

Особенности численного решения уравнений Максвелла методом FDTD в однородной и неоднородной формулировках

П.А. Макаров¹, В.А. Устюгов², В.И. Щеглов³

¹Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,

г. Сыктывкар

²ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»,

г. Сыктывкар

³ИРЭ им. Котельникова РАН,

г. Москва

makarovpa@ipm.komisc.ru

ustyugov@syktsu.ru

vshcheg@cplire.ru

Аннотация

В работе исследованы особенности численного FDTD-решения уравнений Максвелла, сформулированных в виде задач Коши для соответствующих однородных и неоднородных систем уравнений. Показано, что для случая ограниченных во времени источников поля задача Коши для неоднородной системы эквивалентна соответствующей задаче Коши для однородной системы. Определен критерий оценки степени корректности полученного решения. Проанализированы особенности численного решения однородных и неоднородных задач Коши для различных форм начальных конфигураций электромагнитных полей и задающих импульсов. Сформулированы необходимые и достаточные условия корректности получаемых решений.

Ключевые слова:

электродинамика, моделирование, метод FDTD, численный эксперимент

Введение

Ни для кого не является секретом актуальность и востребованность в науке и технических приложениях современных численных методов, позволяющих просто, наглядно и информативно моделировать процессы распространения электромагнитных сигналов в различных условиях. Одним из таких методов является техника FDTD (Finite-Difference Time-Domain) — метод численного решения волновых уравнений, разработанный К. Йи в 1966 г. [1], основанный на аппроксимации производных отношением конечных разностей

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Данная аппроксимация выполняется путем некоторого «огрубления задачи», состоящего в дискретизации

Numerical solution features of Maxwell equations by FDTD method in the homogeneous and non-homogeneous formulations

P.A. Makarov¹, V.A. Ustyugov², V.I. Shcheglov³

¹Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

²Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Pitirim Sorokin Syktyvkar State University”, Syktyvkar

³Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the
Russian Academy of Sciences, Moscow

makarovpa@ipm.komisc.ru

ustyugov@syktsu.ru

vshcheg@cplire.ru

Abstract

In this paper we investigate the features of the numerical FDTD solution of Maxwell's equations formulated as Cauchy problems for the corresponding homogeneous and inhomogeneous systems of equations. It is shown that for the case of time-limited field sources the Cauchy problem for an inhomogeneous system is equivalent to the corresponding Cauchy problem for a homogeneous system. The criterion for evaluating the correctness of the obtained solution is defined. The features of the numerical solution of homogeneous and non-homogeneous Cauchy problems for different forms of initial configurations of electromagnetic fields and setting pulses are analyzed. Necessary and sufficient conditions of correctness of the obtained solutions are formulated.

Keywords:

electrodynamics, simulation, FDTD method, numerical experiment

пространства-времени, при котором дифференциальные уравнения для непрерывных функций заменяются конечно-разностным уравнением для функций дискретных переменных.

Эта схема в настоящее время нашла широкое применение в различных областях науки, техники и самых разнообразных приложениях. Так, известны примеры использования метода для решения биологических и медицинских задач [2–5], а также проблем в области экологии, геологии, минералогии и геологоразведки [6, 7]. Достаточно очевидным, однако несколько не потерявшим своей актуальности, является применение метода FDTD в оптике, фотонике, электронике, связи и телекоммуникациях [8–11]. Помимо непосредственно научной литературы, существует множество учебных изданий [12–14], посвященных методу FDTD.

Такое широкое использование метода, очевидно, обосновывается большим числом его достоинств, немалое значение среди которых имеет простота реализации расчетного алгоритма. Конечно, ценой этой простоты является некоторая ресурсоемкость выполняемых вычислений, определяемая заметными затратами машинного времени и памяти. На первых порах это существенно ограничивало применение метода FDTD, однако в настоящее время, в связи со значительным прогрессом вычислительной техники, эти ограничения потеряли свое значение. Еще одним важным преимуществом рассматриваемого метода является возможность исследования сигналов со сложной структурой спектра в ходе однократного численного эксперимента. В связи с этим в электродинамических задачах FDTD обычно используют для моделирования поведения импульсных сигналов, однако часто рассматривается и квазигармонический режим нагрузки передающей линии [12].

Приведенный выше краткий обзор источников может создать ошибочное впечатление о том, что метод FDTD является очень хорошо разработанным инструментом с досконально изученной научной базой. Последнее не совсем корректно, так как, несмотря на обширную библиографию по методу FDTD, его тщательное обоснование и всестороннее исследование по сей день не исчерпало себя. Во многом это обуславливается тем, что в имеющейся литературе практически не рассматриваются вопросы строгой оценки корректности решений, полученных методом FDTD в различных постановках задачи.

Во всех известных авторам данной статьи работах метод FDTD используется для решения уравнений Максвелла с источниками (т.е. в форме неоднородных дифференциальных уравнений). Вместе с тем имеется возможность применять этот метод и в иной постановке задачи, переформулируя ее в виде задачи Коши для однородной системы уравнений. При этом естественным образом возникают вопросы эквивалентности данных формулировок и оценки корректности решений, полученных в их рамках. Кроме того, численное решение уравнений Максвелла в однородной формулировке требует строгого отбора корректных начальных условий для соответствующей задачи Коши и отсева недопустимых конфигураций электромагнитного поля.

Более того, даже при традиционной схеме решения в неоднородной формулировке часто возникают вопросы строгой оценки корректности применения метода FDTD для сигналов со сложной формой спектра. Этот факт имеет место быть даже для гармонических сигналов, однако в литературе (включая наши предыдущие работы [18, 19] по этой теме) он освещается недостаточно подробно.

Аналізу отмеченных вопросов и посвящена настоящая работа. Основные ее результаты представляют собой две гипотезы, сформулированные в форме утверждений в основном тексте статьи. Строгое математическое доказательство этих утверждений не приводится, однако обосновываются их мотивировка и обоснование справедливости на «физическом уровне строгости». Кроме того, приводится аргументация, подкрепленная численными примерами, подтверждающими сделанные выводы.

1. Основные формулировки

Микроскопические уравнения Максвелла в вакууме, записанные в форме дифференциальных уравнений для трехмерных вектор-функций в системе единиц СИ, имеют следующий вид [15–17]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ext}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} — это напряженности электрического и магнитного полей, ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, а плотность заряда ρ_{ext} и плотность тока \mathbf{J}_{ext} играют роль сторонних источников электромагнитного поля.

Будем решать задачу в отсутствии сторонних зарядов

$$\rho_{\text{ext}} = 0. \quad (3)$$

Отбрасывая уравнения (2), дающие в принятых нами условиях (3) статическое решение для полей, и вводя обозначения (здесь использована краткая запись $\partial_t = \partial/\partial t$)

$$\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \nabla \times & \mu_0 \partial_t \\ \nabla \times & -\varepsilon_0 \partial_t \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}_{\text{ext}} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

законы Фарадея и Максвелла-Ампера (1) можно записать в компактной матрично-операторной форме

$$\hat{\mathcal{L}}\psi = \varphi. \quad (5)$$

Следуя общепринятой классификации [17], решениями уравнений (5) могут быть как нестационарные, так и квазистационарные или стационарные поля. С математической точки зрения выражение (5) представляет собой сокращенную запись неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Очевидно, что в отсутствии сторонних токов

$$\mathbf{J}_{\text{ext}} = 0 \quad (6)$$

выражение (5) обращается в однородную систему

$$\hat{\mathcal{L}}\psi = 0, \quad (7)$$

решениями которой теперь могут быть исключительно нестационарные поля.

