,$$
$$-ikf_1(r)h_1 - a_m f_3(r)h_2 = 0 \Rightarrow a_m f_3 = C_1 f_1;$$

$$P_2$$
$$b_m f_3(r)h + b_m f_3(r)B_2 + ikf_2(r)B_1 +$$
$$+imf_2(r)E_3 = f_2(r)h_3 \Rightarrow b_m f_3 = C_2 f_2,$$
$$-b_m f_3(r)h_0 - imf_2(r)h_3 = 0 \Rightarrow b_m f_3 = C_2 f_2,$$
$$-b_m f_3(r)h_2 + ikf_2(r)h_3 = 0 \Rightarrow b_m f_3 = C_2 f_2;$$

$$P_3$$
$$-imf_3(r)h_0 - ikf_3(r)h_2 + b_{m-1}f_1(r)h_1 -$$
$$-b_{m-1}f_1(r)h_3 = 0 \Rightarrow b_{m-1}f_1 = C_3 f_3,$$
$$-imf_3(r)h - ikf_3(r)E_2 + b_{m-1}f_1(r)E_1 -$$
$$-a_{m+1}f_2(r)E_3 = f_3(r)h_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_{m-1}f_1 = C_3 f_3,\ a_{m+1}f_2 = C_4 f_3,$$
$$ikf_3(r)h + imf_3(r)E_2 - a_{m+1}f_2(r)B_1 -$$
$$-b_{m-1}f_1(r)B_3 = f_3(r)h_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_{m-1}f_1 = C_3 f_3,\ a_{m+1}f_2 = C_4 f_3,$$
$$-ikf_3(r)h_0 - imf_3(r)h_2 = 0,$$
$$b_{m-1}f_1(r)h_1 + a_{m+1}f_2(r)h_3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_{m-1}f_1 = C_3 f_3,\ a_{m+1}f_2 = C_4 f_3.$$

С учетом наложенных связей получаем алгебраическую систему уравнений

$$-C_1 h + C_1 B_2 - ikB_3 + imE_1 = h_1,$$
$$C_1 h_0 - imh_1 = 0, \quad -ikh_1 - C_1 h_2 = 0,$$
$$C_2 h + C_2 B_2 + ikB_1 + imE_3 = h_3,$$
$$-C_2 h_0 - imh_3 = 0,\ -C_2 h_2 + ikh_3 = 0,$$
$$-imh_0 - ikh_2 + C_3 h_1 - C_3 h_3 = 0,$$
$$-imh - ikE_2 + C_3 E_1 - C_4 E_3 = 0,$$
$$ikh + imE_2 - C_4 B_1 - C_3 B_3 = h_2,$$
$$-ikh_0 - imh_2 = 0, \quad C_3 h_1 + C_4 h_3 = 0. \quad (20)$$

Соберем вместе дифференциальные условия связи

$$b_{m-1}f_1(r) = C_3 f_3(r), \quad a_m f_3(r) = C_1 f_1(r),$$
$$a_{m+1}f_2(r) = C_4 f_3(r), \quad b_m f_3(r) = C_2 f_2(r). \quad (21)$$

Из (21) следуют уравнения второго порядка для отдельных функций

$$b_{m-1}a_m f_3 = C_1 C_3 f_3, \quad a_m b_{m-1} f_1 = C_1 C_3 f_1,$$
$$a_{m+1}b_m f_3 = C_2 C_4 f_3, \quad b_m a_{m+1} f_2 = C_2 C_4 f_2. \quad (22)$$

Параметры в каждой паре могут быть выбраны одинаковыми: $C_3 = C_1$, $C_4 = C_2$. При этом условия связи и уравнения принимают вид

$$b_{m-1}f_1(r) = C_1 f_3, \quad a_m f_3 = C_1 f_1,$$
$$a_{m+1}f_2(r) = C_2 f_3, \quad b_m f_3 = C_2 f_2;$$
$$[b_{m-1}a_m - C_1^2]f_3 = 0,\ [a_m b_{m-1} - C_1^2]f_1 = 0,$$
$$[a_{m+1}b_m - C_2^2]f_3 = 0,\ [b_m a_{m+1} - C_2^2]f_2 = 0. \quad (23)$$

