

Научный журнал
Основан в 2010 г.
Выходит восемь раз в год

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
Федеральный исследовательский центр
«Коми научный центр УрО РАН»

ИЗВЕСТИЯ

КОМИ НАУЧНОГО ЦЕНТРА
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 4 (62)

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

2023

Главный редактор – акад. РАН А.М. Асхабов
Зам. главного редактора – чл.-корр. РАН С.В. Дёгтева
Зам. главного редактора – чл.-корр. РАН В.Н. Лаженцев
Ответственный секретарь – к.и.н. Д.В. Милохин

Редакционный совет:

акад. РАН В.В. Алексеев, акад. РАН А.А. Барях, акад. РАН В.И. Бердышев, д.м.н. Е.Р. Бойко,
чл.-корр. РАН И.Н. Болотов, акад. РАН В.Н. Большаков, Ph.D. (Econ.) К. Борисова-Маринова (Болгария),
д.ф.-м.н. Т.М. Бречко (Польша), к.г.-м.н. И.Н. Бурцев, акад. РАН А.Д. Гвишиани, д.ф.-м.н. Н.А. Громов,
д.и.н. И.Л. Жеребцов, д.б.н. В.Г. Зайнуллин, чл.-корр. РАН В.А. Ильин, акад. РАН С.В. Кривовичев,
И.В. Курляк, акад. РАН А.В. Кучин, чл.-корр. РАН Ю.Б. Марин, акад. РАН В.П. Матвеевко,
д.и.н. В.И. Меньковский (Беларусь), акад. РАН Г.А. Месяц, чл.-корр. РАН А.А. Москалев,
д.э.н. Л.А. Попова, чл.-корр. РАН В.Н. Пучков, д.г.-м.н. А.М. Пыстин, чл.-корр. РАН И.М. Рощевская,
акад. РАН М.П. Рощевский, д.х.н. С.А. Рубцова, д.и.н. Э.А. Савельева, д.и.н. Т.С. Садыков (Казахстан),
чл.-корр. РАН А.Ф. Титов, д.б.н. С.Н. Харин, к.б.н. И.Ф. Чадин, акад. РАН В.Н. Чарушин, д.т.н. Ю.Я. Чукреев,
д.б.н. Е.В. Шамрикова, акад. РАН В.С. Шацкий, д.э.н. А.Г. Шеломенцев, к.э.н. А.А. Юдин

Редакционная коллегия серии «Физико-математические науки»:

д.ф.-м.н. Н.А. Беляева, д.ф.-м.н. С.Г. Бобков (США), д.ф.-м.н. В.А. Бушуев, д.ф.-м.н. В.П. Голубятников,
д.т.н. А.П. Господариков, д.ф.-м.н. О.Н. Граничин, д.ф.-м.н. Н.А. Громов (ответственный редактор),
д.ф.-м.н. А.В. Жубр, д.ф.-м.н. Ю.А. Курочкин (Беларусь), д.ф.-м.н. В.В. Мазалов, д.ф.-м.н. В.И. Манько,
д.ф.-м.н. В.М. Нежинский, д.ф.-м.н. А.Б. Певный, д.ф.-м.н. С.М. Полещиков, д.ф.-м.н. В.И. Пунегов,
д.ф.-м.н. В.М. Редьков (Беларусь), д.ф.-м.н. В.Н. Сивков, д.ф.-м.н. В.Ф. Соколов,
к.ф.-м.н. Д.А. Тимушев (ответственный секретарь), д.ф.-м.н. А.Н. Тихомиров, д.ф.-м.н. В.В. Ульянов,
д.ф.-м.н. С.М. Хрящев, д.ф.-м.н. П.С. Щербаков

Адрес редакции:

167982, ГСП-2, Республика Коми, г. Сыктывкар,
ул. Коммунистическая, д. 24
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, каб. 317, 318.
Тел. (8212) 24-47-79, факс (8212) 24-22-64
E-mail: journal@frc.komisc.ru
www.izvestia.komisc.ru

ISSN 1994-5655

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору
за соблюдением законодательства в сфере массовых
коммуникаций и охране культурного наследия.

Свид. о регистрации средств массовой информации
ПИ № ФС 77-26969 от 11 января 2007 г.

Подписной индекс в каталоге «Почта России» 52047

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий ВАК

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр
«Коми научный центр УрО РАН», 2023

Science Journal
Founded in 2010
Published 8 times a year

Established by
Federal State Budgetary
Institution of Science
Federal Research Centre
«Komi Science Centre, Ural Branch, RAS»

PROCEEDINGS

OF THE KOMI SCIENCE CENTRE
URAL BRANCH
RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

№ 4 (62)

«PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES» series

2023

Editor-in-chief – RAS acad. A.M. Askhabov

Deputy editor-in-chief – RAS corresp. member S.V. Degteva

Deputy editor-in-chief – RAS corresp. member V.N. Lazhentsev

Executive secretary – Cand. Sci. (Hist.) D.V. Milokhin

Editorial Council:

RAS acad. V.V. Alekseev, RAS acad. A.A. Baryakh, RAS acad. V.I. Berdyshev, Dr. Sci. (Med.) E.R. Bojko,
RAS corresp. member I.N. Bolotov, RAS acad. V.N. Bolshakov, Ph.D. (Econ.) K. Borissova-Marinova (Bulgaria),
Dr. Sci. (Phys.-Math.) T.M. Brechko (Poland), Cand. Sci. (Geol.-Mineral.) I.N. Burtsev, RAS acad. A.D. Gvishiani,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) N.A. Gromov, Dr. Sci. (Hist.) I.L. Zherebtsov, Dr. Sci. (Biol.) V.G. Zainullin,
RAS corresp. member V.A. Ilyin, RAS acad. S.V. Krivovichev, I.V. Kuryak, RAS acad. A.V. Kuchin,
RAS corresp. member Yu.B. Marin, RAS acad. V.P. Matveenko, Dr. Sci. (Hist.) V.I. Men'kovsky (Belarus),
RAS acad. G.A. Mesyats, RAS corresp. member A.A. Moskalev, Dr. Sci. (Econ.) L.A. Popova,
RAS corresp. member V.N. Puchkov, Dr. Sci. (Geol.-Mineral.) A.M. Pystin, RAS corresp. member I.M. Roshchevskaya,
RAS acad. M.P. Roshchevsky, Dr. Sci. (Chem.) S.A. Rubtsova, Dr. Sci. (Hist.) E.A. Savelyeva,
Dr. Sci. (Hist.) T.S. Sadykov (Kazakhstan), RAS corresp. member A.F. Titov,
Dr. Sci. (Biol.) S.N. Kharin, Cand. Sci. (Biol.) I.F. Chadin, RAS acad. V.N. Charushin,
Dr. Sci. (Tech.) Yu.Ya. Chukreev, Dr. Sci. (Biol.) E.V. Shamrikova, RAS acad. V.S. Shatsky,
Dr. Sci. (Econ.) A.G. Shelomentsev, Cand. Sci. (Econ.) A.A. Yudin

Editorial Board of the series «Physical and Mathematical Sciences»:

Dr. Sci. (Phys.-Math.) N.A. Belyaeva, Dr. Sci. (Phys.-Math.) S.G. Bobkov (USA), Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.A. Bushuev,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.P. Golubyatnikov, Dr. Sci. (Tech.) A.P. Gospodarikov,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) O.N. Granichin, Dr. Sci. (Phys.-Math.) N.A. Gromov (Executive editor),
Dr. Sci. (Phys.-Math.) A.V. Zhubr, Dr. Sci. (Phys.-Math.) Yu.A. Kurochkin (Belarus), Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.V. Mazalov,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.I. Man'ko, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.M. Nezhinskij, Dr. Sci. (Phys.-Math.) A.B. Pevnyi,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) S.M. Poleshchikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.I. Punegov,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.M. Red'kov (Belarus), Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.N. Sivkov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.F. Sokolov,
Cand. Sci. (Phys.-Math.) D.A. Timushev (Executive secretary), Dr. Sci. (Phys.-Math.) A.N. Tikhomirov,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V.V. Ulyanov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) S.M. Khryashchev, Dr. Sci. (Phys.-Math.) P.S. Shcherbakov

Editorial Office:

Office 317, 318 Komi Science Centre, Ural Branch, RAS
24, Kommunisticheskaya st., GSP-2,
Syktyvkar 167982, Komi Republic
Tel. +7 8212 244779, Fax +7 8212 242264
E-mail: journal@frc.komisc.ru
www.izvestia.komisc.ru

ISSN 1994-5655

Registered by the Russian Federal Surveillance Service
for Compliance with the Law in Mass Communications
and Cultural Heritage Protection.

The certificate of mass media registration –
ПИ № ФС 77-26969 dated 11 January, 2007

The "Russian Post" catalogue subscription index 52047

*The journal is included in the list of peer-reviewed scientific
publications of the Higher Attestation Commission
of the Russian Federation*

© Federal State Budgetary Institution
of Science Federal Research Centre
"Komi Science Centre, Ural Branch, RAS", 2023

СОДЕРЖАНИЕ

А. Карабанов Тензорные расширения уравнений Лакса	5
В.Ф. Соколов Оптимальное ℓ_1 -робастное слежение для авторегрессионного объекта с неизвестной номинальной моделью	10
В.Н. Тарасов Влияние поперечной нагрузки на устойчивость сжимаемого продольной силой стержня	18
В.Ю. Андрюкова О влиянии односторонних связей на устойчивость и колебания упругих колец	23
В.Н. Тарасов, Н.О. Смолева Контактная задача для кольца, подкрепленного упругими тонкими спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса	30
Н.А. Громов Стандартная модель в ранней Вселенной	36
И.В. Костяков, В.В. Куратов Пространства постоянной кривизны, уравнение Лиувилля и контракции алгебр Ли	49
Ю.А. Курочкин, Н.Д. Шайковская, Д.В. Шёлковый О классической и квантово-механической задаче двух материальных точек в трехмерном пространстве Лобачевского	57
О.А. Семенюк, А.В. Ивашкевич, А.В. Бурый, В.А. Плетюхов, В.М. Редьков Безмассовое поле Штюкельберга, точные решения в декартовых координатах и калибровочные степени свободы	63
О.А. Семенюк, В.А. Плетюхов, А.В. Бурый, А.В. Ивашкевич, В.М. Редьков Безмассовая частица Штюкельберга, решения с цилиндрической симметрией	69
Е.М. Овсиюк, А.П. Сафронов, А.Д. Коральков, Я.А. Войнова Фермион с тремя массовыми параметрами во внешнем магнитном поле	77
С.И. Колосов, В.И. Пунегов Динамическая теория дифракции рентгеновских лучей на основе двумерных рекуррентных соотношений	88
А.В. Карпов Брэгговские отражения многослойной дифракционной решетки	91
П.А. Макаров, В.А. Устюгов, В.И. Щеглов Особенности численного решения уравнений Максвелла методом FDTD в однородной и неоднородной формулировках	96
Юбилей Отдел математики Коми НЦ УрО РАН (к 30-летию образования)	108

CONTENTS

A. Karabanov Tensor extensions of Lax equations	5
V.F. Sokolov Optimal ℓ_1 -robust tracking for autoregressive plant with unknown nominal model	10
V.N. Tarasov Influence of a transversal load on the stability of a rod compressed by a longitudinal force	18
VYu. Andryukova On the influence of unilateral bonds on the stability and oscillations of elastic rings	23
V.N. Tarasov, N.O. Smoleva Contact problem for a ring reinforced with elastic thin spokes, which is under the action of a force applied to the wheel axle	30
N.A. Gromov Standard Model in the early Universe	36
I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov Spaces of constant curvatures, the Liouville equation and contractions of Lie algebras	49
Yu.A. Kurochkin, N.D. Shaikovskaya, Dz.V. Shoukavy On classical and quantum mechanical problem of two material points in three-dimensional Lobachevsky space	57
O.A. Semenyuk, A.V. Ivashkevich, A.V. Bury, V.A. Pletyukhov, V.M. Red'kov Massless Stueckelberg field, exact solutions in Cartesian coordinates and gauge degrees of freedom	63
O.A. Semenyuk, V.A. Pletyukhov, A.V. Bury, A.V. Ivashkevich, V.M. Red'kov Massless Stueckelberg particle, solutions with cylindrical symmetry	69
E.M. Ovsyuk, A.P. Safronov, A.D. Koralkov, Ya.A. Voynova Fermion with three mass parameters in the uniform magnetic field	77
S.I. Kolosov, V.I. Punegov Dynamical theory of X-ray diffraction in crystals based on two-dimensional recurrent relations	88
A.V. Karpov Bragg's reflections of a multilayer grating	91
P.A. Makarov, V.A. Ustyugov, V.I. Shcheglov Numerical solution features of Maxwell equations by FDTD method in the homogeneous and non-homogeneous formulations of the problems	96
Anniversaries The Department of Mathematics of the Komi SC UB RAS (to the 30th anniversary of foundation)	108

Tensor extensions of Lax equations

A. Karabanov

Cryogenic Ltd,
London, W3 7QE, UK
karabanov@hotmail.co.uk

Abstract

The Lax equations $dL/dt = [M, L]$ play an important role in the integrability theory of nonlinear evolution equations and quantum dynamics. In this work, tensor extensions of the Lax equations are suggested with $M : V \rightarrow V$ and $L : T^k(V) \rightarrow V, k = 1, 2, \dots$, on a complex vector space V . These extensions belong to the generalised class of Lax equations (introduced earlier by Bordemann) $dL/dt = \rho_k(M)L$ where ρ_k is a representation of a Lie algebra. The case $k = 1, \rho_1 = ad$ corresponds to the usual Lax equations. The extended Lax pairs are studied from the point of view of isomorphic deformations of multilinear structures, conservation laws, exterior algebras and cochain symmetries.

Keywords:

Lax equations, tensor extensions, multilinear algebra, symmetries

Introduction

The idea of symmetry and conservation laws is fundamental in natural sciences. Mathematically, it is reduced to the study of algebraic properties that are invariant under groups of transformations. From this point of view, linear objects are much simpler and more symmetric than nonlinear ones. For instance, nonlinear dynamical systems generally do not admit conservation laws (integrals of the motion) and manifolds of their solutions are much harder to describe than those of linear dynamical systems that always are linear spaces. It is very tempting then to reduce nonlinear dynamical problems to linear problems.

The most remarkable success in this direction is the inverse scattering method of integration of nonlinear evolution equations. The method is based on including the nonlinear evolution into a linear operator L that satisfies a linear evolution equation $dL/dt = [M, L]$ such that the eigenvectors of L satisfy the linear equation with an operator M , while the eigenvalues of L do not evolve. The latter property enables a reconstruction of the nonlinear evolution using a spatial scattering theory for the operator L . For ordinary differential equations, the isospectrality of L is used to find conservation laws of the nonlinear dynamics. The pairs (M, L) are called *Lax pairs*, the equations for the operator L are called *Lax equations* [1-7].

Тензорные расширения уравнений Лакса

А. Карабанов

ООО «Криогеника»,
г. Лондон, W3 7QE, Великобритания
karabanov@hotmail.co.uk

Аннотация

Уравнения Лакса $dL/dt = [M, L]$ играют важную роль в теории интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений и квантовой динамике. В данной работе предлагаются тензорные расширения уравнений Лакса с $M : V \rightarrow V$ и $L : T^k(V) \rightarrow V, k = 1, 2, \dots$ на комплексном векторном пространстве V . Эти расширения относятся к обобщенному классу уравнений Лакса с введенным ранее Бордемманом $dL/dt = \rho_k(M)L$, где ρ_k — представление алгебры Ли. Случай $k = 1, \rho_1 = ad$ соответствует обычным уравнениям Лакса. Расширенные пары Лакса изучаются с точки зрения изоморфных деформаций полилинейных структур, законов сохранения, внешних алгебр и коцепных симметрий.

Ключевые слова:

уравнения Лакса, тензорные расширения, полилинейная алгебра, симметрии

In many cases, useful nonlinear relations exist between solutions to linear dynamical systems. These relations shed extra light to solutions of the relevant nonlinear problems. The simplest nonlinear extension of a linear operator is a multilinear operator. In this work, we realise this idea in replacing the Lax operator L by a multilinear operator that maps solutions to the linear problem with the operator M again to solutions to the same problem. We call the resulting equations *tensor extensions* of the Lax equations.

We show that the extensions thus introduced have a rich algebraic meaning, closely related to the theory of Lie algebras and more general multilinear algebraic structures. We reveal that the extensions we suggest are partial cases of the generalised Lax equations introduced by Bordemann and related to representations of Lie algebras other than the adjoint representation, on which the usual Lax equations are based [8]. Close connections between the solutions to the extended Lax equations and Chevalley-Eilenberg cochain complexes [9, 10] are pointed out. Also, the basic construction presented in this work is another language for description of isomorphic deformations of multilinear algebraic structures on vector spaces with respect to dynamical groups of transformations. In this sense, this work is a continuation of the previous work by the author [11].

1. Basic construction

Let V be a complex vector space and let V_k denote the vector space of k -linear operators $L : V^k \rightarrow V$. For any $k = 1, 2, \dots$, any linear evolution equation on V

$$dv/dt = Mv, \quad v \in V, \quad M(t) \in V_1 \quad (1)$$

generates the linear evolution equation on V_k

$$dL/dt = \rho_k(M)L, \quad L \in V_k, \quad \rho_k(M(t)) \in \text{End}(V_k) \quad (2)$$

such that the solution operator L is a k -symmetry of Eq. (1), i.e., maps k -tuples

$$(v_1(t), \dots, v_k(t))$$

of solutions to Eq. (1) again to solutions to Eq. (1). By multiplication with respect to t , we can verify that

$$\begin{aligned} \rho_k(M)L(v_1, \dots, v_k) &= \\ &= ML(v_1, \dots, v_k) - L(Mv_1, v_2, \dots, v_k) - \\ &- L(v_1, Mv_2, \dots, v_k) - \dots - L(v_1, v_2, \dots, Mv_k). \end{aligned} \quad (3)$$

It is evident that

$$\rho_1(M)L = [M, L], \quad M, L \in V_1,$$

where $[,]$ denotes the commutator, so for $k = 1$ Eq. (2) is the usual Lax equation. Using the canonical injection

$$V^k \rightarrow T^k(V)$$

of the Cartesian product V^k into the k -grade of the tensor algebra $T(V)$, due to the universal property of $T(V)$, any solution $L \in V_k$ to Eq. (2) can be uniquely identified with a linear operator $\bar{L} : T^k(V) \rightarrow V$. We call the series of Eq. (2), $k = 2, 3, \dots$, *tensor extensions* of the Lax equation for $k = 1$.

2. Isomorphic deformations and conservation laws

Eq. (3) enables the solutions to Eqs. (2) for any k and any initial operator $L(0) \in V_k$ to be written in the form

$$L(t)(v_1, \dots, v_k) = \Phi(t)L(0)(\Phi^{-1}(t)v_1, \dots, \Phi^{-1}(t)v_k) \quad (4)$$

where $\Phi(t) \in V_1$ is the operator that maps any vector $v \in V$ to the solution $\bar{v}(t) = \Phi(t)v$ to Eq. (1) with the initial value $\bar{v}(0) = v$,

$$d\Phi/dt = M\Phi, \quad \Phi(0) = 1 \in V_1. \quad (5)$$

Due to Eqs. (4), (5), solutions $L(t)$ of the extended Lax equations (2) are k -multiplicative algebraic structures on V that are isomorphic to their initial values $L(0)$ under the evolution of Eq. (1). Eqs. (2) describe then *isomorphic deformations* of k -multiplicative algebraic structures on V . In fact, Eq. (4) is equivalent to

$$L(t)(\Phi(t)v_1, \dots, \Phi(t)v_k) = \Phi(t)L(0)(v_1, \dots, v_k). \quad (6)$$

For finite values of time, the fundamental operator $\Phi(t)$ of Eq. (1) is an isomorphism between $L(0)$ and $L(t)$. By the action (6), the group generated by the operators $\Phi(t)$

$$G = \text{gen}\{\Phi(t), t \in R\} \subset GL(V) \quad (7)$$

maps any structure $L(0)$ to structures isomorphic to $L(0)$.

Stationary solutions $L(t) = L(0)$ to Eqs. (2) that do not explicitly depend on time describe k -multiplicative structures that are automorphic with respect to the operators $\Phi(t)$ for all values of t ,

$$L(0)(\Phi(t)v_1, \dots, \Phi(t)v_k) = \Phi(t)L(0)(v_1, \dots, v_k).$$

The group G of Eq. (7) is then a subgroup of the automorphisms group of $L(0)$,

$$G \subset \text{Aut}(L(0)).$$

For $k > 1$, evolutions under Eq. (1) on the vector space V generate symmetries of the stationary solutions to Eq. (2) as multiplicative k -linear algebraic structures on V . On the other hand, by definition, solutions to Eq. (2) are k -symmetries of Eq. (1) as they map k -tuples of solutions to Eq. (1) again to solutions to Eq. (1). We can say that Eqs. (1), (2) describe mutual symmetries of the extended Lax pair (M, L) .

The operator $\rho_k(M) : V_k \rightarrow V_k$ as a linear function of M defined by Eq. (3) has the property

$$[\rho_k(M), \rho_k(N)] = \rho_k([M, N]) \quad \forall M, N \in V_1.$$

Hence, the linear map

$$\rho_k : V_1 \rightarrow \text{End}(V_k)$$

is a representation of the general Lie algebra $V_1 = \mathfrak{gl}(V)$ on the vector space V_k , i.e., a Lie algebra homomorphism

$$\rho_k : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V_k). \quad (8)$$

Thus, each Eq. (2) is a partial case of the generalised Lax equation suggested by Bordemann [8]. For the usual Lax equation $k = 1$, we have $\rho_1 = ad$ is the adjoint representation.

By exponentiation, the representation ρ_k of the Lie algebra $\mathfrak{gl}(V)$ generates the linear action (representation) $\bar{\rho}_k$ of the general Lie group $GL(V)$ on the same space V_k . Then any scalar function $f : V_k \rightarrow \mathbb{C}$ invariant under this action,

$$f(\bar{\rho}_k(m)L) = f(L), \quad \forall m \in GL(V), L \in V_k, \quad (9)$$

is a conservation law for Eq. (2), i.e., the values $f(L(t))$ are time-independent and do not change along the solutions $L(t)$. It is directly seen by differentiation of Eq. (9) by m at the identity element e of the group $GL(V)$ and the fact that M belongs to the tangent space $T_e GL(V)$. For $k = 1$ and a finite-dimensional vector space V , we have

$$\rho_1 = ad, \quad \bar{\rho}_1(m)L = mLm^{-1}$$

and the trace polynomial functions

$$f_n(L) = \text{Tr}(L^n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

are conservation laws for the usual Lax equation.

In fact, functions f satisfying Eq. (9) are conservation laws for Eq. (2) with any operator M . For $k > 1$, the explicit description and even existence of such functions is a nontrivial problem even if V is a finite-dimensional vector space. The "isospectrality" of Eq. (2) is closely related to symmetries of the operator M and manifests itself in the following observations.

Let V have a finite dimension N and a basis v_1, \dots, v_N . Any initial operator $L(0) \in V_k$ is defined by its values on the basic vectors of the tensor k -grade $T^k(V)$,

$$L(0)(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = \sum_{s=1}^N \lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)} v_s, \quad (10)$$

where the indices i_1, \dots, i_k independently take all values from the set $\{1, \dots, N\}$ and $\lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)}$ are complex coefficients, the "structure constants" of the multiplicative algebraic structure $L(0)$. The solution $L(t)$ to Eq. (2) with the initial value $L(0)$ has the property

$$L(t)(\bar{v}_{i_1}(t), \dots, \bar{v}_{i_k}(t)) = \sum_{s=1}^N \lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)} \bar{v}_s(t), \quad (11)$$

where $\bar{v}_j(t)$ are the solutions to Eq. (1) with the initial values v_j and the coefficients $\lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)}$ remain time-independent. This directly follows from Eq. (6) for any k . This does not mean (even for $k = 1$) that the structure constants of the initial operator $L(0)$ are conservation laws for the solution $L(t)$. In fact, according to Eq. (4),

$$\begin{aligned} L(t)(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) &= \sum_{s=1}^N \bar{\lambda}_{i_1 \dots i_k}^{(s)}(t) v_s = \\ &= \Phi(t)L(0)(\Phi^{-1}(t)v_{i_1}, \dots, \Phi^{-1}(t)v_{i_k}). \end{aligned}$$

The expansion of the initial value by Eq. (10) generates the evolution

$$\lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)} \rightarrow \bar{\lambda}_{i_1 \dots i_k}^{(s)}(t) \quad (12)$$

of the structure constants of $L(0)$ to those of $L(t)$. This evolution is another characteristic of the isomorphism between $L(0)$ and $L(t)$.

The special case where Eq. (2) is explicitly solved is where the operator M is time-independent and the basis v_1, \dots, v_N is composed of eigenvectors of M with eigenvalues m_1, \dots, m_N . In this case, $\Phi(t) = e^{tM}$ and the group G defined in Eq. (7) is a 1-parameter subgroup of $GL(V)$: $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$. According to Eq. (4), the evolution (12) takes the simple form

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{i_1 \dots i_k}^{(s)}(t) &= e^{t\phi_{i_1 \dots i_k}^{(s)}} \lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)}, \\ \phi_{i_1 \dots i_k}^{(s)} &= m_s - \sum_{p=1}^k m_{i_p}. \end{aligned} \quad (13)$$

It follows from Eq. (13) that the structural constants of the initial operator $L(0)$ that satisfy the condition

$$\phi_{i_1 \dots i_k}^{(s)} \lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)} = 0$$

do not change under the evolution $L(t)$, i.e., are conservation laws of Eq. (2). In particular, the zero structural constants are always conserved. A nonzero structural constant $\lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)}$ is conserved if the "resonance" $\phi_{i_1 \dots i_k}^{(s)} = 0$ takes place between the eigenvalues m_1, \dots, m_N of the operator M .

The stationary solutions $L(0)$ to Eq. (2) that are automorphic with respect to the group G are defined then by the condition

$$\phi_{i_1 \dots i_k}^{(s)} \lambda_{i_1 \dots i_k}^{(s)} = 0 \quad \forall s, i_1, \dots, i_k.$$

It follows, for instance, that if all the eigenvalues are "non-resonant"

$$\phi_{i_1 \dots i_k}^{(s)} \neq 0 \quad \forall s, i_1, \dots, i_k$$

then all stationary solutions to Eq. (2) are trivial $L(0) = 0$.

Note that the case $k = 2$ with skew-symmetric bilinear operators L corresponds to Lie algebraic structures if additionally the Jacobi identity is satisfied. The finite limit transitions

$$\bar{\lambda}_{i_1 i_2}^{(s)}(t) \rightarrow \tilde{\lambda}_{i_1 i_2}^{(s)}, \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

are closely related to Inönü-Wigner contractions and lead to stationary solutions to Eq. (2), automorphic with respect to the "dynamical" group G . This situation has been considered in more detail in the previous work by the author [11].

For $k = 1$ (regardless of whether M is time-independent or not), eigenvectors of the operator $L(t) \in V_1$ that evolves under the usual Lax equation are solutions to Eq. (1) and the relevant eigenvalues are time-independent (being eigenvalues of the initial operator $L(0)$). This underlies the inverse scattering method of integration of nonlinear evolution equations [1-7].

3. Exterior algebras and cochain symmetries

It can be verified that, for any $k = 1, 2, \dots$, if $L' \in V_1$ and $L \in V_k$ are solutions to Eq. (2) then the operator composition $L'L \in V_k$ is also a solution to Eq. (2). In this sense, the left multiplication by the solutions to the usual Lax equation is a symmetry of the extended Lax equations (2).

For any M and any k , the operator $\rho_k(M) : V_k \rightarrow V_k$ is invariant under the action of the symmetric group S_k on V_k . For any permutation $\sigma \in S_k$ of the indices $1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \rho_k(M)\sigma(L) &= \sigma(\rho_k(M)L), \\ \sigma(L)(v_1, \dots, v_k) &\equiv L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \end{aligned} \quad (14)$$

Thus, S_k is a symmetry group for Eq. (2). For any solution $L(t)$ and any permutation $\sigma \in S_k$, the "braided" operator $\sigma(L(t))$ is also a solution.

This symmetry and the idea of considering only k -tuples of linearly independent solutions to Eq. (1) leads to the restriction from the infinite-dimensional tensor algebra $T(V)$ to the finite-dimensional exterior (Grassmann) algebra $\wedge(V)$ that is a quotient of the tensor algebra with respect to the left-right ideal generated by the tensors of the form $v \otimes v$. In terms of Eq. (2), it means that only alternating k -linear operators L are to be considered, i.e., those with

$$\sigma(L) = \text{sgn}(\sigma)L, \quad \sigma \in S_k.$$

The vector spaces V_k will denote now the vector spaces of alternating operators $L : V^k \rightarrow V$. Each such operator can be identified with a linear operator from the k -grade of the exterior algebra, $\bar{L} : \bigwedge^k(V) \rightarrow V$. We assume that the vector space V is finite-dimensional, $\dim V = N$.

The construction related to the representation (8) can be extended to a representation of any Lie algebra. In fact, let \mathfrak{a} be a Lie algebra and let

$$\rho : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \quad (15)$$

be its representation on V . Then the composition

$$\pi_k = \rho_k \rho : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_k)$$

is a representation of \mathfrak{a} on V_k . The extended Lax equations (2) are written then as

$$dL/dt = \pi_k(a)L, \quad a \in \mathfrak{a}.$$

Let now the underlying vector space of the Lie algebra \mathfrak{a} be V and the representation ρ in Eq. (15) be the adjoint representation. This enables the Chevalley-Eilenberg cochain complex to be built,

$$V \xrightarrow{\delta} V_1 \xrightarrow{\delta} V_2 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} V_N$$

where $\delta : V_{k-1} \rightarrow V_k$, $\delta^2 = 0$, is the exterior derivative

$$\begin{aligned} (\delta L)(v_1, \dots, v_k) &= \\ &= \sum_{s=1}^k (-1)^{s+1} \rho(v_s) L(v_1, \dots, \hat{v}_s, \dots, v_k) + \\ &+ \sum_{s < s'} (-1)^{s+s'} L([v_s, v_{s'}], v_1, \dots, \hat{v}_s, \dots, \hat{v}_{s'}, \dots, v_k), \\ k > 1, \quad (\delta L)v &= \rho(v)L, \quad L \in V. \end{aligned}$$

Here $[,]$ is the Lie bracket in \mathfrak{a} and the hat means that the relevant variable should be omitted [9,10]. The solutions $L \in V_k$ to Eq. (2) are then naturally identified with (time-dependent) k -cochains of this complex.

It can be verified that the exterior derivative δ is a symmetry of the set of the extended Lax equations (2). In fact, if $L \in V_k$ is a solution in the k -grade then $\delta L \in V_{k+1}$ is a solution in the next $(k+1)$ -grade. We call this symmetry *cochain symmetry*. In the case of the exterior algebra, according to Eqs. (4), (5), for $k = 1, N$ the extended Lax equations (2) are solved explicitly as

$$\begin{aligned} L(t) &= \Phi(t)L(0)\Phi^{-1}(t), \quad k = 1, \\ L(t) &= \frac{\Phi(t)}{\det \Phi(t)} L(0), \quad k = N. \end{aligned}$$

4. Conclusion

It has been demonstrated that the classical Lax equations, important in the integrability theory and quantum dynamics, can be extended in a manner closely related to symmetries of multilinear algebraic structures and representations of Lie algebras other than the adjoint.

References

1. Lax, P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P.D. Lax // Comm. Pure Appl. Math. – 1968. – Vol. 21. – P. 467.
2. Gardner, C.S. Method for solving the Korteweg-deVries equation / C.S. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 19. P. 1095.
3. Zakharov, V.E. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V.E. Zakharov, A.B. Shabat // Sov. Phys. JETP. – 1972. – Vol. 34. – P. 62.
4. Ablowitz, M.J. Solitons and inverse scattering transform / M.J. Ablowitz, H. Segur. – Philadelphia: SIAM, 1981 – P. 435.
5. Leznov, A.N. Group-theoretical methods for integration of nonlinear dynamical systems / A.N. Leznov, M.V. Saveliev. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992. – 292 p.
6. Toda, M. Theory of nonlinear lattices / M. Toda. – Berlin: Springer, 1989.
7. Bobenko, A.I. The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions / A.I. Bobenko, A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky // Commun. Math. Phys. – 1989. – Vol. 122, № 2. – P. 321–354.
8. Bordemann, M. Generalized Lax pairs, the modified classical Yang-Baxter equation, and affine geometry of Lie groups / M. Bordemann // Commun. Math. Phys. – 1990. – Vol. 135. – P. 201–216.
9. Chevalley, C. Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras / C. Chevalley, S. Eilenberg // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – Vol. 63. – P. 85–124.
10. Knapp, A.W. A course in homological algebra / A.W. Knapp. – Berlin, New York: Springer-Verlag, 1997.
11. Karabanov, A. Automorphic algebras of dynamical systems and generalised İnönü-Wigner contractions / A. Karabanov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2022. – № 5 (57). – P. 5–14.

Литература

1. Lax, P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P.D. Lax // Comm. Pure Appl. Math. – 1968. – Vol. 21. – P. 467.
2. Gardner, C.S. Method for solving the Korteweg-deVries equation / C.S. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 19. P. 1095.
3. Захаров, В.Е. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной самомодуляции волн в нелинейных средах / В.Е. Захаров, А.Б. Шабат // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 61, № 1. – С. 118.
4. Ablowitz, M.J. Solitons and inverse scattering transform / M.J. Ablowitz, H. Segur. – Philadelphia: SIAM, 1981 – P. 435.
5. Лезнов, А.Н. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем / А.Н. Лезнов, М.В. Са-

- вельев. – Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 279 с.
6. Toda, M. Theory of nonlinear lattices / M. Toda. – Berlin: Springer, 1989.
 7. Bobenko, A.I. The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions / A.I. Bobenko, A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky // Commun. Math. Phys. – 1989. – Vol. 122, № 2. – P. 321–354.
 8. Bordemann, M. Generalized Lax pairs, the modified classical Yang-Baxter equation, and affine geometry of Lie groups / M. Bordemann // Commun. Math. Phys. – 1990. – Vol. 135. – P. 201–216.
 9. Chevalley, C. Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras / C. Chevalley, S. Eilenberg // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – Vol. 63. – P. 85–124.
 10. Knapp, A.W. A course in homological algebra / A.W. Knapp. – Berlin, New York: Springer-Verlag, 1997.
 11. Karabanov, A. Automorphic algebras of dynamical systems and generalised Inönü-Wigner contractions / A. Karabanov // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 5–14.

Для цитирования:

Карабанов, А. Тензорные расширения уравнений Лакса / А. Карабанов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 5–9.

For citation:

Karabanov, A. Tensor extensions of Lax equations / A. Karabanov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 5–9.

Дата поступления рукописи: 24.07.2023

Received: 24.07.2023

Оптимальное ℓ_1 -робастное слежение для авторегрессионного объекта с неизвестной номинальной моделью

В.Ф. Соколов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
sokolov@ipm.komisc.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача оптимального робастного слежения для дискретного объекта с неизвестными параметрами авторегрессионной номинальной модели и неизвестным смещением внешнего ограниченного возмущения. Верхние границы несмещенного внешнего возмущения и норм операторных возмущений по выходу и управлению предполагаются известными. Задача оптимального слежения заключается в минимизации наилучшей гарантированной асимптотической верхней границы ошибки отслеживания заданного ограниченного сигнала. Решение задачи основано на оптимальном множественном оценивании неизвестных и неидентифицируемых параметров и использовании показателя качества задачи слежения как идентификационного критерия. Численная реализация оптимального множественного оценивания в режиме онлайн оказывается возможной благодаря тому, что показатель качества слежения в рассматриваемой задаче является дробно-линейной функцией оцениваемых параметров.

Ключевые слова:

оптимальное управление, робастное управление, адаптивное управление, неопределенность, ограниченное возмущение, множественное оценивание

Введение

Предметом теории адаптивного управления, зародившейся в 1960-х гг., являются задачи управления системами с неизвестными параметрами. Один из двух известных подходов к синтезу адаптивного управления заключается в прямой настройке по данным измерений параметров регулятора и называется прямым адаптивным управлением. Другой подход базируется на онлайн оценивании неизвестных параметров объекта управления с последующей настройкой регулятора. Этот подход называют идентификационным или непрямым адаптивным управлением. Алгоритмами оценивания в рамках идентификационного подхода служат различные модификации градиентного (процессионного) алгоритма минимизации невязки в уравнении

Optimal ℓ_1 -robust tracking for autoregressive plant with unknown nominal model

V.F. Sokolov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktывkar
sokolov@ipm.komisc.ru

Abstract

This paper addresses the problem of adaptive optimal robust tracking for a discrete-time plant with unknown parameters of autoregressive nominal model and unknown bias of bounded external disturbance. Upper bounds of unbiased external disturbance and gains of uncertainties in output and control are assumed to be known. The optimal tracking problem is to minimize the guaranteed worst-case steady-state upper bound of the tracking error for a given bounded reference signal. Solution of the problem is based on optimal set-membership estimation of unknown non-identifiable parameters and treating the control criterion as the identification criterion. Optimal on-line set-membership estimation becomes computationally tractable due to a linear-fractional representation of the control criterion.

Keywords:

optimal control, robust control, adaptive control, uncertainty, bounded disturbance, set-membership estimation

модели управляемого объекта или модификации метода наименьших квадратов. В середине 1980-х гг. в знаменитой статье [1] было показано, что полученные к тому времени алгоритмы адаптивной стабилизации не гарантируют устойчивости даже при малых внешних или операторных возмущениях (немоделируемой динамике). Это стимулировало, с одной стороны, разработку модификаций алгоритмов оценивания для обеспечения устойчивости адаптивных систем при наличии возмущений и, с другой стороны, развитие теории робастного управления, посвященной системам с операторными возмущениями и ставшей главным направлением теории автоматического управления с конца 1970-х гг. на последующие два десятилетия [2]. Одна-

ко последующие результаты в теории робастного адаптивного управления базировались в основном на аппарате функций Ляпунова, ограничивались задачами обеспечения устойчивости и не коррелировали с результатами теории робастного управления, в основе которой лежала теорема о малом коэффициенте усиления (small gain theorem).