В дальнейшем везде, как для однородных (7), так и для неоднородных (5) формулировок, будем решать задачи Коши с начальными условиями $\psi_0 = \psi(\mathbf{r}, 0)$. Обозначим символом $\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)$ точное решение соответствующей задачи Коши для неоднородной системы (5), которое формально можно записать в виде

$$\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{L}}_{\psi_0}^{-1} \varphi. \quad (8)$$

Определение 1. Будем называть произвольную функцию $f(\mathbf{r}, t)$ функцией ограниченной длительности, если существует такой момент времени τ , после достижения которого она тождественно обращается в нуль

$$f(\mathbf{r}, t) \equiv 0, \quad \forall \mathbf{r}, t > \tau.$$

Утверждение 1. Всякая задача Коши для неоднородной системы (5) с источниками $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ограниченной длительности τ эквивалентна задаче Коши для однородной системы (7) с начальным условием

$$\psi_0 = \bar{\psi}(\mathbf{r}, t - \tau).$$

Эквивалентность этих задач состоит в том, что их решения идентичны.

Обсуждение данного утверждения отложим вплоть до раздела 4, так как для осмысления заложенного в него содержания предварительно требуется обсудить множество деталей, изложенных в последующих разделах.

2. Общая схема численного FDTD-решения

В основных чертах материал данного раздела следует нашим предыдущим работам [18, 19] и классическим руководствам [12–14], однако для полноты картины и ясности понимания воспроизведем здесь все необходимые выкладки.

С целью упрощения изложения и максимальной наглядности полученных результатов будем рассматривать одномерный случай. Это нисколько не умаляет общности обсуждаемых результатов, так как их масштабирование на случаи большей размерности не вносит ничего принципиально нового.

Итак, пусть электромагнитное поле распространяется вдоль декартовой оси Ox , а $\mathbf{J}_{\text{ext}} = J(x, t)\mathbf{e}_z$. В этих условиях $\mathbf{E} = E_z(x, t)\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{H} = H_y(x, t)\mathbf{e}_y$, а основная система уравнений (5) принимает вид

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = J. \quad (9)$$

Дискретизируем пространство-время и выполним переход от непрерывных функций к их точечным аналогам согласно преобразованию

$$f(x, t) \rightarrow f^q[m] = \widehat{D}f(x, t) = f(m\Delta x, q\Delta t), \quad (10)$$

где $\Delta x, \Delta t$ – фиксированные шаги пространственно-временной сетки, а $m, q \in \mathbb{N}_0$ – соответствующие индексы, определяющие ее узел. Обратное преобразование $f^q[m] \rightarrow f(x, t)$ будем обозначать символом \widehat{D}^{-1} .

Далее, следуя классической работе [1] и используя преобразование (10), введем две сетки для электрического $E_z^q[m]$ и магнитного $H_y^{q \pm \frac{1}{2}}[m \pm \frac{1}{2}]$ полей, смещенные по отношению друг к другу в шахматном порядке. Это позволяет записать конечно-разностный аналог уравнений (9) в форме

$$H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m + \frac{1}{2}\right] = H_y^{q-\frac{1}{2}}\left[m + \frac{1}{2}\right] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]), \quad (11)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} J^{q+\frac{1}{2}}[m] + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m + \frac{1}{2}\right] - H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m - \frac{1}{2}\right] \right). \quad (12)$$

Равенства (11) и (12) отличает от аналогов, полученных нами ранее [18, 19], то, что они записаны для вакуума. В англоязычной литературе [12–14] за уравнениями (11) и (12) закрепилось название Update Equations, отражающее тот факт, что при заданных начальных условиях

$$\begin{pmatrix} E_z^0 \\ H_y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \widehat{D}\psi_0, \quad (13)$$

данные уравнения позволяют вычислять временную динамику электромагнитного поля рекуррентно.

На практике систему уравнений (11), (12) используют в эквивалентной, но несколько более общей, форме. Для этого вместо одновременного задания Δx и Δt регламентируют величину их отношения числом Куранта [12]

$$S_c = \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \quad (14)$$

где скорость света в вакууме c , как известно [15–17], связана с параметрами ε_0 и μ_0 следующим образом

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (15)$$

Замечание 1. Выбор $S_c = 1$ определяет временной шаг сетки Δt точно соответствующим времени распространения света в вакууме между двумя соседними узлами сетки, расположенными на расстоянии Δx друг относительно друга. Несмотря на кажущуюся оптимальность, такой выбор заведомо не является корректным даже в вакууме при моделировании достаточно высокочастотных сигналов, период которых $\mathcal{T} \leq \Delta t$.

С помощью (14), (15) несложно привести коэффициенты уравнений (11), (12) к виду

$$\frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} = \frac{S_c}{\eta}, \quad \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} = S_c \eta, \quad (16)$$

где использовано обозначение характеристического импеданса вакуума

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 \text{ Ом}. \quad (17)$$

Замечание 2. Введение импеданса вакуума связано с выбором системы физических единиц и теории измерений в широком смысле. Как известно, в системе СГС подобной сущности в принципе не возникает. Поэтому использование η – есть следствие того, что мы выполняем исследование, используя систему СИ. Величина η влияет исключительно на взаимное отношение между электрической и магнитной компонентами электромагнитного поля, однако на динамику (и физику в принципе) это, конечно, не влияет. Переход к единицам СГС выполнить достаточно просто. При этом нет необходимости вводить импеданс вакуума, а число Куранта (14) трансформируется в параметр, имеющий размерность обратной скорости и определяемый как отношение шагов сетки

$$S_c = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

В подавляющем большинстве случаев амплитуда и знак функции источника J не имеют значения. Это связано с тем, что при вычислении сечения рассеяния, коэффициента отражения и других подобных величин всегда используется нормировка по падающему полю. Поэтому нет необходимости явно задавать коэффициент $\Delta t/\varepsilon_0$ в (12) — достаточно считать его содержащимся в самой функции источника. Таким образом, можно сделать переход

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon_0} J^{q+\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{J}^{q+\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Окончательно, с учетом всех принятых нами соглашений, дискретные аналоги уравнений (5) принимают вид

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] + \frac{S_c}{\eta} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]), \quad (19)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] - \mathcal{J}^{q+\frac{1}{2}}[m] + S_c \eta \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right] \right). \quad (20)$$

Далее будем рассматривать электромагнитное поле в некоторой активной области — ограниченной области пространства $X \subset \mathbb{R} \rightarrow m \in [0, N-1]$. Здесь и далее N — это число узлов электрической и магнитной сеток, отвечающих данной активной области.

Для простоты моделирования, чтобы не учитывать многократные переотражения электромагнитного поля от границ активной области, будем использовать поглощающие граничные условия (ABC — Absorbing Boundary Conditions), которые в рассматриваемом нами одномерном случае могут быть записаны в виде:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1], \\ H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[N - \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[N - \frac{3}{2} \right]. \quad (21)$$

Таким образом, состояния полей на границах рассматриваемой нами области не фиксированы жестко, а динамически изменяются в соответствии с тем, что «к ним подходит изнутри». За счет этого реализуется «убегание» поля из активной области за ее пределы, что моделирует поведение электромагнитного поля в открытом пространстве.

Уравнения (13), (19)–(21) позволяют реализовать итерационный алгоритм Йи [1, 12–14], определяющий всю динамику электромагнитного поля $\psi_y^q[m]$. Зададимся теперь вопросом определения корректности такого решения. Для этого требуется оценить справедливость равенства

$$\psi_y^q[m] = \widehat{D} \bar{\psi}(x, t), \quad (22)$$

где правая часть понимается как результат дискретизации (10) решения задачи, точного в смысле (8).

Очевидно, что строгое выполнение равенства (22) принципиально недостижимо в силу неизбежных ошибок численного счета, поэтому требуется более реалистичная процедура оценки корректности решения $\psi_y^q[m]$.

Здесь следует упомянуть следующее. В наших более ранних работах [18, 19] отмечалось, что «успех реализации» сформулированного метода во многом определяется «правильно подобранными» параметрами пространственно-временной сетки, для которых приводились следующие оценки

$$\Delta x \ll \lambda, \quad \Delta t \ll 1/\nu, \quad (23)$$

где λ — длина волны, а ν — частота исследуемого сигнала.