С учетом явного вида (14) операторов первого порядка полученные четыре уравнения записываются так:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - 2C_1^2\right] f_3 = 0,$$
$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m-1)^2}{r^2} - 2C_1^2\right] f_1 = 0,$$
$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - 2C_2^2\right] f_3 = 0,$$
$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2} - 2C_2^2\right] f_2 = 0.$$

Очевидно, должно выполняться условие $2C_2^2 = 2C_1^2 \equiv C^2$, т. е. имеем три уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - C^2\right) f_3 = 0,$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m-1)^2}{r^2} - C^2\right) f_1 = 0,$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2} - C^2\right) f_2 = 0. \quad (24)$$

Напомним, что в теории обычной безмассовой векторной частицы также возникает уравнение вида (24):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + m^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) f = 0,$$
$$z = \sqrt{m^2 - k^2}\, r, \quad f(z) = J_{\pm m}(z). \quad (25)$$

Следовательно, в уравнениях (24) надо полагать

$$-C^2 = m^2 - k^2 \Rightarrow C = i\sqrt{m^2 - k^2}. \quad (26)$$

В новой переменной $z = -iCr = \sqrt{m^2 - k^2}\, r$ уравнения (24) принимают бесселевский вид:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + 1 - \frac{m^2}{z^2}\right) f_3 = 0,\ f_3 = J_{\pm m}(z),$$
$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + 1 - \frac{(m-1)^2}{z^2}\right) f_1 = 0,$$
$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + 1 - \frac{(m+1)^2}{z^2}\right) f_2 = 0,$$
$$f_1 = J_{\pm(m-1)}(z), \quad f_2 = J_{\pm(m+1)}(z). \quad (27)$$

2. Анализ алгебраической системы

Напомним равенства $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C/\sqrt{2}$ и обратимся к алгебраической системе уравнений

$$-imh_0 - ikh_2 + C/\sqrt{2}h_1 - C/\sqrt{2}h_3 = 0,$$
$$-imh - ikE_2 + C/\sqrt{2}E_1 - C/\sqrt{2}E_3 = h_0,$$
$$-C/\sqrt{2}h + C/\sqrt{2}B_2 - ikB_3 + imE_1 = h_1,$$
$$ikh + imE_2 - C/\sqrt{2}B_1 - C/\sqrt{2}B_3 = h_2,$$
$$C/\sqrt{2}h + C/\sqrt{2}B_2 + ikB_1 + imE_3 = h_3,$$
$$C/\sqrt{2}h_0 - imh_1 = 0, \quad -ikh_0 - imh_2 = 0,$$
$$-C/\sqrt{2}h_0 - imh_3 = 0, \quad -C/\sqrt{2}h_2 + imh_3 = 0,$$
$$C/\sqrt{2}h_1 + C/\sqrt{2}h_3 = 0,\ -ikh_1 - C/\sqrt{2}h_2 = 0. \quad (28)$$

Ее можно записать в матричной форме $A_{11\times 11}\Psi = 0$

$$A_{11\times 11} = \begin{pmatrix}
0 & -im & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-im & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & -ik & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik \\
ik & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} \\
\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im & ik & \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 \\
0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -ik & 0 & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & ik & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -ik & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$
$$\Psi = (h, h_1, h_2, h_3, E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3)^t.$$

Убеждаемся, что определитель этой матрицы обращается тождественно в нуль при любом выборе параметра C. Ранг матрицы равен восьми. Удаление строк с номерами 9–11 приводит к матрице $A_{8\times 11}$ нового размера с тем же рангом. При $C = i\sqrt{m^2 - k^2}$ ранг матрицы $A_{8\times 11}$ равен шести. Ранг не изменится, если убрать строки 1 и 8. В результате приходим к шести независимым уравнениям

$$
\begin{pmatrix}
-im & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik \\
ik & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} \\
\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im & ik & \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 \\
0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -ik & 0 & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \times
$$

$$
\times (h, h_0, h_1, h_2, h_3, E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3)^t = 0.
$$