Модель внешних ограниченных возмущений породила направление в теории идентификации систем, основанное на использовании множественных оценок неизвестных параметров. Почти все многочисленные публикации этого направления относятся к системам, аффинным относительно неизвестных параметров, и предполагают известными верхние границы возмущений. Множества не сфальсифицированных данными измерений неизвестных параметров таких систем описываются ограниченными многогранниками. Поскольку число линейных неравенств в описании этих многогранников может неограниченно возрастать с ростом числа измерений, основные усилия в этом подходе направлены на получение верхних по включению множественных оценок, имеющих описание ограниченной сложности (параллелограммы, зоноты, многогранники с заданными направлениями граней, эллипсоиды и т.п.). Однако до настоящего времени нет приложений этих исследований к адаптивному управлению со строгим математическим обоснованием.

В начале 1990-х гг. были получены фундаментальные результаты по устойчивости и робастному качеству систем с неопределенностью и ограниченным внешним возмущением [3]. Позднее были получены явные представления для асимптотических показателей качества таких систем, в том числе для систем слежения [4–7]. Теория робастного управления для таких систем получила название ℓ_1 -теории, поскольку индуцированные нормы линейных стационарных операторов на пространстве ограниченных последовательностей ℓ_∞ выражаются через ℓ_1 -нормы их импульсных характеристик. Полученные результаты позволили сформулировать общий метод синтеза адаптивного оптимального робастного управления, основанный на идеях множественного оценивания и использования показателя качества задачи управления как идентификационного критерия [8]. Трудность применения метода заключается в сложности онлайн минимизации невыпуклого в общем случае показателя качества на текущих оценках множеств не сфальсифицированных измерениями неизвестных параметров. Однако такая минимизация оказывается возможной для специальных систем.

В статье [9] решалась задача адаптивной оптимальной стабилизации авторегрессионного объекта с неизвестными параметрами номинального объекта, внешнего возмущения и неопределенностей по выходу и управлению при специальном дополнительном предположении о непреднамеренности неопределенности по управлению. Более сложная по сравнению со стабилизацией задача оптимального слежения решалась в работе [10] для объекта с дробно-рациональной передаточной функцией без неопределенности по управлению. Для указанных объектов показатель качества задачи управления является

дробно-линейной функцией неизвестных параметров, что делает возможной его онлайн минимизацию. В настоящей статье более сложная задача адаптивного слежения рассматривается для авторегрессионного объекта с неизвестными параметрами номинального объекта и неизвестным смещением внешнего возмущения. Для обеспечения дробно-рационального вида показателя качества верхние границы внешнего несмещенного возмущения и коэффициенты усиления неопределенностей предполагаются известными. Известно, что задача минимизации дробно-рациональных функций при линейных ограничениях сводится к линейному программированию [11], что позволяет применять современное программное обеспечение для синтеза адаптивного оптимального управления для рассматриваемого объекта управления.

Используемые обозначения:

$|\varphi|$ — евклидова норма вектора $\varphi \in \mathbb{R}^n$;
 ℓ_e — линейное пространство вещественных последовательностей $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$,
 $x_s^t = (x_s, x_{s+1}, \dots, x_t)$ для $x \in \ell_e$;
 $|x_s^t| = \max_{s \leq k \leq t} |x_k|$;
 ℓ_∞ — нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup_t |x_t|$;
 $\|x\|_{ss} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_t|$;
 ℓ_1 — нормированное пространство абсолютно суммируемых последовательностей с нормой $\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$;
 $\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k| = \|g\|_1$ — индуцированная норма устойчивой линейной стационарной системы $G: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ с передаточной функцией $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления с дискретным временем, описываемый уравнением

$$a(q^{-1})y_t = b_1 u_{t-1} + v_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где $y_t \in \mathbb{R}$ — выход объекта в момент времени t , $u_t \in \mathbb{R}$ — управление, $v_t \in \mathbb{R}$ — суммарное возмущение в объекте,

$$a(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

и q^{-1} — оператор сдвига назад ($q^{-1}y_t = y_{t-1}$) на линейном пространстве ℓ_e . Начальные значения $y_{1-n}^0 = (y_{1-n}, \dots, y_0)$ произвольные, $y_k = 0$ при $k < 1 - n$ и $u_k = 0$ при $k < 0$.

Априорная информация об объекте управления состоит из четырех априорных предположений АП1–АП4.

АП1. Вектор коэффициентов

$$\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1)^T \quad (2)$$

номинальной модели (т.е. модели без суммарного возмущения v) принадлежит известному ограниченному многограннику Ξ ,

$$\xi \in \Xi = \{ \hat{\xi} \mid P \hat{\xi} \geq p \} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (3)$$

где $P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}$, $p \in \mathbb{R}^l$ и $b_1 \neq 0$ для любого $\xi \in \Xi$.

АП2. Суммарное возмущение v имеет вид

$$v_t = c^w + \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t, \quad (4)$$

где $w \in \ell_\infty$ — неизвестная последовательность,

$$\|w\|_\infty \leq 1, \quad (5)$$

$\delta^w \geq 0$ — верхняя граница несмещенного внешнего возмущения $\delta^w w$, c^w — смещение ограниченного внешнего возмущения $c^w + \delta^w w$. Операторы $\Delta^1 : \ell_e \rightarrow \ell_e$ и $\Delta^2 : \ell_e \rightarrow \ell_e$ удовлетворяют при всех t ограничениям

$$|\Delta^1(y)_t| \leq |y_{t-\mu}^{t-1}|, \quad |\Delta^2(u)_t| \leq |u_{t-\mu}^{t-1}|. \quad (6)$$

Параметры $\delta^y \geq 0$ и $\delta^u \geq 0$ в (4) — верхние границы индуцированных норм (коэффициентов усиления) операторных возмущений (неопределенностей) Δ^1 и Δ^2 по выходу и управлению соответственно. Параметр μ в неравенствах (6) характеризует память неопределенностей. Она может быть выбрана конструктором сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для качества синтезируемого ниже адаптивного управления.

АПЗ. Набор верхних границ

$$\delta = (\delta^w, \delta^y, \delta^u) \quad (7)$$

предполагается известным, вектор параметров

$$\theta = (\xi^T, c^w)^T \in \mathbb{R}^{n+2} \quad (8)$$

— неизвестным, и $|c^w| \leq C^w$ с известной верхней границей $C^w > 0$.

Предположение об известной верхней границе C^w в АПЗ используется только для упрощения доказательств и не ограничительно, поскольку C^w может быть выбрано сколь угодно большим.

В разделе 2 будет сформулировано дополнительное необходимое априорное предположение о робастной стабилизируемости объекта (1).

Априорное предположение АП2 сформулировано в терминах теории робастного управления в ℓ_1 постановке для удобства последующих ссылок. Согласно этой теории, предположение АП2 для классов линейных нестационарных или нелинейных операторов Δ^1 и Δ^2 может быть представлено в следующем компактном виде:

$$|v_t - c^w| \leq \delta^w + \delta^y p_t^y + \delta^u p_t^u, \quad (9)$$

где

$$p_t^y = |y_{t-\mu}^{t-1}|, \quad p_t^u = |u_{t-\mu}^{t-1}|. \quad (10)$$

Содержательная постановка рассматриваемой в статье задачи заключается в построении причинной обратной связи вида $u_t = U_t(y_{1-n}^t, u_0^{t-1})$ (но с конечной памятью), гарантирующей как можно меньшую верхнюю границу для асимптотического показателя качества

$$J_\mu(\theta, \delta) = \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - r_t|, \quad (11)$$

где r — заданный командный сигнал, т.е. желаемая последовательность выходов объекта управления (1), и \sup берется на множестве возмущений v , удовлетворяющих предположению АП2. То есть задача заключается в минимизации гарантированной асимптотической верхней границы для модуля ошибки слежения

$$e_t = y_t - r_t \quad (12)$$

в классе возмущений, удовлетворяющих неравенствам (9).

Главная сложность сформулированной оптимальной задачи заключается в неидентифицируемости неизвестного вектора параметров θ .

Строгая формулировка задачи приведена в конце раздела 2 после получения представления для неконсервативной верхней оценки показателя качества J_μ .

2. Оптимальная система с известной номинальной моделью

Для объекта с известным вектором ξ параметров номинальной модели и при известном смещении c^w регулятор

$$u_t = \frac{1}{b_1} [(a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + r_{t+1} - c^w] \quad (13)$$

гарантирует при всех t равенства

$$\begin{aligned} y_{t+1} - r_{t+1} &= v_{t+1} - c^w = \\ &= \delta^w w_{t+1} + \delta^y \Delta^1(y)_{t+1} + \delta^u \Delta^2(u)_{t+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из непредсказуемости и произвольности значений правой части (14) в момент вычисления управления u_t следует, что регулятор (13) является оптимальным для показателя качества (11). Введем обозначение для передаточной функции от y к u регулятора (13):

$$G^\xi(\lambda) = \frac{a(\lambda) - 1}{b_1 \lambda} = \frac{1}{b_1} \sum_{k=1}^n a_k \lambda^{k-1},$$

благодаря чему регулятор (13) принимает вид

$$u_t = G^\xi(q^{-1})y_t + r_{t+1}/b_1 - c^w/b_1, \quad (15)$$

и

$$\|G^\xi\| = \frac{1}{|b_1|} \sum_{k=1}^n |a_k|. \quad (16)$$

Определение 1. Замкнутая система (1), (13) называется робастно устойчивой в классе возмущений (4), если значение показателя качества (11) конечно.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $|r|$ равномерно часто попадает в окрестности верхнего предела $\|r\|_{ss}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T > 0$ и возрастающая последовательность (t_1, t_2, \dots) такие, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad 0 < t_{j+1} - t_j \leq T \wedge |r_{t_{j+1}}| \geq \|r\|_{ss} - \varepsilon.$$

Качество оптимальной системы (1), (13) представлено в теореме 1.

Теорема 1. Для замкнутой системы (1), (13) справедливы следующие утверждения.

1. Система робастно устойчива при $\mu = +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\delta^y + \delta^u \|G^\xi\| < 1. \quad (17)$$

Для системы с нулевыми начальными данными y_{1-n}^0

$$J_{+\infty}(\theta, \delta) = \frac{\delta^w + \delta^y \|r\|_{ss} + \frac{\delta^u}{|b_1|} (|c^w| + \|r\|_{ss})}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|}. \quad (18)$$

2. Для системы с любыми начальными данными y_{1-n}^0

$$J_\mu(\theta, \delta) \leq J_{+\infty}(\theta, \delta)$$

для любой памяти $\mu > 0$. Если в любую окрестность верхнего предела $\|r\|_{ss}$ последовательность $|r|$ попадает равномерно часто, то при любых начальных данных

$$J_\mu(\theta, \delta) \nearrow J_{+\infty}(\theta, \delta) =: J(\theta, \delta), \quad (19)$$

где знак \nearrow означает монотонную сходимость снизу при $\mu \rightarrow +\infty$.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы представим замкнутую систему (1), (13) в стандартной $M - \Delta$ форме, изображенной на рис. 1 и описываемой уравнениями

$$\begin{pmatrix} e \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f \\ w \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \xi = \Delta z, \quad (20)$$

где e — ошибка слежения (12), z и ξ — соответственно вход и выход структурированной неопределенности Δ ,

$$z_t = \begin{pmatrix} y_t \\ u_t \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \Delta^1 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \Delta^1(y) \\ \Delta^2(u) \end{pmatrix},$$

f — фиксированный входной сигнал, включающий отслеживаемый сигнал r и постоянный сигнал, равный 1:

$$f = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} := (1, 1, \dots) \in \ell_\infty.$$

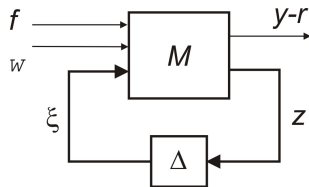


Рисунок 1. $M - \Delta$ форма системы (1), (13).

Figure 1. $M - \Delta$ form of system (1), (13)

Матрицу M в (20) представим в блочной форме, соответствующей входным и выходным сигналам на рис. 1:

$$M = \begin{pmatrix} M_{ef} & M_{ew} & M_{e\xi} \\ M_{zr} & M_{zw} & M_{z\xi} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Для системы (1), (13) эта блочная форма имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta^w & \delta^y & \delta^u \\ 1 & 0 & \delta^w & \delta^y & \delta^u \\ q & -c^w & \delta^w G^\xi & \delta^y G^\xi & \delta^u G^\xi \\ b_1 & -b_1 & \delta^w G^\xi & \delta^y G^\xi & \delta^u G^\xi \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где q — оператор сдвига вперед ($qr_t = r_{t+1}$). Первая строка матрицы M в (22) соответствует правой части равенства (14), а вторая строка получается переносом r_t в правую часть этого равенства. Третья строка M соответствует представлению оптимального регулятора в виде (15).

Необходимое и достаточное условие робастной устойчивости (17) следует из теоремы 7 в [6], примененной к системе (1), (13).

Для доказательства представления (18) для показателя качества $J_{+\infty}(\theta, \delta)$ достаточно применить теоремы 5 и 6 из статьи [6] (или теоремы 2.18 и 2.22 работы [7]). Введем обозначение

$$[A]_1 := \begin{pmatrix} \|A_{11}\|_1 & \cdots & \|A_{1q}\|_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \|A_{p1}\|_1 & \cdots & \|A_{pq}\|_1 \end{pmatrix}$$

для произвольной $p \times q$ матрицы A импульсных откликов $A_{ij} \in \ell_1$. Для блочной матрицы M из (21) положим

$$M_{ss}(f) := \begin{pmatrix} [M_{ef}f]_{ss} + [M_{ew}]_1 & [M_{e\xi}]_1 \\ [M_{zr}f]_{ss} + [M_{zw}]_1 & [M_{z\xi}]_1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 5 из [6],

$$J_{+\infty}(\theta, \delta) = [M_{er}r]_{ss} + [M_{ew}]_1 + [M_{y\xi}]_1 (I - [M_{z\xi}]_1)^{-1} ([M_{zr}r]_{ss} + [M_{zw}]_1). \quad (23)$$

Для рассматриваемой системы с матрицей (22) матрица $M_{ss}(f)$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} \delta^w & \delta^y & \delta^u \\ \|r\|_{ss} + |c^w| & \delta^y & \delta^u \\ (\|r\|_{ss} + |c^w|)/b_1 + \delta^w \|G^\xi\| & \delta^y \|G^\xi\| & \delta^u \|G^\xi\| \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Применив формулу (23) к матрице (24), получаем

$$\begin{aligned} J(\theta, \delta) &= \delta^w + (\delta^y \ \delta^u) \left(I - \begin{pmatrix} \delta^y & \delta^u \\ \delta^y \|G^\xi\| & \delta^u \|G^\xi\| \end{pmatrix} \right)^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \|r_{ss}\| + \delta^w \\ (\|r\|_{ss} + |c^w|)/b_1 + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + \frac{1}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} (\delta^y \ \delta^u) \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 - \delta^u \|G^\xi\| & \delta^u \\ \delta^y \|G^\xi\| & 1 - \delta^y \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \|r_{ss}\| + \delta^w \\ (\|r\|_{ss} + |c^w|)/b_1 + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$(\delta^y \ \delta^u) \begin{pmatrix} 1 - \delta^u \|G^\xi\| & \delta^u \\ \delta^y \|G^\xi\| & 1 - \delta^y \end{pmatrix} = (\delta^y \ \delta^u),$$

получаем представление (18)

$$\begin{aligned} J(\theta, \delta) &= \delta^w + \frac{1}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} \times \\ &\times (\delta^y \ \delta^u) \begin{pmatrix} \|r_{ss}\| + \delta^w \\ (\|r\|_{ss} + |c^w|)/b_1 + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\delta^w + \delta^y \|r\|_{ss} + \delta^u \|r\|_{ss}/|b_1| + \delta^u |c^w/b_1|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|}. \end{aligned} \quad (25)$$

Неравенство $J_\mu(\theta, \delta) \leq J_{+\infty}(\theta, \delta)$ во втором утверждении теоремы 1 очевидно следует из того, что множество операторных возмущений с ограниченной памятью μ является подмножеством операторных возмущений с бесконечной памятью. Монотонность последовательности $J_\mu(\theta, \delta)$ относительно μ следует из строгого возрастания по μ множеств допустимых операторных возмущений. Наконец, сходимость $J_\mu(\theta, \delta)$ к $J(\theta, \delta)$ гарантируется теоремой 6 из [6]. Теорема 1 доказана.

Последнее априорное предположение АП4 об управляемом объекте диктуется условием робастной стабилизированности (17).

АП4. Неизвестный вектор параметров θ удовлетворяет неравенству

$$\delta^y + \delta^u \|G^\xi\| \leq \bar{\delta} < 1 \quad (26)$$

с известным числом $\bar{\delta}$.

Число $\bar{\delta} > 0$ может быть сколь угодно близким к 1 и выбирается конструктором на основе априорной информации или вовсе без нее и исключает из рассмотрения неприемлемые для практических приложений модели, слишком близкие к границе области робастно стабилизируемых объектов.

Задача. Требуется построить обратную связь вида $u_t = U_t(y_{1-n}^t, u_0^{t-1})$, имеющую конечную память и гарантирующую выполнение с заданной точностью неравенства

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - r_t| \leq J(\theta, \delta) \quad (27)$$

при справедливости априорных предположений АП1–АП4.

Главная сложность задачи заключается в неидентифицируемости вектора коэффициентов ξ номинальной модели и смещения c^w , необходимых для использования оптимального регулятора (13).

3. Субоптимальное слежение

Решение поставленной задачи базируется на оптимальном оценивании, в котором показатель качества задачи управления используется как идентификационный критерий и минимизируется на текущих оценках множества неизвестных параметров, согласованных с данными измерений. Вычисление множественных оценок основано на следующем простом утверждении.

Лемма 1. Если для некоторой оценки

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w)^T, \quad \hat{\xi} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1)^T \in \Xi$$

неизвестного вектора θ при всех t справедливы неравенства

$$|\hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1} - \hat{c}^w| \leq \delta^w + \delta^y p_t^y + \delta^u p_t^u, \quad (28)$$

то объект управления (1) с вектором параметров $\hat{\theta}$ удовлетворяет уравнению (1) и априорным предположениям АП1, АП2 при всех t .

Лемма 1 является частным случаем Леммы 1 работы [9], в которой дополнительно предполагаются неизвестными параметры $\delta^w, \delta^y, \delta^u$.

Из Леммы 1 следует, что при любом управлении объектом (1) полная информация о векторе неизвестных параметров θ к моменту времени t имеет вид включения

$$\theta \in S_t = \{ \hat{\theta} \in \Theta_0 \mid |\hat{a}(q^{-1})y_k - \hat{b}_1 u_{k-1} - \hat{c}^w| \leq \delta^w + \delta^y p_k^y + \delta^u p_k^u \forall k \leq t \},$$

где

$$\Theta_0 = \{ \hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w)^T \mid \hat{\xi} \in \Xi, |c^w| \leq C^w, \delta^y + \delta^u \|G^\xi\| \leq \bar{\delta} \} \quad (29)$$

— априорное множество допустимых параметров θ .

Заметим, что никаким ограниченным управлением нельзя обеспечить сходимости множеств S_t к множеству с одним элементом θ , поскольку априорные верхние границы $\delta^w, \delta^y, \delta^u$, как правило, являются неточными, и конкретные реализации всех возмущений даже при точных верхних границах только в исключительных случаях неоднократно и одновременно принимают значения, соответствующие их верхним границам. Это означает, что вектор неизвестных параметров θ не идентифицируем с помощью ограниченного управления.

Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления заключается в построении сходящейся последовательности оценок $\theta_t \rightarrow \theta_\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, достаточно точно удовлетворяющих целевым неравенствам (28) при всех достаточно больших t . В отличие от задач адаптивной стабилизации, этого недостаточно для решения поставленной оптимальной задачи. Действительно, если $\theta_t \rightarrow \theta_\infty$ и выполнены целевые неравенства, то в силу теоремы 1 и непрерывности функции $J(\theta, \delta)$ следует неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq J(\theta_\infty, \delta).$$

Однако для решения поставленной оптимальной задачи этого неравенства недостаточно и необходимо гарантировать выполнение с заданной точностью дополнительно неравенства

$$J(\theta_\infty, \delta) \leq J(\theta, \delta) \quad (30)$$

с неизвестным и не идентифицируемым вектором θ . Из этого следует необходимость использования показателя качества $J(\theta, \delta)$ задачи управления в роли идентификационного критерия, т.е. использования оптимального оценивания вида

$$\theta_t = \underset{\hat{\theta} \in S_t}{\operatorname{argmin}} J(\hat{\theta}). \quad (31)$$

Непосредственное использование оптимальной идентификации (31) в режиме онлайн невозможно, ввиду возможного неограниченного роста числа целевых неравенств в описании множеств S_t . Для преодоления этой трудности будут использованы верхние по включению оценки множеств S_t с ограниченным числом обновлений за счет введения мертвой зоны при обновлении оценок.

Выберем число $\varepsilon > 0$ в качестве параметра мертвой зоны, при этом точность решения поставленной оптимальной задачи слежения будет пропорциональна ε . В каждый

момент времени t будут вычисляться векторные оценки

$$\theta_t = (\xi_t^T, c_t^w)^T, \quad \xi_t = (a_1^t, \dots, a_n^t, b_1^t)$$

и множественные оценки Θ_t неизвестного вектора ξ .

Адаптивный регулятор. Управление u_t в момент t определяется *адаптивным регулятором*

$$u_t = \frac{1}{b_1^t} (a_1^t y_t + \dots + a_n^t y_{t-n+1} + r_{t+1} - c_t^w). \quad (32)$$

Выберем в качестве начальной множественной оценки множество Θ_0 , определенное в (29), а качестве начальной векторной оценки

$$\theta_0 = \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_0} J(\hat{\theta}, \delta).$$

Введем следующие обозначения. После подачи управления u_t в момент времени t и измерения выхода y_{t+1} в момент $t+1$ положим

$$\begin{aligned} \varphi_t^T &= (-y_t, -y_{t-1}, \dots, -y_{t-n+1}, u_t), \\ \eta_{t+1} &= \operatorname{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^T \xi_t - c_t^w), \\ \psi_{t+1} &= (\eta_{t+1} \varphi_t^T, \eta_{t+1})^T, \\ h_{t+1} &= \delta^w + \delta^y p_{t+1}^y + \delta^u p_{t+1}^u. \end{aligned}$$

Заметим, что значения всех введенных переменных вычисляются по данным измерений, доступных к моменту $t+1$. Во введенных обозначениях целевое неравенство (28) в момент $t+1$ для текущей оценки θ_t принимает вид

$$\begin{aligned} |y_{t+1} - \varphi_t^T \xi_t - c_t^w| &= \\ &= \eta_{t+1} y_{t+1} - \psi_{t+1}^T \theta_t \leq \eta_{t+1} h_{t+1}, \end{aligned}$$

что эквивалентно

$$\psi_{t+1}^T \theta_t \geq \eta_{t+1} (y_{t+1} - h_{t+1}). \quad (33)$$

Алгоритм обновления векторных оценок θ_t и множественных оценок Θ_t имеет следующий вид:

$$\theta_{t+1} = \theta_t, \quad \Theta_{t+1} = \Theta_t, \quad (34)$$

$$\text{если } \psi_{t+1}^T \theta_t \geq \eta_{t+1} (y_{t+1} - h_{t+1}) - \varepsilon |\psi_{t+1}|. \quad (35)$$

В противном случае положим

$$\Theta_{t+1} = \Theta_t \cap \Omega_{t+1}, \quad (36)$$

$$\Omega_{t+1} = \{ \hat{\theta} \mid \psi_{t+1}^T \hat{\theta} \geq \eta_{t+1} (y_{t+1} - h_{t+1}) \}, \quad (37)$$

$$\theta_{t+1} = \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_{t+1}} J(\hat{\theta}, \delta). \quad (38)$$

Алгоритм оптимального оценивания (34)–(38) имеет простую геометрическую интерпретацию. Каждое целевое неравенство (28) представляет собой полосу в \mathbb{R}^{n+1} , заданную парой линейных неравенств относительно вектора $\hat{\theta}$. Только одно из этих неравенств, именно неравенство (33), может нарушаться для вектора θ_t . Неравенство в (35) означает, что евклидово расстояние от вектора θ_t до полупространства Ω_{t+1} , определенного в (37), не больше ε , и тогда, согласно (34), векторная оценка θ_t и множественная оценка Θ_t не обновляются. В противном случае желаемое неравенство (37) добавляется к списку неравенств, задающих множественную оценку Θ_t , образуя обновленную

оценку Θ_{t+1} . При этом некоторые неравенства из старого списка могут оказаться лишними. Один из эффективных алгоритмов удаления лишних неравенств описан в работе [12].

Замечание 1. Введение мертвой зоны с параметром ε гарантирует ограниченность числа возможных обновлений оценок θ_t и Θ_t и тем самым сходимость оценок за конечное время. Формула (38) вычисления оптимальной оценки θ_{t+1} является главной в задаче синтеза адаптивного оптимального управления в условиях неидентифицируемости вектора параметров θ . Она обеспечивает выполнение требуемого неравенства (30) с заданной точностью, пропорциональной параметру мертвой зоны ε .

Субоптимальность адаптивного регулятора (32) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть выполнены априорные предположения А1–А4, и параметр мертвой зоны ε в (35) выбран из интервала

$$0 < \varepsilon < \frac{1 - \bar{\delta}}{\sqrt{n} + G_u}, \quad G_u = \max_{\xi \in \Xi} \|G^\xi\|.$$

Тогда для замкнутой системы управления, включающей объект (1), адаптивный регулятор (32) и алгоритм оценивания (34)–(38) справедливы утверждения:

1) Множественные оценки Θ_t и векторные оценки θ_t сходятся к своим предельным значениям Θ_∞ и θ_∞ за конечное время и

$$J(\theta_\infty, \delta) \leq J(\theta, \delta), \quad (39)$$

2)

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq J(\theta_\infty, \delta) + O(\varepsilon), \quad (40)$$

где $O(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство Теоремы 2 аналогично доказательству Теоремы 2 в статье [10]. Приведем его краткую схему. Согласно данной выше геометрической интерпретации алгоритма оценивания, при нарушениях неравенства (35) из множественных оценок Θ_t заведомо удаляются шары радиуса ε с центрами θ_t и в описание Θ_{t+1} добавляются неравенства из (37). В результате этого шары радиуса $\varepsilon/2$ с центрами θ_t не пересекаются. В силу оптимизации (38)

$$J(\theta_t, \delta) \leq J(\theta, \delta)$$

при всех t , так что оценки θ_t остаются в ограниченном множестве в \mathbb{R}^{n+2} . Поэтому число исключаемых из оценок Θ_t не пересекающихся шаров радиуса $\varepsilon/2$ конечно ввиду ограниченности множества векторов $\hat{\theta}$, удовлетворяющих неравенству $J(\hat{\theta}, \delta) \leq J(\theta, \delta)$. Следовательно конечно и число возможных обновлений оценок Θ_t и θ_t .

Для доказательства неравенства (40) заметим, что после сходимости θ_t к θ_∞ за конечное время для оценки θ_∞ выполняются неравенства (35). Нетрудно показать, что

$$\varepsilon |\psi_{t+1}| \leq \varepsilon (\sqrt{n} p_{t+1}^y + p_{t+1}^u + 1). \quad (41)$$

Из (41) и (35) теперь следует, что для оценки θ_∞ выполняются неравенства (28) с правой частью

$$\delta^w + \varepsilon + (\delta^y + \varepsilon \sqrt{n}) p_t^y + (\delta^u + \varepsilon) p_t^u, \quad (42)$$

которой соответствует набор верхних границ возмущений

$$\delta_\varepsilon = (\delta^w + \varepsilon, \delta^y + \varepsilon\sqrt{n}, \delta^u + \varepsilon).$$

Тогда в силу Леммы 1 выход y_t можно считать выходом объекта (1) с вектором параметров $\theta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w)^T$, набором верхних границ δ_ε и управляемого соответствующим оценке θ_∞ оптимальным регулятором. Далее по Теореме 1

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - r_t| \leq J\theta_\infty, \delta_\varepsilon. \quad (43)$$

Остается заметить, что $J(\theta_\infty, \delta_\varepsilon) = J\theta_\infty, \delta + O(\varepsilon)$. Аналогично [10] можно вычислить постоянную K , представляющую величину $O(\varepsilon)$ в прямой форме $K\varepsilon$.

Замечание 2. Показатель качества $J(\theta, \delta)$, определенный в (18), запишем, используя (16), в виде

$$J(\theta, \delta) = \frac{(\delta^w + \delta^y \|r\|_{ss})|b_1| + \delta^u \|r\|_{ss} + \delta^u |c^w|}{(1 - \delta^y)|b_1| - \delta^u \sum_{k=1}^n |a_k|}. \quad (44)$$

Нетрудно заметить, что этот показатель является дробно-линейной функцией оцениваемого вектора θ (для этого каждую абсолютную величину $|x|$ следует записать в виде $x = x^+ - x^-$, где $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$). Из этого следует, что оптимизация (38) представляет собой задачу дробно-линейного программирования при линейных ограничениях. Эта задача стандартным образом сводится к задаче линейного программирования [11], для решения которой имеется высокоэффективное современное программное обеспечение. В статье [10] приведены примеры численного моделирования, иллюстрирующие эффективность алгоритмов множественного оценивания для объектов управления с девятью неизвестными параметрами. Заметим, что онлайн уменьшение параметра ε для повышения гарантированной точности решения оптимальной задачи (38) влечет рост числа возможных обновлений оценок и числа неравенств в описании множественных оценок Θ_t , т.е. к повышению вычислительной сложности оптимальной задачи.

Замечание 3. Главное достоинство рассмотренного адаптивного управления заключается в обеспечении оптимальной с заданной точностью асимптотической верхней оценки показателя качества для любого допустимого и не идентифицируемого вектора θ . Главный же недостаток заключается в единой области допустимых значений коэффициентов усиления неопределенностей δ^y и δ^u в виде неравенства (26). В то же время эта единая (универсальная) для всех допустимых θ область является сколь угодно близкой к оптимальной универсальной области за счет выбора достаточно близкого к единице параметра δ . Традиционные алгоритмы оценивания на базе градиентного алгоритма или метода наименьших квадратов не только не могли гарантировать никакой оптимальности адаптивного управления, но и допускали только достаточно малые области робастной устойчивости, поскольку обосновывались с помощью метода функций Ляпунова, вносящего значительный консерватизм в результаты по устойчивости по сравнению с ℓ_1 -теорией робастного управления. Это проявлялось, в частности, и в том, что в традиционном робастном адаптивном управлении вместо структурированной неопределенности по выходу и управлению

рассматривалась неструктурированная неопределенность $\delta = \max(\delta^y, \delta^u)$, вносящая дополнительный консерватизм. Для такой неструктурированной неопределенности наиболее продвинутый результат на основе градиентного алгоритма оценивания был получен в статье [13] именно в контексте ℓ_1 -теории при центрированном внешнем возмущении (т.е. при $c^w = 0$) для авторегрессионного объекта с запаздыванием в управлении.

Заключение

Традиционные алгоритмы оценивания неизвестных параметров объекта управления с детерминированными возмущениями представляют собой модификации градиентного алгоритма или алгоритма метода наименьших квадратов и не могут гарантировать оптимальности адаптивного управления. Более сложные алгоритмы множественного оценивания открывают возможности синтеза адаптивного оптимального управления при использовании показателя качества задачи управления как идентификационного критерия. В данной работе рассмотрена задача оптимального робастного слежения для авторегрессионного объекта с неизвестной номинальной моделью и неизвестным смещением ограниченного внешнего возмущения, но с известными коэффициентами усиления неопределенностей по выходу и управлению и известной верхней границей несмещенного внешнего возмущения. Благодаря дробно-линейному виду показателя качества в виде асимптотически наилучшего возможного отклонения выхода объекта от отслеживаемого сигнала, вычисление текущих оптимальных оценок сводится к линейному программированию и реализуемо в режиме онлайн по крайней мере для объектов невысокого порядка.

Литература

1. Rohrs, C.E. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics / C.E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1985. – Vol. 30. – № 9. – P. 881–889.
2. Zhou, K. Essentials of robust control / K. Zhou, G.C. Doyle // Prentice Hall, 1998. – 430 p.
3. Khammash, M. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty / M. Khammash, J. Pearson // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36, № 4. – P. 398–412.
4. Khammash, M. Robust steady-state tracking / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1995. – Vol. 40, № 11. – P. 1872–1880.
5. Khammash, M. Robust performance: unknown disturbances and known fixed inputs / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42, № 12. – P. 1730–1734.
6. Sokolov, V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty / V.F. Sokolov // Syst. Control Lett. – 2001. – Vol. 42, № 5. – P. 363–377.
7. Соколов, В.Ф. Робастное управление при ограниченных возмущениях / В.Ф. Соколов. – Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2011. – 218 с.

8. Sokolov, V.F. Adaptive ℓ_1 robust control for SISO system / V.F. Sokolov // *Systems and Control Letters*. – 2001. – Vol. 42, № 5. – P. 379–393.
9. Соколов, В.Ф. Адаптивная оптимальная робастная стабилизация авторегрессионного объекта со смещенным внешним возмущением / В.Ф. Соколов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки»*. – 2022. – № 5 (57). – С. 20–27.
10. Соколов, В.Ф. Адаптивное оптимальное слежение для дискретного минимально-фазового объекта с неопределенностью в канале выхода / В.Ф. Соколов // *Автоматика и телемеханика*. – 2021. – № 8. – С. 108–128.
11. Boyd, S. *Convex optimization* / S. Boyd, L. Vandenberghe. – New York: Cambridge University Press, 2004. – 742 p.
12. Walter, E. Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded error / E. Walter, H. Piet-Lahanier // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1989. – Vol. 34, № 8. – P. 911–915.
13. Weyer, E. Limitations of robust adaptive pole placement control / E. Weyer, I. Mareels, J. Polderman // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1994. – Vol. 39, № 8. – P. 1665–1671.
5. Khammash, M. Robust performance: unknown disturbances and known fixed inputs / M. Khammash // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1997. – Vol. 42, № 12. – P. 1730–1734.
6. Sokolov, V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty / V.F. Sokolov // *Syst. Control Lett.* – 2001. – Vol. 42, № 5. – P. 363–377.
7. Sokolov, V.F. Robastnoye upravleniye pri ogranichennykh vozmushcheniyakh [Robust control under bounded disturbances] / V.F. Sokolov. – Syktyvkar: Komi Science Center, UB RAS, 2011. – 218 p.
8. Sokolov, V.F. Adaptive ℓ_1 robust control for SISO system / V.F. Sokolov // *Systems and Control Letters*. – 2001. – Vol. 42, № 5. – P. 379–393.
9. Sokolov, V.F. Adaptivnaya optimal'naya robastnaya stabilizatsiya avtoregressionnogo ob"ekta so smeshhennym vneshnim vozmushheniem [Adaptive optimal robust stabilization of autoregressive plant under biased external disturbance] / V.F. Sokolov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. – 2022. – № 5 (57). – P. 20–27.
10. Sokolov, V.F. Adaptivnoe optimal'noe slezhenie dlya diskretnogo minimal'no-fazovogo ob"ekta s neopredelennost'yu v kanale vyhoda [Adaptive optimal tracking of a discrete-time minimum-phase plant under output uncertainty] / V.F. Sokolov // *Automation and Remote Control*. – 2021. – Vol. 82, № 8. – P. 108–128.
11. Boyd, S. *Convex optimization* / S. Boyd, L. Vandenberghe. – New York: Cambridge University Press, 2004. – 742 p.
12. Walter E. Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded error / E. Walter, H. Piet-Lahanier // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1989. – Vol. 34, № 8. – P. 911–915.
13. Weyer E. Limitations of robust adaptive pole placement control / E. Weyer, I. Mareels, J. Polderman // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1994. – Vol. 39, № 8. – P. 1665–1671.

References

1. Rohrs, C.E. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics / C.E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1985. – Vol. 30, № 9. – P. 881–889.
2. Zhou, K. *Essentials of robust control* / K. Zhou, G.C. Doyle // Prentice Hall, 1998. – 430 p.
3. Khammash, M. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty / M. Khammash, J. Pearson // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1991. – Vol. 36, № 4. – P. 398–412.
4. Khammash, M. Robust steady-state tracking / M. Khammash // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1995. – Vol. 40, № 11. – P. 1872–1880.

Для цитирования:

Соколов, В.Ф. Оптимальное ℓ_1 -робастное слежение для авторегрессионного объекта с неизвестной номинальной моделью / В.Ф. Соколов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки»*. – 2023. – № 4 (62). – С. 10–17.

For citation:

Sokolov, V.F. Optimal'noe ℓ_1 -robastnoe slezhenie dlya avtoregressionnogo ob"ekta s neizvestnoj nominal'noj model'yu [Optimal ℓ_1 -robust tracking for autoregressive plant with unknown nominal model] / V.F. Sokolov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. – 2023. – № 4 (62). – P. 10–17.

Дата поступления статьи: 03.07.2023

Received: 03.07.2023

Влияние поперечной нагрузки на устойчивость сжимаемого продольной силой стержня

В.Н. Тарасов

Физико-математический институт

ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,

г. Сыктывкар

vntarasov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Работа посвящена исследованию влияния нормальной нагрузки на устойчивость сжимаемого продольной силой стержня. Рассматриваются два вида граничных условий: граничные условия жесткой заделки и условия шарнирного опирания. Отмечается, что в случае граничных условий шарнирного опирания форма упругой линии стержня качественно зависит от величины продольной силы.

Ключевые слова:

упругая энергия, вариационная задача, упругая линия, уравнение Эйлера, критическая сила

Введение

Исследование задач устойчивости гибких элементов конструкций и упругих систем в настоящее время занимает одно из центральных мест в механике деформируемого твердого тела и представляет значительный интерес. Теория устойчивости упругих систем берет свое начало с работ Эйлера по теории продольного изгиба [1]. Проблемы упругой устойчивости исследовались многими авторами [2–5]. Вариационный подход к данным задачам был развит С.П. Тимошенко [6], который решил ряд задач устойчивости стержней, пластин и оболочек. На основе вариационного подхода можно доказать теорему существования решения уравнений равновесия. Также можно убедиться, что в устойчивом положении равновесия функционал полной энергии достигает локального минимума. Общая концепция упругой бифуркационной устойчивости предложена в монографии В.В. Новожилова [7]. В связи со стремительным развитием вычислительной техники и появлением универсальных численных алгоритмов решения краевых задач (метод граничных элементов, метод конечных элементов), к настоящему времени имеются комплексы программ, позволяющие рассчитывать упругие конструкции на устойчивость, например [3].