На текущий момент нами установлено, что выполнение неравенств (23) не является ни достаточным, ни необходимым условием «успешности» численного решения уравнений (5). Примеры, подкрепляющие этот тезис, показаны на рис. 1 и 2, подробное описание и анализ которых приводится нами в следующем разделе. Данные примеры отчетливо демонстрируют, что требуется как более точная формулировка самого понятия «успешности» решения $\psi_y^q[m]$, полученного в результате численного расчета по схеме (13), (19)–(21), так и более корректный критерий его достижения.

3. Задача Коши для неоднородного уравнения

Как следует из вышесказанного, традиционно уравнения Максвелла (5) численно решают следуя схеме Йи (13), (19)–(21). С точки зрения математики данная методика представляет собой итерационный алгоритм решения дискретного аналога задачи Коши для системы неоднородных уравнений. При этом на практике интересуются именно реакцией системы на действие источников $\mathcal{J} \rightarrow \psi_y^q[m]$, поэтому во всех известных нам публикациях полагают начальное состояние системы невозбужденным, т.е. выбирают

$$\psi_0 \equiv 0. \quad (24)$$

Вообще говоря, задание именно такого тривиально-го начального условия не является обязательным. Вместе с тем нами установлено, что далеко не любой выбор $\psi_0 \neq 0$ приводит к корректному решению задачи. В связи с этим отложим обсуждение данного вопроса до раздела 4, а в рамках этого пункта будем исследовать именно традиционную схему решения с начальным условием (24).

Определение 2. Будем называть решение $\psi_y^q[m]$, полученное в ходе итерационного алгоритма Йи (13), (19)–(21), корректным с точностью $\epsilon > 0$ в заданной области $X \times T = \{(x, t) | x \in X, t \in T\}$, где $X \subset \mathbb{R}$, а $T \subseteq \mathbb{R}_+ \cup 0$, в случае выполнения условия

$$\left| \frac{\widehat{D}^{-1} \psi_y^q[m] - \bar{\psi}(x, t)}{\bar{\psi}(x, t)} \right| \leq \epsilon. \quad (25)$$

Менее строго, будем называть решение $\psi_y^q[m]$ корректным тогда, когда

$$\left| \widehat{D}^{-1} \psi_y^q[m] - \bar{\psi}(x, t) \right| \ll \bar{\psi}(x, t). \quad (26)$$

Теперь, прежде чем формулировать критерий корректности решения $\psi_y[m]$, приведем несколько конкретных примеров, демонстрирующих особенности поведения $\psi_y[m]$ при различных источниках сигнала \mathcal{J} . Во всех

наших примерах будем полагать, что источник поля — точечный, он расположен в узле сетки с номером $m = 50$ и генерирует сигналы ограниченной длительности τ . Кроме того, будем считать, что формируемые источником сигналы обладают определенной направленностью и для определенности распространяются вправо ($m \geq 50$). Для программной реализации такой схемы возбуждения необходимо использовать технику, известную в литературе под названием TF/SF — Total-Field/Scattered-Field (см., например, [12–14]). Мы не будем останавливаться на ее описании, поскольку для основного содержания статьи это не так важно, а все необходимые детали можно найти в указанных источниках.

3.1. Квазигармонические сигналы. Рассмотрим сначала сигналы с наиболее простым спектром, а именно: пусть источник «включается» в момент времени $t = 0$ и ток в нем представляет собой синусоидальные функции времени

$$J_s(x, t) = \delta(x - 50\Delta x)A \sin\left(\frac{2\pi ct}{\lambda_0}\right) \quad (27)$$

и меняющиеся со временем по закону косинуса

$$J_c(x, t) = \delta(x - 50\Delta x)A \cos\left(\frac{2\pi ct}{\lambda_0}\right). \quad (28)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, указывающая положение источника, A — амплитуда создаваемого им сигнала. Во всех наших численных примерах будем полагать $A = 1$. Далее, при достижении времени τ , источник «выключается», и ток в нем обращается в нуль $J(x, t)|_{t>\tau} \equiv 0$.

Процессы включения/выключения источника математически можно смоделировать, умножая функции (27) и (28) на комбинацию функций Хевисайда вида $\theta(t)[1 - \theta(t - \tau)]$. Здесь первый множитель регулирует момент включения источника, второй — определяет время его выключения. В связи с тем, что источник, по нашему предположению, работает ограниченное время, сигналы, создаваемые им, не являются строго монохроматическими, однако всегда можно выбрать $\tau \gg \Delta t$. Это позволит пренебречь влиянием такого рода немонохроматичности и считать всю систему работающей в квазигармоническом режиме. Для достижения этого зададим $\tau = 100\Delta t$.

Теперь, после перечисления всех предварительных деталей реализации схемы (13), (19)–(21), обсудим ее непосредственные результаты, полученные для источников (27) и (28).

Так, на рис. 1 показан результат численного расчета для синусоидального источника (27), генерирующего сигнал с основной длиной волны в спектре $\lambda_0 = 3\Delta x$. Очевидно, что для этого случая сильное условие (23) заведомо не выполняется. Вместе с тем из рисунка следует, что результаты моделирования в этой ситуации можно считать корректными с точностью не хуже, чем $\epsilon = 0.14$. Важно отметить, что результаты дискретизации $\mathcal{J}^q[m] = \hat{D}J(x, t)$ тока (27) в этих условиях корректны с той же степенью точности, что и сами результаты моделирования, представляющие собой состояние электромагнитного поля.

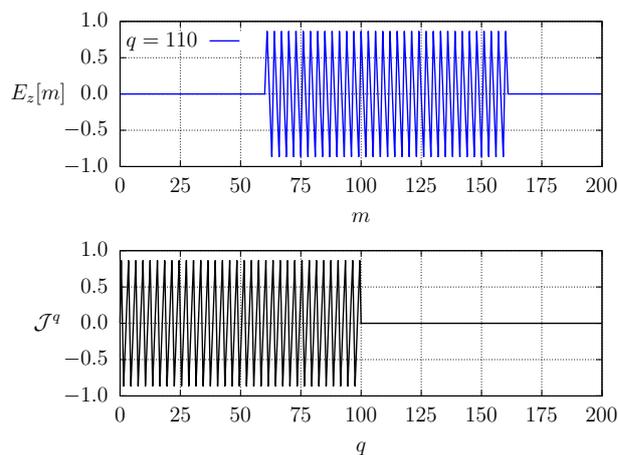


Рисунок 1. Результаты моделирования для синусоидального точечного источника (27) при $\lambda_0 = 3\Delta x$ (все остальные параметры расчета подробно описаны в основном тексте).

Figure 1. Simulation results for a sinusoidal point source (27) at $\lambda_0 = 3\Delta x$ (all other calculation parameters are described in detail in the main text).

Подтверждениями описанных выше фактов являются следующие результаты. На верхней части рис. 1 хорошо виден сигнал, имеющий синусоидальную форму и распространяющийся вправо так, что его передний фронт к моменту времени $q = 110$ успел преодолеть дистанцию $\Delta m = 110$. При этом область пространства, занимаемая волновым пакетом, соответствует ровно $\ell = 33\lambda_0$, как это и должно быть при избранных нами параметрах моделирования.

Кривые, изображенные на рис. 1, строго говоря, не являются синусоидальными сигналами. Причины этого легко понять, если учесть, что при выбранной нами длине волны $\lambda_0 = 3\Delta x$ и числе Куранта $S_c = 1$ временные отсчеты дискретизируют задающий сигнал всего три раза за его период \mathcal{T} . Вкуче с неизбежными ошибками округления при численном счете это как раз и приводит к отмеченному поведению \mathcal{J}^q . Стоит, однако, подчеркнуть, что на характере самого поля $\psi_y^q[m]$ указанные ошибки дискретизации тока (27) сказываются не столь существенно, как в случае источника (28). Решающим здесь является именно процесс начального развития сигнала, который хоть и является достаточно резким (см. начальный участок нижней кривой \mathcal{J}^q , изображенный на рис. 1, в сравнении с передним фронтом поля E_z вблизи узла $m = 160$ на верхней кривой того же рисунка), но эта резкость не столь принципиальна, так как является не характеристикой самого сигнала (см. обсуждения, связанные с рис. 2, и утверждение 2), а лишь следствием не самой удачной его дискретизации.