Переносим вправо столбцы, отвечающие переменным h, E_3, B_1, B_2, B_3, и приходим к неоднородной системе уравнений с пятью свободными параметрами

$$
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik \\
0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\frac{C}{\sqrt{2}} & -im & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-ik & 0 & -im & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= -\left(-im, -\frac{C}{\sqrt{2}}, ik, \frac{C}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^t h -
$$

$$
-\left(-\frac{C}{\sqrt{2}}, 0, 0, im, 0, 0\right)^t E_3 -
$$

$$
-\left(0, 0, -\frac{C}{\sqrt{2}}, ik, 0, 0\right)^t B_1 -
$$

$$
-\left(0, \frac{C}{\sqrt{2}}, 0, \frac{C}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^t B_2 -
$$

$$
-\left(0, -ik, -\frac{C}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right)^t B_3.
$$

В результате находим пять линейно независимых решений:

$$
\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} -im \\ -\frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}} \\ ik \\ \frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} h,
$$

$$
\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{2}m^2}{\sqrt{m^2-k^2}} \\ -im \\ \frac{i\sqrt{2}km}{\sqrt{m^2-k^2}} \\ im \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{m^2-k^2}} \end{pmatrix} E_3,
$$

$$
\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{2}km}{\sqrt{m^2-k^2}} \\ -ik \\ \frac{i\sqrt{2}k^2}{\sqrt{m^2-k^2}} \\ ik \\ -\frac{k}{m} \\ \frac{k^2+m^2}{\sqrt{2}m\sqrt{m^2-k^2}} \end{pmatrix} B_1,
$$

$$
\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} -im \\ -\frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}} \\ ik \\ \frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2-k^2}}{m} \\ \frac{k}{m} \end{pmatrix} B_2,
$$

$$
(h_0, h_1, h_2, h_3, E_1, E_2)^t =
$$

$$
= \left(0, 0, 0, 0, \frac{k}{m}, \frac{\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}m}\right)^t B_3.
$$

Представляем найденные решения в 11-мерной форме:

$$
\Psi_1 = \left(1, -im, -\frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}}, ik, \frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}}, 0, 0, \right.
$$

$$
\left. 0, 0, 0, 0\right)^t;
$$

$$
\Psi_2 = \left(0, -\frac{i\sqrt{2}m^2}{\sqrt{m^2-k^2}}, -im, \frac{i\sqrt{2}km}{\sqrt{m^2-k^2}}, im, -1, \right.
$$

$$
\left. \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{m^2-k^2}}, 1, 0, 0, 0\right)^t;
$$

$$
\Psi_3 = \left(0, -\frac{i\sqrt{2}km}{\sqrt{m^2-k^2}}, -ik, \frac{i\sqrt{2}k^2}{\sqrt{m^2-k^2}}, ik, -\frac{k}{m}, \right.
$$

$$
\left. \frac{k^2+m^2}{\sqrt{2}m\sqrt{m^2-k^2}}, 0, 1, 0, 0\right)^t;
$$

$$
\Psi_4 = \left(0, -im, -\frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}}, ik, \frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}}, \right.
$$

$$
\left. -\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2-k^2}}{m}, \frac{k}{m}, 0, 0, 1, 0\right)^t;
$$

$$
\Psi_5 = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{m}, \frac{\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}m}, 0, 0, 0, 1\right)^t.
$$

При подстановке их в исходную систему (28) все пять решений дают нули. Следует учитывать, что эти решения найдены с точностью до произвольных множителей.