В общем случае проблемы упругой устойчивости сводятся к нахождению точек бифуркации некоторых нелинейных уравнений, или к нахождению параметров, при которых некоторая вариационная задача имеет несколько решений.

Influence of a transversal load on the stability of a rod compressed by a longitudinal force

V.N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics,

Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,

Syktывkar

vntarasov@ipm.komisc.ru

Abstract

The work is devoted to the study of the effect of normal load on the stability of a rod compressed by a longitudinal force. Two types of boundary conditions are considered: the boundary conditions of rigid sealing and the conditions of hinge support. It is noted that in the case of the boundary conditions of the hinge bearing, the shape of the elastic line of the rod qualitatively depends on the magnitude of the longitudinal force.

Keywords:

elastic energy, variational problem, elastic line, Euler equation, critical force

Предположим, что полная потенциальная энергия упругой конструкции имеет вид

$$\Phi(u, \lambda) = F(u) + G(u, \lambda), \quad (1)$$

где u – функция, характеризующая состояние упругой системы (это может быть, например, вектор перемещения, тензор деформации и т.д.), $F(u)$ – упругая энергия системы, $G(u, \lambda)$ – работа внешних сил, λ – параметр, характеризующий внешнюю нагрузку. Пусть уравнение Эйлера для функционала (1) записывается в виде

$$L(u, \lambda) = 0, \quad (2)$$

где L – дифференциальный, вообще говоря, нелинейный оператор. Поиск критического параметра λ сводится к нахождению точек бифуркации уравнения (2).

Одной из важных проблем является задача изучения влияния односторонних связей на устойчивость упругой конструкции. Наличие таких связей приводит к появлению неравенств, которым должны удовлетворять перемещения.

Интересные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения решены В.И. Феодосьевым [4]. Он рассмотрел задачу плоского изгиба упругого стержня, находящегося в первоначальном недеформированном состоянии между двумя жесткими стенками на одинаковом расстоянии от каждой из них, исследована задача устойчивости тонкостенного кольца, сжимаемого накинутой на него абсолютно гибкой нерастя-

жимой нитью, натягиваемой силой, а также кольца, вставленного в жесткую обойму. Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии изучалось в работе [8]. Анализ упругих систем на устойчивость при наличии односторонних (неудерживающих) связей сводится к определению параметров, при которых задача оптимизации имеет не единственное решение. Это, в свою очередь, приводит к необходимости решать невыпуклые задачи математического программирования с применением методов глобальной оптимизации. Общая теория и методы решения задач устойчивости упругих систем при наличии односторонних связей изложены в работе [9]. Во многих случаях системы, ограниченные односторонними связями, сводятся к идентификации условной положительности квадратичных форм на конусах. Алгебраический критерий условной положительности в самом важном случае, когда конус есть неотрицательный ортант в R^n , предложен в работах В.Л. Крепса [10] и Л.Б. Рапопорта [11]. Систематическому применению неравенств в механике посвящена монография П. Панагиотопулоса [12].

Некоторые контактные задачи, в том числе и задачи устойчивости упругих систем при наличии односторонних ограничений на перемещения, и методы их решений рассмотрены в трудах [13], [14].

В данной работе показано влияние поперечной нагрузки на устойчивость сжимаемого продольной силой стержня. Предполагается, что прогибы стержня с одной стороны ограничены жестким препятствием.

Гибкий стержень, нагруженный продольной сжимающей силой и поперечной нагрузкой

Рассмотрим стержень длины l , нагруженный продольной сжимающей силой P и поперечной силой $q > 0$. Пусть $w = w(s)$, $z = z(s)$ — координаты точек упругой линии, s — длина дуги, $w(s)$ — прогиб, ось z совпадает с первоначальной недеформированной осью стержня (рис. 1).

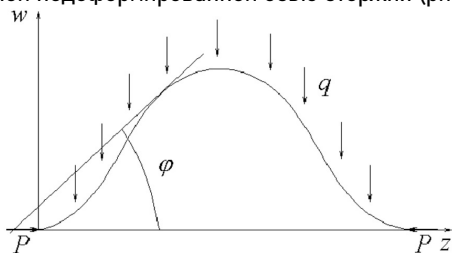


Рисунок 1. Направление действующих сил и форма прогиба стержня.
Figure 1. The direction of the acting forces and the shape of the deflection of the rod.

Предположим, что прогиб стержня ограничен с одной стороны жестким препятствием, так что $w(s) \geq 0$. Обозначим через φ угол между касательной к упругой линии и осью z . Для определенности предположим, что выполнены граничные условия жесткой заделки

$$\varphi = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } s = 0, l. \quad (3)$$

Определение упругой линии стержня сводится к следующей вариационной проблеме

$$U(l; w) = \int_0^l \left(\frac{EJ}{2} \varphi_s'^2 - P(1 - \cos \varphi) + qw \right) ds \rightarrow \min_{w, \varphi}$$

где E — модуль Юнга, J — момент инерции поперечного сечения стержня, l — длина стержня. При этом выполняются геометрические равенства

$$w'_s = \sin \varphi, \quad z'_s = \cos \varphi. \quad (4)$$

Предположим, что сила P больше первой критической силы Эйлера и выполнено неравенство $4\pi^2 EJ/l^2 < P < 16\pi^2 EJ/l^2$. Пусть (l_1, l_2) — интервал максимальной длины, на котором $w(s) > 0$. Ясно, что $\varphi(l_1) = \varphi(l_2) = 0$, $w(l_1) = w(l_2) = 0$, поэтому можно считать, что $l_1 = 0$, $l_2 > l/2$ и $w(s) \equiv 0$, $s \notin [0, l_2]$. Определение перемещений на интервале $[0, l_2]$ сводится к задаче изопериметрического типа

$$U(w, l_2) \rightarrow \min_{w, \varphi, l_2}, \quad \int_0^{l_2} \sin \varphi ds = 0 \quad (5)$$

при условиях (3), (4).

Составим по обычным правилам вариационного исчисления функционал Лагранжа

$$L(w, \varphi, l_2) = U(w, l_2) + \int_0^{l_2} (\lambda(w'_s - \sin \varphi) + m_1 \sin \varphi) ds. \quad (6)$$

Система уравнений Эйлера для функционала $L(w, \varphi, l_2)$ имеет вид

$$EJ\varphi''_{ss} + P \sin \varphi - m_1 \cos \varphi + \lambda \cos \varphi = 0, \quad \lambda' = q. \quad (7)$$

Из второго уравнения получаем $\lambda = -qs + m_2$. Сделаем замену переменных $s = l_2\tau$ и введем обозначения

$$k^2 = \frac{Pl_2}{EJ}, \quad \rho = \frac{ql_2^3}{EJ}, \quad m = \frac{(m_1 - m_2)l_2^2}{EJ} + \frac{1}{2}\rho. \quad (8)$$

Первое из уравнений (7) записывается в виде

$$\varphi'' = -k^2 \sin \varphi - \rho(\tau - \frac{1}{2}) \cos \varphi + m \cos \varphi, \quad (9)$$

где штрих обозначает производную по τ . Из условия минимума функционала (6) по переменной l_2 (если $l_2 < l$) получаем еще одно граничное условие $\varphi'(1) = 0$. Уравнение (9) не интегрируется в квадратурах.

Умножая обе части уравнения (9) на $\varphi'(\tau)$ и интегрируя в пределах от 0 до 1, получим $\varphi'^2(1) = \varphi'^2(0)$. Ясно, что $\varphi(0) \geq 0$ и $\varphi(1) \geq 0$, ибо в противном случае в достаточно малой окрестности концов интервала $[0, 1]$ прогиб будет принимать отрицательные значения. Но тогда $\varphi'(0) = \varphi'(1)$. Из последнего равенства следует, что функция $w(\tau)$ симметрична относительно середины интервала $[0, 1]$, т.е. для $\tau \in [0, \frac{1}{2}]$

$$w(\frac{1}{2} - \tau) = w(\frac{1}{2} + \tau), \quad \varphi(\frac{1}{2} - \tau) = -\varphi(\frac{1}{2} + \tau).$$

ρ	0	0.5	1	1.3	$\rho^* = 1.6$
α_1	0	0.471	0.414	1.414	2.26
U_1	0	-0.05	-0.268	-0.499	-1.27
w_{max}	0	0.025	0.054	0.1285	0.115
α_2	3.958	3.02	6.55	6.4	2.26
U_2	-3.868	-2.693	-2.69	-2.256	-1.274
w_{max}	0.1909	0.179	0.163	0.151	0.115

При $\rho = 0$ существуют два корня уравнения (10): первый корень $\alpha_1 = 0$ соответствует тривиальному решению $\varphi(\tau) = 0, w(\tau) = 0, \tau \in [0, 1]$, второй корень дает нетривиальное положение равновесия стержня. При увеличении ρ появляется два нетривиальных решения уравнения (10) (рис. 3).

При $\rho > \rho^*$ у уравнения (10) нет решений. При меньших значениях ρ имеются два корня α_1 и $\alpha_2, \alpha_1 < \alpha_2, (\alpha_2 - \alpha_1) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \rho^*$. Первый корень α_1 возрастает, второй корень α_2 убывает, а при $\rho = \rho^*$ они сливаются в один. В табл. 1 приведены U_1 и U_2 — значения интеграла $U(w) = \int_0^1 (\varphi'^2 - k^2(1 - \cos \varphi) - \rho w) d\tau$. Этот интеграл с точностью до положительной константы совпадает с полной энергией системы. U_1 соответствует корню α_1 , а U_2 — корню α_2 .

На рис. 4 представлена упругая кривая при граничных условиях жесткой заделки. На этом и последующих рисунках по оси абсцисс отложена координата $z(\tau)$, а по оси ординат — координата $w(\tau)$.

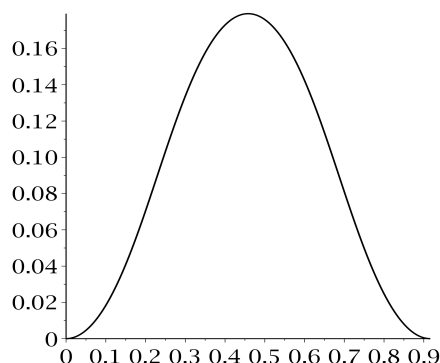


Рисунок 4. Упругая кривая $\{z(\tau); w(\tau)\}, \tau \in [0, 1], k = 2.05\pi, \rho = 0.5$ для граничных условий жесткой заделки.
Figure 4. Elastic curve $\{z(\tau); w(\tau)\}, \tau \in [0, 1], k = 2.05\pi, \rho = 0.5$, for boundary conditions of rigid termination.

Граничные условия шарнирного опирания

Эти условия означают, что на концах стержня отсутствуют перемещения и изгибающие моменты равны нулю, т.е.

$$w(0) = 0, w''(0) = 0, w(1) = 0, w''(1) = 0. \quad (11)$$

Из (4) следует, что (11) эквивалентно условиям

$$\varphi'(s) = 0, w(s) = 0 \quad \text{при } s = 0, l.$$

На рис. 5 представлена упругая кривая при $k = 1.3\pi, q = 0$.

Интегрируя уравнение (7) в пределах от 0 до 1, получим, что $m \int_0^1 \cos \varphi d\tau = 0$, а значит, и $m = 0$.

Граничные условия жесткой заделки

Пусть $\varphi(\alpha; \tau)$ — решение уравнения (9) при $m = 0$ с начальными условиями $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \alpha$ (решение задачи Коши) и $w(\alpha; \tau) = \int_0^\tau \sin(\varphi(\alpha; t)) dt$. Обозначим $\omega(\alpha) = \varphi(\alpha; 1), \psi(\alpha) = w(\alpha; 1)$, тогда

$$\xi(\alpha) = \sqrt{w^2(\alpha) + \omega^2(\alpha)}.$$

При фиксированных значениях k и ρ находим все значения параметра α , при которых

$$\xi(\alpha) = 0, \quad (10)$$

т.е. одновременно $\psi(\alpha) = 0$ и $\omega(\alpha) = 0$. Если $w(\alpha; \tau) \geq 0$ для всех значений $\tau \in [0, 1]$, то при заданных k и ρ найдено допустимое положение равновесия.

Графики функции $\xi(\alpha)$ представлены на рис. 2 и 3. Результаты вычислений для $k = 2.05\pi$ приведены в табл. 1.

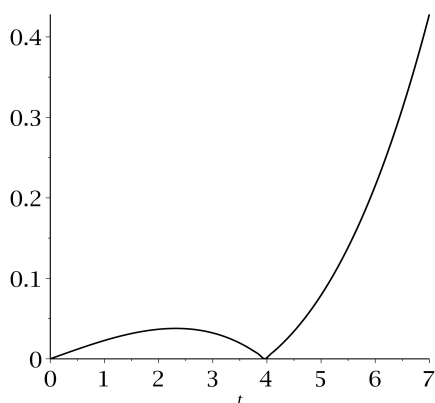


Рисунок 2. График функции $\xi(\alpha)$ при $k = 2.05\pi, q = 0$ для граничных условий жесткой заделки.
Figure 2. Graph of the function $\xi(\alpha)$ for $k = 2.05\pi, q = 0$ for boundary conditions of rigid termination.

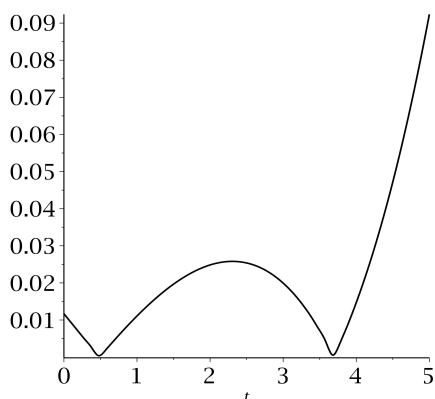


Рисунок 3. График функции $\xi(\alpha)$ при $k = 2.05\pi, q = 0.5$ для граничных условий жесткой заделки.
Figure 3. Graph of the function $\xi(\alpha)$ for $k = 2.05\pi, q = 0.5$ for boundary conditions of rigid termination.

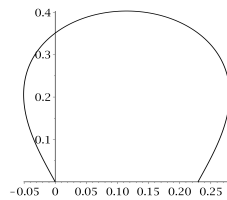


Рисунок 5. Упругая кривая $\{z(\tau); w(\tau)\}$, $\tau \in [0, 1]$, $k = 1.3\pi$, $\rho = 0$ для граничных условий шарнирного опирания.
Figure 5. Elastic curve $\{z(\tau); w(\tau)\}$, $\tau \in [0, 1]$, $k = 1.3\pi$, $\rho = 0$ for boundary conditions of the hinge support.

При данных значениях параметров ($k = 1.3\pi$, $q = 0$) существует единственная кривая, которая является формой равновесия. Как и в случае граничных условий жесткой заделки при $q > 0$, обозначим $\omega(\alpha) = \varphi'(\alpha; 1)$, $\psi(\alpha) = w(\alpha; 1)$, $\xi(\alpha) = \sqrt{w^2(\alpha) + \omega^2(\alpha)}$. Далее находим все значения параметра α , при которых $\xi(\alpha) = 0$, т.е.

$$w(0) = 0, w''(0) = 0, w(1) = 0, w''(1) = 0. \quad (12)$$

Результаты вычислений при $k = 1.3\pi$ приведены в табл. 2.

Таблица 2
Результаты вычислений при $k = 1.3\pi$ для граничных условий шарнирного опирания
Table 2
Calculation results for $k = 1.3\pi$ for boundary conditions of the hinge support

ρ	0	20	30	30.45	40
α_1	0	1.05	1.38	1.38	1.55
U_1	0	-0.381	-0.116	0.0089	1.05
w_{max}	0	0.297	0.353	0.373	0.358
α_2	1.93	2.12	2.30	2.325	2.56
U_2	-11.9	-8.79	-8.39	-8.45	-9.07
w_{max}	0.403	0.396	0.38	0.373	0.358

Как и в случае жесткой заделки при $q > 0$ (не очень больших), найдется два решения уравнения (12) α_1 и α_2 , графики которых представлены на рис. 6 и 7 при $k = 1.3\pi$, $\rho = 30$.

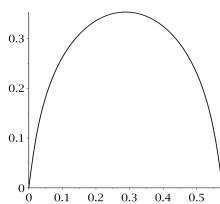


Рисунок 6. Упругая кривая $\{z(\tau); w(\tau)\}$, $\tau \in [0, 1]$, $k = 1.3\pi$, $q = 30$, $\alpha_1 = 1.38$ для граничных условий шарнирного опирания.
Figure 6. Elastic curve $\{z(\tau); w(\tau)\}$, $\tau \in [0, 1]$, $k = 1.3\pi$, $q = 30$, $\alpha_1 = 1.38$ for boundary conditions of the hinge support.

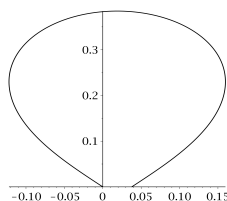


Рисунок 7. Упругая кривая $\{z(\tau); w(\tau)\}$, $\tau \in [0, 1]$, $k = 1.3\pi$, $q = 30$, $\alpha_2 = 2.30$ для граничных условий шарнирного опирания.
Figure 7. Elastic curve $\{z(\tau); w(\tau)\}$, $\tau \in [0, 1]$, $k = 1.3\pi$, $q = 30$, $\alpha_2 = 2.30$ for boundary conditions of the hinge support.

Таблица 3
Результаты вычислений при $k = 1.1\pi$ для граничных условий шарнирного опирания

Table 3
Calculation results for $k = 1.1\pi$ for boundary conditions of the hinge support

ρ	0	2	2.5	3.0	4.0
α_1	0	0.408	.5495	—	—
U_1	0	-0.291	-0.546	—	—
w_{max}	0	0.128	0.549	—	—
α_2	1.21	1.07	0.801	0.801	0.801
U_2	-3.67	-2.55	-2.09	-1.24	-1.15
w_{max}	0.329	0.301	0.284	0.23	0.241

Результаты вычислений существенно зависят от величины продольной силы k . Для небольших значений k при увеличении поперечной нагрузки q первый корень α_1 исчезает (табл. 3). В частности, при $k = 1.1\pi$, $q > 3$ остается только один корень уравнения (12). Если k достаточно велико, то начиная с некоторых q первому корню будет соответствовать положительное значение полной энергии. Например, при $k = 1.3\pi$, $\rho > 301.45$, что говорит о неустойчивости такого положения равновесия. Поэтому на практике оно не реализуется.

Литература

1. Николаи, Е.Л. Труды по механике / Е.Л. Николаи. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 583 с.
2. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
3. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – Москва: Издательство СКАД СОФТ, 2010–2011. – Т. 1. – 686 с.
4. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1967. – 376 с.
5. Келлер, Дж.Б. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Дж.Б. Келлер, С. Антман. – Москва: Мир, 1974. – 254 с.
6. Тимошенко, С.П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1946. – 531 с.
7. Новожилов, В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. – Москва: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
8. Алфутов, Н.А. Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии / Н.А. Алфутов, А.Н. Еремичев // Расчеты на прочность. – Москва: Машиностроение, 1989. – С. 179–180.
9. Тарасов, В.Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем // В.Н. Тарасов. – Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2013. – 238 с.
10. Крепс, В.Л. О квадратичных формах неотрицательных на ортанте / В.Л. Крепс // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1984. – Т. 24, № 14. – С. 497–503.
11. Рапопорт, Л.Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе / Л.Б. Рапопорт // Прикл. матем. и мех. – 1986. – Т. 50, вып. 4. – С. 674–679.

12. Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос. – Москва: Мир, 1989. – 494 с.
13. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
14. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems / V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.
7. Novojilov, V.V. Osnovy nelineynoy teorii uprugosti [Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity] / V.V. Novojilov. – M.: Gostekhizdat, 1948. – 211 p.
8. Alfutov, N.A. Vliyaniye odnostoronnikh svyazey na ustoychivost' tsilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii [Influence of unilateral bonds on the stability of cylindrical shells under axial compression] / N.A. Alfutov, A.N. Yeremichev // Strength calculations. – Moscow: Engineering, 1989. – P. 179–180.
9. Tarasov, V.N. Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem [Optimization methods in the study of constructive-nonlinear problems in the mechanics of elastic systems] / V.N. Tarasov // Syktyvkar: Komi Science Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2013. – 238 p.

References

1. Nikolai, E.L. Trudy po mekhanike [Transactions on mechanics] / E.L. Nikolai. – Moscow: Gostekhizdat, 1955. – 583 p.
2. Volmir, A.S. Ustoychivost' deformiruyemykh sistem [Stability of deformable systems] / A.S. Volmir. – Moscow: Nauka, 1967. – 984 p.
3. Perelmuter, A.V. Ustoychivost' ravnovesiya konstruktivnykh i rodstvennyye problemy [Stability of equilibrium structures and related problems] / A.V. Perelmuter, V.I. Slivker. – Moscow: Publishing house SKAD SOFT, 2010–2011. – Vol. 1. – 686 p.
4. Feodosiev, V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected tasks and questions on the strength of materials] / V.I. Feodosiev. – Moscow: Nauka [Science], 1967. – 376 p.
5. Keller, D.B. Teoriya vetvleniya i nelineynyye zadachi na sobstvennyye znacheniya [Theory of branching and nonlinear eigenvalue problems] / Ed. J.B. Keller and S. Antman. – Moscow: Mir, 1974. – 254 p.
6. Timoshenko S.P. Ustoychivost' uprugikh sistem [Stability of elastic systems] / S.P. Tymoshenko; trans. from English. Assoc. ed. I.K. Snitko. With notes. and with the addition of Art. prof. V.Z. Vlasov. – Moscow-Leningrad: OGIZ. State publishing house of technical and theoretical. lit., 1946. – 532 p.
10. Kreps, V.L. O kvadraticnykh formakh neotritsatel'nykh na ortante [On quadratic forms that are non-negative on the orthant] / V.L. Kreps // J. Comput. Math. and Math. Phys. – 1984. – Vol. 24, № 14. – P. 497–503.
11. Rapoport, L.B. Ustoychivost' po Lyapunovu i znakoopredelennost' kvadraticnoy formy na konuse [Lyapunov stability and sign-definiteness of a quadratic form on a cone] / L.B. Rapoport // PMM. – 1986. – Vol. 50, Iss. 4. – P. 674–679.
12. Panagiotopoulos, P. Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevyuklyye funktsii energii [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy function] / P. Panagiotopoulos. – Moscow: Mir, 1989. – 494 p.
13. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
14. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems / V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

Для цитирования:

Тарасов, В.Н. Влияние поперечной нагрузки на устойчивость сжимаемого продольной силой стержня / В.Н. Тарасов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 18–22.

For citation:

Tarasov, N.A. Vliyaniye poperechnoy nagruzki na ustoychivost' szhimaemogo prodol'noy siloj sterzhnya [Influence of a transversal load on the stability of a rod compressed by a longitudinal force] / V.N. Tarasov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 18–22.

Дата поступления статьи: 22.06.2023

Received: 22.06.2023

О влиянии односторонних связей на устойчивость и колебания упругих колец

В.Ю. Андрюкова

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
veran@list.ru

Аннотация

В работе рассматриваются вопросы устойчивости кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными центральными силами, при наличии односторонних ограничений на перемещения. Во второй части статьи решена задача о колебаниях кольца, подкрепленного нитями одностороннего действия. Задачи сводятся к решению некоторой вариационной проблемы при ограничениях на искомые функции в виде линейных уравнений и неравенств.

Ключевые слова:

устойчивость, кольцо, вариационная задача, точки бифуркации, односторонние ограничения, колебания

Введение

В настоящей работе рассматриваются конструктивно-нелинейные задачи устойчивости и свободных колебаний колец [1], подкрепленных нерастяжимыми нитями, так что расстояние между точками прикрепления концов нити не может увеличиваться, и они не выдерживают сжимающих усилий. Эти задачи не могут быть линеаризованы, обладая нелинейностью как существенным свойством, так как их напряженно-деформированное состояние описывается негладкими функциями. При математической формализации расчет на устойчивость сводится к отысканию параметра нагрузки, при котором происходит бифуркация решения задачи вариационного исчисления при наличии ограничений на искомые функции в виде неравенств. При конечномерной аппроксимации получаем задачу нахождения параметра нагрузки, при которой происходит бифуркация решений задач нелинейного программирования. Последняя задача может быть сведена к идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. В общем случае требуется применять методы глобальной оптимизации, например метод ветвей и границ [2]. Некоторые задачи устойчивости и критического поведения при наличии односторонних ограничений на перемещения рассмотрены в работах [3–6].

1. Устойчивость колец с односторонним подкреплением

Рассмотрим задачу устойчивости упругих колец, под-

On the influence of unilateral bonds on the stability and oscillations of elastic rings

V.Yu. Andryukova

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar
veran@list.ru

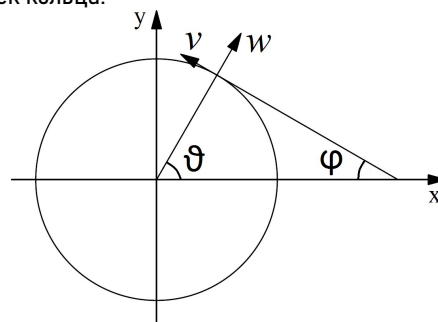
Abstract

The paper deals with the issues of stability of a circular ring compressed by uniformly distributed central forces in the presence of one-sided restrictions on displacements. In the second part of the article, the problem of oscillations of a ring supported by single-acting threads is solved. The problems are reduced to solving some variational problem under restrictions on the desired functions in the form of linear equations and inequalities

Keywords:

stability, ring, variational problem, bifurcation points, one-sided constraints, oscillation

крепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий. Пусть один конец нити прикреплен к неподвижному центру кольца, другой – к некоторой точке кольца. Предположим, что нить является нерастяжимой, т.е. в результате деформации расстояние между центром кольца и точкой прикрепления не может увеличиваться. Обозначим через ϑ центральный угол, $w(\vartheta)$ – радиальное перемещение (прогиб), $v(\vartheta)$ – касательное перемещение точек кольца.



Отметим, что из условия несжимаемости оси кольца следует равенство

$$v' = -w. \quad (1)$$

Пусть нити расположены так часто, что их можно считать непрерывно распределенными по кольцу. Тогда задача на устойчивость сводится к отысканию таких значений

силы P , при которых вариационная проблема

$$J(w) = \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta - \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - w^2) d\vartheta \rightarrow \min_w \quad (2)$$

имеет нетривиальное решение при граничных условиях периодичности и ограничениях

$$w(\vartheta) \leq 0. \quad (3)$$

Здесь D — жесткость на изгиб в плоскости кольца, R — радиус кольца. Первый интеграл в (2) представляет собой упругую энергию, второй — работу сил нормального давления.

Выпишем уравнение Эйлера для функционала (2):

$$w^{IV} + (2 + k^2)w'' + (1 + k^2)w = 0, \quad (4)$$

где $k^2 = \frac{PR^3}{D}$. Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + (2 + k^2)\lambda^2 + (1 + k^2) = 0$$

имеет решения

$$\lambda_{1,2} = \pm i; \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{1 + k^2}.$$

Тогда функция прогиба представима в виде

$$w = A_1 \sin \vartheta + A_2 \cos \vartheta + A_3 \sin \alpha \vartheta + A_4 \cos \alpha \vartheta, \quad (5)$$

где $\alpha = \sqrt{1 + k^2}$.

Зафиксируем некоторый угол $\beta > 0$. Будем считать, что $w(\vartheta) < 0$, $\vartheta \in (0, \beta)$ и $w(\vartheta) \equiv 0$, $\vartheta \in (\beta, 2\pi)$. Первая производная $w'(\vartheta)$ должна быть непрерывной при $\vartheta \in (0, 2\pi)$, тогда функция w удовлетворяет граничным условиям

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\beta) = 0, \quad w'(\beta) = 0. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_2 + A_4 = 0, \\ A_1 + \alpha A_3 = 0, \\ A_1 \sin \beta + A_2 \cos \beta + \\ \quad + A_3 \sin(\alpha\beta) + A_4 \cos(\alpha\beta) = 0, \\ A_1 \cos \beta - A_2 \sin \beta + \\ \quad + \alpha A_3 \cos(\alpha\beta) - \alpha A_4 \sin(\alpha\beta) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Выражая из первых двух уравнений последней системы A_1 и A_4 , получим

$$\begin{cases} A_4 = -A_2, \\ A_1 = -\tilde{\alpha} A_3. \end{cases} \quad (8)$$

Третье и четвертое уравнения в системе (7) примут вид

$$\begin{cases} -\alpha A_3 \sin \beta + A_2 \cos \beta + \\ \quad + A_3 \sin(\alpha\beta) - A_2 \cos(\alpha\beta) = 0, \\ -\alpha A_3 \cos \beta - A_2 \sin \beta + \\ \quad + \alpha A_3 \cos(\alpha\beta) + A_2 \sin(\alpha\beta) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

После упрощения имеем

$$\begin{cases} A_3(\sin(\alpha\beta) - \alpha \sin \beta) + \\ \quad + A_2(\cos \beta - \cos(\alpha\beta)) = 0, \\ A_3(\alpha \cos(\alpha\beta) - \alpha \cos \beta) + \\ \quad + A_2(\alpha \sin(\alpha\beta) - \sin \beta) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= (\sin(\alpha\beta) - \alpha \sin \beta)(\alpha \sin(\alpha\beta) - \sin \beta) - \\ &\quad - (\cos \beta - \cos(\alpha\beta))(\alpha \cos(\alpha\beta) - \alpha \cos \beta) = \\ &= -2\alpha + 2\alpha \cos(\alpha\beta) \cos \beta + \sin(\alpha\beta) \sin \beta + \\ &\quad + \alpha^2 \sin(\alpha\beta) \sin \beta = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая уравнение (11) относительно неизвестной α , получим функцию $\alpha = \alpha(\beta)$. При заданном β уравнение имеет бесконечное число корней. Очевидно, что $\alpha = 1$ является корнем уравнения при любом β . Заметим, что при $\alpha = 1$ параметр $k = 0$, значит, и сила P равна нулю. Далее находим форму прогиба по формулам (5). Несложно убедиться, что формула (5) при $\alpha = 1$ дает перемещение кольца как жесткого целого. Следовательно, надо находить минимальный корень уравнения (11), удовлетворяющий условию $\alpha > 1$. Также необходимо выполнение знаковых ограничений (3). Чем больше угол β , тем меньше k^2 , а значит и сила P . Значения критического параметра P в зависимости от значений угла β приведены в табл. 1.

Таблица 1
Значения критического параметра α в зависимости от угла β
Table 1

Values of critical parameter α depending on angle β

β	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
α	4.9801	4.2915	3.2136	3	2.4841

Численные эксперименты при $\beta > \pi$ показали, что график w будет менять знак на интервале $(0, \beta)$, т.е. ограничения неотрицательности на функцию w не будут выполняться.

Таким образом, минимальное критическое значение параметра $\alpha = 3$, откуда находим: $k^2 = 8$, что соответствует равенству $P = 8D/R^3$. Заметим, что критическое давление для неподкрепленного кольца определяется формулой $P = 3D/R^3$.

Случай центральной нагрузки. Рассмотрим сначала случай плоской деформации. Тогда задача с односторонними ограничениями на перемещения может быть сведена к вариационной проблеме

$$\tilde{J} = \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta \rightarrow \min \quad (12)$$

при ограничениях

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - 2w^2) d\vartheta = 1, \quad (13)$$

$$w \geq 0. \quad (14)$$

Нетрудно показать, что решение задачи (12)–(14) можно искать среди функций строго положительных на некотором

интервале $[0, \vartheta_0]$ и равных нулю, если $\vartheta \notin [0, \vartheta_0]$. Функцию прогиба будем считать равной

$$w = A_1 \sin \tilde{\alpha}\vartheta + A_2 \cos \tilde{\alpha}\vartheta + A_3 \sin \tilde{\beta}\vartheta + A_4 \cos \tilde{\beta}\vartheta, \quad (15)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{2 + k^2 - \sqrt{k^4 - 4k^2}}{2}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2 + k^2 + \sqrt{k^4 - 4k^2}}{2}}, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Функция $w(\vartheta)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$w(0) = w(\vartheta_0) = 0, \quad w'(0) = w'(\vartheta_0) = 0. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (16), получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_2 + A_4 = 0, \\ \tilde{\alpha}A_1 + \tilde{\beta}A_3 = 0, \\ A_1 \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0 + A_2 \cos \tilde{\alpha}\vartheta_0 + \\ \quad + A_3 \sin \tilde{\beta}\vartheta_0 + A_4 \cos \tilde{\beta}\vartheta_0, \\ A_1 \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha}\vartheta_0 - A_2 \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0 + \\ \quad + A_3 \tilde{\beta} \cos \tilde{\beta}\vartheta_0 - A_4 \tilde{\beta} \sin \tilde{\beta}\vartheta_0. \end{cases} \quad (17)$$

Неизвестными в системе (17) будут коэффициенты A_1, A_2, A_3, A_4 . Выражая из первых двух уравнений последней системы A_1, A_4 , получим

$$\begin{cases} A_4 = -A_2, \\ A_1 = -\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}A_3. \end{cases} \quad (18)$$

Тогда последние два уравнения системы (17) можно упростить

$$\begin{cases} A_3(-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0 + \sin \tilde{\beta}\vartheta_0) + \\ \quad + A_2(\cos \tilde{\alpha}\vartheta_0 - \cos \tilde{\beta}\vartheta_0) = 0, \\ A_3(\tilde{\beta} \cos \tilde{\beta}\vartheta_0 - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0) + \\ \quad + A_2(\tilde{\beta} \sin \tilde{\beta}\vartheta_0 - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Определитель системы (19) имеет вид

$$\Delta = (\sin \tilde{\beta}\vartheta_0 - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0)(\tilde{\beta} \sin \tilde{\beta}\vartheta_0 - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0) -$$

$$-(\cos \tilde{\alpha}\vartheta_0 - \cos \tilde{\beta}\vartheta_0)(\tilde{\beta} \cos \tilde{\beta}\vartheta_0 - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0). \quad (20)$$

Для существования нетривиального решения краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta = \Delta(k; \vartheta_0) = 0. \quad (21)$$

Нетривиальные решения системы (19) при $k = k_1$ или $k = k_2$ находим следующим образом. Полагая $A_3 = 1$, находим

$$A_2 = \frac{\sin(\tilde{\alpha}k) - \sin(\tilde{\beta}k)}{\cos(\tilde{\alpha}k) - \cos(\tilde{\beta}k)}.$$

Первые два корня уравнения (21) приведены в табл. 2.

Значения критического параметра k

Таблица 2

Table 2

Critical parameter values k

ϑ_0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4.3}$
k_1	4.3154	4.0463	4.3132
k_2	4.4849	4.3099	4.3132

На рис. 1 представлены графики прогибов $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{3}$. На рис. 2 – графики прогибов $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$.

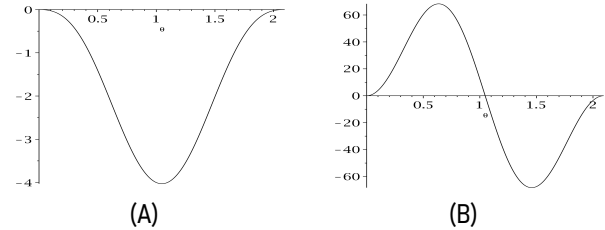


Рисунок 1. Форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{3}$, $k = k_1$ (A); форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{3}$, $k = k_2$ (B).

Figure 1. Deflection shape $w(\vartheta)$ at $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{3}$, $k = k_1$ (A); deflection shape $w(\vartheta)$ at $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{3}$, $k = k_2$ (B).

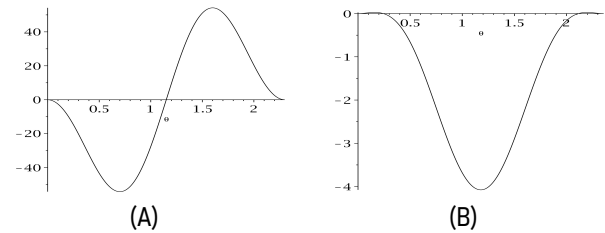


Рисунок 2. Форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$, $k = k_1$ (A); форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$, $k = k_2$ (B).

Figure 2. Deflection shape $w(\vartheta)$ at $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$, $k = k_1$ (A); deflection shape $w(\vartheta)$ at $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$, $k = k_2$ (B).

При $k = k_1$ для $\vartheta_0 \neq \frac{3\pi}{4}$ прогиб $w(\vartheta)$ меняет знак (рис. 2 А), следовательно, ограничение (14) не выполняется. Подходящим (т.е. удовлетворяющим односторонним ограничениям) является второй корень $k = k_2$ при $\vartheta_0 < \frac{3\pi}{4}$ (рис. 2 В). Рассмотрев график производной $w'(\vartheta)$, замечаем, что при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$ производная обращается в ноль на интервале $[a, b]$ ровно три раза. Это означает, что сама функция $w(\vartheta)$ на этом интервале имеет три точки экстремума, откуда следует, что функция меняет знак на этом интервале (рис. 2 В). Если $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$, то корни уравнения (21) будут кратными. С другой стороны, чем больше ϑ_0 , тем меньше значение критического параметра k . Таким образом, значение безразмерного параметра критической силы при наличии односторонних ограничений на перемещения (14) будет равно

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = \frac{PR^3}{D} = 18.6044. \quad (22)$$

В случае плоской деформации при аппроксимации сплайнами прогиба $w(\vartheta)$ при $m = 72$ получено следующее значение безразмерного параметра:

$$\tilde{P} = \frac{PR^3}{D} = 18.5854.$$

Сравнивая это значение с (22), находим, что точность численного решения задачи равна

$$\frac{18.6044 - 18.5854}{18.6044} = 0.00102 = 0.1\%.$$

Отношение $\frac{\tilde{P}}{P_1} = \frac{18.5854}{4.5} = 4.1301$. А из формулы (22) $\frac{18.6044}{4.5} = 4.1343$. Таким образом, подкрепление нитями увеличивает критическую нагрузку кольца в 4.13 раза.

2. Колебания колец

Координаты точек деформированного кольца имеют вид

$$\begin{cases} x(\vartheta) = (R + w(\vartheta)) \cos \vartheta - v(\vartheta) \sin \vartheta, \\ y(\vartheta) = (R + w(\vartheta)) \sin \vartheta + v(\vartheta) \cos \vartheta. \end{cases} \quad (23)$$

Упругая энергия деформированного кольца, подкрепленного нитями с жесткостью c , записывается в виде

$$U = \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta + \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta. \quad (24)$$

Кинетическая энергия кольца описывается уравнением

$$T = \frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta. \quad (25)$$

Здесь ρ – линейная плотность материала. Условие несжимаемости оси кольца $x'^2 + y'^2 = R^2$ после преобразования примет вид: $v' = -w$.