Выполненные нами дополнительные расчеты показывают, что с увеличением λ_0 корректность (в смысле определения 2) схемы решения (13), (19)–(21) для синусоидального источника (27) растет (а ϵ , соответственно, уменьшается), так как при этом все более справедливыми становятся условия (23). Кроме того, твердо установлено, что при $\lambda_0 \leq \Delta x$ ни о какой корректности решения говорить не приходится.

После столь подробного анализа результатов моделирования для синусоидального источника (27) перейдем к обсуждению особенностей работы источника (28). На

рис. 2 показаны итоги расчетов (13), (19)–(21) в случае, когда $\lambda_0 = 100\Delta x$. При этом условия (23) заведомо выполняются, и результаты расчета должны быть существенно лучше тех, что представлены на рис. 1.

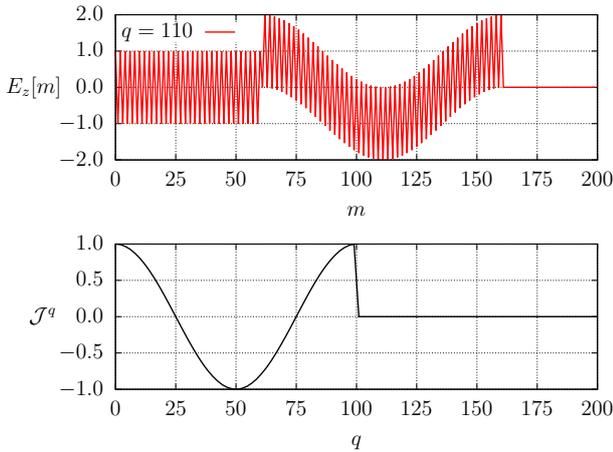


Рисунок 2. Результаты моделирования для точечного источника (28) при $\lambda_0 = 100\Delta x$.
Figure 2. Simulation results for a point source (28) at $\lambda_0 = 100\Delta x$.

В действительности все обстоит ровно наоборот — мгновенные значения решения $\psi_y^q[m]$, представленные на рис. 2, не могут быть признаны корректными в смысле определения 2, так как представляют собой некоторый «пилообразный» сигнал (как мы увидим впоследствии, это достаточно типичная картина, возникающая в ходе FDTD-моделирования). Более того, выделяется и то, что сигнал «проникает» в область $m < 50$, в которой его не должно быть согласно принятой нами схеме TF/SF.

Вместе с тем заметим, в данном конкретном случае результат усреднения мгновенных значений $\psi_y^q[m]$, который можно получить как полусумму его верхней и нижней огибающих, вполне соответствует поведению ожидаемого точного решения $\bar{\psi}^q[m]$ и может быть признан корректным. Так ли это в случае произвольного источника — вопрос на данный момент открытый и требует более подробного изучения.

Попытаемся понять причину столь разительного отличия результатов моделирования в рассмотренных нами случаях. Для этого отметим, что в некоторых источниках (см., например, [12]) упоминается влияние на результаты моделирования постоянной составляющей в спектре исследуемого сигнала. Результатом Фурье-преобразования

$$\tilde{f}(\omega) = \hat{\mathcal{F}}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (29)$$

временной части сигналов (27) и (28) являются следующие обобщенные функции

$$\tilde{J}_s(\omega) = iA\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)], \quad (30)$$

$$\tilde{J}_c(\omega) = A\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (31)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что в правых ча-

стях выражений (30) и (31) фигурируют дельта-функции Дирака. Это является следствием того, что мы вычисляли преобразование Фурье (29) для неограниченных во времени (и потому строго монохроматических) функций (27) и (28). Учет ограниченной длительности данных сигналов (другими словами, их квазигармоничности) приводит к трансформации дельта-функций в функции более сложного вида. В частности, первое слагаемое выражения (30) преобразуется к виду

$$\frac{i\tau}{2\sqrt{2\pi}} A \exp\left[-i\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right] \operatorname{sinc}\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}.$$

Здесь использовано достаточно стандартное обозначение функции $\operatorname{sinc} x = \sin(x)/x$. Для остальных слагаемых в (30) и (31) имеют место аналогичные замены, которые не выписаны полностью в виду их громоздкости.

Для нас существенно то, что как для Фурье-преобразовант (30) и (31), так и для более точных их аналогов, можно с уверенностью утверждать отсутствие постоянной составляющей сигнала, т. е. $\hat{\mathcal{F}}[J_{s,c}(t)](0) = 0$.

3.2. Импульсы и негармонические сигналы. Теперь обсудим особенности моделирования сигналов с более сложным спектральным составом. Начнем со случая отдельных импульсов, в котором ограничимся только двумя примерами: импульсами гауссова вида

$$J_g(t) = A \exp\left[-\frac{(t - t_0)^2}{w^2}\right] \quad (32)$$

и импульсами в форме вейвлета Рикера

$$J_r(t) = A \left(1 - 2[\pi\nu_m(t - t_0)]^2\right) \times \exp\left(-[\pi\nu_m(t - t_0)]^2\right). \quad (33)$$

Здесь, как и всегда, амплитуда $A = 1$, а t_0 , w и ν_m — есть параметры сигналов (32) и (33), определяющие их форму. Величина t_0 в обоих случаях задает основную временную задержку, т. е. тот момент времени, к которому достигается $J(t_0) = A$. Значение w регламентирует основную продолжительность гауссова сигнала, так что его подавляющая мощность источника тока сосредоточена во временном интервале $[t_0 - w, t_0 + w]$. Нам будет удобно выражать этот параметр в единицах шагов временной сетки $w = w\Delta t$. Величина ν_m задает ту частоту в спектре вейвлета Рикера, на которую приходится его максимум. Для целей сопоставления всех результатов этого раздела нам удобнее задавать не ν_m , а отвечающую ей длину волны $\lambda_m = c/\nu_m$, которую можно выразить в единицах шагов пространственной сетки $\lambda_m = l_m\Delta x$.

Для гауссова импульса временную задержку t_0 можно непосредственно задавать в форме $t_0 = d_g\Delta t$, в то время как для вейвлета Рикера ее удобнее представлять в единицах обратной частоты, множителем d_r , определенным согласно:

$$t_0 = d_r \frac{1}{\nu_m} = d_r \frac{\lambda_m}{c} = d_r \frac{l_m}{S_c} \Delta t. \quad (34)$$

Последнее равенство здесь записано с помощью определения числа Куранта (14). В дальнейшем нижний индекс у параметра d в явном виде указывать не будем, так как его смысл виден из контекста.

На рис. 3 показаны результаты моделирования согласно схеме (13), (19)–(21) для источника (32), формирующего направленные вправо гауссовы импульсы с разной шириной w . На верхней части рисунка показаны мгновенные распределения поля $E_z[m]$ в пространстве для обоих импульсов, вычисленные для удобства в такие моменты времени q , чтобы дистанции Δm , пройденные данными сигналами, отличались в два раза. Нижняя часть того же рисунка иллюстрирует временную динамику тока \mathcal{J}^q , формирующего эти импульсы.

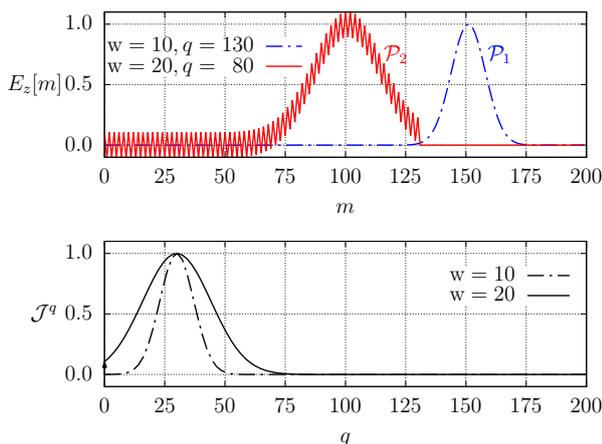


Рисунок 3. Результаты моделирования для точечного источника (32) при $d = 30$.
Figure 3. Simulation results for a point source (32) at $d = 30$.