Заключение

Уравнение для безмассовой частицы Штюкельберга решено в цилиндрических координатах. Полевая функция состоит из скаляра, 4-вектора и антисимметричного тензора. Физически наблюдаемыми величинами являются скаляр (переменная h) и 4-вектор (переменные h_0, h_1, h_2, h_3); физически ненаблюдаемые переменные — компоненты антисимметричного тензора (переменные E_i, B_i). Найдены пять линейно независимых решений. При этом свободными параметрами являются h, E_3, B_1, B_2, B_3.

Литература

1. Duffin, R.I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R.I. Duffin // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 54, № 12. – P. 1114–1117.
2. Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. - Vol. 173. – P. 91–116.
3. Огивецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И. Огивецкий, И.В. Полубаринов // Ядерная физика. - 1966. - Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
4. Stueckelberg, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E.C.G. Stueckelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312, 312–328.
5. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
6. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Беларус. навука, 2009. – 486 с.
7. Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В.А. Плетюхов, В.М. Редьков, В.И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.
8. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel [et al.]. - New York: Nova Science Publishers Inc., 2018.
9. Овсиюк, Е.М. Частица Штюкельберга во внешнем магнитном поле. Метод проективных операторов / Е.М. Овсиюк [и др.] // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 69–78.
10. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E.M. Ovsiyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.
11. Гронский, В.К. Магнитные свойства частицы со спином 3/2. / В.К. Гронский, Ф.И. Федоров // Доклады Национальной Академии наук Беларуси. – 1960. – Т. 4, № 7. – С. 278–283.

References

1. Duffin, R.I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R.I. Duffin // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 54, № 12. – P. 1114–1117.
2. Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173, – P. 91–116.
3. Ogievetsky, V.I. Notof i ego vozmojnie vzaimodeistviya [The notoph and its possible interactions] / V.I. Ogievetsky, I.V. Polubarinov // Yad. Fiz. – 1966. – Vol. 4. – P. 216–223 [Sov. J. Nucl. Phys. – 1967. – Vol. 4. – P. 156–161].
4. Stueckelberg, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E.C.G. Stueckelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Vol. 11, – P. 299–312, P. 312–328.
5. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 119, – P. 3265–3348.
6. Red'kov, V.M. Polay chastis v rimanovskom prostranstve i gruppa Lorensa [Fields in Riemannian space and the Lorentz group] / V.M. Red'kov. – Minsk: Belarus. navuka. – 2009. – 486 p.
7. Pletyukhov, V.A. Relativistkie volnlvie uravneniya i vnutrennie stepeni svobodi [Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom] / V.A. Pletukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk: Belarus. navuka. – 2015. – 328 p.
8. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018.
9. Ovsiyuk, E.M. Chastisa Shtukelberga vo vneshnem magnitnom pole. Metod proektivnih operatorov [Stuckelberg particle in external magnetic field, and the method of projective operators] / E.M. Ovsiyuk [et al.] // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 69–78.
10. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E.M. Ovsiyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.
11. Gronskiy, V.K. Magnitnie svoistva chastisi so spinom 3/2 [Magnetic properties of a particle with spin 3/2] / V.K. Gronskiy, F.I. Fedorov // Dokladi nasionalnoi arademii Belarusii [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus]. – 1960. – Vol. 4, № 7. – P. 278–283.

Для цитирования:
Семенюк, О.А. Безмассовая частица Штюкельберга, решения с цилиндрической симметрией / О.А. Семенюк, В.А. Плетюхов, А.В. Бурый, А.В. Ивашкевич, В.М. Редьков // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 69–76.

For citation:
Semenyuk, O.A. Bezmassovaya chastica SHtyukel'berga, resheniya s cilindricheskoj simmetriej [Massless Stueckelberg particle, solutions with cylindric symmetry] / O.A. Semenyuk, V.A. Pletyukhov, A.V. Bury, A.V. Ivashkevich, V.M. Red'kov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 69–76.

Дата поступления рукописи: 10.04.2023
Received: 10.04.2023