Для получения уравнений колебания кольца применим принцип наименьшего действия: если T – кинетическая энергия системы, U – потенциальная энергия, необходимо найти минимум функционала действия:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt.$$

В нашем случае

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (v''' + v')^2 d\vartheta - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta \right] dt. \quad (26)$$

Выпишем уравнение Эйлера-Остроградского:

$$R\rho(\ddot{v} - \ddot{v}') = \frac{D}{R^3}(v^{VI} + 2v^{IV} + v'') + cv''. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) ищем в виде:

$$v(\vartheta, t) = \xi(t)\eta(\vartheta). \quad (28)$$

Применяя метод разделения переменных, приходим к двум уравнениям:

$$\ddot{\xi} + \frac{D}{R^4\rho}\lambda^2\xi = 0, \quad (29)$$

$$\eta^{VI} + 2\eta^{IV} + \tilde{c}\eta'' + \lambda^2(\eta - \eta'') = 0. \quad (30)$$

Уравнение (29) означает, что движение носит колебательный характер, а уравнение (30) описывает форму колебаний.

Решение (29) имеет вид

$$\xi = C_1 \sin \omega_k t + C_2 \cos \omega_k t, \quad (31)$$

где $\omega_k = \sqrt{\frac{D\lambda_k^2}{R^4\rho}}$ – частота собственных колебаний. Решение уравнения (30) должно быть 2π -периодическим. Этому условию удовлетворяет функция вида:

$$\eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \sin(k\vartheta) + b_k(t) \cos(k\vartheta)). \quad (32)$$

Подставляем ряд (32) в (30) и с учетом ортогональности получаем

$$\eta = \left[-k^6 + 2k^4 - (\tilde{c} - p^2)k^2 + \lambda^2 \right] (\sin(k\vartheta) + \cos(k\vartheta)). \quad (33)$$

Нетривиальное решение существует, если

$$-k^6 + 2k^4 - (\tilde{c} - p^2)k^2 + \lambda^2 = 0.$$

Откуда находим зависимость частоты колебаний от номера гармоники

$$\lambda_k^2 = \frac{k^6 - 2k^4 + \tilde{c}k^2}{k^2 + 1}. \quad (34)$$

Общее решение (27) дается формулой:

$$v(\vartheta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{1k} \sin(\omega_k t) + C_{2k} \cos(\omega_k t) \right) \sin(k\vartheta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\widetilde{C}_{1k} \sin(\omega_k t) + \widetilde{C}_{2k} \cos(\omega_k t) \right) \cos(k\vartheta). \quad (35)$$

Для определения движения необходимы начальные условия при $t = 0$:

$$v(\vartheta, 0) = v_0(\vartheta), \quad \dot{v}(\vartheta, 0) = \dot{v}_0(\vartheta), \quad (36)$$

где v_0 и \dot{v}_0 – известные значения. Разлагая их в ряд Фурье и используя (35), можно найти коэффициенты C_{1k} , C_{2k} , \widetilde{C}_{1k} , \widetilde{C}_{2k} .

Колебания кольца, подкрепленного нитями одно-
стороннего действия. Предположим, что кольцо подкреплено
нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий, т.е.
упругая энергия нитей определяется формулой

$$\frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w_+^2 d\vartheta, \quad (37)$$

где w_+ – положительная срезка функции

$$w_+ = \max\{0, w\} = \frac{w + |w|}{2}.$$

В данном случае функционал J принимает вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + v')^2 d\vartheta - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w_+^2 d\vartheta \right] dt. \quad (38)$$

Перемещения точек кольца ищем в виде

$$v = \sum_{k=1}^N (A_k(t) \sin(k\vartheta) + B_k(t) \cos(k\vartheta)), \quad (39)$$

$$w = \sum_{k=1}^N (kA_k(t) \cos(k\vartheta) - kB_k(t) \sin(k\vartheta)). \quad (40)$$

Функционал (38) принимает стационарное значение. Вы-
пишем для него уравнения Эйлера относительно A_k и B_k

$$R\rho\pi(1+k^2)\ddot{A}_k + \frac{D}{R^3}\pi(k^3-k)^2 A_k + c \int_0^{2\pi} S_+ k \cos(k\vartheta) d\vartheta = 0, \quad (41)$$

$$R\rho\pi(1+k^2)\ddot{B}_k + \frac{D}{R^3}\pi(k^3-k)^2 B_k - c \int_0^{2\pi} S_+ k \sin(k\vartheta) d\vartheta = 0, \quad (42)$$

где $S_+ = \left[\sum_{j=1}^N (jA_j \cos(j\vartheta) - jB_j \sin(j\vartheta)) \right]_+$.

Выражаем вторые производные

$$\ddot{A}_k = -\frac{D(k^3-k)^2}{R^4\rho(1+k^2)} A_k - \frac{c}{R\rho\pi(1+k^2)} \int_0^{2\pi} S_+ k \cos(k\vartheta) d\vartheta, \quad (43)$$

$$\ddot{B}_k = -\frac{D(k^3-k)^2}{R^4\rho(1+k^2)} B_k + \frac{c}{R\rho\pi(1+k^2)} \int_0^{2\pi} S_+ k \sin(k\vartheta) d\vartheta. \quad (44)$$

Введем вектор

$$V = (A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N)^T. \quad (45)$$

Уравнения (43), (44) запишем в виде

$$\ddot{V} = f(V), \quad (46)$$

где

$$f_j = -\frac{D(k^3-k)^2}{R^4\rho(1+k^2)} A_k - \frac{c}{R\rho\pi(1+k^2)} \int_0^{2\pi} S_+ k \cos(k\vartheta) d\vartheta \quad (47)$$

при $j = 1, \dots, N$ и

$$f_j = -\frac{D(k^3-k)^2}{R^4\rho(1+k^2)} B_k + \frac{c}{R\rho\pi(1+k^2)} \int_0^{2\pi} S_+ k \sin(k\vartheta) d\vartheta \quad (48)$$

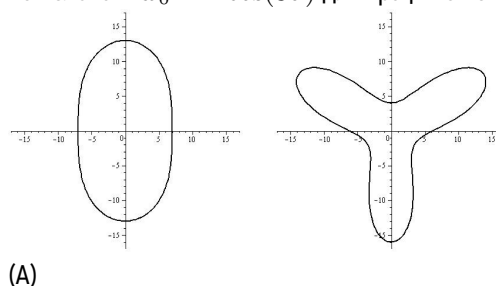
при $j = N+1, \dots, 2N$. Система (46) эквивалентна систе-
ме, состоящей из дифференциальных уравнений первого
порядка

$$\begin{cases} \dot{V} = Z, \\ \dot{Z} = f(V). \end{cases} \quad (49)$$

Для решения последней использовался метод Рунге-Кутты
4-го порядка.

Результаты и их обсуждения

На рис. 3 представлены графики собственных форм ко-
лебаний кольца радиуса $R = 10$ м с жесткостью нитей
 $c = 35$ Н/мм, цилиндрической жесткостью $D = 66.7$ Н-м
при разных начальных условиях $w_0 = 1.5 \sin(2\vartheta)$ для
графиков слева и $w_0 = 2 \cos(3\vartheta)$ для графиков справа.



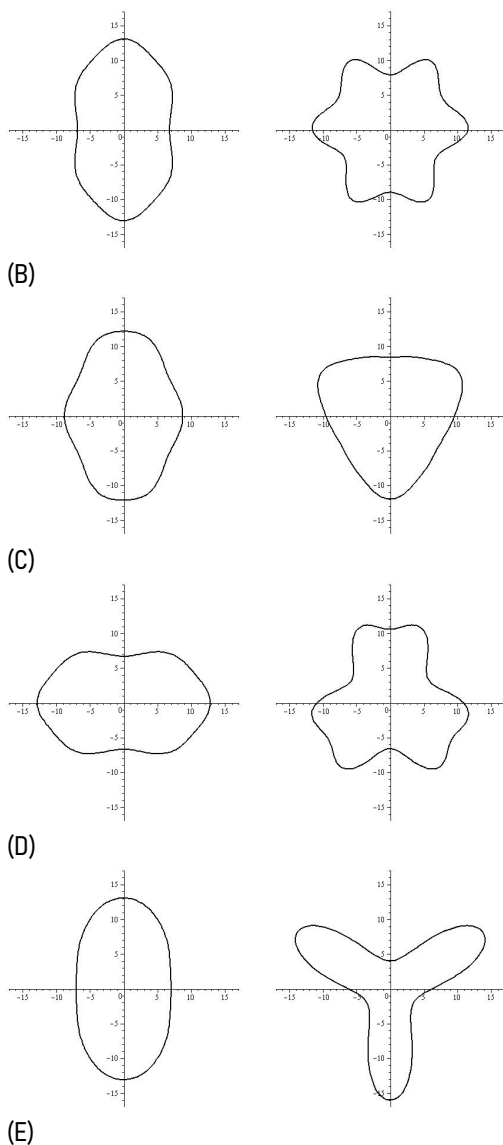


Рисунок 3. График собственных форм колебаний кольца при А) $t = 0$, В) $t = 2.8$, С) $t = 6.0$, D) $t = 8.0$, E) $t = 16$.
 Figure 3. Graph of the eigenmodes of the ring at А) $t = 0$, В) $t = 2.8$, С) $t = 6.0$, D) $t = 8.0$, E) $t = 16$.

Наблюдается эффект возврата в начальное состояние (эффект Ферми-Паста-Улама). Энергия остается локализованной в начальных и нескольких соседних гармониках. При больших значениях t наблюдается почти полный возврат энергии в начальную гармонику. К примеру, для рисунков слева разница между начальным и конечным состояниями равна $\max\{v - v_0\} \leq 0.039$, $\max\{w - w_0\} \leq 0.074$. Для рисунков справа $\max\{v - v_0\} \leq 0.040$, $\max\{w - w_0\} \leq 0.036$.

Таким образом, подкрепление колец нерастяжимыми нитями сможет существенно увеличить критическую нагрузку. Результаты работы могут оказаться полезными при расчетах и проектировании на прочность и устойчивость тонкостенных конструкций.

Литература

1. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1967.

2. Сухарев, А.Г. Глобальный экстремум и методы его отыскания / А.Г. Сухарев // Математические методы и исследования операций. – Москва: Издательство МГУ, 1981. – С. 4–37.
3. Алфутов, Н.А. Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии / Н.А. Алфутов, А.Н. Еремичев // Расчеты на прочность. – Москва: Машиностроение, 1989. – С. 179–180.
4. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1967. – 376 с.
5. Andryukova, V.Y. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V.Y. Andryukova, V.N. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
6. Tarasov, V.N. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems / V.N. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

References

1. Panovko, Ya.G. Osnovy prikladnoy teorii uprugikh kolebaniy [Fundamentals of the applied theory of elastic vibrations] / Ya.G. Panovko. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1967.
2. Sukharev, A.G. Global'nyy ekstremum i metody yego otyskaniya [Global extremum and methods for finding it] // A.G. Sukharev. – Mathematical methods and operations research. – Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1983. – P. 4–37.
3. Alfutov, N.A. Vliyaniye odnostoronnikh svyazey na ustoychivost' tsilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii [Influence of unilateral bonds on the stability of cylindrical shells under axial compression] // N.A. Alfutov, A.N. Eremichev. – Strength calculations. – Moscow: Engineering, 1989. – P. 179–180.
4. Feodosiev, V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials] / V.I. Feodosiev. – Moscow: Nauka, 1967. – 376 p.
5. Andryukova, V.Y. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V.Y. Andryukova, V.N. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
6. Tarasov, V.N. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems / V.N. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

Для цитирования:

Андрюкова, В.Ю. О влиянии односторонних связей на устойчивость и колебания упругих колец / В.Ю. Андрюкова // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 23–29.

For citation:

Andryukova, V.Yu. O vliyanií odnostoronnih svyazej na ustojchivost' i kolebaniya uprugih kolec [On the influence of unilateral bonds on the stability and oscillations of elastic rings] / V.Yu. Andryukova // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 23–29.

Дата поступления рукописи: 23.06.2023

Received: 23.06.2023

Контактная задача для кольца, подкрепленного упругими тонкими спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса

В.Н. Тарасов, Н.О. Смолева

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

vntarasov@ipm.komisc.ru
nataljafilipp5@gmail.com

Аннотация

В работе рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии колеса со спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса. Используется вариационная постановка, что позволяет учесть перемещения точки приложения силы (центра колеса). Также рассмотрена возможность потери устойчивости спиц, если сжимающая сила достаточно велика. В этом случае возникает контактная задача с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции.

Ключевые слова:

кольцо, вариационная задача, момент, упругая энергия, устойчивость, квадратичное программирование, контактная задача

Введение

Улучшение прочностных характеристик традиционных материалов и использование новых высокопрочных композиционных материалов обусловило появление легких, экономичных тонкостенных конструкций в современном машиностроении. В свою очередь, это привело к необходимости использовать все более точные методы расчета на прочность. Интерес к исследованию контактных задач теории упругости с неизвестной областью активного взаимодействия контактирующих элементов обусловлен, с одной стороны, необходимостью расчета все более сложных конструкций, встречающихся в инженерной практике, с другой — фундаментальными результатами, полученными сравнительно недавно в теории оптимизации, негладкого выпуклого и невыпуклого анализов. Основное отличие таких задач от задач с известной границей контакта заключается в том, что при их математической формализации используются неравенства или (при вариационной постановке) могут возникнуть негладкие функционалы. Такие задачи не могут быть линеаризованы, они являются конструктивно-нелинейными. При расчетах на прочность

Contact problem for a ring reinforced with elastic thin spokes, which is under the action of a force applied to the wheel axle

V.N. Tarasov, N.O. Smoleva

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

vntarasov@ipm.komisc.ru
nataljafilipp5@gmail.com

Abstract

The paper considers the problem of the stress-strain state of a spoked wheel, which is under the action of a force applied to the wheel axle. A variational formulation is used, which makes it possible to take into account the displacement of the point of application of force (wheel center). The possibility of loss of stability of the spokes is also considered if the compressive force is sufficiently large. In this case, a contact problem arises with an unknown area of active interaction of structural elements.

Keywords:

ring, variational problem, moment, elastic energy, stability, quadratic programming, contact problem

при конечномерной аппроксимации они сводятся к некоторой задаче квадратичного программирования. Методом решения задач квадратичного программирования посвящена книга [1]. В последнее время (применительно, в частности, к задачам конструктивно-нелинейной механики) интенсивно развивается теория вариационных неравенств. Основы теории вариационных неравенств заложены в работах Ж.-Л. Лионса, Г. Дюво и др. [2]. Разнообразным приложениям теории вариационных неравенств, в том числе и к задачам механики, посвящены монографии [3, 4]. Интересные задачи в механике упругих конструкций с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции рассмотрены в работе [5]. Систематическому применению методов оптимизации в решении конструктивно-нелинейных задач, в том числе и задач устойчивости упругих систем с неустойчивыми связями, посвящена книга [6].

В работе рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии колеса со спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса. Используется вариационная постановка,

что позволяет учесть перемещения точки приложения силы (центра колеса). Рассмотрена возможность потери устойчивости спиц, если сжимающая сила достаточно велика. В этом случае возникает контактная задача с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции. Неизвестные перемещения представляются в виде частичной суммы рядов Фурье. Тогда возникает задача выпуклого квадратичного программирования при наличии линейных ограничений неравенств.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу на определение усилий, действующих в спицах велосипедного колеса, и напряжения, возникающего в ободе при приложении к оси колеса силы P (рис. 1). Основание, на которое опирается колесо, можно считать жестким. Число спиц m велико настолько, что позволяет рассматривать спицы не как отдельные стержни, а как непрерывную упругую среду жесткости C (простое винклеровское основание).

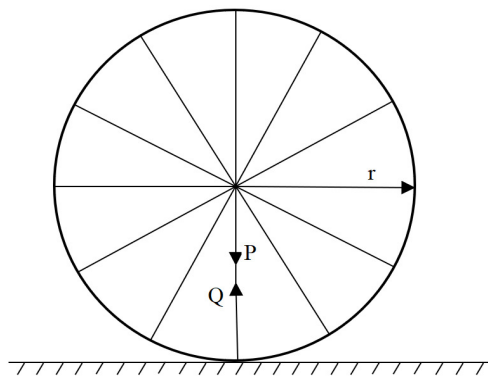


Рисунок 1. Кольцо, подкрепленное спицами и нагруженное силой P .
Figure 1. Ring backed by spokes and loaded with force P .

Пусть кольцо в недеформированном состоянии является кругом радиуса R , декартовы координаты которого определяются формулами

$$\begin{cases} x = R \cos \vartheta, \\ y = R \sin \vartheta, \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

где $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ — центральный угол. Обозначим через $\xi = (-\cos \vartheta, -\sin \vartheta)$ нормаль, а через $\eta = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$ — касательный вектор. Перемещение точек кольца в результате плоской деформации описывается вектором

$$W = u(\vartheta)\xi + w(\vartheta)\eta.$$

Здесь под u принимается нормальное перемещение точек кольца, а под w — тангенциальное перемещение. Тогда декартовы координаты деформированного кольца описываются уравнениями

$$\begin{cases} x = (R - u) \cos \vartheta - w \sin \vartheta, \\ y = (R - u) \sin \vartheta + w \cos \vartheta. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим после деформации нормальный и касательный векторы к упругой линии через ξ_*, η_* . Векторы ξ, η могут быть переведены в векторы ξ_*, η_* путем поворота на малый угол β . Предполагая, что перемещения являются малыми, можно записать

$$\beta = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\vartheta} + w \right), \quad (3)$$

а изменение кривизны дуги кольца определяется формулой [7]

$$\delta q = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + \frac{dw}{d\vartheta} \right).$$

Кроме того, выполнено условие несжимаемости

$$u = w'. \quad (4)$$

Расчетными характеристиками при деформациях криволинейных стержней являются

$$M = -\frac{EJ}{R^2}(u'' + u), \quad Q = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\vartheta}$$

— момент и перерезывающая сила, распределенные по ободу кольца. По известным M и Q вычисляются напряжения. Пусть J — момент инерции сечения кольца, F — площадь поперечного сечения спицы, E — модуль Юнга, $B = EJ$. Энергия упругой деформации кольца, с учетом условия несжимаемости, в квадратичном приближении определяется формулой

$$U = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} \delta q^2 d\vartheta = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta. \quad (5)$$

Энергия деформации спиц в случае неподвижного центра кольца имеет вид

$$U_1 = \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta.$$

Полная энергия записывается следующим образом

$$U + U_1 = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (u'' + u)^2 d\vartheta + \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta. \quad (6)$$

Кроме того, должны быть выполнены граничные условия периодичности и условия $y(\frac{3}{2}\pi) \geq -R$, что приводит к неравенству $u(\frac{3}{2}\pi) \geq 0$.

В положении равновесия полная энергия (6) минимальна, поэтому выполнено уравнение Эйлера

$$\frac{B}{R^3} (u^{IV} + 2u'' + u) + Cu = 0. \quad (7)$$

Если продифференцировать последнее уравнение по ϑ , то оно совпадает с уравнением равновесия

$$\frac{d^5 w}{d\vartheta^5} + 2 \frac{d^3 w}{d\vartheta^3} + a^2 \frac{dw}{d\vartheta} = 0, \quad (8)$$

где

$$a^2 = \frac{R^4 \eta}{EJ} + 1, \quad \eta = \frac{EFm}{2\pi R^2},$$

а m — число спиц. Решение этой задачи приведено в книге В.И. Феодосьева [5], где отмечено, что впервые

она была рассмотрена Н.Е. Жуковским. Предполагая, что спицы расположены достаточно часто, их можно представить как непрерывную упругую среду, тогда для любой точки обода колеса сила, действующая со стороны спиц, пропорциональна радиальному смещению $u(\vartheta)$. Также в работе [5] получено уравнение равновесия (8).

Решением этого уравнения будет

$$w = C_0 + C_1 \operatorname{ch}(\alpha\vartheta) \cos(\beta\vartheta) + C_2 \operatorname{sh}(\alpha\vartheta) \sin(\beta\vartheta) + C_3 \operatorname{ch}(\alpha\vartheta) \sin(\beta\vartheta) + C_4 \operatorname{sh}(\alpha\vartheta) \cos(\beta\vartheta), \quad (9)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a+1}{2}}.$$

Постоянные C_0, \dots, C_4 находятся из следующих граничных условий:

$$\text{при } \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{dw}{d\vartheta} = 0, \quad (10)$$

$$\text{при } \vartheta = \frac{3\pi}{2} \quad Q = -\frac{P}{2}, \quad (11)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} u d\vartheta = 0. \quad (12)$$

Недостатком уравнения (8) является предположение, что центр колеса неподвижен. Учет перемещения центра колеса может существенно повлиять на величину усилий в спицах и на напряженно-деформированное состояние обода колеса.

Обозначим через t перемещение центра кольца вдоль оси y , ε_j – относительное удлинение j -й спицы, $j \in 1..m$. После деформации расстояние между центром колеса и точкой обода определяется формулой

$$\rho = \left(u^2 - 2uR + w^2 + R^2 + 2ut \sin \vartheta - 2wt \cos \vartheta - 2Rt \sin \vartheta + t^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

В линейном приближении относительное удлинение спицы $(\rho - R)/R$ будет иметь вид

$$\varepsilon_j = \frac{1}{R} (-u(\vartheta_j) - t \sin \vartheta_j). \quad (14)$$

Работа внешних сил равна

$$V = Pt, \quad (15)$$

а энергия деформации спицы пропорциональна квадрату относительного удлинения

$$U_j = \frac{EF}{2R} \varepsilon_j^2. \quad (16)$$

В положении равновесия полная потенциальная энергия системы принимает минимальное значение,

поэтому приходим к задаче на экстремум

$$J(u, t) = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2R} EF \varepsilon_i^2 - Pt \rightarrow \min_{u, t}. \quad (17)$$

Перемещения будем искать в виде частичных сумм ряда Фурье

$$w = \sum_{i=1}^n z_i \sin(i\vartheta) + z_{i+n} \cos(i\vartheta), \quad (18)$$

$$u = \sum_{i=1}^n i z_i \cos(i\vartheta) - z_{i+n} i \sin(i\vartheta). \quad (19)$$

При этом должно выполняться условие

$$y \left(\frac{3\pi}{2} \right) \geq -R, \quad (20)$$

что приводит к ограничениям на переменные z . Например, при $n = 20$ неравенство принимает вид

$$\begin{aligned} & -2z_2 + 4z_4 - 6z_6 + 8z_8 - 10z_{10} + 12z_{12} - \\ & -14z_{14} + 16z_{16} - 18z_{18} + 20z_{20} + z_{21} - \\ & -3z_{23} + 5z_{25} - 7z_{27} + 9z_{29} - 11z_{31} + \\ & + 13z_{33} - 15z_{35} + 17z_{37} - 19z_{39} \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы исключить перемещения кольца вдоль оси x как жесткого целого, потребуем выполнение равенства

$$x(0) + x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x(\pi) + x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad (22)$$

откуда получаем (при $n = 20$)

$$\begin{aligned} & -4z_1 - 4z_3 - 12z_5 - 12z_7 - 20z_9 - \\ & -20z_{11} - 28z_{13} - 28z_{15} - 36z_{17} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя (18),(19) в (17) приходим к некоторой задаче выпуклой оптимизации.

Таким образом, приходим к задаче выпуклого квадратичного программирования

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{B}{2R^3} \sum_{i=1}^n i^2 (i^2 - 1)^2 (z_i^2 + z_{i+n}^2) + \\ & + \frac{EF}{2R} \sum_{j=1}^m (-u(\vartheta_j) - \sin \vartheta_j z_{2n+1})^2 - \\ & - z_{2n+1} P \rightarrow \min_{z \in R^{2n+1}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\vartheta_j = \frac{2\pi(j-1)}{m}, \quad j = 1, \dots, m, \quad z_{2n+1} = t$$

при ограничениях (20), (22).

2. Результаты численных экспериментов

Результаты расчетов приведены на рис. 2-4 при следующих данных: $E = 2.05 \times 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, $P = 40 \text{ кг}$, радиус колеса — 31 см, момент инерции сечения обода — 0.3 см^4 , диаметр спиц — $2r = 0.2 \text{ см}$.

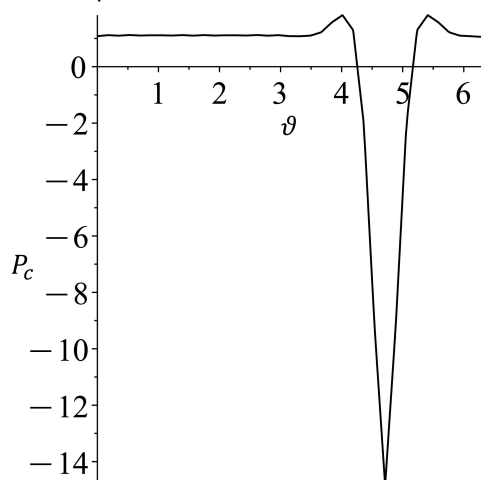


Рисунок 2. Распределение усилий по спицам колеса.
Figure 2. The distribution of forces on the spokes of the wheel.

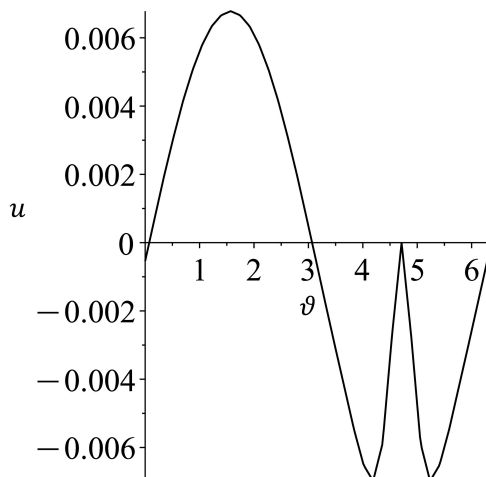


Рисунок 3. Радиальное перемещение точек обода колеса.
Figure 3. Radial movement of wheel rim points.

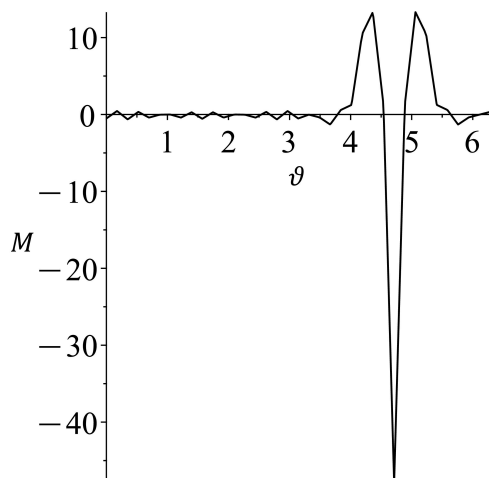


Рисунок 4. Распределение моментов вдоль обода колеса.
Figure 4. Moment distribution along the wheel rim.

Вычисления по формулам (9)-(12) дают аналогичные результаты. В работе [5] приведены графики распределения усилий по спицам и график моментов. Максимальный момент при заданных параметрах равен 88.40 кг·см, максимальное сжимающее усилие на спицу — 11.2 кг.

Отрицательные усилия на спицах являются сжимающими, поэтому при достаточно большой нагрузке спицы могут потерять устойчивость. Критическая сила Эйлера при граничных условиях шарнирного опирания для спиц равна

$$P_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 E J_c}{l^2} = \frac{2.05 \cdot 10^6 \pi^2 \cdot J_c}{31^2} = 0.53 \text{ кг},$$

где момент инерции сечения спицы $J_c = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{7.85}{10^5}$. Предположим, что спицы потеряли устойчивость. Тогда упругая энергия спиц вычисляется по формуле

$$U_c = \frac{EF}{2R} \sum_{j=1}^m \varepsilon_{j+}^2,$$

где

$$\varepsilon_{j+}^2 = \max\{0, \varepsilon_j\} = \frac{|\varepsilon_j| + \varepsilon_j}{2}.$$

Введем дополнительные переменные $z_{2n+2}, z_{2n+3}, \dots, z_{2n+m+1}$ и рассмотрим задачу

$$f(z) = \frac{B}{2R^3} \sum_{i=1}^n (i^2(i^2 - 1)^2 z_i^2 + z_{i+n}^2) + \frac{1}{2R} \sum_{j=1}^m (-u(\vartheta_j) - z_{2n+1} \sin \vartheta_j + z_{2n+1+j})^2 \rightarrow \min_z, \quad (25)$$

при ограничениях

$$z_{2n+1+j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (26)$$

и при выполнении ограничений (20) и (22). Результаты решения задачи (25), (26), (21) и (23) представлены на рис. 3-5.

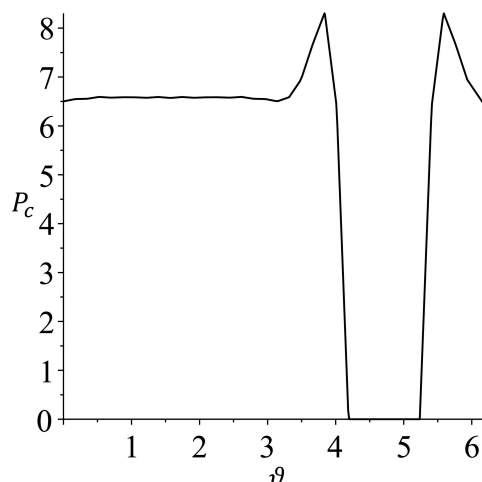


Рисунок 5. Распределение усилий по спицам колеса.
Figure 5. The distribution of forces on the spokes of the wheel.

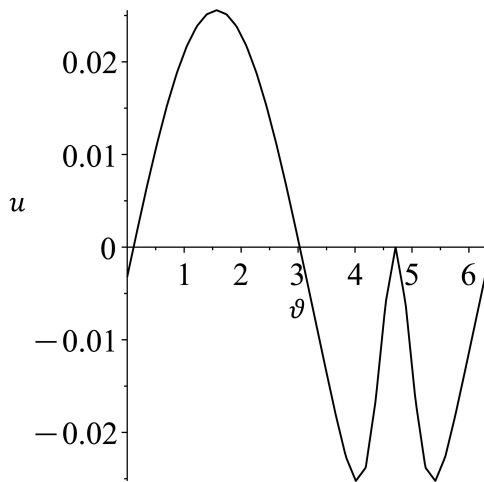


Рисунок 6. Радиальное перемещение точек обода колеса.
Figure 6. Radial movement of wheel rim points.

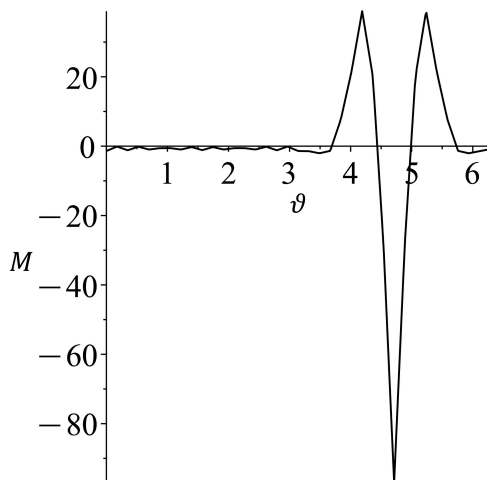


Рисунок 7. Распределение моментов вдоль обода колеса.
Figure 7. Moment distribution along the wheel rim.

Потеря устойчивости спиц существенно влияет на напряженно-деформированное состояние колеса: радиальные перемещения по величине отличаются в три раза. Ясно, что в этом случае спицы не испытывают сжимающих усилий, максимальный момент в два раза больше, чем в случае решения задачи (25), (22), (23), (26).

Потеря устойчивости спиц является нежелательным явлением, поэтому при сборке колец используется предварительное натяжение спиц. Предположим, что первоначальная длина спицы l меньше радиуса кольца: $l = R - d$. После деформации длина спицы изменяется на величину

$$\rho = \left(u^2 - 2uR + w^2 + R^2 + 2ut \sin \vartheta - 2wt \cos \vartheta - 2Rt \sin \vartheta + t^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Тогда для относительного удлинения вместо формулы (14) надо использовать формулу

$$\varepsilon_j = \frac{1}{R-d} (-u(\vartheta_j) - t \sin \vartheta_j + d).$$

Таким образом, приходим к задаче квадратичного программирования

$$f(z) = \frac{B}{2R^3} \sum_{i=1}^n i^2 (i^2 - 1)^2 (z_i^2 + z_{i+n}^2) + \frac{EF}{2(R-d)} \sum_{j=1}^m (-u(\vartheta_j) - z_{2n+1} \sin \vartheta_j + d)^2 - z_{2n+1} P \rightarrow \min_{z \in R^{2n+1}}, \quad (28)$$

$$\vartheta_j = \frac{2\pi(j-1)}{m}, \quad z_{2n+1} = t.$$

На рис. 8 и 10 представлены результаты вычислений при $d = \frac{R}{4000} = \frac{31}{4000} = 0.0078$. В данном случае спицы вообще не испытывают сжимающих усилий, момент в два раза меньше, чем в случае, когда спицы могут потерять устойчивость (рис. 7).

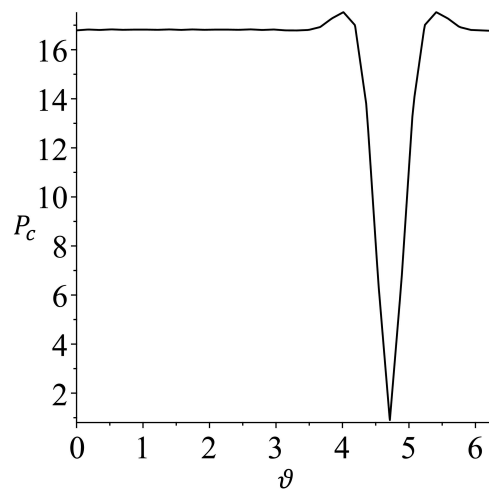


Рисунок 8. Распределение усилий по спицам колеса.
Figure 8. The distribution of forces on the spokes of the wheel.

На рис. 9 представлены результаты вычислений при $d = \frac{R}{4500} = \frac{31}{4500} = 0.0069$. Сравнение этих результатов показывает, что небольшое изменение предварительного натяжения спиц незначительно влияет на напряженно-деформированное состояние колеса.

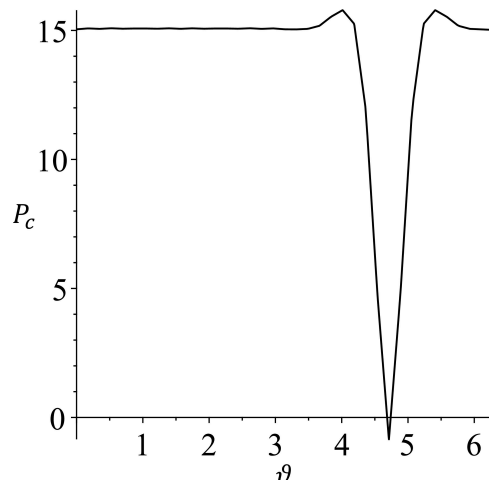


Рисунок 9. Распределение усилий по спицам колеса.
Figure 9. The distribution of forces on the spokes of the wheel.

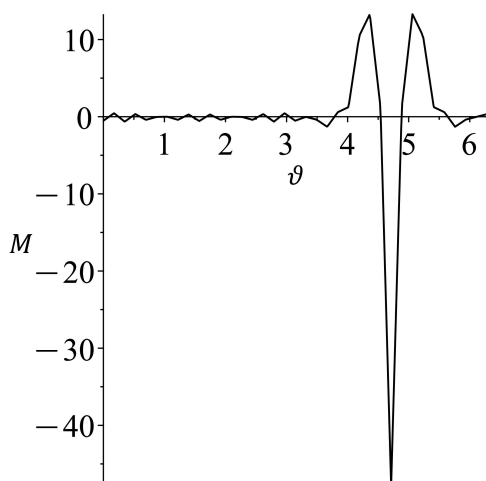


Рисунок 10. Распределение моментов вдоль обода колеса.
Figure 10. Moment distribution along the wheel rim.

Заключение

Таким образом, вариационная постановка задачи расчета колеса со спицами позволяет учесть эффект предварительного натяжения спиц. Этот эффект приводит к существенно другим результатам, и его необходимо учитывать при расчетах.

Литература

1. Даугавет, В.А. Численные методы квадратичного программирования / В.А. Даугавет. – Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербур. гос. университета, 2004. – 128 с.
2. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер. – Москва: Мир, 1979. – 574 с.
3. Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос. – Москва: Мир, 1989. – 494 с.
4. Байокки, К. Вариационные и квазिवариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей / К. Байокки, А. Капело. – Москва: Наука, 1988. – 448 с.

Для цитирования:

Тарасов, В.Н. Контактная задача для кольца, подкрепленного упругими тонкими спицами, находящегося под действием силы, приложенной к оси колеса / В.Н. Тарасов, Н.О. Смолева // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 30–35.

For citation:

Tarasov, V.N. Kontaktnaya zadacha dlya kol'ca, podkreplennogo uprugimi tonkimi spicami, nahodyashchegosya pod dejstviem sily, prilozhennoj k osi koleasa [Contact problem for a ring reinforced with elastic thin spokes, which is under the action of a force applied to the wheel axle] / V.N. Tarasov, N.O. Smoleva // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 30–35.

Дата поступления рукописи: 03.07.2023

Received: 03.07.2023

5. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1967. – 376 с.
6. Тарасов, В.Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем / В.Н. Тарасов. – Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2013. – 238 с.
7. Николаи, Е.Л. Труды по механике / Е.Л. Николаи. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 583 с.