Беглого взгляда, обращенного на данный рисунок, вполне достаточно для утверждения, что результаты численного расчета электромагнитного поля для сигнала меньшей ширины w вполне корректны. В то же время результат моделирования поля, созданного более широким импульсом тока, проявляет те же особенности, что были отмечены нами при анализе работы источника (28). А именно, мгновенные значения поля $\psi_y^q[m]$, рассчитанные в этом случае, демонстрируют «пилообразное поведение», так что истинную форму сигнала можно восстановить только как полусумму его огибающих.

Вместе с тем, как было отмечено нами ранее, форма гауссова сигнала определяется не только его шириной w , но и задержкой d . Влияние этого параметра можно оценить изучая рис. 4, на котором представлены результаты расчета для гауссова источника (32), формирующего сигналы одинаковой шириной $w = 10$, но с разной задержкой d .

На рис. 4 показано, что уменьшение временной задержки d гауссова импульса при том же значении его ширины w ухудшает корректность результатов расчета. Это ухудшение воспринимается не столь значительным, поскольку изменение значения d от 30 до 20 при $w = 10$ пусть и увеличивает начальный ток \mathcal{J}_g^0 примерно в 100 раз, но сама его величина остается сравнительно небольшой и составляет $\approx 2\%$ от максимального значения. Заметим, что дальнейшее сокращение d , например до значения 10, ухуд-

шит корректность результатов расчета сигнала \mathcal{P}_3 сильнее, чем для более широкого импульса \mathcal{P}_2 , представленного на рис. 3.

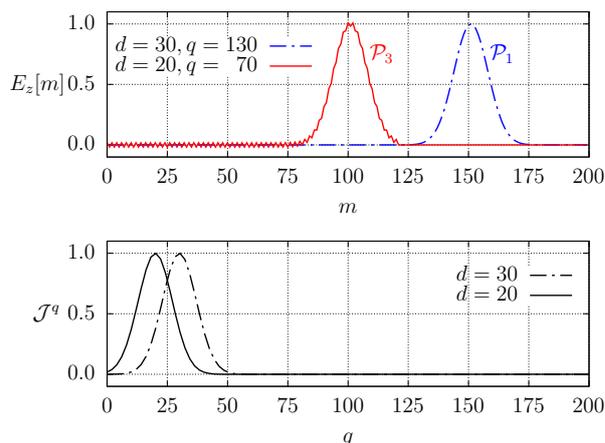


Рисунок 4. Результаты моделирования для точечного источника (32) при $w = 10$.
Figure 4. Simulation results for a point source (32) at $w = 10$.

Таким образом, рассмотренные примеры приводят к выводу о том, что на корректность результатов численного расчета по алгоритму Йи (13), (19)–(21) самым существенным образом влияет именно величина начального тока \mathcal{J}^0 источника (на рис. 3 этот уровень отмечен небольшой вертикальной стрелкой при нулевой абсциссе).

Заметим, что спектр гауссова сигнала

$$\tilde{J}_g(\omega) = \frac{w}{\sqrt{2}} A \exp \left[- \left(\frac{\omega w}{2} \right)^2 - i\omega t_0 \right], \quad (35)$$

вообще говоря, имеет достаточно существенный вклад постоянной составляющей. Поэтому для подтверждения выводов, сформулированных в предыдущем абзаце, необходимо исключить влияние данного фактора. При этом удобно исследовать импульсы как раз в форме вейвлета Рикера, поскольку их спектральный состав

$$\tilde{J}_r(\omega) = \frac{\omega^2}{2\sqrt{2}\pi^3\nu_m^3} A \times \exp \left[- \left(\frac{\omega}{2\pi\nu_m} \right)^2 - i\omega t_0 \right] \quad (36)$$

не имеет постоянной составляющей.

На рис. 5 представлены результаты численного расчета динамики электромагнитного поля согласно алгоритму Йи (13), (19)–(21) для источника (33), формирующего направленные вправо импульсы в форме вейвлета Рикера с разной длиной волны, отвечающей максимуму в спектре l_w . Как и всегда до этого, верхняя часть рисунка представляет собой распределение электрического поля в пространстве, тогда как нижняя — дает представление о развитии со временем тока, являющегося источником сигнала.

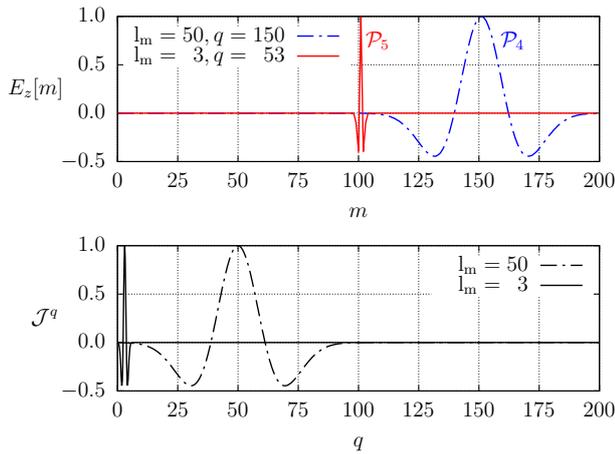


Рисунок 5. Результаты моделирования для точечного источника (33) при $d = 1$.

Figure 5. Simulation results for a point source (33) at $d = 1$.

Параметры l_w , использованные для двух источников, действие которых показано на рис. 5, подобраны так, чтобы формируемые ими импульсы существенно отличались. Так, при малом значении $l_w = 3$ (при этом $\lambda_m \gtrsim \Delta x$, но $\lambda_m \gg \Delta x$) пространственная протяженность соответствующего волнового пакета настолько узка, что оказывается сопоставимой с пространственным шагом сетки, однако его спектральный состав достаточно широк. В противоположность этому, для большого значения $l_w = 50$ все обстоит ровно наоборот. Существенно, что для обоих импульсов временная задержка выбрана одинаковой и единичной $d = 1$, так что изначально (в момент времени $q = 0$) оба импульса практически неотличимы от нуля, а максимума достигают к моментам времени $q = 3$ и $q = 50$ соответственно.

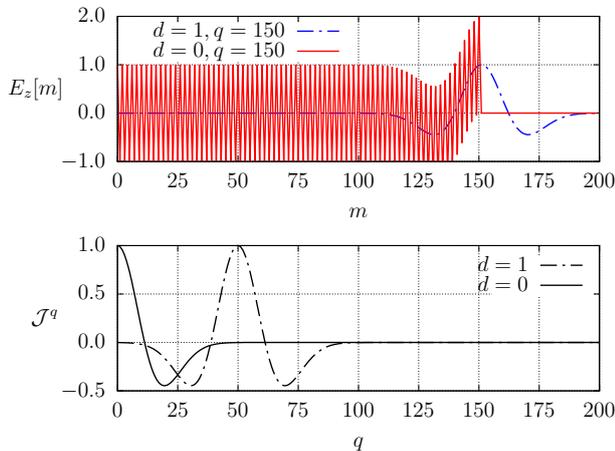


Рисунок 6. Результаты моделирования для точечного источника (33) при $l_w = 50$.

Figure 6. Simulation results for a point source (33) at $l_w = 50$.

Как и для рис. 3 и 4, мгновенные значения электрического поля на верхней части рис. 5 приведены для моментов времени, когда импульсы P_4 и P_5 успели пройти дистанции, отличающиеся друг от друга в два раза. При этом очень хорошо видно, что результаты моделирования являются корректными в обоих случаях, и это обстоятельство никак не связано со спектральным составом обоих импульсов. Совершенно иначе обстоит дело тогда, когда

существенным оказывается начальное значение тока источника $\mathcal{J}_r^0 \neq 0$. Добиться этого можно уменьшая значение задержки d . Сопоставление результатов моделирования с критическим случаем $d = 0$ показано на рис. 6, все остальные параметры на котором заданы такими же, как и для импульса P_4 на рис. 5.

Рис. 6 прекрасно иллюстрирует те выводы, которые постепенно формулировались при обсуждении результатов моделирования для всех предыдущих источников сигнала. Можно утверждать, что рис. 6 в некотором смысле комбинирует результаты, представленные ранее на рис. 1 и 2.

3.3. Результаты раздела. Дополнительно нами установлено, что все особенности численного решения задачи Коши для неоднородного уравнения (5) с начальным условием (24) согласно схеме (13), (19)–(21), рассмотренные в данном пункте, остаются справедливыми и для других часто встречающихся сигналов, таких как треугольные импульсы, меандр и т. д. Таким образом, можно сформулировать основной результат данного раздела в следующей форме. **Утверждение 2.** *Необходимым и достаточным условием корректности численного решения $\psi_y^q[m]$ задачи Коши для неоднородного уравнения Максвелла в вакууме (5) с некоторым начальным условием ψ_0 , полученного в ходе итерационного алгоритма Йи (13), (19)–(21), являются следующие ограничения:*

1. Шаг пространственной сетки $\Delta x \leq \lambda_{\min}$ (где λ_{\min} — это минимальная длина волны в спектре сигнала, генерируемого источником);
2. Начальный ток источника не имеет существенных скачков по сравнению с заданной начальной конфигурацией электрического поля $\mathcal{J}^0[m] \ll E_z^0[m]$.

Замечание 3. Требование $\Delta t \leq 1/\nu_{\max}$, вообще говоря, излишне, так как оно обеспечивается автоматически при соблюдении первого условия Утверждения 2 и разумном выборе числа Куранта ($S_c \leq 1$).

Замечание 4. Характер спектра сигналов, генерируемых источником тока, не влияет на корректность моделирования в рассматриваемом нами случае распространения в вакууме. Вместе с тем спектральный состав (и в особенности его постоянная составляющая $\hat{\mathcal{F}}[\varphi(t)](0)$) сигналов — один из ключевых факторов, влияющих на корректность моделирования в случае их генерации и распространения в той или иной среде. Этот вопрос очень обширен и требует отдельного рассмотрения.

4. Задача Коши для однородного уравнения

До этого момента с помощью алгоритма Йи мы исследовали поведение электромагнитного поля $\psi_y^q[m]$, создаваемого источником тока $\mathcal{J}^q[m]$ при нулевой начальной конфигурации поля. С математической точки зрения решалась задача Коши для неоднородного уравнения Максвелла (5) с тривиальным начальным условием (24). Теперь посмотрим на задачу с иной точки зрения. А именно, будем считать то решение $\psi_y^q[m]$, которое нами получено для неоднородной задачи Коши к моменту завершения действия ограниченного по времени источника, начальным состоянием поля $\psi_0[m] = \psi_y^q[m] \Big|_{q \geq \tau/\Delta t}$.

Поскольку оператор $\widehat{\mathcal{L}}$, определенный согласно (4), абсолютно одинаков как для однородного, так для неоднородного уравнения, то совершенно ясно, что решение сформулированной таким образом задачи Коши для однородного уравнения полностью эквивалентно решению соответствующей задачи Коши для неоднородного уравнения. Именно это и имелось в виду при формулировании утверждения 1, причем единственным необходимым условием здесь является только ограниченность во времени источника поля.

4.1. Конфигурации полей, соответствующие бегущим волнам. Наиболее просто продемонстрировать эквивалентность задач Коши, о которых говорилось выше, можно в случае конфигураций электромагнитного поля с той или иной избранной направленностью. В частности, в предыдущем разделе с помощью техники TF/SF мы везде моделировали волны, распространяющиеся в вакууме вправо от источника, расположенного в точке $m = 50$. При этом, поскольку векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} составляют в электромагнитной плоской волне правую тройку [15–17], всегда справедливо

$$H_y^q[m] = -\frac{E_z^{q+\frac{1}{2}}[m - \frac{1}{2}]}{\eta}. \quad (37)$$

В случае распространения волны влево предыдущее равенство должно быть заменено соотношением:

$$H_y^q[m] = \frac{E_z^{q+\frac{1}{2}}[m + \frac{1}{2}]}{\eta}. \quad (38)$$

Пользуясь этим, зададим начальную конфигурацию электромагнитного поля вида:

$$\psi_0[m] = \begin{pmatrix} E_z^*[m] \\ E_z^*[m + \frac{1}{2}]/\eta \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где $E_z^*[m]$ — распределение напряженности электрического поля, показанное на рис. 4 для импульса \mathcal{P}_1 . Далее, следуя описанной ранее схеме Йи (13), (19)–(21), будем решать задачу без источников $\mathcal{J} = 0$. Результат решения в данном случае приведен на рис. 7.

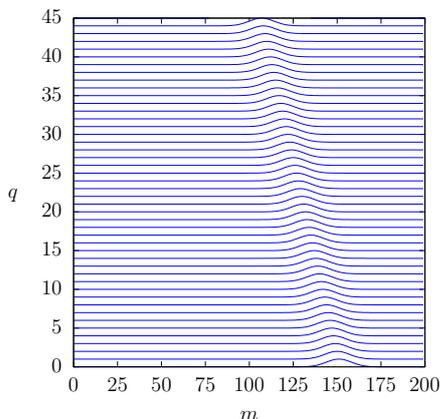


Рисунок 7. Решение задачи Коши для однородного уравнения Максвелла с начальным условием в виде гауссова импульса (39), направленного влево.

Figure 7. Solution of the Cauchy problem for the homogeneous Maxwell equation with initial condition in the form of Gaussian pulse (39) directed to the left.

Как и следовало ожидать, картина, изображенная на рис. 7, представляет собой гауссов импульс, распространяющийся из начального состояния влево без искажения формы. Результаты моделирования вполне можно признать корректными с точки зрения определения 2. Нами установлено, что тоже самое относится к импульсам и ограниченным сигналам любой другой формы — коль скоро начальная конфигурация поля представляет собой (37) или (38) (для любого наперед заданного распределения $E_z^*[m]$), решение задачи Коши для однородного уравнения всегда будет корректным.

4.2. Конфигурации поля, соответствующие излучению ненаправленных источников. В случае, когда говорить о конкретной направленности электромагнитного поля нельзя, начальное состояние электромагнитного поля должно представлять собой суперпозицию обеих конфигураций (37) и (38) одновременно.

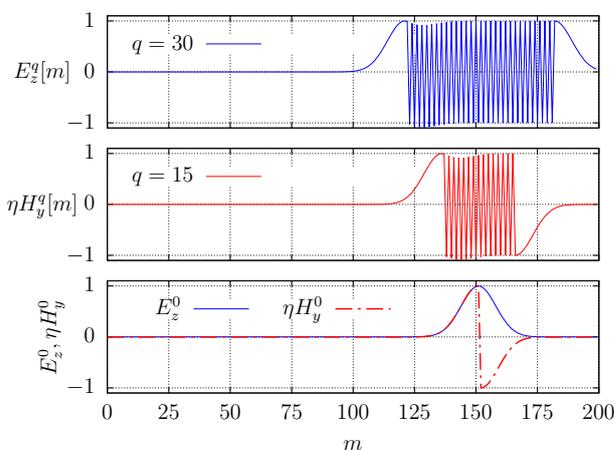


Рисунок 8. Некорректно заданная начальная конфигурация электромагнитного поля вида (40) для ненаправленного гауссовского импульса и его развитие во времени.

Figure 8. Incorrectly specified initial configuration of the electromagnetic field of the form (40) for a non-directional Gaussian pulse and its evolution over time.

Здесь очень важно подчеркнуть, что распределение напряженности электрического поля $E_z^*[m]$, показанное на рис. 4 для импульса \mathcal{P}_1 и уже использованное нами ранее в предыдущем подпункте, не может рассматриваться теперь в качестве «отправной точки» для задания $\psi_0[m]$. Это связано с тем, что для данной конфигурации электрического поля импульсы, разбегающиеся в противоположные от источника стороны, еще «не разделились окончательно» (другими словами, прошло лишь время $\tau/2$, но никак не τ). Это вызывает существенные численные ошибки и неправильные результаты моделирования в целом, что очень легко понять, анализируя рис. 8.