References

1. Daugavet, V.A. Chislennyye metody kvadratsichnogo programirovaniya [Numerical methods of quadratic programming] / V.A. Daugavet. – Saint Petersburg: St. Petersburg State Univ. Publ. House, 2004. – 128 p.
2. Glovinski, R. Chislennoe issledovanie variacionnyh neravenstv [Numerical study of variational inequalities] / R. Glovinski, Zh.L. Lions, R. Tremol'er. – Moscow: Mir, 1979. – 574 p.
3. Panagiotopoulos, P. Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevyuklyye funktsii energii [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy function] / P. Panagiotopoulos. – Moscow: Mir, 1989. – 494 p.
4. Bajokki, K. Variacionnye i kvazivariacionnye neravenstva. Prilozheniya k zadacham so svobodnoj granicej [Variational and quasi-variational inequalities. Applications to Free Boundary Problems] / K. Bajokki, A. Kapelo. – Moscow: Science, 1988. – 448 p.
5. Feodosiev, V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials] / V.I. Feodosiev. – Moscow: Science, 1967. – 376 p.
6. Tarasov, V.N. Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem [Optimization methods in the study of constructive-nonlinear problems in the mechanics of elastic systems] / V.N. Tarasov. – Syktyvkar: Komi Science Centre UB RAS, 2013. – 238 p.
7. Nikolai, E.L. Trudy po mekhanike [Transactions on mechanics] / E.L. Nikolai. – Moscow: Gostekhizdat, 1955. – 583 p.

Стандартная модель в ранней Вселенной

Н.А. Громов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
gromov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Выдвигается гипотеза о том, что калибровочная группа стандартной модели становится проще с ростом температуры Вселенной, т.е. при движении назад во времени к моменту ее возникновения. Предполагается, что это упрощение достигается с помощью контракции калибровочной группы с параметром контракции, который уменьшается с ростом температуры. Лагранжиан стандартной модели при этом разбивается на слагаемые, различающиеся степенями контракционного параметра, что позволяет упорядочить во времени стадии ее развития по мере остывания Вселенной. Эволюция свойств частиц и их взаимодействий базируется на явном виде промежуточных лагранжианов и происходит в естественном порядке от простого к сложному, начиная с планковского масштаба 10^{19} ГэВ. Гипотеза о контракции калибровочной группы стандартной модели не противоречит экспериментальным данным БАК по сечениям рождения бозона Хиггса.

Ключевые слова:

стандартная модель, контракция калибровочной группы, высокотемпературный предел, ранняя Вселенная

Введение

Современная теория элементарных частиц и их взаимодействий — стандартная модель — с приемлемой точностью объясняет имеющиеся экспериментальные данные. Она была подтверждена открытием бозона Хиггса в экспериментах на Большом адронном коллайдере (далее — БАК). Стандартная модель представляет собой калибровочную теорию, в основе которой лежит группа симметрии $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, являющейся прямым произведением унитарных групп. Каждый множитель прямого произведения отвечает за определенный вид частиц и их взаимодействий. Сильные взаимодействия кварков описываются квантовой хромодинамикой с калибровочной группой $SU(3)$ и характерной температурой 0.2 ГэВ. В электро-слабой модели с калибровочной группой $SU(2) \times U(1)$ группа $SU(2)$ отвечает за слабые взаимодействия с характерной температурой 100 ГэВ, тогда как группа $U(1)$ ассоциирована с дальнедействующими электромагнитны-

Standard Model in the early Universe

N.A. Gromov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar
gromov@ipm.komisc.ru

Abstract

A new hypothesis is put forward that the gauge group of the Standard Model becomes simpler with increasing temperature of the Universe, i.e. when moving back in time to the moment of its occurrence. It is assumed that this simplification is achieved by contracting the gauge group with the contraction parameter, which decreases with increasing temperature. In this case, the Lagrangian of the Standard Model is divided into terms that differ in powers of the contraction parameter. This makes it possible to arrange in time the stages of development of the Standard Model as the Universe cools. The evolution of the properties of elementary particles and their interactions, starting from the Planck scale of 10^{19} GeV, is based on the explicit form of intermediate Lagrangians and explain the development of the Universe from simpler to more complicated structures — and not vice versa. The contraction hypothesis of the gauge group of the Standard Model contradicts the available experimental data on the Higgs boson production cross section.

Keywords:

standard model, contractions of gauge group, high temperature limit, early Universe

ми взаимодействиями. Вследствие нулевой массы фотона — переносчика этого взаимодействия — его характерная температура простирается до планковской энергии 10^{19} ГэВ, т.е. до того предела, где становятся существенными гравитационные взаимодействия.

Несмотря на наличие в теории большого количества свободных параметров [1], среди них нет параметра, связанного с температурой Вселенной и регулирующего порядок энергий, при которых стандартная модель адекватно описывает мир элементарных частиц и их взаимодействий. На заре ее формирования была выдвинута гипотеза [2, 3], получившая название теории великого объединения (далее — ТВО), согласно которой при некоторой большой энергии (температуре) Вселенной все три взаимодействия — сильное, слабое и электромагнитное — объединяются в одно гипотетическое взаимодействие в рамках более сложной калибровочной группы $SU(5)$ или ей по-

добных. Несмотря на обилие за последние полвека впечатляющих теоретических разработок, предсказания ТВО не подтвердились в современных экспериментах, в том числе в экспериментах на БАК [4].

Опираясь на значение характерных энергий, выдвинута [5–7] новая гипотеза: калибровочная группа стандартной модели становится проще с увеличением температуры Вселенной. Иными словами, по мере остывания Вселенной микромир эволюционирует естественным образом от простых структур к более сложным. В качестве механизма изменения калибровочной группы предложена операция **контракции группы** $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, параметр которой уменьшается при увеличении температуры. Поскольку средняя энергия (температура T) горячей Вселенной связана с ее возрастом [8], то параметр контракции $\epsilon \sim T^{-q}$, $q > 0$ стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, т.е. при приближении к моменту ее рождения в результате Большого взрыва.

Операция контракции (или предельного перехода) групп (алгебр) Ли давно известна в физике [9]. В результате предельного процесса исходная группа (алгебра) становится проще, часть коммутационных соотношений обращается в ноль, в частности, простая группа преобразуется в неполупростую. Позднее понятие контракции было распространено [10] на алгебраические структуры, такие как квантовые группы, алгебры Вирасоро, супергруппы и супералгебры Ли, а также на фундаментальные представления унитарных групп, которые имеют непосредственное отношение к стандартной модели. Для симметричной физической системы контракция группы симметрии означает переход к некоторому предельному состоянию системы. В случае сложной системы, каковой является стандартная модель, изучение ее предельных состояний при тех или иных предельных значениях физических параметров позволяет лучше понять поведение системы в целом. Мы обсудим на уровне классических калибровочных полей [11] модифицированную стандартную модель с контрактированной калибровочной группой.

Деформация в широком смысле слова есть операция обратная к контракции. Нетривиальная деформация алгебраической структуры означает, вообще говоря, ее неочевидное обобщение и зачастую представляет собой значительное достижение в теории алгебраических структур. Ярким примером является открытие квантовых групп [12], т.е. таких обобщений алгебр Хопфа, которые являются одновременно некоммутативными и некокоммутативными, тогда как ранее были известны алгебры Хопфа, обладающие только одним из этих свойств. Предложенным в этой классической работе методом построены квантовые аналоги простых групп (алгебр) Ли. Оказалось, что в случае полупростых групп (алгебр) метод не работает, поэтому квантовые аналоги этой категории групп (алгебр) Ли были получены методом контракций соответствующих простых групп (алгебр) [10]. Однако если сначала производится контракция некоторой математической структуры, то исходная структура может быть восстановлена с помощью деформации в узком смысле, выполняемой в обратном по отношению к контракции направлении.

Мы используем эту возможность для того, чтобы восстановить эволюцию частиц в ранней Вселенной, опираясь на достигнутый к настоящему времени уровень знаний. Для этого рассмотрим поведение стандартной модели в пределе «бесконечной» температуры, порожденное, в соответствии с нашей гипотезой, контракцией калибровочных групп $SU(2)$ и $SU(3)$ [5–7]. Подобные высокие температуры могут существовать в ранней Вселенной в первые мгновения после Большого взрыва [8].

Оказывается, что в результате контракции калибровочной группы лагранжиан стандартной модели распадается на ряд слагаемых, которые различаются степенями стремящегося к нулю контракционного параметра $\epsilon \rightarrow 0$. Поскольку температура в горячей Вселенной связана с ее возрастом, то, двигаясь вперед во времени, т.е. в обратном к высокотемпературной контракции направлению, мы заключаем, что после рождения Вселенной частицы и их взаимодействия проходят ряд стадий в эволюции от предельного состояния с «бесконечной» температурой до состояния, описываемого стандартной моделью. Эти стадии формирования кварк-глюонной плазмы, восстановления электрослабой и цветовой симметрий различаются по степеням контракционного параметра и, следовательно, по времени их возникновения.

Из контракции стандартной модели можно классифицировать указанные стадии по принципу «раньше–позже», но нельзя определить время, прошедшее после рождения Вселенной. Для установления абсолютного времени используем дополнительные предположения, а именно тот факт, что электрослабая эпоха начинается при характерной температуре 100 ГэВ, а эпоха квантовой хронодинамики (далее — КХД) при температуре 0.2 ГэВ. Иначе говоря, принимаем, что полная реконструкция электрослабой модели, лагранжиан которой включает слагаемые пропорциональные четвертой степени контракционного параметра ϵ , и восстановление КХД с минимальными слагаемыми в лагранжиане порядка восьмой степени параметра ϵ происходят при указанных температурах.

В рассматриваемом подходе расширяющаяся Вселенная является фоном, на котором развивается история частиц, а ее температура служит внешним параметром, обеспечивающим контракцию калибровочной группы стандартной модели. Более того, как будет показано далее, оценка «бесконечной» температуры 10^7 ГэВ меньше планковской энергии 10^{19} ГэВ, при которой необходимо учитывать гравитационные эффекты. Таким образом, результирующая эволюция элементарных частиц не выходит за рамки проблем, описываемых электрослабым и сильным взаимодействиями.

Поскольку изменение калибровочной группы в процессе контракции происходит непрерывно, в том числе и в самом начале предельного перехода, можно попытаться уловить влияние эффекта контракции, сравнив полученные на БАК данные по сечению рождения бозона Хиггса при разных энергиях с теоретической зависимостью сечения от температуры Вселенной. Анализ доминантного механизма рождения и регистрации бозонов Хиггса на БАК в четырехлептонном процессе с точки зрения зависимости от

температуры соответствующей диаграммы Фейнмана приводит к заключению о том, что гипотеза о контракции калибровочной группы стандартной модели как минимум не противоречит имеющимся экспериментальным данным по сечениям рождения бозонов Хиггса [13].

Калибровочная группа действует в пространстве полей, поэтому контракция калибровочной группы модели не затрагивает пространственно-временные переменные, от которых зависят поля. Следовательно, не меняется процедура квантования полей. Единственное изменение состоит в появлении той или иной степени контракционного параметра в качестве множителя перед амплитудой, отвечающей исходной фейнмановской диаграмме процесса.

1. Электрослабая модель

Часть теории элементарных частиц, описывающая электромагнитные и слабые взаимодействия — электрослабая модель — представляет собой калибровочную теорию с калибровочной группой $SU(2) \times U(1)$, действующей в пространстве \mathbf{C}_2 фундаментального представления группы $SU(2)$. Векторы из \mathbf{C}_2 (или $SU(2)$ -дублеты) описывают три поколения лептонов:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix},$$

где e — электрон, μ — мюон и τ — лептон, ν_e, ν_μ, ν_τ — соответствующие нейтрино, а также три поколения кварков:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Координаты векторов (или $SU(2)$ -синглеты) представляют собой двухкомпонентные (или четырехкомпонентные, если учитывать античастицы) лорентцевы спиноры. В дальнейшем будем рассматривать только первые поколения лептонов и кварков. Электрослабая модель включает калибровочные бозоны, реализующие взаимодействия между частицами, а именно: переносчик электромагнитного взаимодействия фотон γ , связанный с группой $SU(1)$, заряженные W^\pm и нейтральный Z бозоны, ответственные за слабые взаимодействия, связанный с группой $SU(2)$. Имеется также специальная частица, ответственная в теории за появление массы у всех частиц — это бозон Хиггса χ . В полную теорию — стандартную модель — дополнительно включают глюоны A^k , $k = 1, \dots, 8$, которые переносят сильные взаимодействия. Глюоны связаны с группой $SU(3)$, действующей в пространстве \mathbf{C}_3 цветовых кварковых состояний.

В этом разделе кратко опишем в нужном нам виде электрослабую модель, следуя монографии [1]. Лагранжиан модели, равный сумме бозонного, лептонного и кваркового лагранжианов $L = L_B + L_L + L_Q$, выбирается инвариантным относительно действия калибровочной группы $SU(2) \times U(1)$ в пространстве \mathbf{C}_2 :

$$SU(2) : \vec{z}' = G\vec{z},$$

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

$$U(1) : \vec{z}' = e^{i\omega/2}\vec{z} = e^{i\omega Y}\vec{z}, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Генератор Y группы $U(1)$ пропорционален единичной матрице $Y = \frac{1}{2}\mathbf{1}$. Генераторы группы $SU(2)$

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\tau_1, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\tau_2, \\ T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\tau_3, \quad (2)$$

где τ_k , $k = 1, 2, 3$ — матрицы Паули, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[T_1, T_2] = iT_3, \quad [T_3, T_1] = iT_2, \quad [T_2, T_3] = iT_1 \quad (3)$$

и образующие алгебру Ли $su(2)$.

Бозонный сектор $L_B = L_W + L_\phi$ состоит из двух частей: лагранжиана калибровочных полей

$$L_W = -\frac{1}{4}[(W_{\mu\nu}^1)^2 + (W_{\mu\nu}^2)^2 + (W_{\mu\nu}^3)^2] - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2, \quad (4)$$

и лагранжиана полей материи

$$L_\phi = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi - v^2)^2, \\ \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}_2. \quad (5)$$

Ковариантные производные равны

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ig \left(\sum_{k=1}^3 T_k W_\mu^k \right) \phi - ig' Y B_\mu\phi, \quad (6)$$

где константы g и g' являются зарядами. Калибровочные поля

$$W_\mu(x) = \sum_{k=1}^3 T_k W_\mu^k(x), \quad B_\mu(x) \quad (7)$$

принимают значения в алгебрах Ли $su(2)$, $u(1)$ соответственно, а их тензоры напряженности определяются формулами

$$W_{\mu\nu}(x) = \mathcal{W}_{\mu\nu}(x) + g[W_\mu(x), W_\nu(x)], \\ \mathcal{W}_{\mu\nu}^k(x) = \partial_\mu W_\nu^k(x) - \partial_\nu W_\mu^k(x), \\ B_{\mu\nu}(x) = \mathcal{B}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x). \quad (8)$$

Вместо полей (7) вводятся новые калибровочные поля

$$Z_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3(x) - g'B_\mu(x)), \\ A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3(x) + gB_\mu(x)), \\ W_\mu^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1(x) \mp iW_\mu^2(x)), \quad (9)$$

имеющие непосредственный физический смысл.

Для генерации масс векторных бозонов вводится специальный механизм спонтанного нарушения симметрии. Одно из основных состояний лагранжиана L_B

$$\phi^{vac} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad W_\mu^k = B_\mu = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где $v = const$, выбирается в качестве вакуума модели, и затем рассматриваются малые возмущения полей $\frac{1}{\sqrt{2}}v + \chi(x)$ относительно этого вакуума.

После спонтанного нарушения симметрии бозонный лагранжиан (4), (5) принимает вид

$$L_B = L_B^{(2)} + L_B^{int} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2 \chi^2 - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^- + m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- + L_B^{int}, \quad (11)$$

где $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$, $Z_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu Z_\nu(x) - \partial_\nu Z_\mu(x)$, $W_{\mu\nu}^\pm(x) = \partial_\mu W_\nu^\pm(x) - \partial_\nu W_\mu^\pm(x)$. Как обычно, слагаемые второго порядка описывают бозонные частицы модели, а слагаемые более высокого порядка L_B^{int} рассматриваются как взаимодействия частиц. Таким образом, лагранжиан (11) включает скалярный бозон Хиггса χ с массой $m_\chi = \sqrt{2}\lambda v$, нейтральный Z бозон с массой $m_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}$, безмассовый фотон A_μ и заряженные W^\pm бозоны с одинаковыми массами $m_W = \frac{1}{2}gv$. Все эти частицы экспериментально обнаружены и имеют следующие массы: $m_W = 80$ ГэВ, $m_Z = 91$ ГэВ, $m_\chi = 125$ ГэВ.

Лагранжиан L_B^{int} , описывающий взаимодействия частиц, имеет вид

$$L_B^{int} = \frac{gm_Z}{2\cos\theta_W}(Z_\mu)^2\chi - \lambda v\chi^3 + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W}(Z_\mu)^2\chi^2 - \frac{\lambda}{4}\chi^4 - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^- + m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- - 2ig(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+)(F_{\mu\nu}\sin\theta_W + Z_{\mu\nu}\cos\theta_W) - \frac{i}{2}e[A_\mu(W_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - W_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - A_\nu(W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - W_{\mu\nu}^- W_\mu^+)] + gW_\mu^+ W_\mu^- \chi - \frac{ig}{2}\cos\theta_W[Z_\mu(W_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - W_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - Z_\nu(W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - W_{\mu\nu}^- W_\mu^+)] + \frac{g^2}{4}(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+)^2 + \frac{g^2}{4}W_\mu^+ W_\nu^- \chi^2 - \frac{e^2}{4}\left\{\left[(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2\right](A_\nu)^2 - 2(W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-)A_\mu A_\nu + \left[(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2\right](A_\mu)^2\right\} - \frac{g^2}{4}\cos\theta_W\left\{\left[(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2\right](Z_\nu)^2 - 2(W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-)Z_\mu Z_\nu + \left[(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2\right](Z_\mu)^2\right\} - eg\cos\theta_W\left\{W_\mu^+ W_\mu^- A_\nu Z_\nu + W_\nu^+ W_\nu^- A_\mu Z_\mu - \frac{1}{2}(W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-)(A_\mu Z_\nu + A_\nu Z_\mu)\right\}. \quad (12)$$

Фермионный сектор включает в себя лептонный L_L и кварковый L_Q лагранжианы. Для первого поколения лептонный лагранжиан выбирается в виде

$$L_L = L_l^\dagger i\tilde{\tau}_\mu D_\mu L_l + e_r^\dagger i\tau_\mu D_\mu e_r - h_e[e_r^\dagger(\phi^\dagger L_l) + (L_l^\dagger \phi)e_r], \quad (13)$$

где $L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ e_l \end{pmatrix}$ есть $SU(2)$ -дублет, поле правого электрона e_r — $SU(2)$ -синглет, h_e — константа связи Юкавы, $\tau_0 = \tilde{\tau}_0 = \mathbf{1}$, $\tilde{\tau}_k = -\tau_k$ — матрицы Паули, e_r, e_l, ν_l — двухкомпонентные лорентцевы спиноры. (Мы ограничиваемся рассмотрением только частиц. Для учета античастиц поля должны быть четырехкомпонентными биспинорами Дирака.) Поле ϕ выбирается в виде $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} + \chi \end{pmatrix}$, а D_μ обозначают ковариантные производные левых и правых лептонных полей

$$D_\mu L_l = \partial_\mu L_l - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T_+ + W_\mu^- T_-)L_l -$$

$$-i\frac{g}{\cos\theta_w}Z_\mu(T_3 - Q\sin^2\theta_w)L_l - ieA_\mu QL_l,$$

$$D_\mu e_r = \partial_\mu e_r - ig'QA_\mu e_r \cos\theta_w + ig'QZ_\mu e_r \sin\theta_w, \quad (14)$$

где $T_\pm = T_1 \pm iT_2$, $Q = Y + T_3$ есть генератор электромагнитной подгруппы $U(1)_{em}$, $Y = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ — гиперзаряд, $e = gg'(g^2 + g'^2)^{-\frac{1}{2}}$ — заряд электрона и $\sin\theta_w = eg^{-1}$.

Согласно современным воззрениям, все известные лептоны и кварки образуют три поколения. Следующие два поколения лептонов вводятся аналогично (13). Они являются левыми $SU(2)$ -дублетами

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_l, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_l, \quad Y = -\frac{1}{2} \quad (15)$$

и правыми $SU(2)$ -синглетами: $\mu_r, \tau_r, Y = -1$. Помимо u и d кварков первого поколения существуют кварки (c, s) и (t, b) следующих поколений, левые поля которых

$$\begin{pmatrix} c_l \\ s_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_l \\ b_l \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{6} \quad (16)$$

описываются $SU(2)$ -дублетами, а правые поля являются $SU(2)$ -синглетами: $c_r, t_r, Y = \frac{2}{3}$; $s_r, b_r, Y = -\frac{1}{3}$. Лагранжианы всех поколений кварков вводятся единообразно по правилу лагранжианов лептонов. Полные лептонные и кварковые лагранжианы получаются суммированием по всем поколениям. В дальнейшем мы будем обсуждать только первые поколения лептонов и кварков.

В терминах полей электронов и нейтрино лептонный лагранжиан (13) записывается в виде

$$L_L = e_l^\dagger i\tilde{\tau}_\mu \partial_\mu e_l + e_r^\dagger i\tau_\mu \partial_\mu e_r - m_e(e_r^\dagger e_l + e_l^\dagger e_r) - h_e \chi(e_r^\dagger e_l + e_l^\dagger e_r) + \frac{g\cos 2\theta_w}{2\cos\theta_w} \nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu \nu_l + e \nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu \nu_l + g' \cos\theta_w e_r^\dagger \tau_\mu A_\mu e_r - g' \sin\theta_w e_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu e_r + \nu_l^\dagger i\tilde{\tau}_\mu \partial_\mu \nu_l - \frac{g}{2\cos\theta_w} e_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu e_l +$$

$$+ \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^+ e_l + e_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^- \nu_l \right], \quad (17)$$

где $m_e = h_e \frac{v}{\sqrt{2}}$ — масса электрона в хиггсовском вакууме.

Кварковый лагранжиан строится аналогично лептонному лагранжиану

$$\begin{aligned} L_Q = & Q_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu D_\mu Q_l + u_r^\dagger i \tau_\mu D_\mu u_r + d_r^\dagger i \tau_\mu D_\mu d_r - \\ & - h_d [d_r^\dagger (\phi^\dagger Q_l) + (Q_l^\dagger \phi) d_r] - \\ & - h_u [u_r^\dagger (\tilde{\phi}^\dagger Q_l) + (Q_l^\dagger \tilde{\phi}) u_r], \end{aligned} \quad (18)$$

где левые кварковые поля образуют $SU(2)$ -дублет $Q_l = \begin{pmatrix} u_l \\ d_l \end{pmatrix}$, правые поля u_r, d_r являются $SU(2)$ -синглетами, $\tilde{\phi}_i = \epsilon_{ik} \tilde{\phi}_k$, $\epsilon_{00} = 1$, $\epsilon_{ii} = -1$ образуют сопряженное представление группы $SU(2)$, h_u, h_d есть юкавские константы связи. Для частиц все поля u_l, d_l, u_r, d_r являются двухкомпонентными лорентцевыми спинорами. Ковариантные производные кварковых полей равны

$$\begin{aligned} D_\mu Q_l &= \left(\partial_\mu - ig \sum_{k=1}^3 \frac{\tau_k}{2} W_\mu^k - ig' \frac{1}{6} B_\mu \right) Q_l, \\ D_\mu u_r &= \left(\partial_\mu - ig' \frac{2}{3} B_\mu \right) u_r, \\ D_\mu d_r &= \left(\partial_\mu + ig' \frac{1}{3} B_\mu \right) d_r. \end{aligned} \quad (19)$$

Кварковый лагранжиан (18) в терминах полей u и d кварков можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_Q = & d_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu d_l + d_r^\dagger i \tau_\mu \partial_\mu d_r - m_d (d_r^\dagger d_l + d_l^\dagger d_r) - \\ & - h_d \chi (d_r^\dagger d_l + d_l^\dagger d_r) - \frac{e}{3} d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu d_l - \\ & - \left(\frac{g}{2} \cos \theta_w + \frac{g'}{6} \sin \theta_w \right) d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu d_l - \\ & - \frac{1}{3} g' \cos \theta_w d_r^\dagger \tau_\mu A_\mu d_r + \frac{1}{3} g' \sin \theta_w d_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu d_r + \\ & + u_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu u_l + u_r^\dagger i \tau_\mu \partial_\mu u_r - m_u (u_r^\dagger u_l + u_l^\dagger u_r) - \\ & - h_u \chi (u_r^\dagger u_l + u_l^\dagger u_r) + \\ & + \left(\frac{g}{2} \cos \theta_w - \frac{g'}{6} \sin \theta_w \right) u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu u_l + \frac{2e}{3} u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu u_l + \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} \left[u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^+ d_l + d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^- u_l \right] + \\ & + \frac{2}{3} g' \cos \theta_w u_r^\dagger \tau_\mu A_\mu u_r - \frac{2}{3} g' \sin \theta_w u_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu u_r, \end{aligned} \quad (20)$$

где $m_u = h_u \frac{v}{\sqrt{2}}$, $m_d = h_d \frac{v}{\sqrt{2}}$ обозначают массы u и d кварков в хиггсовском вакууме.

2. Электрослабая модель при высоких энергиях

Известно два способа описать действие контрактированной группы в пространстве с вырожденной метрикой. Традиционный способ заключается в рассмотрении действия матричной группы с вещественными или комплексными элементами на векторы с такими же компонентами

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon^2 \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\det u(\epsilon) = |\alpha|^2 + \epsilon^2 |\beta|^2 = 1, \quad u(\epsilon) u^\dagger(\epsilon) = 1,$$

$$|z_1|^2 + \epsilon^2 |z_2|^2 = inv. \quad (21)$$

В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ матрица имеет вид

$$u(0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = e^{i\gamma}, \quad \gamma \in R$$

и очевидно принадлежит евклидовой группе $E(2)$.

Другой способ состоит в рассмотрении контрактированной группы $SU(2; \epsilon)$ и соответствующего пространства $\mathbf{C}_2(\epsilon)$ путем согласованного переопределения элементов группы $SU(2)$ и компонент векторов пространства \mathbf{C}_2 вида

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ \epsilon z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon \beta \\ -\epsilon \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \epsilon z_2 \end{pmatrix},$$

$$\det u(\epsilon) = |\alpha|^2 + \epsilon^2 |\beta|^2 = 1, \quad u(\epsilon) u^\dagger(\epsilon) = 1,$$

$$|z_1|^2 + \epsilon^2 |z_2|^2 = inv. \quad (22)$$

Наш подход основан на действии матриц с элементами, зависящими от параметра контракции ϵ , на векторы, компоненты которых также зависят от этого параметра. В этом случае при $\epsilon \rightarrow 0$ необходимо дополнительно учитывать бесконечно малые соотношения первого порядка по ϵ . Стремящийся к нулю контракционный параметр удобен для физических приложений, но его использование в форме (22) вызывает иллюзию исчезновения ряда групповых параметров. Математически этого можно избежать, приняв параметр равным нильпотентной единице ι , которая сама отлична от нуля $\iota \neq 0$, но ее квадрат обращается в нуль $\iota^2 = 0$. Тогда контрактированная матрица

$$u(\iota) = \begin{pmatrix} \alpha & \iota \beta \\ -\iota \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = e^{i\gamma}, \quad \gamma \in R$$

будет явно содержать все параметры группы, но часть из них будет нильпотентными элементами. Этот подход детально рассмотрен в работе [10].

После перехода к пределу $\epsilon \rightarrow 0$ группа $SU(2; \epsilon = 0)$ становится изоморфной евклидовой группе $E(2)$, а пространство $\mathbf{C}_2(\epsilon = 0)$ разбивается на базу, натянутую на координату $\{z_1\}$, и слой, порождаемый координатой $\{z_2\}$. (Широко известное нерелятивистское пространство-время является примером расслоенного пространства с одномерной базой, физически интерпретируемой как ось времени, и трехмерным слоем, рассматриваемым как абсолютное собственно пространство.) Унитарная группа $U(1)$ и ее

действие в пространстве $C_2(\epsilon = 0)$ не изменяются при контракции и описываются формулами (1).

Пространство $C_2(\epsilon)$ получается из C_2 заменой z_2 на ϵz_2 . Замена матричного элемента β на $\epsilon\beta$ индуцирует замену генераторов алгебры Ли $T_1 \rightarrow \epsilon T_1$, $T_2 \rightarrow \epsilon T_2$, $T_3 \rightarrow T_3$. Эти новые генераторы подчиняются коммутационным соотношениям

$$[T_1, T_2] = i\epsilon^2 T_3, [T_3, T_1] = iT_2, [T_2, T_3] = iT_1 \quad (23)$$

алгебры Ли $su(2; \epsilon)$, которая при $\epsilon = 0$ представляет собой полупрямую сумму абелевой подалгебры $t_2 = \{T_1, T_2\}$ и одномерной подалгебры $u(1) = \{T_3\}$: $su(2; \epsilon = 0) = t_2 \oplus u(1)$.

Поскольку калибровочные поля принимают значения в алгебре Ли, можно вместо преобразования генераторов произвести замену калибровочных полей, а именно:

$$W_\mu^1 \rightarrow \epsilon W_\mu^1, \quad W_\mu^2 \rightarrow \epsilon W_\mu^2, \\ W_\mu^3 \rightarrow W_\mu^3, \quad B_\mu \rightarrow B_\mu. \quad (24)$$

Действительно, из свойств коммутативности и ассоциативности умножения на скаляр имеем

$$su(2; \epsilon) \ni \{W_\mu^1(\epsilon T_1) + W_\mu^2(\epsilon T_2) + W_\mu^3 T_3\} = \\ = \{\epsilon W_\mu^1 T_1 + (\epsilon W_\mu^2) T_2 + W_\mu^3 T_3\}. \quad (25)$$

Подстановка $\beta \rightarrow \epsilon\beta$ индуцирует преобразование стандартных калибровочных полей (9) вида

$$W_\mu^\pm \rightarrow \epsilon W_\mu^\pm, \quad Z_\mu \rightarrow Z_\mu, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu. \quad (26)$$

Левые лептонные $L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ e_l \end{pmatrix}$ и кварковые $Q_l = \begin{pmatrix} u_l \\ d_l \end{pmatrix}$ поля являются $SU(2)$ -дублетами, поэтому их левые и правые компоненты преобразуются так же, как компоненты вектора z , а именно:

$$e_l \rightarrow \epsilon e_l, \quad e_r \rightarrow \epsilon e_r, \quad d_l \rightarrow \epsilon d_l, \quad d_r \rightarrow \epsilon d_r, \\ \nu_l \rightarrow \nu_l, \quad u_l \rightarrow u_l, \quad u_r \rightarrow u_r. \quad (27)$$

Отдельно от групповой структуры вводится специальный механизм спонтанного нарушения симметрии, который используется для генерации масс векторных бозонов и других частиц модели. В этом механизме одно из основных состояний (10) лагранжиана L_B выбирается в качестве вакуума модели и затем рассматриваются малые возмущения относительно второй компоненты вакуумного вектора. При этом поле бозона Хиггса χ , константа v , а также зависящие от v массы частиц на параметр контракции не умножаются. В результате преобразований полей бозонный лагранжиан можно записать в виде

$$L_B(\epsilon) = L_{B,0} + \epsilon^2 L_{B,2} + L_{B,0}^{int} + \epsilon^2 L_{B,2}^{int} + \epsilon^4 L_{B,4}^{int}, \quad (28)$$

где

$$L_{B,0} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} \mathcal{Z}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 (Z_\mu)^2 + \\ + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2, \quad (29)$$

$$L_{B,2} = -\frac{1}{2} \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ \mathcal{W}_{\mu\nu}^- + m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^-, \quad (30)$$

$$L_{B,0}^{int} = -\frac{\lambda}{4} \chi^4 - \lambda v \chi^3 + \frac{g m_z}{2 \cos \theta_W} \chi (Z_\mu)^2 + \\ + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} \chi^2 (Z_\mu)^2, \quad (31)$$

$$L_{B,2}^{int} = g \chi W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{g^2}{4} \chi^2 W_\mu^+ W_\nu^- - \\ - 2ig (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+) \left(\mathcal{F}_{\mu\nu} \sin \theta_W + \mathcal{Z}_{\mu\nu} \cos \theta_W \right) - \\ - \frac{i}{2} e [A_\mu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - \\ - A_\nu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\mu^+)] - \\ - \frac{i}{2} g \cos \theta_W [Z_\mu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - \\ - Z_\nu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\mu^+)] - \\ - \frac{e^2}{4} \left\{ [(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2] (A_\nu)^2 - \right. \\ \left. - 2 (W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-) A_\mu A_\nu + \right. \\ \left. + [(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2] (A_\mu)^2 \right\} - \\ - \frac{g^2}{4} \cos \theta_W \left\{ [(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2] (Z_\nu)^2 - \right. \\ \left. - 2 (W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-) Z_\mu Z_\nu + \right. \\ \left. + [(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2] (Z_\mu)^2 \right\} - \\ - eg \cos \theta_W \left[W_\mu^+ W_\mu^- A_\nu Z_\nu + W_\nu^+ W_\nu^- A_\mu Z_\mu - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-) (A_\mu Z_\nu + A_\nu Z_\mu) \right], \quad (32)$$

$$L_{B,4}^{int} = \frac{g^2}{4} (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+)^2. \quad (33)$$

Лептонный лагранжиан (13), (17) в терминах полей электронов и нейтрино принимает вид

$$L_L(\epsilon) = L_{L,0} + L_{L,0}^{int} + \epsilon^2 (L_{L,2} + L_{L,2}^{int}), \quad (34)$$

где

$$L_{L,0} = \nu_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu \nu_l, \quad (35)$$

$$L_{L,0}^{int} = e \nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu \nu_l + \frac{g \cos 2\theta_w}{2 \cos \theta_w} \nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu \nu_l, \quad (36)$$

$$L_{L,2} = e_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu e_l + e_r^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu e_r - \\ - m_e (e_r^\dagger e_l + e_l^\dagger e_r) - h_e \chi (e_r^\dagger e_l + e_l^\dagger e_r), \quad (37)$$

$$L_{L,2}^{int} = -\frac{g}{2 \cos \theta_w} e_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu e_l + \\ + g' \cos \theta_w e_r^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu e_r - g' \sin \theta_w e_r^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu e_r + \\ + \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^+ e_l + e_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^- \nu_l \right). \quad (38)$$

Кварковый лагранжиан (18), (20) в терминах полей u и d кварков записывается в виде

$$L_Q(\epsilon) = L_{Q,0} + \epsilon^2 L_{Q,2} + L_{Q,0}^{int} + \epsilon^2 L_{Q,2}^{int}, \quad (39)$$

где

$$L_{Q,0} = u_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu u_l + u_r^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu u_r - m_u (u_r^\dagger u_l + u_l^\dagger u_r) - h_u \chi (u_r^\dagger u_l + u_l^\dagger u_r), \quad (40)$$

$$L_{Q,0}^{int} = \frac{2e}{3} u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu u_l + \left(\frac{g}{2} \cos \theta_w - \frac{g'}{6} \sin \theta_w \right) u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu u_l + \frac{2}{3} g' \cos \theta_w u_r^\dagger \tau_\mu A_\mu u_r - \frac{2}{3} g' \sin \theta_w u_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu u_r, \quad (41)$$

$$L_{Q,2} = d_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu d_l + d_r^\dagger i \tau_\mu \partial_\mu d_r - m_d (d_r^\dagger d_l + d_l^\dagger d_r) - h_d \chi (d_r^\dagger d_l + d_l^\dagger d_r), \quad (42)$$

$$L_{Q,2}^{int} = - \left(\frac{g}{2} \cos \theta_w + \frac{g'}{6} \sin \theta_w \right) d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu d_l + \frac{g}{\sqrt{2}} \left(u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^+ d_l + d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^- u_l \right) - \frac{e}{3} d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu d_l - \frac{1}{3} g' \cos \theta_w d_r^\dagger \tau_\mu A_\mu d_r + \frac{1}{3} g' \sin \theta_w d_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu d_r. \quad (43)$$

Полный лагранжиан электрослабой модели с контракционной калибровочной группой получается суммированием бозонного, лептонного и кваркового лагранжианов и представляется в виде разложения по степеням контракционного параметра

$$\mathcal{L}_{EWM}(\epsilon) = L(\epsilon) + L^{int}(\epsilon) = L_0 + \epsilon^2 L_2 + L_0^{int} + \epsilon^2 L_2^{int} + \epsilon^4 L_4, \quad (44)$$

где

$$L_0 = L_{B,0} + L_{L,0} + L_{Q,0}, \\ L_0^{int} = L_{B,0}^{int} + L_{L,0}^{int} + L_{Q,0}^{int}, \\ L_2 = L_{B,2} + L_{L,2} + L_{Q,2}, \\ L_2^{int} = L_{B,2}^{int} + L_{L,2}^{int} + L_{Q,2}^{int}, \quad L_4^{int} = L_{B,4}^{int}. \quad (45)$$

Мы предполагаем, что параметр контракции является монотонной функцией $\epsilon(T) = AT^{-q}$, $q > 0$ температуры (средней энергии) Вселенной со свойством $\epsilon(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Когда $\epsilon \rightarrow 0$, слагаемые с более высокими степенями ϵ вносят меньший вклад в лагранжиан по сравнению со слагаемыми с меньшими степенями. Таким образом, электрослабая модель демонстрирует три стадии поведения при движении назад во времени к моменту рождения Вселенной, которые отличаются степенями контракционного параметра.