Нижняя часть данного рисунка демонстрирует начальную конфигурацию электромагнитного поля, для которой принято заданное распределение напряженности электрического поля $E_z^*[m]$, соответствующее импульсу \mathcal{P}_1 рис. 4. Распределение напряженности магнитного поля задается с помощью комбинации (38) для левой половины пакета и (37) для правой соответственно. Очевидно, что здесь имеется существенная «нефизическая» особен-

ность — конечный разрыв напряженности магнитного поля в центре волнового пакета.

Разрывное поведение магнитного поля в начальной конфигурации волнового пакета ответственно за дальнейшее некорректное поведение решения. А именно, верхняя часть рис. 8 иллюстрирует, что в последующие моменты времени как магнитное, так и электрическое поле демонстрируют «пилообразное поведение» в центральной зоне пространства, расположенной между двумя «половинками начального гауссова импульса, расходящимися влево и вправо».

Остается нераскрытым лишь следующий вопрос. Действительно ли указанная начальная конфигурация поля некорректна? Если попытаться придать ей некий физический смысл, то такое поведение решения можно интерпретировать следующим образом. В начальный момент времени источник тока оказался «резко выключен» именно в той ситуации, когда формируемый им сигнал достиг максимума. Очевидно, что при этом неизбежно должно проявиться явление самоиндукции, действие которого как раз и наблюдается в виде «бесконечного пилообразного сигнала» в постоянно расширяющейся центральной области. Впрочем, если вспомнить развиваемые нами ранее соображения об усреднении некорректно ведущих себя сигналов по их огибающим, то данным явлением, вообще говоря, можно пренебречь, так как средние значения напряженностей полей в центральной области всегда остаются нулевыми, и две половинки начального гауссова импульса действительно расходятся влево и вправо. Насколько можно пользоваться такой интерпретацией решения — вопрос, по всей видимости, еще открытый, но не лишенный смысла.

4.3. Иные конфигурации поля. Метод FDTD в том виде, в котором он сформулирован в данной работе, вообще говоря, некорректен для задач статики, поскольку уравнения Максвелла (2) нами были отброшены в самом начале и никак не принимались в расчет при алгоритмизации схемы решения (13), (19)–(21). В связи с этим очевидно, что конфигурации электромагнитного поля вида

$$\psi_0^e[m] = \begin{pmatrix} E_z[m] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

или

$$\psi_0^m[m] = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y[m] \end{pmatrix} \quad (41)$$

в общем случае не могут рассматриваться нами в качестве корректно заданных начальных условий для однородной (а равно и неоднородной) задачи Коши. Вместе с тем достаточно интересным представляется исследование поведения решений, определяемых алгоритмом Ии (13), (19)–(21), и в этих случаях.

В качестве примеров достаточно посмотреть на рис. 9 и 10, которые иллюстрируют поведение численного решения однородной задачи Коши для начальных конфигураций вида (40). На рис. 9 исходное распределение $E_z[m]$ задано равным конфигурации электрического поля импульса \mathcal{P}_1 (см. рис. 3), а на рис. 10 — соответствующим импульсу \mathcal{P}_4 (см. рис. 5).

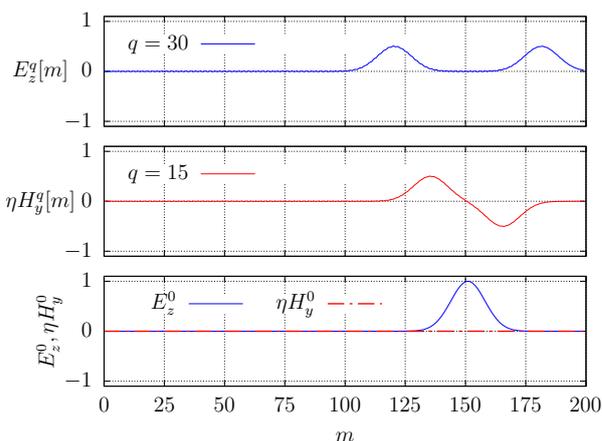


Рисунок 9. Некорректно заданная начальная конфигурация электромагнитного поля вида (40) для ненаправленного гауссова импульса и ее развитие со временем.

Figure 9. Incorrectly specified initial configuration of the electromagnetic field of the form (40) for a non-directional Gaussian pulse and its evolution over time.

Очевидно, что результаты моделирования ни в том, ни в другом случае, строго говоря, не могут быть признаны корректными, хотя для гауссова импульса решение выглядит «несколько более плавным». Понятно, что руководствоваться такими соображениями при оценке корректности решения нельзя, тем более, что здесь важнейшим является вопрос правильной интерпретации полученных результатов. Данный вопрос на текущий момент нами еще не закрыт, а его более подробное изучение может быть продолжено в последующих работах.

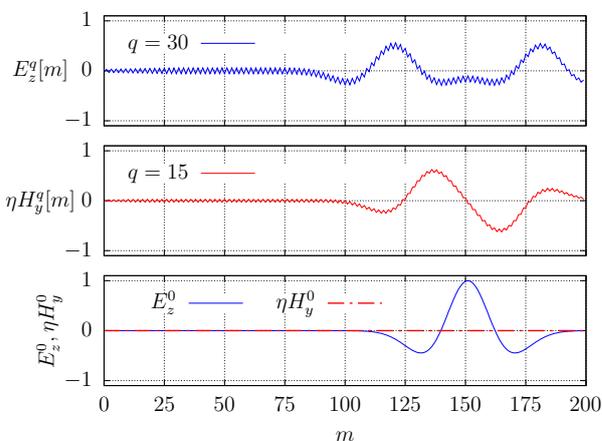


Рисунок 10. Некорректно заданная начальная конфигурация электромагнитного поля вида (40) для ненаправленного импульса в форме вейвлета Рикера и ее развитие со временем.

Figure 10. Incorrectly specified initial configuration of the electromagnetic field of the form (40) for a non-directional impulse in the form of a Ricker wavelet and its evolution over time.

Заключение

Таким образом, в данной работе исследованы особенности численного решения уравнений Максвелла методом FDTD в различных формулировках. Показано, что для случая ограниченных во времени источников поля задачу Коши для неоднородной системы уравнений можно сформулировать в форме эквивалентной задачи Коши для системы однородных уравнений, в качестве начального условия

которой выступает решение исходной задачи, полученное к моменту окончания действия источника. Указано, что для бегущих волн с избранной направленностью такая переформулировка возможна всегда, в то время как для расходящихся волн при определении начальной конфигурации поля имеются некоторые особенности, которые обязательно следует учитывать.

Кроме того, нами определен критерий для оценки степени корректности численного решения, полученного методом FDTD согласно алгоритму Йи. С помощью данного критерия проанализированы особенности численного решения однородных и неоднородных задач Коши для различных форм начальных конфигураций электромагнитных полей и задающих импульсов. Сформулированы необходимые и достаточные условия корректности получаемых решений.

Авторы благодарны Р.Н. Скандакову (ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН), В.С. Власову (Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина) и В.В. Темнову (LSI, Ecole Polytechnique, CEA/DRF/IRAMIS, CNRS, Institut Polytechnique de Paris) за конструктивную критику, полезные замечания и внимание, стимулировавшие данное исследование.