3. Квантовая хромодинамика

Сильные взаимодействия частиц описываются квантовой хромодинамикой, которая является калибровочной теорией, основанной на локальных цветовых степенях свободы кварков [1]. Калибровочная группа $SU(3)$ КХД действует в трехмерном комплексном пространстве \mathbf{C}_3 цветовых кварковых состояний $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix} \in \mathbf{C}_3$, где $q(x)$ есть поля кварков $q = u, d, s, c, b, t$, а R (красный), G (зеленый), B (голубой) обозначают цветовые степени свободы. Калибровочные бозоны группы $SU(3)$ называются глюонами. Всего имеется восемь разных глюонов, обмен которыми обеспечивает сильные взаимодействия кварков. Лагранжиан КХД выбирается в виде

$$\mathcal{L} = \sum_q (\bar{q}^i (i\gamma^\mu) (D_\mu)_{ij} q^j - m_q \bar{q}^i q_i) - \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu \alpha}, \quad (46)$$

где $D_\mu q$ есть ковариантные производные кварковых полей

$$D_\mu q = \left(\partial_\mu - ig_s \left(\frac{\lambda^\alpha}{2} \right) A_\mu^\alpha \right) q. \quad (47)$$

Здесь g_s обозначает сильную константу связи, $t^a = \lambda^a/2$ — это генераторы группы $SU(3)$, λ^a есть матрицы Гелл-Манна

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Глюонный тензор напряженности имеет стандартный вид

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g_s f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma, \quad (49)$$

где $f^{\alpha\beta\gamma}$ есть структурные постоянные алгебры $su(3)$: $[t^\alpha, t^\beta] = i f^{\alpha\beta\gamma} t^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 8$. Они антисимметричны по всем индексам, а их ненулевые значения таковы:

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = \frac{1}{2}, \\ f^{156} = f^{367} = -\frac{1}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (50)$$

Выбор матриц Гелл-Манна в виде (48) фиксирует базис в алгебре $su(3)$, что дает возможность выписать ковариантные производные (47) в явной форме

$$D_\mu = \mathbf{I}\partial_\mu - i\frac{g_s}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 - A_\mu^3 & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}A_\mu^8 \end{pmatrix} = \mathbf{I}\partial_\mu - i\frac{g_s}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^{RR} & A_\mu^{RG} & A_\mu^{RB} \\ A_\mu^{GR} & A_\mu^{GG} & A_\mu^{GB} \\ A_\mu^{BR} & A_\mu^{BG} & A_\mu^{BB} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

где

$$A_\mu^{RR} = \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 + A_\mu^3, \quad A_\mu^{GG} = \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 - A_\mu^3, \\ A_\mu^{BB} = -\frac{2}{\sqrt{3}}A_\mu^8, \quad A_\mu^{RR} + A_\mu^{GG} + A_\mu^{BB} = 0, \\ A_\mu^{GR} = A_\mu^1 + iA_\mu^2 = \bar{A}_\mu^{RG}, \\ A_\mu^{BR} = A_\mu^4 + iA_\mu^5 = \bar{A}_\mu^{RB}, \\ A_\mu^{BG} = A_\mu^6 + iA_\mu^7 = \bar{A}_\mu^{GB}. \quad (52)$$

Лагранжиан (46) принимает вид

$$\mathcal{L} = (\bar{u}_i(i\gamma^\mu)(D_\mu)^{ij}u_j - m_u\bar{u}^i u_i) + \dots - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} \equiv L_u + \dots - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha}, \quad (53)$$

где выписаны только слагаемые, характеризующие u кварк. Отметим, что в КХД отсутствует механизм спонтанного нарушения симметрии, поэтому глюоны являются безмассовыми частицами.

Лагранжиан КХД имеет богатое динамическое содержание. Он описывает сложный спектр адронов, цветовой конфайнмент кварков, асимптотическую свободу и много других эффектов.

4. КХД с контрактированной калибровочной группой

В данном разделе будем рассматривать только два вида кварков $q = u, d$ и учитывать преобразования (27). Контрактированная специальная унитарная группа $SU(3; \epsilon)$ определяется согласованным действием матричного элемента группы на вектор в цветовом пространстве $C_3(\epsilon)$

$$q'(\epsilon) = U(\epsilon)q(\epsilon), \\ \begin{pmatrix} q'_1 \\ \epsilon q'_2 \\ \epsilon^2 q'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \epsilon u_{12} & \epsilon^2 u_{13} \\ \epsilon u_{21} & u_{22} & \epsilon u_{23} \\ \epsilon^2 u_{31} & \epsilon u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \epsilon q_2 \\ \epsilon^2 q_3 \end{pmatrix} \quad (54)$$

при $\epsilon \rightarrow 0$, где $q_1 = u_1, \epsilon d_1, q_2 = u_2, \epsilon d_2, q_3 = u_3, \epsilon d_3$. При таком действии остаются инвариантными предельные эрмитовы формы

$$u^\dagger(\epsilon)u(\epsilon) = |u_1|^2 + \epsilon^2 |u_2|^2 + \epsilon^4 |u_3|^2,$$

$$d^\dagger(\epsilon)d(\epsilon) = |d_1|^2 + \epsilon^2 |d_2|^2 + \epsilon^4 |d_3|^2. \quad (55)$$

Переход от классической группы $SU(3)$ и пространства C_3 к группе $SU(3; \epsilon)$ и пространству $C_3(\epsilon)$ достигается преобразованием калибровочных полей (52) и цветовых компонент кварков вида

$$u_1 \rightarrow u_1, \quad u_2 \rightarrow \epsilon u_2, \quad u_3 \rightarrow \epsilon^2 u_3, \\ d_1 \rightarrow \epsilon d_1, \quad d_2 \rightarrow \epsilon^2 d_2, \quad d_3 \rightarrow \epsilon^3 d_3, \\ A_\mu^{GR} \rightarrow \epsilon A_\mu^{GR}, \quad A_\mu^{BG} \rightarrow \epsilon A_\mu^{BG}, \quad A_\mu^{BR} \rightarrow \epsilon^2 A_\mu^{BR}. \quad (56)$$

При этом диагональные калибровочные поля $A_\mu^{RR}, A_\mu^{GG}, A_\mu^{BB}$ не изменяются.

Подстановки (27), (56) приводят к следующему разложению кварковой части лагранжиана КХД по степеням контракционного параметра

$$\mathcal{L}_q(\epsilon) = L_q(\epsilon) + L_q^{int}(\epsilon) = \sum_{k=0}^3 \epsilon^{2k} (L_{q,2k} + L_{q,2k}^{int}), \quad (57)$$

где

$$L_{q,0} = L_{u,0}, \quad L_{q,2} = L_{u,2} + L_{d,0}, \\ L_{q,4} = L_{u,4} + L_{d,2}, \quad L_{q,6} = L_{d,4}. \quad (58)$$

Здесь

$$L_{u,0} = i\bar{u}_1\gamma^\mu\partial_\mu u_1 - m_u |u_1|^2, \quad (59)$$

$$L_{u,0}^{int} = +\frac{g_s}{2} |u_1|^2 \gamma^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 + A_\mu^3 \right), \quad (60)$$

$$L_{u,2} = i\bar{u}_2\gamma^\mu\partial_\mu u_2 - m_u |u_2|^2, \quad (61)$$

$$L_{u,2}^{int} = \frac{g_s}{2} \left[|u_2|^2 \gamma^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 - A_\mu^3 \right) + \right.$$

$$\left. + u_1\bar{u}_2\gamma^\mu (A_\mu^1 + iA_\mu^2) + \bar{u}_1 u_2\gamma^\mu (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \right], \quad (62)$$

$$L_{u,4} = i\bar{u}_3\gamma^\mu\partial_\mu u_3 - m_u |u_3|^2, \quad (63)$$

$$L_{u,4}^{int} = \frac{g_s}{2} \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} |u_3|^2 \gamma^\mu A_\mu^8 + \right.$$

$$\left. + u_1\bar{u}_3\gamma^\mu (A_\mu^4 + iA_\mu^5) + \bar{u}_1 u_3\gamma^\mu (A_\mu^4 - iA_\mu^5) + \right. \\ \left. + u_2\bar{u}_3\gamma^\mu (A_\mu^6 + iA_\mu^7) + \bar{u}_2 u_3\gamma^\mu (A_\mu^6 - iA_\mu^7) \right]. \quad (64)$$

Слагаемые $L_{d,2k}, L_{d,2k}^{int}, k = 0, 1, 2$ описываются формулами (60)–(64) с заменой u_p на $d_p, p = 1, 2, 3$.

Глюонная часть $L_{gl} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha}$ лагранжиана приобретает вид

$$\mathcal{L}_{gl}(\epsilon) = L_{gl}^{(0)} + \epsilon^2 L_{gl}^{(2)} + \epsilon^4 L_{gl}^{(4)} + \epsilon^6 L_{gl}^{(6)} + \epsilon^8 L_{gl}^{(8)}, \quad (65)$$

где

$$L_{gl}^{(0)} = -\frac{1}{4} \left\{ (\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)^2 + (\partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8)^2 \right\}, \quad (66)$$

$$\begin{aligned}
L_{gl}^{(2)} = & -\frac{1}{4} \left\{ \left(\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1 + g_s (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) \right)^2 + \right. \\
& + \left(\partial_\mu A_\nu^6 - \partial_\nu A_\mu^6 + \frac{g_s}{2} [(A_\mu^3 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^3) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \sqrt{3} (A_\mu^7 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^7)] \right)^2 + \right. \\
& + \left(\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2 - g_s (A_\mu^1 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^1) \right)^2 + \\
& + \left(\partial_\mu A_\nu^7 - \partial_\nu A_\mu^7 - \frac{g_s}{2} [A_\mu^3 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^3 + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{3} (A_\mu^6 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^6)] \right)^2 + \\
& + g_s \left[\left(2 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - A_\mu^6 A_\nu^7 + A_\mu^7 A_\nu^6 \right) (\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3) + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{3} (A_\mu^6 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^6) (\partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8) \right] \left. \right\}, \quad (67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{gl}^{(4)} = & -\frac{1}{4} \left\{ (\partial_\mu A_\nu^4 - \partial_\nu A_\mu^4)^2 + (\partial_\mu A_\nu^5 - \partial_\nu A_\mu^5)^2 + \right. \\
& + g_s \left[(A_\mu^4 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^4 - A_\mu^5 A_\nu^6 + A_\mu^6 A_\nu^5) (\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1) + \right. \\
& + (A_\mu^4 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^4 + A_\mu^5 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^5) (\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2) - \\
& - (A_\mu^1 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^2 + A_\mu^3 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^3 - \\
& \quad \left. - \sqrt{3} (A_\mu^5 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^5)) (\partial_\mu A_\nu^4 - \partial_\nu A_\mu^4) + \right. \\
& + (A_\mu^1 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^1 - A_\mu^2 A_\nu^7 + A_\mu^7 A_\nu^2 + A_\mu^3 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^3 - \\
& \quad \left. - \sqrt{3} (A_\mu^4 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^4)) (\partial_\mu A_\nu^5 - \partial_\nu A_\mu^5) + \right. \\
& + (A_\mu^2 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^2 - A_\mu^1 A_\nu^5 + A_\mu^5 A_\nu^1) (\partial_\mu A_\nu^6 - \partial_\nu A_\mu^6) + \\
& + (A_\mu^1 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^2) (\partial_\mu A_\nu^7 - \partial_\nu A_\mu^7) + \\
& \quad \left. + \sqrt{3} (A_\mu^4 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^4) (\partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8) \right] + \\
& + g_s^2 \left[(A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2 + (A_\mu^6 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^6)^2 - \right. \\
& \quad \left. - (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1) (A_\mu^6 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^6) - \right. \\
& \quad \left. - (A_\mu^1 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^1) (A_\mu^4 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^4 + A_\mu^5 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^5) + \right. \\
& \quad \left. + (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) (A_\mu^4 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^4 - A_\mu^5 A_\nu^6 + A_\mu^6 A_\nu^5) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (A_\mu^3 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^3 + \sqrt{3} (A_\mu^7 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^7)) \times \\
& \quad \times (A_\mu^2 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^2 - A_\mu^1 A_\nu^5 + A_\mu^5 A_\nu^1) - \\
& - \frac{1}{2} (A_\mu^3 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^3 + \sqrt{3} (A_\mu^6 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^6)) \times \\
& \quad \times (A_\mu^1 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^2) + \\
& + \frac{1}{2} (A_\mu^1 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^2 + \\
& + A_\mu^3 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^3 - \sqrt{3} (A_\mu^5 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^5))^2 + \\
& + \frac{1}{2} (A_\mu^1 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^1 - A_\mu^2 A_\nu^7 + A_\mu^7 A_\nu^2 + \\
& + A_\mu^3 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^3 - \sqrt{3} (A_\mu^4 A_\nu^8 - A_\mu^8 A_\nu^4))^2 \left. \right\}, \quad (68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{gl}^{(6)} = & -\frac{g_s^2}{16} \left\{ (A_\mu^4 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^4 - A_\mu^5 A_\nu^6 + A_\mu^6 A_\nu^5)^2 + \right. \\
& + (A_\mu^4 A_\nu^6 - A_\mu^6 A_\nu^4 + A_\mu^5 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^5)^2 + \\
& + (A_\mu^2 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^2 - A_\mu^1 A_\nu^5 + A_\mu^5 A_\nu^1)^2 + \\
& + (A_\mu^1 A_\nu^4 - A_\mu^4 A_\nu^1 + A_\mu^2 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^2)^2 + \\
& + 4 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1 + A_\mu^6 A_\nu^7 - A_\mu^7 A_\nu^6) (A_\mu^4 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^4) \left. \right\}, \quad (69)
\end{aligned}$$

$$L_{gl}^{(8)} = -\frac{g_s^2}{4} (A_\mu^4 A_\nu^5 - A_\mu^5 A_\nu^4)^2. \quad (70)$$

В результате объединения (57) и (65) лагранжиан модифицированной КХД может быть представлен в виде разложения по степеням контракционного параметра

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QCD}(\epsilon) = & L_q(\epsilon) + L_q^{int}(\epsilon) + \mathcal{L}_{gl}(\epsilon) = \\
= & \mathcal{L}^{(0)} + \epsilon^2 \mathcal{L}^{(2)} + \epsilon^4 \mathcal{L}^{(4)} + \epsilon^6 \mathcal{L}^{(6)} + \epsilon^8 \mathcal{L}^{(8)}, \quad (71)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)} = & L_{u,0} + L_{u,0}^{int} + L_{gl}^{(0)}, \quad \mathcal{L}^{(8)} = L_{gl}^{(8)}, \\
\mathcal{L}^{(2p)} = & L_{u,2p} + L_{d,2(p-1)} + L_{u,2p}^{int} + L_{d,2(p-1)}^{int} + \\
& + L_{gl}^{(2p)}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (72)
\end{aligned}$$

В соответствии с нашей гипотезой контракционный параметр является монотонной функцией температуры $\epsilon \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Согласно современной концепции возникновения Вселенной [8], очень высокие («бесконечные») температуры могут существовать на первых стадиях Большого взрыва сразу после инфляции в доэлектрослабую эпоху.

5. Оценка границ между эпохами в эволюции Вселенной

Объединяя лагранжианы электрослабой модели (44) и вантовой хромодинамики (71), получаем лагранжиан стандартной модели, представленный в виде разложения по степеням контракционного параметра

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SM}(\epsilon) &= L_{EWM}(\epsilon) + \mathcal{L}_{QCD}(\epsilon) = \\ &= L(\epsilon) + L_q(\epsilon) + L^{int}(\epsilon) + L_q^{int}(\epsilon) + \mathcal{L}_{gl}(\epsilon) = \\ &= \mathcal{L}_0 + \epsilon^2 \mathcal{L}_2 + \epsilon^4 \mathcal{L}_4 + \epsilon^6 \mathcal{L}_6 + \epsilon^8 \mathcal{L}_8,\end{aligned}\quad (73)$$

где с учетом выражений (45) и (72) имеем

$$\begin{aligned}L_p &= L_p + L_p^{int} + \mathcal{L}^{(p)}, \quad p = 0, 2, 4, \\ \mathcal{L}_6 &= \mathcal{L}^{(6)}, \quad \mathcal{L}_8 = \mathcal{L}^{(8)}.\end{aligned}\quad (74)$$

Таким образом, в зависимости от степени контракционного параметра стандартная модель демонстрирует пять стадий поведения при движении назад во времени к моменту рождения Вселенной. Как уже отмечалось, контракция калибровочной группы стандартной модели обеспечивает возможность упорядочить во времени различные стадии развития Вселенной, но не позволяет определить абсолютные даты этих эпох. Для этого требуются дополнительные предположения. В частности, мы предположим, что контракционный параметр одинаков для электрослабой модели и КХД.

Далее мы принимаем, что электрослабая модель, лагранжиан которой включает минимальные слагаемые, пропорциональные ϵ^4 , восстанавливается в стандартном виде при своей характерной температуре $T_4 = 100$ ГэВ, а полная реконструкция КХД с минимальными слагаемыми в лагранжиане порядка ϵ^8 происходит при температуре $T_8 = 0.2$ ГэВ.

Обозначим через Δ уровень обрезания для ϵ^k , $k = 2, 4, 6, 8$, т.е. при $\epsilon^k < \Delta$ все слагаемые в лагранжиане, пропорциональные ϵ^k , считаем пренебрежимо малы. Наконец, предположим, что контракционный параметр зависит от температуры

$$\epsilon(T) = \left(\frac{A}{T}\right)^q, \quad q > 0, \quad (75)$$

где A — постоянная размерности T . Из уравнения для КХД $\epsilon^8(T_8) = (AT_8^{-1})^{8q} = \Delta$ получаем $A = T_8 \Delta^{1/8q} = 0, 2 \Delta^{1/8q}$ ГэВ. Из подобного уравнения для электрослабой модели находим уровень обрезания $\Delta = (T_8 T_4^{-1})^{8q} = (0, 2 \cdot 10^{-2})^{8q} \approx (10^{-22})^q$, а также размерную константу $A = T_8^2 T_4^{-1} = 4 \cdot 10^{-4}$ ГэВ. Используя уравнение для k -ой степени $\epsilon^k(T_k) = (AT_k^{-1})^{qk} = \Delta$, имеем

$$T_k = T_8 \left(\frac{T_8}{T_4}\right)^{1-\frac{8}{k}} \quad (76)$$

и легко находим граничные значения (ГэВ):

$$T_2 = 10^7, \quad T_4 = 10^2, \quad T_6 = 1, \quad T_8 = 2 \cdot 10^{-1}, \quad (77)$$

не зависящие от степени q , связывающей параметр контракции и температуру (75). Оценка «бесконечной» температуры $T_2 \approx 10^7$ ГэВ намного меньше энергии Планка $\approx 10^{19}$ ГэВ, при которой становится существенным влияние гравитации. Таким образом, полученная эволюция элементарных частиц не выходит за пределы проблем, описываемых электрослабыми и сильными взаимодействиями.

6. Зависимость сечения рождения бозонов Хиггса от температуры

Диаграмма Фейнмана, описывающая доминантный механизм рождения и регистрации бозонов Хиггса в экспериментах на Большом адронном коллайдере, после преобразования полей калибровочных бозонов (26), дополненных преобразованием полей лептонов и кварков (27), (56), принимает вид, изображенный на рис. 1, где L обозначает пару электронов или мюонов [13].

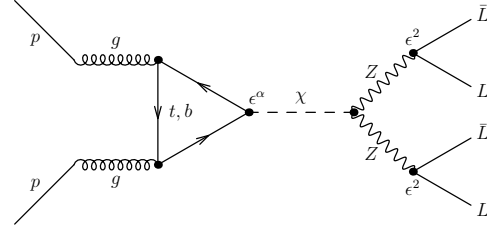


Рисунок 1. Модифицированная диаграмма рождения бозона Хиггса в четырехлептонном процессе.

Figure 1. Modified diagram of Higgs boson production in a four-lepton process.

Подсчет контракционных множителей в правой части диаграммы дает ϵ^4 . Этот множитель учитывает вклад электрослабых взаимодействий в рассматриваемый механизм. Оставшуюся часть диаграммы можно изобразить в виде петли виртуальных кварков (рис. 2), зависящей только от сильных взаимодействий.

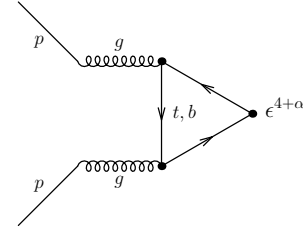


Рисунок 2. Диаграмма рождения бозона Хиггса, зависящая от сильных взаимодействий кварков. Здесь $\alpha = 1$ для t -кварка и $\alpha = 2$ для b -кварка.

Figure 2. Higgs boson production diagram dependent on strong quark interactions. Here $\alpha = 1$ for the t -quark and $\alpha = 2$ for the b -quark.

В результате контракции калибровочной группы КХД происходит «расщепление» процессов образования бозонов Хиггса при взаимодействии кварков на разные каналы, связанные с разной зависимостью цветов (компонент) кварков и глюонов от ϵ . Амплитуды M_{ik} процессов рождения бозона Хиггса домножаются на контракционный параметр в различных степенях в зависимости от того, какие цветовые компоненты виртуальных кварков участвуют в его образовании. Сечение процесса пропорционально квадрату амплитуды $\sigma_{ik} = |M_{ik}|^2$. В силу малости параметра $\epsilon = (AT^{-1})^q$, $q > 0$ основной вклад в общее сечение при увеличении T дают каналы, пропорциональные

параметру контракции с отрицательными степенями. Максимальный вклад вносит канал $M_{31}(\epsilon)$ (рис. 3) с участием первой и третьей компонент t -кварка

$$\sigma_t(T) = T^{8q} \sigma_t^{in}, \quad (78)$$

где σ_t^{in} — непреобразованное сечение при $\epsilon = 1$.

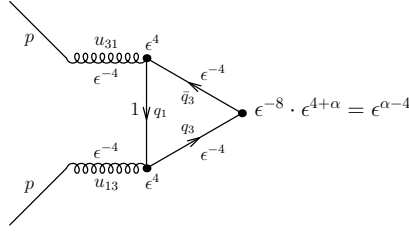


Рисунок 3. Петля виртуальных кварков с компонентами q_1, q_3 и антикварка с компонентой \bar{q}_3 . Амплитуда канала $M_{31}(\epsilon)$.

Figure 3. A loop of virtual quarks with components q_1, q_3 and an antiquark with component \bar{q}_3 . Channel amplitude $M_{31}(\epsilon)$.

Результаты измерений сечения рождения бозонов Хиггса в четырехлептонном распаде, полученные на БАК в течение ряда лет при столкновении протонных пучков разных энергий, приведены в обзоре [14]: $\sigma_{tot} = 17$ при $E = 7$, $\sigma_{tot} = 22$ при $E = 8$, $\sigma_{tot} = 56$ при $E = 13$, $\sigma_{tot} = 57$ при $E = 14$. Здесь E дано в ТэВ, а σ_{tot} — в пикобарн. Из этих данных следует, что измеренные сечения демонстрируют квадратичную зависимость от энергии $\sigma_{tot} \sim E^2$. Логично предположить, что температура T Вселенной и энергия E столкновения протонных пучков в БАК пропорциональны друг другу $T \sim E$, тогда $\sigma_{tot} \sim T^2$.

Сечение (78) для канала рождения t -кварка с амплитудой $M_{31}(\epsilon)$ имеет квадратичную зависимость $\sigma_t(T) \sim T^2$ при $q = \frac{1}{4}$. Другие растущие сечения пропорциональны $\sim T$ (тот же канал $M_{31}(\epsilon)$ для b -кварка и канал $M_{32}(\epsilon)$ для t -кварка). Вопрос о соотношении вкладов этих и других процессов в общее сечение σ_{tot} остается открытым. Экспериментальные сечения рождения бозонов Хиггса σ_{tot} содержат вклад как обоих t - и b -кварков, так и всех их цветов (компонент). Поэтому для прямого сравнения с теоретическими значениями необходимы дополнительные предположения о доле t - и b -петлевых вкладов в целом, о вкладах каждой цветовой компоненты кварков в общее сечение и др. Однако можно утверждать, что гипотеза о контракции калибровочной группы стандартной модели согласована с полученными экспериментальными данными по сечениям рождения бозонов Хиггса.

7. Изменения частиц и взаимодействий в процессе эволюции

Разложение (73) лагранжиана стандартной модели по степеням контракционного параметра открывает возможность для построения промежуточных предельных моделей с разными частицами и взаимодействиями между ними. Можно взять лагранжиан \mathcal{L}_0 в качестве первоначальной предельной системы при $T > 10^7$ ГэВ, затем добавить \mathcal{L}_2 и получить вторую предельную модель с лагранжианом $\mathcal{L}_{SM}^{(2)} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2$ при $10^7 > T > 10^2$ (ГэВ). После этого можно добавить \mathcal{L}_4 и получить следующую предельную

модель $\mathcal{L}_{SM}^{(4)} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4$ при $10^2 > T > 1$ (ГэВ) и так далее до полного восстановления лагранжиана стандартной модели при $T < 2 \cdot 10^{-1}$ ГэВ. По мере перехода от одной эпохи к другой изменяются значимые слагаемые в лагранжианах, что позволяет сделать некоторые выводы о частицах на разных стадиях эволюции Вселенной уже на уровне классических полей.

В пределе «бесконечной» температуры ($\epsilon = 0, T > 10^7$ ГэВ) получаем лагранжиан \mathcal{L}_0 стандартной модели, квадратичные слагаемые которого содержат: безмассовые нейтрино и фотон, массивные Z -бозон и бозон Хиггса (29), (35), массивный монохроматический u -кварк (40) с первой (R) компонентой (59), (60). Слагаемые более высокого порядка описывают самодействие бозона Хиггса и его взаимодействие с Z -бозоном (31), слабые и электромагнитные взаимодействия нейтрино и u -кварка с фотоном и Z -бозоном (36), (41), а также взаимодействия диагональных глюонов (66). Отметим, что поля заряженных бозонов W_μ^\pm , соответствующие подгруппе трансляций, не входят в предельный лагранжиан \mathcal{L}_0 .

Из явного выражения лагранжиана взаимодействия следует, что частицы разного сорта не взаимодействуют между собой. Взаимодействуют только частицы одного вида, например, нейтрино взаимодействуют друг с другом посредством нейтральных токов. Все другие частицы являются заряженными и взаимодействуют посредством обмена Z бозонами и фотонами. Это выглядит как некая стратификация электрослабой модели с частицами одного вида в каждом слое.

При $T > 10^7$ ГэВ остаются отличными от нуля только две компоненты глюонного тензора напряженности $F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^{RR} - F_{\mu\nu}^{GG})$ и $F_{\mu\nu}^8 = \partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8 = \frac{\sqrt{3}}{2} (F_{\mu\nu}^{RR} + F_{\mu\nu}^{GG})$, так что, используя (59), (60), (66), можно выписать предельный КХД лагранжиан в явной форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &= L_{u,0} + L_{u,0}^{int} + L_{gl}^{(0)} = \\ &= i\bar{u}_R \gamma^\mu \partial_\mu u_R + \frac{g_s}{2} |u_R|^2 \gamma^\mu A_\mu^{RR} - \\ &- \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^{RR})^2 - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^{GG})^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{RR} F_{\mu\nu}^{GG}. \end{aligned} \quad (79)$$

Отсюда заключаем, что в этом пределе выживают только динамические слагаемые для одной цветовой компоненты u -кварка, т.е. кварки становятся монохроматическими. Также остаются ненулевыми слагаемые, описывающие взаимодействие этой компоненты с R -глюонами. Помимо R -глюонов присутствуют G -глюоны, которые не взаимодействуют с u_R . Таким образом, стратификация присутствует и в секторе КХД.

При температурах 10^7 ГэВ $\geq T > 10^2$ ГэВ к лагранжиану добавляется \mathcal{L}_2 , которое содержит кинетические слагаемые W^\pm -бозонов (30), электронов (37) и d -кварков (42), а также описывает слабые взаимодействия W^\pm с другими калибровочными бозонами (32) и бозоном Хиггса. Появляются взаимодействия нейтрино с электроном (38) и между u - и d -кварками (43). u -кварк обретает вторую цветовую степень свободы (61), которая взаимодействует с пер-

вой (62). У d -кварка активируется первая цветовая степень свободы. Основная часть электрослабых и значительная часть цветовых взаимодействий восстанавливаются в эту эпоху.

При дальнейшем остывании до температур 10^2 ГэВ $\geq T > 1$ ГэВ к лагранжиану добавляется слагаемое \mathcal{L}_4 , которое обеспечивает слабые взаимодействия калибровочных бозонов между собой (33). Восстанавливаются все цветовые компоненты u -кварков (63) и взаимодействия между ними (64). У d -кварка появляется вторая цветовая степень свободы, сильно взаимодействующая с первой. Активизируется большое количество взаимодействий между глюонами (68).

В интервале температур $1 \text{ ГэВ} \geq T > 0, 2 \text{ ГэВ}$ появляется третья цветовая степень свободы d -кварка (63), присутствуют все цветовые взаимодействия за исключением (70). Наконец, при $T \leq 0, 2 \text{ ГэВ}$ в полном объеме восстанавливается стандартная модель.

Заключение

Рассмотрен предельный случай стандартной модели, соответствующий контракции ее калибровочной группы. Предполагается, что математический параметр контракции уменьшается при возрастании температуры Вселенной, а его нулевой предел соответствует «бесконечной» температуре, не превышающей планковскую энергию 10^{19} ГэВ. т.е. предел, где становятся существенными гравитационные взаимодействия. Другими словами, эволюция частиц не выходит за рамки проблем, описываемых электрослабыми и сильными взаимодействиями. Прослежены стадии развития стандартной модели в процессе эволюции Вселенной по мере ее остывания, которые различаются степенями контракционного параметра. Промежуточные лагранжианы \mathcal{L}_k находятся с помощью уровня обрезания Δ с учетом типичных энергий КХД и электрослабой модели. Их явный вид для каждой стадии развития стандартной модели получен из разложений (44),(71),(73) полных лагранжианов, что позволяет сделать выводы о развитии взаимодействий и свойств частиц в каждую из рассмотренных эпох.

Полученная схема эволюции частиц не противоречит разработанной из других соображений истории Вселенной [1, 8], согласно которой обусловленные КХД фазовые переходы происходят позже электрослабых фазовых переходов. Кроме того, она дает основу для более детального анализа этапов становления лептонов и кварк-глюонной плазмы, учитывая тот факт, что слагаемые $L_{gl}^{(6)}$ (69) и $L_{gl}^{(8)}$ (70) в глюонном лагранжиане L_{gl} (65) пренебрежимо малы при температурах от 0.2 до 100 ГэВ.

С другой стороны, в отличие от ТВО, наличие непрерывно изменяющегося параметра позволяет анализировать полученные результаты с точки зрения их зависимости от температуры. В частности, экспериментальные данные, полученные на Большом адронном коллайдере по сечениям рождения бозонов Хиггса при энергиях 7, 8, 13 и 14 ТэВ, не противоречат предложенной гипотезе.

Литература

1. Емельянов, В.М. Стандартная модель и ее расширения / В.М. Емельянов. – Москва: Физматлит, 2007. – 584 с.
2. Georgi, H. Unity of all elementary particle forces / H. Georgi, S.L. Glashow // Phys. Rev. Lett. – 1974. – Vol. 8. – P. 438. DOI: 10.1103/PhysRevLett.32.438.
3. Pati, J. Lepton number as the fourth color / J. Pati, A. Salam // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 1. – P. 275. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.275.
4. Croon, D. GUT physics in the era of the LHC / D. Croon, T.E. Gonzalo, L. Graf, N. Košnik, G. White // Front. Phys. – 2019. DOI: 10.3389/fphy.2019.00076.
5. Gromov, N.A. Elementary particles in the early Universe / N.A. Gromov // J. Cosmol. Astropart. Phys. – 2016. – Vol. 03. – P. 053.
6. Gromov, N.A. Particles in the early Universe: high-energy limit of the Standard Model from the contraction of its gauge group / N.A. Gromov. – Singapore: World Scientific, 2020. – 159 p.
7. Громов, Н.А. Стандартная модель при высоких энергиях из контракции калибровочной группы / Н.А. Громов // Физика элемент. частиц и атом. ядра. – 2020. – Т. 51, вып. 4. – С. 601–610.
8. Горбунов, Д.С. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва / Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. – Москва: ЛЕНАНД, 2022. – 616 с.
9. Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E.P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39. – P. 510–524.
10. Громов, Н.А. Контракции классических и квантовых групп / Н.А. Громов. – Москва: Физматлит, 2012. – 318 с.
11. Рубаков, В.А. Классические калибровочные поля / В.А. Рубаков. – Москва: Эдиториал УРСС, 1999. – 336 с.
12. Решетихин, Н.Ю. Квантование групп Ли и алгебр Ли / Н.Ю. Решетихин, Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев // Алгебра и анализ. – 1989. – Т. 1. – С. 178–206.
13. Громов, Н.А. Гипотеза о контракции калибровочной группы Стандартной модели и экспериментальные данные БАК // Известия Коми НЦ УрО РАН. Сер. «Физ.-мат. науки». – 2022. – Вып. 5(57). – С. 34–41. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-34-41.
14. Zyla, P.A. The review of particle physics / P.A. Zyla et al. (Particle Data Group) // Prog. Theor. Exp. Phys. – 2020. – P. 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104.

References

1. Emel'yanov, V.M. Standartnaya model i ee rasshireniya [Standard model and its extensions] / V.M. Emel'yanov. – M.: Fizmatlit, 2007. – 584 p.
2. Georgi, H. Unity of all elementary particle forces / H. Georgi, S.L. Glashow // Phys. Rev. Lett. – 1974. – Vol. 8. – P. 438. DOI: 10.1103/PhysRevLett.32.438.
3. Pati, J. Lepton number as the fourth color / J. Pati, A. Salam // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 1. – P. 275. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.275.
4. Croon, D. GUT physics in the era of the LHC / D. Croon,

- T.E. Gonzalo, L. Graf, N. Košnik, G. White // *Front. Phys.* – 2019. DOI: 10.3389/fphy.2019.00076.
5. Gromov, N.A. Elementary particles in the early Universe / N.A. Gromov // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* – 2016. – Vol. 03. – P. 053.
 6. Gromov, N.A. Particles in the early Universe: high-energy limit of the Standard Model from the contraction of its gauge group / N.A. Gromov. – Singapore: World Scientific, 2020. – 159 p.
 7. Gromov N. A. High-energy Standard Model from the gauge group contraction / N.A. Gromov // *Phys. Partic. Nucl.* – 2020. – Vol. 51. – № 4. – P. 540–544. DOI: 10.1134/S1063779620040310.
 8. Gorbunov, D.S. Vvedeniye v teoriyu ranney Vselennoy: teoriya goryachego Bol'shogo vzryva [Introduction to the theory of the early Universe: Hot Big Bang Theory] / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov. – Moscow: LENAND, 2022. – 616 p.; Singapore: World Scientific, 2011. – 488 p.
 9. Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E.P. Wigner // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* – 1953. – Vol. 39. – P. 510–524.
 10. Gromov, N.A. Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups] / N.A. Gromov. – Moscow: Fizmatlit, 2012. – 318 p.
 11. Rubakov, V.A. Klassicheskiye kalibrovochnyye polya [Classical gauge fields] / V.A. Rubakov. – Moscow: Editorial URSS, 1999. – 336 p.
 12. Reshetikhin, N.Yu. Quantization of Lie groups and Lie algebras / N.Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev // *Leningrad Math. J.* – 1990. – Vol. 1. – P. 193–225.
 13. Gromov, N.A. Gipoteza o kontraktsii kalibrovochnoy gruppy Standartnoy modeli i eksperimental'nyye dannyye BAK [Hypothesis about contraction of the gauge group of the Standard Model and LHC experimental data] / N.A. Gromov // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* – 2022. – № 5(57). – P. 34–41. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-34-41.
 14. Zyla, P.A. The review of particle physics / P.A. Zyla et al. (Particle Data Group) // *Prog. Theor. Exp. Phys.* – 2020. – P. 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104.

Для цитирования:

Громов, Н.А. Стандартная модель в ранней Вселенной / Н.А. Громов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2023. – № 4 (62). – С. 36–48.

For citation:

Gromov, N.A. Standartnaya model' v rannej Vselennoj [Standard Model in the early Universe] / N.A. Gromov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences".* – 2023. – № 4 (62). – P. 36–48.

Дата поступления статьи: 12.05.2023

Received: 12.05.2023

Пространства постоянной кривизны, уравнение Лиувилля и контракции алгебр Ли

И.В. Костяков, В.В. Куратов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Уравнение Лиувилля эквивалентно двумерному уравнению Лапласа и приводится к нему преобразованием Бэклунда, которое с точки зрения теории групп можно интерпретировать с помощью контракции Иненю-Вигнера. Мы разбираем построение решений уравнения Лиувилля для представления нулевой кривизны с помощью контракции алгебры Ли $sl(2)$ и используем для этого нильпотентные образующие.

Ключевые слова:

уравнение Лиувилля, контракции групп Ли

Введение

В XIX в. Ж. Лиувилль, занимаясь поиском поверхностей постоянной кривизны K , пришел к уравнению [1], которое теперь носит его имя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{K}{2} e^u, \quad (1)$$

и нашел решение в виде

$$e^u = \frac{4f_x(x)g_y(y)}{(1 + Kf(x)g(y))^2}. \quad (2)$$

Здесь x и y — две независимые переменные, $f(x)$ и $g(y)$ — две произвольные функции от x и y соответственно. Нижние индексы означают частные производные. После замены $g(y) \rightarrow \frac{1}{Kg(y)}$ решение (2) можно переписать в виде

$$e^u = -\frac{4f_x(x)g_y(y)}{K(f(x) + g(y))^2}. \quad (3)$$

Преобразования

$$\begin{aligned} x' &= X(x), & y' &= Y(y), \\ u' &= u - \ln X_x(x) - \ln Y_y(y) \end{aligned} \quad (4)$$

не меняют вид уравнения Лиувилля (1), образуя бесконечную группу, содержащую две произвольные функции, и могут служить для построения его решений [2, 3].

Spaces of constant curvatures, the Liouville equation and contractions of Lie algebras

I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru

Abstract

The Liouville equation is equivalent to the two-dimensional Laplace equation and is reduced to it by the Lie-Bäcklund transformation, which, from the point of view of group theory, can be interpreted from using the Inönü-Wigner contraction. We analyze the construction of solutions to the Liouville equation to represent zero curvature using the contraction of the Lie algebra $sl(2)$ and use nilpotent generators for this.

Keywords:

Liouville equation, contractions of Lie groups

Уравнение Лиувилля эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5)$$

(двумерному уравнению Лапласа в случае римановых пространств или волновому уравнению в случае пространств псевдоримановых), имеет ту же группу симметрии и приводится к уравнению (5) одним из двух преобразований Ли-Бэклунда

$$u = \ln \left(-\frac{4\tilde{u}_x \tilde{u}_y}{K\tilde{u}^2} \right), \quad u = \ln \left(-\frac{4\tilde{u}_x \tilde{u}_y}{K \cos^2 \tilde{u}} \right), \quad (6)$$

найденных еще Лиувиллем [2, 3]. Для любого решения $\tilde{u}(x, y)$ уравнения (5), формулы (6) дают решения уравнения (1). Уравнение Лиувилля вошло в учебники [4, 5] и остается интересной задачей как для математиков [6, 7], так и для физиков.

Поскольку группы движений плоских пространств можно получить предельными переходами из групп движений пространств постоянной кривизны ($K \neq 0$), то преобразования Бэклунда, переводящие уравнение Лиувилля в уравнение Лапласа или волновое, также можно связать с контракциями соответствующих групп (алгебр) [8–10].

Контракции алгебр Ли были впервые введены в работе Иненю и Вигнера [11] и в наиболее простой реализации заключаются в умножении некоторых ее элементов на па-

параметры ε_i с последующим независимым устремлением их к нулю таким образом, чтобы в пределе получались новые алгебры Ли. Возможен и алгебраический подход к контракциям [12], заключающийся в использовании алгебры Пименова $P_n(t)$, при котором вместо параметров ε используются нильпотентные элементы этой алгебры.

В общем случае, как было отмечено [8–10], преобразования Бэклунда связаны с контракциями Иненю-Вигнера. Если гамильтониан имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{H}_I$, где постоянная взаимодействия ε совпадает с параметром контракции, то при устремлении ε к нулю задача сводится к системе, описываемой свободным гамильтонианом \hat{H}_0 , а общее решение можно строить из связанных с ним свободных полей.

Например, нелинейное уравнение Лиувилля описывается в терминах алгебры Ли $sl(2)$ или $so(3)$, а связанное с ним линейное уравнение Лапласа (5), решения которого играют роль асимптотических полей, связано с группой движений плоскости, которая может быть получена контракцией из $sl(2)$ или $so(3)$. При этом контрактционный параметр, равный постоянной взаимодействия, можно интерпретировать и как кривизну K соответствующего пространства.

Также для цепочки Тоды контракция соответствующей алгебры Ли позволяет строить общее решение. Предельные переходы в Тода системах, перестройка диаграмм Дынкина, влияние на гамильтониан взаимодействия, понижение размерности получающейся Тода системы и появление свободных уравнений исследованы в [13], а связь контракций и преобразований Бэклунда для A_n -цепочки Тоды отмечена в [14].

В работе [15], основываясь на системе уравнений, из которой следует уравнение нулевой кривизны [10, 16], были найдены преобразования Бэклунда для A_n -цепочки Тоды, связывающие ее с A_{n-1} -цепочкой Тоды и свободным уравнением Лапласа. Аналогичный результат получен для B_n, C_n и G_2 -цепочек Тоды. Отсюда следует, что с $L - A$ парой ассоциируются две алгебры Ли, отвечающие первоначальному уравнению и уравнению, связанному с ним преобразованием Бэклунда и что саму $L - A$ пару можно понимать как результат некоторой композиции двух алгебр Ли — исходной и контрактированной.

А. Пуанкаре использовал уравнение Лиувилля в задаче об униформизации римановых поверхностей [17] и доказал существование решения уравнения Лиувилля для полной конформной метрики отрицательной кривизны с определенными асимптотиками в окрестностях особых точек. Такое решение определяет на сфере с выколотыми точками полную метрику отрицательной кривизны. Решения уравнения Лиувилля, с определенными асимптотиками в проколотых точках и сингулярностями определенного типа на замкнутых контурах, интерпретируемые как горизонт черной дыры, могут трактоваться как решения типа черных дыр. На основе результатов магистерской диссертации В.И. Смирнова 1918 г. для случая четырех проколов были явно описаны все решения типа черных дыр [18]. У уравнения Лиувилля есть и солитонные решения [19, 20].

Классическая теория Лиувилля — это теория поля, свя-

занная с гиперболическими римановыми поверхностями. Полные конформные метрики на римановой поверхности являются классическими полями теории, а уравнение Лиувилля — уравнением Эйлера-Лагранжа для соответствующего функционала [21]. Пример классического поля Лиувилля разобран в [22].

Решения (2) лежат в основе квантовой модели Лиувилля — базового примера конформной теории поля. Функции f и g играют здесь роль свободных полей и нулевых мод [23]. В теории струн квантовое поле Лиувилля возникает как конформная аномалия и играет важную роль [24].

В данной работе предложено использовать нильпотентные образующие и алгебраический вариант контракций [12] для представления уравнений Лиувилля и Лапласа через уравнение нулевой кривизны и нахождения связи их решений.

1. Геометрии Кэли-Клейна и уравнение Лиувилля

Согласно программе Ф. Клейна, проективная геометрия и ее группа движений могут служить базой для построения геометрий. Каждой из девяти геометрий Кэли-Клейна отвечает подгруппа проективной группы, т.е. подгруппа матриц 3×3 , которая задается соответствующим абсолютном. Некоторые из этих подгрупп связаны предельными переходами. Существует также глубокая связь различных видов комплексных и гиперкомплексных чисел с геометриями Кэли-Клейна [25]. Отметим подход к построению геометрий, основанный на принципе феноменологической симметрии [26, 27].

Мы следуем подходу, предложенному Р.И. Пименовым [28], где двумерные геометрии Кэли-Клейна (рис. 1) моделируются в виде двумерной сферы с именованными координатами, которые могут быть вещественными, мнимыми и нильпотентными [12, 28, 29]. Используя параметры $j_k = 1, \iota_k, i$, именованные координаты можно представить в виде $x_0, j_1 x_1, j_1 j_2 x_2, x_k \in \mathbb{R}$ и с помощью них реализовать девять геометрий на поверхностях

$$x_0^2 + j_1^2 x_1^2 + j_1^2 j_2^2 x_2^2 = R^2, \quad (7)$$

в пространствах с метрикой

$$ds^2 = (dx_0)^2 + j_1^2 (dx_1)^2 + j_1^2 j_2^2 (dx_2)^2. \quad (8)$$

Группа движений сферы изоморфна ортогональной группе $SO(3)$. Группы движений остальных двумерных геометрий Кэли-Клейна могут быть получены из $SO(3)$ контракциями и аналитическими продолжениями [12]. Генераторы соответствующих алгебр Ли получаются из генераторов алгебры Ли $so(3)$ домножением на параметры j_k

$$X \rightarrow j_1 X, \quad Y \rightarrow j_2 Y, \quad Z \rightarrow j_1 j_2 Z,$$

где X, Y, Z — генераторы вращений в двумерных плоскостях $\{x_0, x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_0, x_2\}$ соответственно. Эти преобразования при нильпотентных значениях j_k соответствуют преобразованиям контракций Иненю-Вигнера. Коммутационные соотношения имеют вид [12]

$$[X, Y] = Z, \quad [Y, Z] = j_1^2 X, \quad [Z, X] = j_2^2 Y. \quad (9)$$

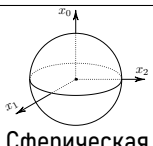
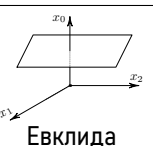
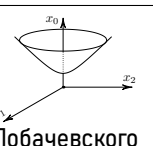
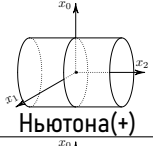
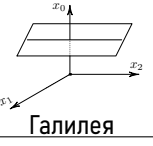
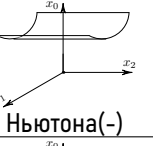

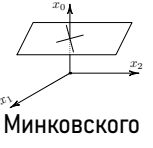

$j_2 \backslash j_1$	1	l_1	i
1	 Сферическая	 Евклида	 Лобачевского
l_2	 Ньютона(+)	 Галилея	 Ньютона(-)
i	 анти-де Ситтера	 Минковского	 де Ситтера

Рисунок 1. Двумерные пространства Кэли-Клейна.
Figure 1. Two-dimensional Cayley-Klein spaces.

Для римановых ($j_2 = 1$) и псевдоримановых ($j_2 = i$) двумерных пространств постоянной кривизны метрику

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (10)$$

можно представить в конформном виде [4, 5]

$$ds^2 = e^u (dx^2 + j_2^2 dy^2) = e^u dz d\bar{z}, \quad (11)$$

$$e^{-u} = (1 + K(x^2 + j_2^2 y^2))^2 = (1 + Kz\bar{z})^2, \quad (12)$$

где $z = x + ij_2 y$, $\bar{z} = x - ij_2 y$. В этом случае гауссова кривизна K имеет вид [4, 5]

$$K = -\frac{e^u}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + j_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = -2e^{-u} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (13)$$

Если кривизна постоянна, то для функции $u = u(z, \bar{z})$ получаем уравнение Лиувилля (1)

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + j_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{K}{2} e^u. \quad (14)$$

Любая поверхность с римановой метрикой (11) ($j_2 = 1$) постоянной кривизны K локально изометрична сфере \mathbb{S}^2 при $K > 0$, евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 при $K = 0$ или плоскости Лобачевского \mathbb{H}^2 при $K < 0$, которые являются универсальными накрывающими поверхностями для всех поверхностей соответственно положительной, нулевой и отрицательной кривизны [4, 5]. Любая псевдориманова поверхность ($j_2 = i$) с метрикой вида (11) постоянной кривизны локально изометрична однополостному гиперболоиду \mathbb{L}_2 ($K \neq 0$) или плоскости Минковского $\mathbb{R}_{1,1}$ ($K = 0$). Таким образом, уравнение Лиувилля имеет отчетливый геометрический смысл и связана с внутренней геометрией поверхностей в евклидовом или псевдоевклидовом пространствах.

Рассмотрим более подробно, как получаются эти формулы, и начнем с трех римановых геометрий Кэли-Клейна ($j_2 = 1$) – сферы, плоскостей Евклида и Лобачевского. Сфера радиуса R (рис. 2) задается уравнениями (7) и (8) с $j_1 = j_2 = 1$. При стереографической проекции на экваториальную плоскость $x_0 = 0$ из точки $(R, 0, 0)$ метрика

сферы принимает конформный вид (11) [4, 5]

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + K(x^2 + y^2))^2} = \frac{4dz d\bar{z}}{(1 + K|z|^2)^2}. \quad (15)$$

Здесь $z = x + iy$ – координаты стереографической проекции соответствующей точки сферы $M(x_0, x_1, x_2)$, $K = \frac{1}{R^2}$ – гауссова кривизна сферы.

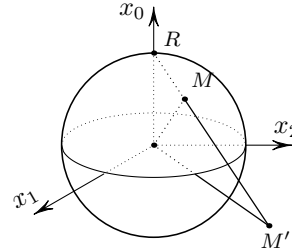


Рисунок 2. Стереографическая проекция сферы \mathbb{S}_2 . Сферическая плоскость.

К плоскости Лобачевского ($j_1 = i, j_2 = 1$) можно прийти, рассматривая псевдосферу радиуса R (рис. 3)

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = R^2 \quad (16)$$

в псевдоевклидовом пространстве \mathbb{R}_1^3 с метрикой

$$ds^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2. \quad (17)$$

При стереографической проекции верхней половины гиперболоида на плоскость $x_0 = 0$ из точки $(-R, 0, 0)$ метрика на плоскости Лобачевского (модель Пуанкаре) принимает конформный вид (11), (15), где $K = -\frac{1}{R^2}$, $|z| < 1$ [4, 5].

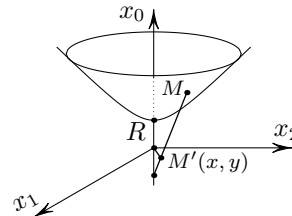


Рисунок 3. Стереографическая проекция гиперболоида. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского \mathbb{H}_2 .

Figure 3. Stereographic projection of a hyperboloid. The Poincare model of the Lobachevsky plane \mathbb{H}_2 .

Таким образом, конформную метрику и уравнения Лиувилля для сферы, плоскостей Евклида и Лобачевского для $K = \frac{j_1^2}{R^2}$ можно записать в виде (11), (12) и (14). Делая преобразование $z \rightarrow f(z)$, получаем метрику и общее решение

$$ds^2 = \frac{4|f_z|^2}{(1 + K|f|^2)^2} dz d\bar{z}, \quad e^u = \frac{4|f_z|^2}{(1 + K|f|^2)^2}. \quad (18)$$

Отметим, что если у нас есть какое-нибудь решение $u(z, \bar{z})$ уравнения Лиувилля, то функция

$$U(z, \bar{z}) = u(f(z), \bar{f}(\bar{z})) f_z(z) \bar{f}_{\bar{z}}(\bar{z}) \quad (19)$$

тоже будет решением, которое можно получить и с помощью симметрий (4).

Аналогично можно рассмотреть псевдоримановы пространства постоянной кривизны ($j_2 = i$), уравнения Лиувилля для них и получить формулы (11)–(14). Здесь есть три типа прямых — времениподобные, пространственноподобные и световые, не совмещаемых друг с другом движениями. Эти геометрии применяются для моделей пространства-времени — анти-де Ситтера, Минковского и де Ситтера (рис. 4).

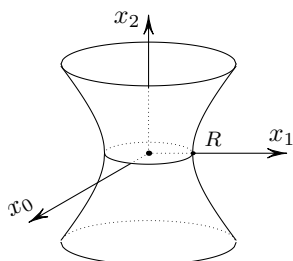


Рисунок 4. Однополостной гиперboloид \mathbb{L}_2 (пространство-время анти-де Ситтера AdS_2).

Figure 4. One-sheeted hyperboloid \mathbb{L}_2 (anti-de Sitter space-time AdS_2).

В полуримановых пространствах с $j_2 = \iota_2$ появляются два типа прямых, не совмещающихся движениями этих геометрий. Одна из них моделируется дуальным числом, что приводит к возникновению двух метрик: в базе и слое. Это позволяет применять полуримановы геометрии к описанию двух разных физических величин, например времени и пространства, т. е. служить моделями пространства-времени [12, 28, 29]. Мы их здесь рассматривать не будем.

Дифференцируя уравнение Лиувилля (14) по z

$$u_{zz\bar{z}} = -\frac{K}{2}e^u u_z = u_{z\bar{z}}u_z, \quad (20)$$

получаем, что $W_2(u_{zz}, u_z) = W(z)$, где

$$W(z) = u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 \quad (21)$$

является голоморфной функцией от z

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 \right) = 0. \quad (22)$$

Обозначая $p = u_z$, получаем уравнение Риккати

$$p_z - \frac{1}{2}p^2 = W(z), \quad (23)$$

которое легко интегрируется.

Отметим, что функция $\psi = e^{-\frac{1}{2}u}$ играет важную роль в теории уравнения Лиувилля и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{2}W\psi = 0. \quad (24)$$

В квантовой теории Лиувилля поле ψ описывает вырожденный на уровне 2 вектор в модуле Верма алгебры Вирасоро [18]. С уравнением (24), в котором функция $W(z)$ в случае n особых точек имеет вид

$$W(z) \sim \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2(z-z_k)^2} + \frac{c_k}{z-z_k} \right), \quad (25)$$

Ф. Клейн и А. Пуанкаре связывали задачу об униформизации римановых поверхностей, а А.М. Поляков обнаружил

[24, 30], что действие уравнения Лиувилля S , вычисленное на классическом решении, является производящей функцией для аксессуарных параметров c_k , где

$$c_k = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial z_k}.$$

2. Представление нулевой кривизны уравнения Лиувилля

Уравнение Лиувилля (14) с $K = \frac{j_1^2}{R^2}$, $j_1 = 1$, ι_1 может быть записано с помощью представления нулевой кривизны для алгебры Ли $sl(2)$ или $so(3)$. Мы разберем здесь вариант алгебры $sl(2)$. Для алгебры $so(3, j)$ вида (9) все аналогично. Уравнение (14) является условием совместности

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial V}{\partial z} + [U, V] = 0 \quad (26)$$

для переопределенной системы уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = U(z, \bar{z})\Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = V(z, \bar{z})\Psi,$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ j_1 \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где

$$U = v_1 \mathbf{h} + w_1 \mathbf{e}, \quad V = v_2 \mathbf{h} + w_2 \mathbf{f}. \quad (28)$$

Здесь v_i, w_i — функции от z и \bar{z} соответственно $u = \ln(-4w_1 w_2)$, $\mathbf{h}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ — генераторы алгебры $sl(2, j_1)$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{j_1}{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{j_1}{R} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

коммутационные соотношения между которыми имеют вид

$$[\mathbf{e}, \mathbf{f}] = K\mathbf{h}, \quad [\mathbf{h}, \mathbf{e}] = 2\mathbf{e}, \quad [\mathbf{h}, \mathbf{f}] = -2\mathbf{f}. \quad (30)$$

Кривизна K , которую можно интерпретировать как постоянную взаимодействия в (14), играет роль параметра конформации алгебры Ли $sl(2)$ (30). При $K = 0$ ($j_1 = \iota_1$) алгебра Ли $sl(2)$ переходит в алгебру Ли группы движений плоскости, а уравнение Лиувилля — в двумерное уравнение Лапласа вида (5) [9, 10], решения которого хорошо известны

$$\phi(z, \bar{z}) = f(z) + g(\bar{z}). \quad (31)$$

Система (27) и условие совместности (26) допускают естественную геометрическую интерпретацию [16]. U и V можно рассматривать как локальные коэффициенты связности в тривиальном расслоении $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$, где \mathbb{C} играет роль базы, а Ψ лежит в слое \mathbb{C}^2 . При этом вектор Ψ ковариантно постоянен, а связность (U, V) имеет нулевую кривизну. Когда параметр j_1 равен дуальному числу, в слое Ψ есть выделенное направление.

Представление уравнения Лиувилля в виде условия (26) справедливо для целого класса калибровочно эквивалентных связностей U и V

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \frac{\partial G}{\partial z} G^{-1} + GUG^{-1}, \\ V &\rightarrow \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} G^{-1} + GVG^{-1} \end{aligned} \quad (32)$$

и означает существование бесконечного набора интегралов движения — законов сохранения [16]. Наличие интеграла $W(z)$ (21), не зависящего от кривизны K , позволяет написать равенство [9]

$$u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 = \phi_{zz} - \frac{1}{2}\phi_z^2, \quad (33)$$

которое и является преобразованием Бэклунда, связывающим решение уравнения Лиувилля u с решением уравнения Лапласа ϕ . В эквивалентном виде его можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-\phi} \frac{\partial}{\partial z} e^{\frac{1}{2}(\phi-u)} \right) = 0, \quad (34)$$

проинтегрировать и получить решение вида (2) [9]

$$e^u = \frac{4f_z g_{\bar{z}}}{(1 + Kfg)^2}, \quad (35)$$

где f и g — произвольные функции от z и \bar{z} соответственно. Таким образом, решения уравнения Лапласа, которое получается при $j_1 = \iota_1$ и контракции $sl(2)$, позволяют строить решения уравнения (14).

Пользуясь калибровочными преобразованиями (32) связностей U и V , выберем функции v_i и w_i в виде

$$v_1 = -\frac{u_z}{2}, \quad w_1 = -\frac{a}{2}, \quad v_2 = 0, \quad w_2 = \frac{e^u}{2a}, \quad (36)$$

где a — произвольный параметр, и распишем подробнее систему уравнений (27)

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial}{\partial z} \Psi_1 = -u_z \Psi_1 - \frac{j_1^2 a}{R} \Psi_2, \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \Psi_2 = u_z \Psi_2, \\ \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Psi_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Psi_2 = \frac{e^u}{2aR} \Psi_1. \end{cases} \end{cases} \quad (37)$$

Продифференцировав первое равенство первой системы по z , получим для функции Ψ_1 уравнение типа (24)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_1 + \frac{1}{2} \left(u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 \right) \Psi_1 = 0. \quad (38)$$

Дифференцируя (38) по \bar{z} можно еще раз убедиться в том, что $W(z)$ (21) является интегралом движения и не зависит

от \bar{z} и кривизны K . Обозначая $\eta = \ln \frac{\Psi_2}{\Psi_1}$ и вводя функцию $\phi = u - 2\eta$, можно переписать системы (37) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} (\phi - u) = \frac{aj_1^2}{R} e^{\frac{1}{2}(u+\phi)}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\phi + u) = \frac{1}{aR} e^{\frac{1}{2}(u-\phi)}, \end{cases} \quad (39)$$

которая является преобразованием Бэклунда и связывает решения $u(z, \bar{z})$ уравнения Лиувилля (14) и решения $\phi(z, \bar{z})$ уравнения Лапласа (31). В работе [15] было отмечено, что в такой записи уравнения нулевой кривизны приобретают более симметричную форму, и выявляется их дополнительная структура, которая говорит о том, что с ними ассоциируются две алгебры Ли — одна, отвечающая уравнению Лиувилля, и другая, отвечающая уравнению Лапласа. Используя представления (29), (30), мы описываем две алгебры: исходную и контрактированную, действующие в двух разных двумерных комплексных пространствах Ψ (27), одно из которых имеет выделенное направление, описываемое дуальным числом. Эта же конструкция для внутреннего пространства лептонов и кварков в электро-слабой модели использовалась в [12]. Инвариант (33) сохраняется в обоих пространствах.

Переход к переменной проективного типа η позволяет дать интерпретацию и на языке проективной геометрии. В этом случае имеем два проективных пространства $\mathbb{C}P^1$, на одном из которых введен абсолют $\mathbb{R}P^1$.

Связности U и V можно представить в виде

$$\begin{aligned} U &= g_z g^{-1}, \quad V = g_{\bar{z}} g^{-1}, \\ g &= \begin{pmatrix} A & j_1 B \\ j_1 C & D \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Воспользовавшись (32) и (36) и расписывая уравнения

$$g_z = Ug, \quad g_{\bar{z}} = Vg, \quad (41)$$

имеем

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial}{\partial z} A = -u_z A - a \frac{j_1^2}{R} C, & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} A = 0, \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} C = u_z C, & 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} C = \frac{e^u}{aR} A, \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} B = -u_z B - \frac{a}{R} D, & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} B = 0, \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} D = u_z D, & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} D = \frac{j_1^2 e^u}{aR} B. \end{cases} \quad (42)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и (37). Легко выводится, что отношения A/B и C/D не зависят от z и \bar{z} соответственно и являются функциями, с помощью которых строится решение (35) [23]. Так же, как и в (37), несложно получить интеграл движения $W(z)$ и преобразования Бэклунда.

Преобразования Бэклунда и связанные с ними контракции алгебры Ли можно сопоставить с обычной теорией возмущений [9], отождествляя постоянную взаимодействия

K с параметром контракции алгебры $sl(2)$. Решим уравнение (1), разлагая u в ряд по параметру K

$$u(x, y) = \Phi_0(x, t) + K\Phi_1(x, y) + K^2\Phi_2(x, y) + \dots$$

Уравнения для Φ_i имеют вид [17]

$$\begin{aligned}(\Phi_0)_{xy} &= 0, & (\Phi_1)_{xy} &= -\frac{1}{2}e^{\Phi_0}, \\(\Phi_2)_{xy} &= -\frac{1}{2}(e^{\Phi_0+\Phi_1} - e^{\Phi_0}), \\(\Phi_3)_{xy} &= -\frac{1}{2}(e^{\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2} - e^{\Phi_0+\Phi_1}), \quad \dots\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем ряд теории возмущений, члены которого являются функциями от решения уравнения Лапласа.

Заключение

Мы использовали представление нулевой кривизны и ввели определенным образом параметр j_1 . Значению $j_1 = 1$ соответствуют уравнение Лиувилля, алгебра Ли $sl(2)$ и слой \mathbb{C}_2 для вектор-функции Ψ . При $j_1 = \iota_1$ получаем уравнение Лапласа, алгебру Ли $e(2)$ и слой $\mathbb{C}_2(\iota_1)$, в котором есть выделенное направление. Интеграл движения, который не зависит от этого параметра, связывает решения уравнения Лиувилля и Лапласа и является преобразованием Бэклунда.

Таким образом, алгебраический вариант контракции $sl(2)$ позволяет, находясь в рамках представления матрицами 2×2 , единым образом описать уравнения Лиувилля и Лапласа для представления нулевой кривизны и связать их решения посредством преобразования Бэклунда. Этот метод можно использовать и для исследования интегрируемых моделей для алгебр серий A_n, B_n и т.д.

Литература

1. Liouville, J. Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{du dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$ / J. Liouville // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1853. – Vol. 18. – P. 71–72.
2. Жибер, А.В. Уравнения типа Лиувилля / А.В. Жибер, Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249, № 1. – С. 26–29.
3. Ибрагимов, Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 280 с.
4. Дубровин, Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – Москва: Наука, 1986. – 760 с.
5. Катанаев, М.О. Геометрические методы в математической физике / М.О. Катанаев // arXiv:1311.0733 [math-ph]. – 2006 с.
6. Векуа, И.Н. Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = -2Ke^u$ / И.Н. Векуа // Сиб. матем. журн. – 1960. – Т. 1, № 3. – С. 331–342.
7. Попов, А.Г. Точные формулы построения решений уравнения Лиувилля $\Delta_2 u = e^u$ по решениям уравнения

- Лапласа $\Delta_2 v = 0$ / А.Г. Попов // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333, № 4. – С. 440–441.
8. Лезнов, А.Н. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем / А.Н. Лезнов, М.В. Савельев. – Москва: Наука, 1985. – 280 с.
9. Лезнов, А.Н. Нелинейные уравнения и градуированные алгебры Ли / А.Н. Лезнов, М.В. Савельев // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. – 1984. – Т. 22. – С. 101–136.
10. Лезнов, А.Н. Точно решаемые квантово-механические и двумерные квантово-полевые модели / А.Н. Лезнов, М.В. Савельев, И.А. Федосеев // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1985. – Т. 16, вып. 1. – С. 183–233.
11. Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E.P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39. – № 6. – P. 510–524.
12. Громов, Н.А. Контракции классических и квантовых групп / Н.А. Громов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 318 с.
13. Громов, Н.А. Предельные переходы в Toda системах / Н.А. Громов, И.В. Костяков, В.В. Куратов // Алгебра, дифференциальные уравнения и теория вероятностей (Труды Коми НЦ УрО РАН, № 151). – Сыктывкар, 1997. – С. 51–59.
14. Костяков, И.В. Преобразования Бэклунда для A_n -цепочки Toda и контракции / И.В. Костяков, В.В. Куратов // Тез. докл. XIII Коми респуб. молод. науч. конф. – Сыктывкар, 1997. – С. 219.
15. Андреев, В.А. Преобразования Бэклунда цепочек Toda / В.А. Андреев // ТМФ. – 1988. – Т. 75, № 3. – С. 340–352.
16. Тахтаджян, Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – Москва: Наука, 1986. – 528 с.
17. Пуанкаре, А.Ж. Избранные труды: сборник научных трудов. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре / А.Ж. Пуанкаре. – Москва: Наука, 1974. – Т. 3. – 772 с.
18. Тахтаджян, Л.А. О вещественных проективных связностях, подходе В.И. Смирнова и решениях уравнения Лиувилля типа черных дыр / Л.А. Тахтаджян // ТМФ. – 2014. – Т. 181, № 1. – С. 206–217.
19. Андреев, В.А. Применение метода обратной задачи рассеяния к уравнению $\sigma_{xt} = e^\sigma$ / В.А. Андреев // ТМФ. – 1976. – Т. 29, № 2. – С. 213–220.
20. Лезнов, А.Н. Симметрии и солитонные решения нелинейных уравнений / А.Н. Лезнов, В.И. Манько, С.М. Чумаков // ТМФ. – 1985. – Т. 63, № 1. – С. 50–63.
21. Takhtajan, L.A. Quantum Liouville theory in the background field formalism I. Compact Riemann surfaces / L.A. Takhtajan, L.-P. Teo // Commun. Math. Phys. – 2006. – Vol. 268. – P. 135–197.
22. Погребков, А.К. Теория поля Лиувилля / А.К. Погребков, М.К. Поливанов // Математическая физика и комплексный анализ: сборник обзорных статей 4. К 50-летию Института. Тр. МИАН СССР. – 1987. – Т. 176. – С. 86–96.
23. Фаддеев, Л.Д. Нулевые моды для квантовой модели

- Лиувилля / Л.Д. Фаддеев // Функц. анализ и его прил. – 2014. – Т. 48, № 3. – С. 14–23.
24. Polyakov, A.M. Quantum geometry of bosonic strings / A.M. Polyakov // Physics Letters B. 1981. – Vol. 103, № 3. – P. 207–210.
 25. Яглом, И.М. Проективные метрики / И.М. Яглом, Б.А. Розенфельд, Е.У. Ясинская // Успехи мат. наук. – 1964. – Т. 19, № 5(119). – С. 51–113.
 26. Кулаков, Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 193, № 5. – С. 985–987.
 27. Михайличенко, Г.Г. Двумерные геометрии / Г.Г. Михайличенко // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 4. – С. 803–805.
 28. Пименов, Р.И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений / Р.И. Пименов // Литовский мат. сб. – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 457–486.
 29. Пименов, Р.И. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени) / Р.И. Пименов. – Ленинград: Наука, 1968. – 496 с.
 30. Zamolodchikov, A.B. Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory / A.B. Zamolodchikov, A.I. Zamolodchikov // Nucl. Phys. B. – 1996. – Vol. 477. – P. 577–605.
- ## References
1. Liouville, J. Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{du dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$ / J. Liouville // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1853. – Vol. 18. – P. 71–72.
 2. Zhiber, A.V. Uravneniya tipa Liuvillya [Equations of Liouville type] / A.V. Zhiber, N.H. Ibragimov, A.B. Shabat // Dokl. Akad. Nauk SSSR – 1979. – Vol. 249, № 1. – P. 26–29.
 3. Ibragimov, N.H. Transformation groups applied to mathematical physics / N.H. Ibragimov. – Springer Dordrecht, 1985. – 394 p.
 4. Dubrovin, B.A. Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields / B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko. – Springer New York, 1991. – 470 p.
 5. Katanaev, M.O. Geometrical methods in mathematical physics / M.O. Katanaev // arXiv:1311.0733[math-ph]. – 2006 p.
 6. Vekua, I.N. Zamechaniya o svoystvah reshenij uravneniya $\Delta u = -2Ke^u$ [Remarks on properties of solutions of the equation $\Delta u = -2Ke^u$] / I.N. Vekua // Sibirsk. Mat. Zh. – 1960. – Vol. 1, № 3. – P. 331–342.
 7. Popov, A.G. Tochnye formuly postroeniya reshenij uravneniya Liuvillya $\Delta_2 u = e^u$ po resheniyam uravneniya Laplasya $\Delta_2 v = 0$ [Exact formulas for constructing solutions of the Liouville equation $\Delta_2 u = e^u$ from solutions of the Laplace equation $\Delta_2 v = 0$] / A.G. Popov // Doklady Akademii Nauk. – 1993. – Vol. 333, № 4. – P. 440–441.
 8. Leznov, A.N. Group-theoretical methods for integration of nonlinear dynamical systems / A.N. Leznov, M.V. Saveliev. – Progress in Mathematical Physics. Vol. 15. Birkhäuser Basel, 1992. – 292 p.
 9. Leznov, A.N. Nonlinear equations and graded Lie algebras / A.N. Leznov, M.V. Saveliev // Journal of Soviet Mathematics. – 1987. – Vol. 36, № 6. – P. 699–721.
 10. Leznov, A.N. Tochno reshaemye kvantovo-mekhanicheskie i dvumernye kvantovo-polevyje modeli [Exactly integrable quantum-mechanical and two-dimensional quantum-field systems] / A.N. Leznov, M.V. Saveliev, I.A. Fedoseev // Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei. – 1985. – Vol. 16, № 1. – P. 183–233.
 11. Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E.P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39, № 6. – P. 510–524.
 12. Gromov, N.A. Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups] / N.A. Gromov. – Moscow: FIZMATLIT, 2012. – 318 p.
 13. Gromov, N.A. Predel'nye perekhody v Toda sistemah [Limit transitions in Toda systems] / N.A. Gromov, I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov // Algebra, differencial'nye uravneniya i teoriya veroyatnostej [Algebra, differential equations and probability theory] (Trudy Komi NC UrO RAN, № 151). – Syktyvkar, 1997. – P. 51–59.
 14. Kostyakov, I.V. Preobrazovaniya Beklunda dlya A_n -seepochki Toda i kontrakcii [Bäcklund transformations for A_n -Toda chains and contractions] / I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov // Tez. dokl. XIII Komi respub. molod. nauch. konf. – Syktyvkar, 1997. – P. 219.
 15. Andreev, V.A. Preobrazovaniya Beklunda sepochek Tody [Bäcklund transformations of Toda chains] / V.A. Andreev // Theoretical and Mathematical Physics. – 1988. – Vol. 75, № 3. – P. 567–575.
 16. Faddeev, L.D. Hamiltonian methods in the theory of solitons / L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 592 p.
 17. Poincaré, H. Les fonctions fuchsienues et l'équation $\Delta u = e^u$ / H. Poincaré // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1898. – Vol. 4. – P. 137–230.
 18. Takhtadzhyan, L.A. O veshchestvennykh proektivnykh svyaznostyakh, podhode V. I. Smirnova i resheniyah uravneniya Liuvillya tipa chernykh dyr [Real projective connections, V. I. Smirnov's approach, and black-hole-type solutions of the Liouville equation] / L.A. Takhtadzhyan // Theoret. Math. Phys. – 2014. – Vol. 181, № 1. – P. 1307–1316.
 19. Andreev, V.A. Primenenie metoda obratnoj zadachi rasseyaniya k uravneniyu $\sigma_{xt} = e^\sigma$ [Application of the inverse scattering method to the equation $\sigma_{xt} = e^\sigma$] / V.A. Andreev // Theor. Math. Phys. – 1976. – Vol. 29. – P. 1027–1032.
 20. Leznov, A.N. Simmetrii i solitonnye resheniya nelinejnykh uravnenij [Symmetries and soliton solutions of nonlinear equations] / A.N. Leznov, V.I. Man'ko, S.M. Chumakov // Theor. Math. Phys. – 1985. – Vol. 63. – P. 356–365.
 21. Takhtajan, L.A. Quantum Liouville theory in the background field formalism I. Compact Riemann surfaces / L.A. Takhtajan, L.-P. Teo // Commun. Math. Phys. – 2006. – Vol. 268. – P. 135–197.
 22. Pogrebkov, A.K. Teoriya polya Liuvillya [Liouville field theory] / A.K. Pogrebkov, M.K. Polivanov // Proc. Steklov Inst. Math. – 1988. – Vol. 176. – P. 89–99.

23. Faddeev, L.D. Nulevye mody dlya kvantovoj modeli Liuvillya [Zero modes for the quantum Liouville model] / L.D. Faddeev // Functional Analysis and Its Applications. – 2014. – Vol. 48, № 3. – P. 166–174.
24. Polyakov, A.M. Quantum geometry of bosonic strings / A.M. Polyakov // Physics Letters B. 1981. – Vol. 103, № 3. – P. 207–210.
25. Yaglom, I.M. Projective metrics / I.M. Yaglom, B.A. Rozenfel'd, E.U. Yasinskaya // Russian Mathematical Surveys. – 1964. – Vol. 19, № 5. – P. 49–107.
26. Kulakov, Yu.I. Geometriya prostranstv postoyannoj krivizny kak chastnyj sluchaj teorii fizicheskikh struktur [The geometry of spaces of constant curvature as a special case of the theory of physical structures] / Yu.I. Kulakov // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1970. – Vol. 193, № 5. – P. 985–987.
27. Mikhailichenko, G.G. Dvumernye geometrii [Two-dimensional geometry] / G.G. Mikhailichenko // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1981. – Vol. 260, № 4. – P. 803–805.
28. Pimenov, R.I. Edinaya aksiomatika prostranstv s maksimal'noj gruppoj dvizhenij [Unified axiomatics of spaces with maximal movement group] / R.I. Pimenov // Lithuanian Math. J. – 1965. – Vol. 5, № 3. – P. 457–486.
29. Pimenov, R.I. Kinematic spaces: mathematical theory of space-time / R.I. Pimenov. – New York: Consultants Bureau, 1970. – 185 p.
30. Zamolodchikov, A.B. Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory / A.B. Zamolodchikov, Al.B. Zamolodchikov // Nucl. Phys. B. – 1996. – Vol. 477. – P. 577–605.

Для цитирования:

Костяков, И.В. Пространства постоянной кривизны, уравнение Лиувилля и контракции алгебр Ли / И.В. Костяков, В.В. Куратов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 49–56.

For citation:

Kostyakov, I.V. Prostranstva postoyannoj krivizny, uravnenie Liuvillya i kontrakcii algebr Li [Spaces of constant curvature, the Liouville equation and contractions of Lie algebras] / I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 49–56.

Дата поступления статьи: 09.06.2023

Received: 09.06.2023

On classical and quantum mechanical problem of two material points in three-dimensional Lobachevsky space

Yu.A. Kurochkin, N.D. Shaikovskaya, Dz.V. Shoukavy

B.I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

y.kurochkin@ifanbel.bas-net.by
n.shaikovskaya@dragon.bas-net.by
shoukavy@ifanbel.bas-net.by

Abstract

The classical and quantum problems of motion of two particles in a three-dimensional Lobachevsky space is formulated with respect to center of mass with arbitrary position. The Hamilton-Jacobi and Schrödinger equations of the problem are formulated and their solutions are found. It is shown that the reduced mass of the system depends on the relative distance. The classical and quantum problems of a rigid rotator in three-dimensional sphere and Lobachevsky space are formulated and solved. The dependences of the oscillation periods of the rotator on the ratio of the masses of the particles forming it are studied for a fixed total mass in the cases of spaces of constant curvature.

Keywords:

two-body problem in non-Euclidean space, center of mass, rigid rotator, space of constant curvature

Introduction

By analogy with the constructions and conclusions of works [1, 2] and relying on the definition of the center of mass given in works [3], we postulate its immobility in spaces of constant curvature, in this case in the three-dimensional Lobachevsky space, and consider the problem of two particles with an internal interaction described by potential, depending on the separation between particles. The essence of the statement, which replaces the formulation of the theorem on the center of mass in the three-dimensional Euclidean space, is that in spaces of constant curvature: Lobachevsky, on the 3-sphere and in three-dimensional elliptical space, there is a frame of reference in which the center of mass of the system of particles is at rest.

1. Variables of the center of mass and relative coordinates for a system of two particles

Since the formalism used below, despite the fact that it allows one to unify the description of the geometries of a num-

О классической и квантово-механической задаче двух материальных точек в трехмерном пространстве Лобачевского

Ю.А. Курочкин, Н.Д. Шайковская, Д.В. Шёлковий

Институт физики имени Б.И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

y.kurochkin@ifanbel.bas-net.by
n.shaikovskaya@dragon.bas-net.by
shoukavy@ifanbel.bas-net.by

Аннотация

Классическая и квантовая задачи о движении двух частиц в трехмерном пространстве Лобачевского сформулированы относительно центра масс с произвольным положением. Выписаны уравнения Гамильтона-Якоби и Шрёдингера задачи и найдены их решения. Показано, что приведенная масса системы зависит от относительного расстояния. Сформулированы и решены классическая и квантовая задачи жесткого ротатора в трехмерной сфере и пространстве Лобачевского. Исследованы зависимости периодов колебаний ротатора от отношения масс образующих его частиц при фиксированной полной массе в случаях пространств постоянной кривизны.

Ключевые слова:

задача двух тел в неевклидовом пространстве, центр масс, жесткий ротатор, пространство постоянной кривизны

ber of three-dimensional and two-dimensional spaces of constant curvature (and therefore convenient), is not widely used, we are forced to present some calculations similar to those used in [1-3]. The problems associated with the separation of variables, including those in spaces of constant curvature, can also be found in [4]. To formulate and solve the problem in three-dimensional Lobachevsky space, instead of biquaternions defined over double numbers, biquaternions over complex numbers will be used.