Литература

1. Yee, K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // IEEE Trans. on Ant. and Prop. – 1966. – Vol. 14. – № 3. – P. 302–307.
2. Miyazaki, Y. FDTD analysis of spatial filtering of scattered waves for optical CT of medical diagnosis / Y. Miyazaki, K. Kouno // IEEE Trans. FM. – 2009. – Vol. 129. – № 10. – P. 693–698.
3. Tan, T. Single realization stochastic FDTD for weak scattering waves in biological random media / T. Tan, A. Taflove, V. Backman // IEEE Trans. AP. – 2013. – Vol. 61. – № 2. – P. 818–828.
4. Stark, J. Light scattering microscopy measurements of single nuclei compared with GPU-accelerated FDTD simulations / J. Stark [et al.] // Phys. Med. Biol. – 2016. – Vol. 61. – № 7. – P. 2749–2761.
5. Nzao, A.B.S. Analysis and FDTD modeling of the influences of microwave electromagnetic waves on human biological systems / A.B.S. Nzao // Open Journal of Applied Sciences. – 2022. – Vol. 12. – P. 912–929.
6. Glubokovskikh, S. Seismic monitoring of CO₂ geosequestration: CO₂CRC Otway case study using full 4D FDTD approach / S. Glubokovskikh [et al.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. – 2016. – Vol. 49. – P. 201–216.
7. Yu, J. Modeling of whole-space transient electromagnetic responses based on FDTD and its application in the mining industry / J. Yu, R. Malekian, J. Chang, B. Su // IEEE Trans. Indust. Inform. – 2017. – Vol. 13. – № 6. – P. 2974–2982.
8. Fantoni, A. A model for the refractive index of amorphous silicon for FDTD simulation of photonics waveguides / A. Fantoni, P. Lourenço, M. Vieira // International Conference on Numerical Simulation of Optoelectronic Devices (NUSOD), Copenhagen, Denmark. – 2017. – P. 167–168.
9. Mishra, C.S. FDTD approach to photonic based angular waveguide for wide range of sensing application / C.S. Mishra [et al.] // Optik. – 2019. – Vol. 176. – P. 56–59.
10. Mohanty, S.P. FDTD method to photonic waveguides for application of optical demultiplexer at 3-communication windows / S.P. Mohanty, S.K. Sahoo, A. Panda, G. Palai // Optik. – 2019. – Vol. 185. – P. 146–150.
11. Bakirtzis, S. FDTD-based diffuse scattering and transmission models for ray tracing of millimeter-wave communication systems / S. Bakirtzis, T. Hashimoto, C.D. Sarris // IEEE Trans. AP. – 2021. – Vol. 69. – № 6. – P. 3389–3398.
12. Schneider, J.B. Understanding the finite-difference time-domain method / J.B. Schneider. – www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd, 2010. – 403 p.
13. Inan, U.S. Numerical electromagnetics. The FDTD method / U.S. Inan, R.A. Marshall. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 406 p.
14. Taflove, A. Advances in FDTD computational electrodynamics photonics and nanotechnology / A. Taflove, A. Oskooi, S.G. Johnson. – Boston: Artech House, 2013. – 639 p.
15. Бредов, М.М. Классическая электродинамика / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. – Москва: Наука, 1985. – 400 с.
16. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: Т. II. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 536 с.
17. Кугушев, А.М. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн / А.М. Кугушев, Н.С. Голубева, В.Н. Митрохин. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 368 с.
18. Makarov, P. Simulation of electromagnetic wave propagation in magnetic randomly inhomogeneous magnetic media / P. Makarov [et al.] // IEEE Magnetics Letters. – 2022. – Vol. 13. – P. 1–5.
19. Макаров, П.А. Моделирование распространения электромагнитных волн в магнитно-неоднородных средах / П.А. Макаров, В.А. Устюгов, В.И. Щеглов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 100–105.

References

1. Yee, K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // IEEE Trans. on Ant. and Prop. – 1966. – Vol. 14. – № 3. – P. 302–307.
2. Miyazaki, Y. FDTD analysis of spatial filtering of scattered waves for optical CT of medical diagnosis / Y. Miyazaki, K. Kouno // IEEE Trans. FM. – 2009. – Vol. 129. – № 10. – P. 693–698.
3. Tan, T. Single realization stochastic FDTD for weak scattering waves in biological random media / T. Tan, A. Taflove, V. Backman // IEEE Trans. AP. – 2013. – Vol. 61. – № 2. – P. 818–828.

4. Stark, J. Light scattering microscopy measurements of single nuclei compared with GPU-accelerated FDTD simulations / J. Stark [et al.] // *Phys. Med. Biol.* – 2016. – Vol. 61. – № 7. – P. 2749–2761.
5. Nzaio, A.B.S. Analysis and FDTD modeling of the influences of microwave electromagnetic waves on human biological systems / A.B.S. Nzaio // *Open Journal of Applied Sciences.* – 2022. – Vol. 12. – P. 912–929.
6. Glubokovskikh, S. Seismic monitoring of CO₂ geosequestration: CO2CRC Otway case study using full 4D FDTD approach / S. Glubokovskikh [et al.] // *International Journal of Greenhouse Gas Control.* – 2016. – Vol. 49. – P. 201–216.
7. Yu, J. Modeling of whole-space transient electromagnetic responses based on FDTD and its application in the mining industry / J. Yu, R. Malekian, J. Chang, B. Su // *IEEE Trans. Indust. Inform.* – 2017. – Vol. 13. – № 6. – P. 2974–2982.
8. Fantoni, A. A model for the refractive index of amorphous silicon for FDTD simulation of photonics waveguides / A. Fantoni, P. Lourenço, M. Vieira // *International Conference on Numerical Simulation of Optoelectronic Devices (NUSOD), Copenhagen, Denmark.* – 2017. – P. 167–168.
9. Mishra, C.S. FDTD approach to photonic based angular waveguide for wide range of sensing application / C.S. Mishra [et al.] // *Optik.* – 2019. – Vol. 176. – P. 56–59.
10. Mohanty, S.P. FDTD method to photonic waveguides for application of optical demultiplexer at 3-communication windows / S.P. Mohanty, S.K. Sahoo, A. Panda, G. Palai // *Optik.* – 2019. – Vol. 185. – P. 146–150.
11. Bakirtzis, S. FDTD-based diffuse scattering and transmission models for ray tracing of millimeter-wave communication systems / S. Bakirtzis, T. Hashimoto, C.D. Sarris // *IEEE Trans. AP.* – 2021. – Vol. 69. – № 6. – P. 3389–3398.
12. Schneider, J.B. Understanding the finite-difference time-domain method / J.B. Schneider. – www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd, 2010. – 403 p.
13. Inan, U.S. Numerical electromagnetics. The FDTD method / U.S. Inan, R.A. Marshall. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 406 p.
14. Taflove, A. Advances in FDTD computational electrodynamics photonics and nanotechnology / A. Taflove, A. Oskooji, S.G. Johnson. – Boston: Artech House, 2013. – 639 p.
15. Bredov, M.M. Classical electrodynamics / M.M. Bredov, V.V. Romyantsev, I.N. Toptygin. – Moscow: Nauka, 1985. – 400 p.
16. Landau, L.D. Theoretical Physics: Vol. II. Field Theory / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Moscow: FIZMATLIT, 2006. – 536 p.
17. Kugushev, A.M. Fundamentals of radioelectronics. Electrodynamics and radio waves propagation / A.M. Kugushev, N.S. Golubeva, V.N. Mitrohin. – Moscow: Bauman Moscow State Technical University Press, 2001. – 368 p.
18. Makarov, P. Simulation of electromagnetic wave propagation in magnetic randomly inhomogeneous magnetic media / P. Makarov [et al.] // *IEEE Magnetics Letters.* – 2022. – Vol. 13. – P. 1–5.
19. Makarov, P.A. Modelling of electromagnetic wave propagation in magnetically inhomogeneous media / P.A. Makarov, V.A. Ustyugov, V.I. Shcheglov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences".* – 2022. – № 5 (57). – P. 100–105.

Для цитирования:

Макаров, П.А. Особенности численного решения уравнений Максвелла методом FDTD в однородной и неоднородной формулировках / П.А. Макаров, В.А. Устюгов, В.И. Щеглов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2023. – № 4 (62). – С. 96–107.

For citation:

Makarov, P.A. Osobennosti chislennogo resheniya uravnenij Maksvella metodom FDTD v odnorodnoj i neodnorodnoj formulirovках [Numerical solution features of Maxwell equations by FDTD method in the homogeneous and non-homogeneous formulations of the problems] / P.A. Makarov, V.A. Ustyugov, V.I. Shcheglov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences".* – 2023. – № 4 (62). – P. 96–107.

Дата поступления рукописи: 12.07.2023

Received: 12.07.2023