The following definition of the center of mass coordinates of two particles with masses m_1 and m_2 is used

$$X_C = i \frac{m_1 X^{(1)} + m_2 X^{(2)}}{\sqrt{(m_1 X^{(1)} + m_2 X^{(2)})(m_1 \bar{X}^{(1)} + m_2 \bar{X}^{(2)})}}. \quad (1)$$

Here the corresponding biquaternions are given over the complex numbers, and not over the double ones, as it was in the case with the 3-sphere [1,2].

The three-dimensional independent coordinates of the center of mass will be the components of the vector

$$\mathbf{q}_C = -i \frac{\mathbf{X}_C}{X_{0C}} = -i \frac{m_1 \mathbf{X}^{(1)} + m_2 \mathbf{X}^{(2)}}{m_1 X_0^{(1)} + m_2 X_0^{(2)}}. \quad (2)$$

The coordinates of two material points in the embedding four-dimensional space will be the components of the biquaternions:

$$X^{(1)} = iX_0^{(1)} + \mathbf{X}^{(1)}, \quad X^{(2)} = iX_0^{(2)} + \mathbf{X}^{(2)}, \quad (3)$$

where $i^2 = -1$. The ends of the vectors (biquaternions) lie on the upper field of the pseudo-Euclidean space hyperboloid, on which the real Lobachevsky space is realized. For convenience, the radius of space curvature is assumed to be unity. Then

$$X^{(1)} \bar{X}^{(1)} = -1, \quad X^{(2)} \bar{X}^{(2)} = -1. \quad (4)$$

As independent coordinates, it is convenient to use the Beltrami coordinates, which are components of vectors on the sphere [5]

$$\mathbf{q}^{(1)} = -i \frac{\mathbf{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = -i \frac{\mathbf{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}} \quad (5)$$

with the law of addition (subtraction)

$$\mathbf{q}'' = \langle \mathbf{q}, \pm \mathbf{q}' \rangle = \frac{\mathbf{q} \pm \mathbf{q}' \pm [\mathbf{q}, \mathbf{q}']}{1 \mp (\mathbf{q}, \mathbf{q}')} \quad (6)$$

coinciding with the composition law of F.I. Fedorov [6]. Here, parentheses denote the usual scalar, square brackets denote the vector product of vectors. In variables (5), expression (2) has the form

$$\mathbf{q}_C = \frac{m_1 \mathbf{q}^{(1)} / \sqrt{1 + (\mathbf{q}^{(1)})^2} + m_2 \mathbf{q}^{(2)} / \sqrt{1 + (\mathbf{q}^{(2)})^2}}{m_1 / \sqrt{1 + (\mathbf{q}^{(1)})^2} + m_2 / \sqrt{1 + (\mathbf{q}^{(2)})^2}}. \quad (7)$$

As noted earlier, expression (7) for the coordinates of the center of mass coincides in form with a similar expression for the coordinates of the center of mass in a three-dimensional flat space, in which the expressions for constant masses m_1 and m_2 are replaced by mass expressions with the dependence of masses on coordinates $m_1 / \sqrt{1 + (\mathbf{q}^{(1)})^2}$ and $m_2 / \sqrt{1 + (\mathbf{q}^{(2)})^2}$.

We also note that this definition coincides with the definition given in [6], if we take into account that $\mathbf{q}^2 = -\text{th}^2 r$, where r is the distance between two points. As it follows from the formula (7) (and shown in [7]), such a definition can be generalized to an arbitrary number of particles. The biquaternion analogue of the relative variable for two given particles is the operator

$$Y_{12} = -X^{(2)} \bar{X}^{(1)}, \quad (8)$$

defined as

$$X^{(2)} = Y_{12} X^{(1)}. \quad (9)$$

Independent three-dimensional coordinates of relative motion, defined as components of the relative motion vector

$$\mathbf{q}_y = \frac{Y_{12} - \bar{Y}_{12}}{Y_{12} + \bar{Y}_{12}} = \left\langle -i \frac{\mathbf{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}}, i \frac{\mathbf{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}} \right\rangle =$$

$$= \langle \mathbf{q}^{(2)}, -\mathbf{q}^{(1)} \rangle = \frac{\mathbf{q}^{(2)} - \mathbf{q}^{(1)} - [\mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(1)}]}{1 + (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})}. \quad (10)$$

Let us also introduce four-dimensional Y_1 and Y_2 and three-dimensional $\mathbf{q}_y^{(1)}$, $\mathbf{q}_y^{(2)}$ coordinates of points relative to the center of mass, determined similarly to (8) and (9), namely

$$X^{(1)} = Y_1 X_C, \quad X^{(2)} = Y_2 X_C, \quad (11)$$

moreover

$$Y_1 = -X^{(1)} \bar{X}_C, \quad Y_2 = -X^{(2)} \bar{X}_C. \quad (12)$$

It is clear that

$$Y_{12} = Y_2 \bar{Y}_1. \quad (13)$$

Then for the first particle

$$\mathbf{q}^{(1)} = -i \frac{\mathbf{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}} =$$

$$= \left\langle \frac{-\mathbf{q}_y}{1 + \frac{m_1}{m_2} \sqrt{1 + \mathbf{q}_y^2}}, -i \frac{X_C}{X_{0C}} \right\rangle =$$

$$= \langle \mathbf{q}_y^{(1)}, \mathbf{q}_C \rangle, \quad (14)$$

and for the second one we get:

$$\mathbf{q}^{(2)} = -i \frac{\mathbf{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}} =$$

$$= \left\langle \frac{\mathbf{q}_y}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 + \mathbf{q}_y^2}}, -i \frac{X_C}{X_{0C}} \right\rangle =$$

$$= \langle \mathbf{q}_y^{(2)}, \mathbf{q}_C \rangle. \quad (15)$$

where $\mathbf{q}^{(1)}$ and $\mathbf{q}^{(2)}$ are defined from Y_1 and Y_2 respectively. It is easy to verify the validity of formulas (14) and (15) by direct calculation. It should be noted that $\mathbf{q}^{(1)}$ and $\mathbf{q}^{(2)}$ are expressed in terms of relative variables \mathbf{q}_y and center of mass variables \mathbf{q}_C .

From (13) it follows that

$$\mathbf{q}_y = \langle \mathbf{q}^{(2)}, -\mathbf{q}^{(1)} \rangle = \langle \mathbf{q}_y^{(2)}, -\mathbf{q}_y^{(1)} \rangle. \quad (16)$$

The variables introduced satisfy the relations

$$\begin{aligned} X_C \bar{X}_C &= -1, & Y_{12} \bar{Y}_{12} &= 1, \\ Y_1 \bar{Y}_1 &= 1, & Y_2 \bar{Y}_2 &= 1. \end{aligned} \quad (17)$$

2. Two material points on S_3^1 . Non-relativistic classical problem

The action for the problem of two material points in three-dimensional space, interacting with forces that depend only on the relative variable, we write in the form [1-3]

$$W = \int \left[\frac{1}{2} \left(m_1 \dot{X}^{(1)} \dot{X}^{(1)} + m_2 \dot{X}^{(2)} \dot{X}^{(2)} \right) - V(Y_{12}) \right] dt. \quad (18)$$

Here it is immediately taken into account that the operation of differentiation and conjugation are commuting. The dot above the letters denotes differentiation with respect to time. Expression (18) will take a standard form if we pass to independent variables $\mathbf{q}^{(1)}$ and $\mathbf{q}^{(2)}$. In this case

$$W = \int \left[\frac{1}{2} \left(m_1 g_{ab}(\mathbf{q}^{(1)}) \dot{q}_a^{(1)} \dot{q}_b^{(1)} + m_2 g_{ab}(\mathbf{q}^{(2)}) \dot{q}_a^{(2)} \dot{q}_b^{(2)} \right) - \phi(q_y) \right] dt, \quad (19)$$

where

$$g_{ab} = \frac{1}{1 + \mathbf{q}^2} \left[\delta_{ab} - \frac{q_a q_b}{1 + \mathbf{q}^2} \right] \quad (20)$$

is the metric tensor of the three-dimensional Lobachevsky space in variables that are components of vectors on the sphere. In expression (19), according to the accepted assumption, we set $\mathbf{q}_C = 0$ and write it in spherical coordinates. Then

$$W = \int \left[\frac{1}{2} \left(m_1 \dot{r}_1^2 + m_1 \text{sh}^2 r_1 (\dot{\theta}_1^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}_1^2) + m_2 \dot{r}_2^2 + m_2 \text{sh}^2 r_2 (\dot{\theta}_2^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}_2^2) \right) - U(r_{12}) \right] dt. \quad (21)$$

Replacing in (21) the coordinates of individual particles with relative variables r, θ, ϕ in accordance with formulas (14), (15) with $\mathbf{q}_C = 0$, we get the following expression for the action

$$W = \int \left[\frac{1}{2} \left(\mu_{\parallel}(r) \dot{r}^2 + \mu_{\perp}(r) \text{sh}^2 r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right) - U(r_{12}) \right] dt, \quad (22)$$

where we have introduced the longitudinal reduced mass of two material points

$$\mu_{\parallel} = m_1 \left(\frac{m_2^2 + m_1 m_2 \text{ch} r}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch} r} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1^2 + m_1 m_2 \text{ch} r}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch} r} \right)^2 \quad (23)$$

and the transverse reduced mass

$$\mu_{\perp} = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch} r}. \quad (24)$$

The Hamiltonian of the system is therefore equal to

$$H = \frac{1}{2} \left[\mu_{\parallel}(r) \dot{r}^2 + \mu_{\perp}(r) \text{sh}^2 r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right] + U(r_{12}). \quad (25)$$

It is easy to check that the expression for the Hamilton function (25) in the flat limit $r \rightarrow 0$ transforms into the Hamiltonian function of the plane problem for a reduced mass particle. The corresponding coefficients transform into the expression for the reduced mass

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (26)$$

Thus, in spaces with curvature, reduced particle masses can be interpreted as dependent on coordinates, as it also seen from (7) (see also [8]). The same is true for composite systems: the reduced masses are functions of the coordinates.

Taking into account the form of the Hamilton function (25) and the following definitions of generalized momenta

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \quad p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}, \quad (27)$$

we consider the Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{1}{2\mu_{\parallel}(r)} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\mu_{\perp}(r) \text{sh}^2 r} \times \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] + U(r) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (28)$$

The last equation allows separation of variables

$$W = -Et + W_r(r) + W_{\theta}(\theta) + W_{\phi}(\phi), \quad (29)$$

and decomposes into the following equations

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = M_{\phi}, \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{M_{\phi}^2}{\sin^2 \theta} = M^2, \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{\mu_{\parallel}(r)}{\mu_{\perp}(r) \text{sh}^2 r} M^2 = 2\mu_{\parallel}(r)(E - U(r)). \quad (32)$$

These equations are easily integrated. Wherein

$$W_{\phi} = M_{\phi} \phi, \quad (33)$$

$$W_{\theta} = \int \sqrt{M^2 - \frac{M_{\phi}^2}{\sin^2 \theta}} d\theta, \quad (34)$$

$$W_r = \int \sqrt{2\mu_{\parallel} [E - U(r)] - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu_{\perp}} \frac{M^2}{\text{sh}^2 r}} dr. \quad (35)$$

Substituting the last expressions into (29) and differentiating with respect to constants, we obtain equations for the particle trajectory

$$\frac{\partial W}{\partial M_\phi} = \phi_1 - \phi_2 - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{M_\phi}{\sin^2 \theta \sqrt{M^2 - \frac{M_\phi^2}{\sin^2 \theta}}} d\theta = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{M d\theta}{\sqrt{M^2 - \frac{M_\phi^2}{\sin^2 \theta}}} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_\parallel(r)}{\mu_\perp(r)} \frac{M dr}{\text{sh}^2 r \sqrt{2\mu_\parallel[E - U(r)] - \frac{\mu_\parallel}{\mu_\perp} \frac{M^2}{\text{sh}^2 r}}}. \quad (37)$$

The law of motion is given by the expression

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t_2 - t_1 - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_\parallel(r) dr}{\sqrt{2\mu_\parallel[E - U(r)] - \frac{\mu_\parallel}{\mu_\perp} \frac{M^2}{\text{sh}^2 r}}}. \quad (38)$$

3. Schrödinger equation for two material points in Lobachevsky space

The general formula for the classical kinetic energy of any system is

$$T_{cl} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (39)$$

where \dot{q}_i – generalized speeds, $g_{ij}(q)$ – generalized masses.

The corresponding operator in quantum mechanics is

$$T_q = \frac{-\hbar^2}{2} \Delta_{BL}, \quad (40)$$

where Δ_{BL} – the Laplace-Beltrami operator, which can be obtained from the general expression

$$\Delta_{BL} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j} \right]. \quad (41)$$

Since in our case the kinetic energy expression can be seen from (22), the Laplace-Beltrami operator has the form

$$\Delta_{BL} = \frac{1}{\mu_\perp \sqrt{\mu_\parallel} \text{sh}^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_\perp \text{sh}^2 r}{\sqrt{\mu_\parallel}} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{\mu_\perp \text{sh}^2 r} \Delta_{\theta\phi}, \quad (42)$$

where

$$\Delta_{\theta\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (43)$$

Accordingly, the Schrödinger equation becomes

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (44)$$

where the Hamiltonian is

$$H = -\frac{1}{2} \Delta_{LB} + U(r). \quad (45)$$

It is clear that the equation we have allows the separation of variables

$$\psi = R(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (46)$$

where $Y_l^m(\theta, \phi)$ are the spherical functions satisfying the equation

$$\Delta_{\theta\phi} Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (47)$$

for $l = 0, 1, 2, \dots$ and the radial part of the wave function is the solution for the equation

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\sqrt{\mu_\parallel}}{\mu_\perp \text{sh}^2 r} \frac{d}{dr} \left[\frac{\mu_\perp \text{sh}^2 r}{\sqrt{\mu_\parallel}} \right] \frac{dR}{dr} + \left(2\mu_\parallel(E - U) - \frac{\mu_\parallel l(l+1)}{\mu_\perp \text{sh}^2 r} \right) R = 0. \quad (48)$$

4. A particular problem of a rigid rotator in spaces with constant curvature

As we know, in the case of a constant relative distance between two points, a mechanical system is obtained, which is called a rigid rotator. Despite the apparent simplicity, this model for a flat space, both classical and quantum mechanical [9], find interesting applications, including in the theory of molecules and nuclear physics. From the approach developed above, as well as in accordance with works [1-3, 9], it follows that in spaces of constant curvature, a rigid rotator has features associated with the dependence of the reduced mass on the distance between points. These features are explored below. By formulas (21), (25) and the corresponding formulas in [2,3], the Lagrange function of a rigid rotator in three spaces: in the Lobachevsky space, on the 3-sphere and in the Euclidean space has the form

$$L = A \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right), \quad (49)$$

where the quantity A has the following expressions in the three spaces under consideration, respectively

$$\begin{aligned} A_{lob} &= \frac{1}{2} R^2 \mu_{\perp lob} \text{sh}^2 \frac{r_0}{R}, \\ A_{sph} &= \frac{1}{2} R^2 \mu_{\perp sph} \sin^2 \frac{r_0}{R}, \\ A_{flat} &= \frac{1}{2} \mu_{flat} r_0^2, \end{aligned} \quad (50)$$

where

$$\mu_{\perp lob} = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch}(r_0/R)}, \quad (51)$$

$$\mu_{\perp sph} = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos(r_0/R)}, \quad (52)$$

$$\mu_{flat} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (53)$$

Solutions for the corresponding Hamilton-Jacobi equation in the case of a rigid rotator have the form

$$\theta = \arccos \left(\sqrt{1 - \frac{M^2}{4AE}} \cos \left(\sqrt{\frac{E}{A}} t \right) \right), \quad (54)$$

$$\phi = \arctg \left(\frac{\sqrt{4AE}}{M} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{E}{A}} t \right) \right). \quad (55)$$

It follows from the last formulas that the period of oscillations $T \sim \sqrt{A}$. Let us analyze how the period of oscillations depends on the ratio of the masses of particles (with a constant total mass). Denote the mass ratio $\beta = m_1/m_2$. Then

$$A_{lob} = \frac{mR^2}{2} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{r_0}{R} \frac{\beta}{\beta^2 + 1 + 2\beta \operatorname{ch}(r_0/R)} \right), \quad (56)$$

$$A_{sph} = \frac{mR^2}{2} \sin^2 \left(\frac{r_0}{R} \frac{\beta}{\beta^2 + 1 + 2\beta \cos(r_0/R)} \right), \quad (57)$$

$$A_b = \frac{mr_0^2}{2} \frac{\beta}{(1 + \beta)^2}. \quad (58)$$

If we fix the values of the constants $E = 1, M = 1$ then from the condition $1 - \frac{M^2}{4AE} > 0$ it follows that $A > 1/4$ and therefore, for the solutions to make sense, the mass ratio cannot be arbitrary. Let's take the values $R = 2.5, r_0 = 2, m = 1$. Then the condition $A > 1/4$ for three spaces leads to the following restrictions on the mass ratio of the particles of a rigid rotator

$$A_{lob} > 1/4 : \quad 0.142 < \beta < 7.04; \quad (59)$$

$$A_{sph} > 1/4 : \quad 0.207 < \beta < 4.83; \quad (60)$$

$$A_{flat} > 1/4 : \quad 0.172 < \beta < 5.83; \quad (61)$$

We construct graphs of dependence of periods of oscillations on the ratio of masses in the range $0.21 < \beta < 4.8$. Figure 1 shows that the period of rotation of a rigid rotator, and hence the magnitude of the angular momentum, depends on the radius of space curvature R .

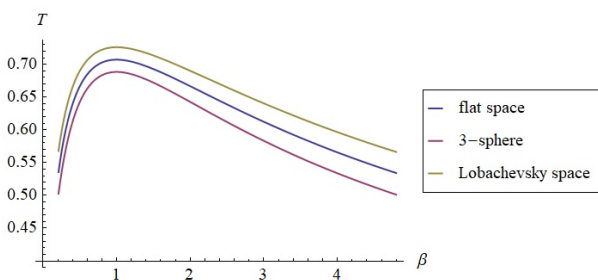


Figure 1. Graphs of rotation period on the ratio of the masses of the constituent particles at a fixed total mass of the rotator. Top graph - Lobachevsky space, average - flat space, bottom - 3-sphere.

Рисунок 1. Графики периода вращения в зависимости от отношения масс составляющих частиц при фиксированной общей массе ротатора. Верхний график - пространство Лобачевского, средний - плоское пространство, нижний - трехмерная сфера.

For the equal distances between the material points of the rotator and equal radius of the curvature for the Lobachevsky and 3-sphere spaces, the rotation periods are maximum for

the Lobachevsky space, minimum for the 3-sphere. The corresponding curve for flat space lies between the two mentioned curves, with each of them tending to the flat space curve at $R \rightarrow \infty$. All three curves are similar.

In the quantum case, the Hamiltonian operator of such a system has the form

$$H = \frac{\hbar^2}{2I} \Delta_{\theta, \phi}, \quad (62)$$

where the moment of inertia of the system is

$$I_{lob} = 2mR^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r_0}{2R}, \quad I_{flat} = \frac{mr_0^2}{2},$$

$$I_{sph} = 2mR^2 \sin^2 \frac{r_0}{2R}. \quad (63)$$

The Schrödinger equation $H\psi = E\psi$ gives the energy levels of the rigid rotator

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad (64)$$

and the eigenfunctions of the Hamilton operator are equal to the spherical functions for all three spaces $\psi = Y_l^m(\theta, \phi)$. The levels are degenerate, since each value of the orbital quantum number corresponds to $2l + 1$ magnetic number values. Figure 2 shows energy levels for quantum rotator in the spaces under consideration (we set here $R = 2.5, r_0 = 2, m = 1$).

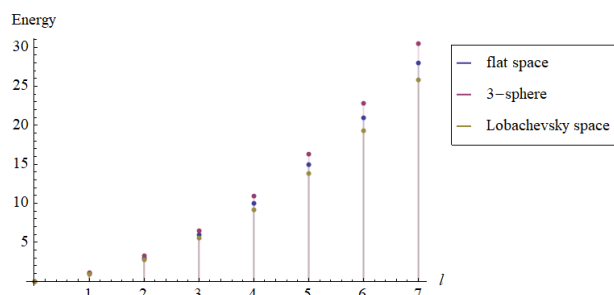


Figure 2. Energy levels for rigid rotator in spaces of constant curvature. Top point - 3-sphere, average - flat space, bottom - Lobachevsky space.

Рисунок 2. Уровни энергии для жесткого ротатора в пространствах постоянной кривизны. Верхняя точка - трехмерная сфера, средняя - плоское пространство, нижняя - пространство Лобачевского.

Conclusion

The paper solves the classical and quantum problems of motion of two particles in three-dimensional Lobachevsky space, relative to the center of mass. The Hamilton-Jacobi equation of the problem is formulated and its solutions are found. The corresponding Schrödinger equation allows the separation of radial and angular variables. It is shown that the reduced masses of the system depend on the relative distance between the particles. The classical and quantum problems of a rigid rotator in three-dimensional Lobachevsky space are formulated and solved. The dependences of the rotator oscillation period on the ratio of the masses of the forming particles at a fixed distance between them and fixed total mass are obtained for three cases: Lobachevsky space, 3-sphere and three-dimensional Euclidean space.

References

1. Kurochkin, Yu.A. Teorema o tsentre mass v trekhmernykh prostranstvakh postoyannoy krivizny [The theorem on the center of mass in three-dimensional spaces of constant curvature] / Yu.A. Kurochkin, D.V. Shoukavy, I.P. Boyarina // Proc. Nat. Acad. Sci. Belarus. Phys. and Math. – 2020. – Vol. 56, № 3. – P. 328–334.
2. Kurochkin, Yu.A. Center of mass theorem and separation of variables for two-body system on the three-dimensional sphere / Yu.A. Kurochkin, D.V. Shoukavy, I.P. Boyarina // Nonlin. Phen. Compl. Syst. – 2020. – V. 23, № 3. – P. 306–311.
3. Kurochkin, Yu.A. On the separation of variables into relative and center of mass motion for two-body system in three-dimensional spaces of constant curvature / Yu.A. Kurochkin, D.V. Shoukavy, I.P. Boyarina // Nonlin. Phen. Compl. Syst. – 2016. – V. 19, № 4. – P. 378–386.
4. Shchepetilov, A.V. Analiz i mekhanika na dvukhtocheknykh odnorodnykh rimanovykh prostranstvakh [Analysis and mechanics on two-point homogeneous Riemannian spaces] / A.V. Shchepetilov. – Moscow-Izhevsk: R and D Dynamics, 2008. – 333 p.
5. Berezin, A.V. Kvaterniony v relyativistskoy fizike [Quaternions in relativistic physics] / A.V. Berezin, Yu.A. Kurochkin, E.A. Tolkachev. – Moscow: URSS, 2003. – 200 p.
6. Fedorov, F.I. Gruppy Lorentsa [Lorentz group] / F.I. Fedorov. Moscow: Science, 1979. – 384 p.
7. Galperin, G.A. O ponyatii tsentra mass sistemy material'nykh toчек v prostranstvakh postoyannoy krivizny [On the concept of the center of mass of a system of material points in spaces of constant curvature] / G.A. Galperin // Dokl. AN SSSR. – 1988. – V. 302, № 5. – P. 1039–1044.
8. Gorbatshevich, A.K. Uravneniye dvizheniya chastits v konformno ploskom prostranstve i uderzhanie kvarkov [Equation of motion of particles in a conformally flat space and confinement of quarks] / A.K. Gorbatshevich, L.M. Tomilchik // Problems of high energy physics in field theory. Protvino, July 7–13, 1986. – Moscow, 1987. – P. 378–383.
9. Kurochkin, Yu.A. Kvantovyy vrashchatel' na trekhmernoy sfere [Quantum rotator on a three-dimensional sphere] / Yu.A. Kurochkin // Proc. Nat. Acad. Sci. Belarus. Phys. and Math. – 2022. – V. 58, № 1. – P. 71–75.

Литература

1. Курочкин, Ю.А. Теорема о центре масс в трехмерных пространствах постоянной кривизны / Ю.А. Курочкин, Д.В. Шёлковский, И.П. Боярина // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 328–334.
2. Kurochkin, Yu.A. Center of mass theorem and separation of variables for two-body system on the three-dimensional sphere / Yu. A. Kurochkin, Dz. V. Shoukavy, I.P. Boyarina // Nonlin. Phen. Compl. Syst. – 2020. – V. 23, № 3. – P. 306–311.
3. Kurochkin, Yu.A. On the separation of variables into relative and center of mass motion for two-body system in three-dimensional spaces of constant curvature / Yu.A. Kurochkin, D.V. Shoukavy, I.P. Boyarina // Nonlin. Phen. Compl. Syst. – 2016. – V. 19, № 4. – P. 378–386.
4. Щепетилов, А.В. Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах / А.В. Щепетилов. – Москва-Ижевск, 2008. – 333 с.
5. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Москва: УРСС, 2003. – 200 с.
6. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.
7. Гальперин, Г.А. О понятии центра масс системы материальных точек в пространствах постоянной кривизны / Г.А. Гальперин // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 302, № 5. – С. 1039–1044.
8. Горбачевич, А.К. Уравнение движения частиц в конформно плоском пространстве и удержание кварков / А.К. Горбачевич, Л.М. Томильчик // Проблемы физики высоких энергий в теории поля. Протвино, 7–13 июля 1986. – Москва, 1987. – С. 378–383.
9. Курочкин, Ю.А. Квантовый ротатор на трехмерной сфере / Ю.А. Курочкин // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 71–75.

For citation:

Kurochkin, Yu.A. On classical and quantum mechanical problem of two material points in three-dimensional Lobachevsky space / Yu.A. Kurochkin, N.D. Shaikovskaya, Dz.V. Shoukavy // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 57–62.

Для цитирования:

Курочкин, Ю.А. О классической и квантово-механической задаче двух материальных точек в трехмерном пространстве Лобачевского / Ю.А. Курочкин, Н.Д. Шайковская, Д.В. Шёлковский // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 57–62.

Дата поступления статьи: 27.06.2023

Received: 27.06.2023

Безмассовое поле Штюкельберга, точные решения в декартовых координатах и калибровочные степени свободы

О.А. Семенюк¹, А.В. Ивашкевич², А.В. Бурый²,
В.А. Плетюхов¹, В.М. Редьков²

¹Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина,
г. Брест, Беларусь

²Институт физики имени Б.И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

olya.vasiluyk.97@yandex.by
ivashkevich.alina@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
vladimir.pletyukhov@yandex.by
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Аннотация

В работе исследуется безмассовое поле Штюкельберга. Среди 11 компонент полевой функции антисимметричный тензор представляет компоненты, меняющиеся при калибровочных преобразованиях, а скаляр и вектор соответствуют физически наблюдаемым величинам. Показано, что в декартовых координатах система уравнений Штюкельберга допускает существование пяти линейно независимых решений, описывающих разные состояния частицы. Получено выражение для тензора энергии-импульса безмассового поля Штюкельберга. Этот тензор вычисляется для произвольной линейной комбинации пяти найденных решений. Выделены четыре комбинации из пяти решений, которые не дают вклада в тензор энергии-импульса. Существует только одно решение, соответствующее ненулевому тензору энергии-импульса. Оно описывает физически наблюдаемые состояния безмассового поля Штюкельберга со структурой плоской волны.

Ключевые слова:

безмассовое поле Штюкельберга, декартовы координаты, точные решения, тензор энергии-импульса, калибровочные решения

Введение

В работе исследована система 11 уравнений, описывающих безмассовое поле Штюкельберга [1–8]. Показано, что в декартовых координатах эти уравнения допускают существование пяти линейно независимых решений, описывающих разные состояния частицы. Они найдены в явном виде.

Среди 11 компонент полевой функции Штюкельберга антисимметричный тензор представляет калибровочные

Massless Stueckelberg field, exact solutions in Cartesian coordinates and gauge degrees of freedom

O.A. Semenyuk¹, A.V. Ivashkevich², A.V. Buryy²,
V.A. Pletyukhov¹, V.M. Red'kov²

¹Brest State University named after A.S. Pushkin,
Brest, Belarus

²B.I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

olya.vasiluyk.97@yandex.by
ivashkevich.alina@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
vladimir.pletyukhov@yandex.by
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Abstract

In the paper we examine the massless Stueckelberg field. Among the eleven field function components, the antisymmetric tensor represents the gauge variables, whereas the scalar and vector correspond to physically observable quantities. It is shown that in Cartesian coordinates the Stueckelberg equations permit the existence of five independent solutions which describe the different states of the field. We have derived an expression for the energy-momentum tensor of the massless Stueckelberg field. We find its explicit form for arbitrary linear combination of five established solutions. We have found four combinations of five solutions which do not contribute to energy-momentum tensor, therefore they correspond to purely gauge states. There exists only one solution which corresponds to nonvanishing energy-momentum tensor, it relates to physically observable states of the massless Stueckelberg field.

Keywords:

massless Stueckelberg field, Cartesian coordinates, exact solutions, energy-momentum tensor, gauge solutions

переменные, а скаляр и вектор соответствуют физически наблюдаемым величинам. Для того, чтобы в явном виде выделить решения, соответствующие физически наблюдаемым состояниям, исследуется выражение для тензора энергии-импульса поля Штюкельберга. Этот тензор вычисляется для произвольной линейной комбинации пяти решений. Выделены четыре линейно независимые комбинации этих решений, которые не дают вклада в тензор энер-

гии-импульса. Найдена одна независимая комбинация решений, соответствующая ненулевому тензору энергии-импульса. Она описывает физически наблюдаемое состояние безмассового поля Штюкельберга со структурой плоской волны.

1. Декартовы координаты

Рассмотрим систему безмассовых уравнений Штюкельберга в декартовых координатах [7-10]:

$$\begin{aligned} \partial^a \Psi_a &= 0, \quad \partial_a \Psi + \partial^b \Psi_{ab} = \Psi_a, \\ \partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Как и должно быть, в системе уравнений отсутствует параметр с размерностью обратной длины (иначе, массы). Размерности компонент такие:

$$\left[\frac{1}{L} \Psi \right] = \left[\frac{1}{L} \Psi_{ab} \right] = [\Psi_a].$$

Перейдем к матричной форме представления уравнений (1). В качестве полевой функции будем использовать 11-мерный столбец

$$\begin{aligned} \Phi &= (\Psi; \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3; \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{03}, \\ &\Psi_{23}, \Psi_{31}, \Psi_{12})^t = (H, H_1, H_2)^t. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее t обозначает транспонирование. Систему уравнений (1) можно записать в блочной форме:

$$\begin{aligned} G^a \partial_a H_1 &= 0, \quad \Delta^a \partial_a H + K^a \partial_a H_2 - H_1 = 0, \\ L^a \partial_a H_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

или

$$\begin{aligned} (\Gamma^a \partial_a - P)\Phi &= 0, \quad \Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & G^a & 0 \\ \Delta^a & 0 & K^a \\ 0 & L^a & 0 \end{pmatrix}, \\ P &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} H \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Приведем явный вид всех матричных блоков:

$$\begin{aligned} G_0 &= (1, 0, 0, 0), \quad G_1 = (0, -1, 0, 0), \\ G_2 &= (0, 0, -1, 0), \quad G_3 = (0, 0, 0, -1), \\ \Delta^0 &= (1, 0, 0, 0)^t, \quad \Delta^1 = (0, 1, 0, 0)^t, \\ \Delta^2 &= (0, 0, 1, 0)^t, \quad \Delta^3 = (0, 0, 0, 1)^t, \end{aligned}$$

$$K^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем искать решения в виде плоских волн:

$$\begin{aligned} \Psi &= fK(x), \quad \Psi_a = f_a K(x), \quad \Psi_{ab} = f_{ab} K(x), \\ K(x) &= e^{-i\epsilon x^0} e^{-ik_1 x^1} e^{-ik_2 x^2} e^{-ik_3 x^3}, \\ \vec{k} &= (k^1, k^2, k^3). \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях используем замены $\partial_a \Rightarrow -ik_a$, $a = 0, 1, 2, 3$, $k_0 = k^0 = \epsilon$. Уравнение (4) удобно представлять в блочной форме

$$\begin{aligned} (-iG^0 k_0 - iG^1 k_1 - iG^2 k_2 - iG^3 k_3)H_1 &= 0, \\ (-i\Delta^0 k_0 - i\Delta^1 k_1 - i\Delta^2 k_2 - i\Delta^3 k_3)H + \\ + (-iK^0 k_0 - iK^1 k_1 - iK^2 k_2 - iK^3 k_3)H_2 - H_1 &= 0, \\ (-iL^0 k_0 - iL^1 k_1 - iL^2 k_2 - iL^3 k_3)H_1 &= 0, \\ H = f, \quad H_1 = (f_0, f_1, f_2, f_3)^t, \quad H_2 = (E_j, B_j)^t. \end{aligned} \quad (6)$$

Из системы (6) находим алгебраическую систему

$$\begin{aligned} -ik_0 f_0 + ik_1 f_1 + ik_2 f_2 + ik_3 f_3 &= 0; \\ -k_0 f + if_0 + k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1 f - i f_1 - k_0 E_1 + k_3 B_2 - k_2 B_3 &= 0, \\
-k_2 f + i f_2 + k_0 E_2 + k_3 B_1 - k_1 B_3 &= 0, \\
k_3 f - i f_3 - k_0 E_3 + k_2 B_1 - k_1 B_2 &= 0; \\
k_1 f_0 - k_0 f_1 &= 0, \quad k_2 f_0 - k_0 f_2 = 0, \\
k_3 f_0 - k_0 f_3 &= 0, \quad k_3 f_2 - k_2 f_3 = 0, \\
-k_3 f_1 + k_1 f_3 &= 0, \quad k_2 f_1 - k_1 f_2 = 0. \quad (7)
\end{aligned}$$

Эту систему уравнений можно представить в матричном виде $A\Phi = 0$, где столбец Φ задается так:

$$\Phi = (f, f_0, f_1, f_2, f_3, E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3)^t.$$

Ранг матрицы A равен 8, а с учетом условия $k_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ ранг становится равен 6. Убирая четыре нижние строки, убеждаемся, что ранг остается неизменным. В результате получаем неоднородную систему

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_0 & k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ -k_0 & i & 0 & 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & -i & 0 & -k_0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & i & 0 & k_0 \\ 0 & k_1 & -k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \\
= -(k_3, 0, 0, 0, 0, 0)^t f_3 - (0, k_3, 0, 0, 0, 0)^t E_3 - \\
- (0, 0, 0, k_3, 0, 0)^t B_1 - \\
- (0, 0, k_3, 0, 0, 0)^t B_2 - (0, 0, -k_2, -k_1, 0, 0)^t B_3. \quad (8)$$

Детерминант матрицы слева ненулевой: $\det A_{6 \times 6} = k_3^4(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$. Находим пять независимых решений (приводим их сразу в 11-мерной форме):

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= (i \frac{1}{k_3}, \frac{k_0}{k_3}, \frac{k_1}{k_3}, \frac{k_2}{k_3}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t f_3, \\
\Psi_2 &= (\frac{k_0}{k_3}, 0, 0, 0, 0, \frac{k_1}{k_3}, \frac{k_2}{k_3}, 1, 0, 0, 0)^t E_3, \\
\Psi_3 &= (-\frac{k_2}{k_3}, 0, 0, 0, 0, -\frac{k_1 k_2}{k_3 k_0}, -\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_3 k_0}, \\
&\quad 0, 1, 0, 0)^t B_1, \\
\Psi_4 &= (\frac{k_1}{k_3}, 0, 0, 0, 0, \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_3 k_0}, \frac{k_1 k_2}{k_3 k_0}, \\
&\quad 0, 0, 1, 0)^t B_2, \\
\Psi_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, -\frac{k_2}{k_0}, \frac{k_1}{k_0}, 0, 0, 0, 1)^t B_3. \quad (9)
\end{aligned}$$

Эти пять решений фиксируются с точностью до произвольных множителей. При этом нужно учитывать, что размерности 11 компонент должны подчиняться правилу $[f] = [E_i, B_i] = [L f_a]$. Чтобы удовлетворить ему, можно выбрать свободные параметры так:

$$f_3 = k_0, \quad E_3 = 1, \quad B_1 = B_2 = B_3 = 1.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= (i \frac{k_0}{k_3}, \frac{k_0^2}{k_3}, \frac{k_0 k_1}{k_3}, \frac{k_0 k_2}{k_3}, k_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t, \\
\Psi_2 &= (\frac{k_0}{k_3}, 0, 0, 0, 0, \frac{k_1}{k_3}, \frac{k_2}{k_3}, 1, 0, 0, 0)^t, \\
\Psi_3 &= (-\frac{k_2}{k_3}, 0, 0, 0, 0, -\frac{k_1 k_2}{k_3 k_0}, -\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_3 k_0}, 1, 0, 0, 0)^t, \\
\Psi_4 &= (\frac{k_1}{k_3}, 0, 0, 0, 0, \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_3 k_0}, \frac{k_1 k_2}{k_3 k_0}, 0, 0, 1, 0)^t, \\
\Psi_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, -\frac{k_2}{k_0}, \frac{k_1}{k_0}, 0, 0, 0, 1)^t. \quad (10)
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что это действительно пять решений исходной системы (7). Необходимо выяснить, какие решения являются калибровочными, а какие — физически наблюдаемыми. Для этого в следующем разделе построим выражение для тензора энергии-импульса безмассового поля Штюкельберга.

2. Тензор энергии-импульса, калибровочные решения

Обратимся к выделению из всех решений калибровочных. Такие калибровочные решения не должны давать вклада в тензор энергии-импульса поля. Потребуется матрица инвариантной билинейной формы. Она должна удовлетворять соотношениям [6,7]:

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}(\Gamma^a)^\dagger \eta &= \Gamma^a, \quad \tilde{\Gamma}^a \eta = \eta \Gamma^a, \\
\eta &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & 0 & C_{6 \times 6} \end{pmatrix}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнения для блоков

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^a a &= B \Delta^a, \quad \tilde{\Delta}^a B = a G^a, \\
\tilde{L}^a C &= B K^a, \quad \tilde{K}^a B = C L^a.
\end{aligned}$$

Учитывая выражения для инвариантов вектора и тензора: $\Psi^a \Psi_a = \text{inv}$, $\Psi^{mn} \Psi_{mn} = \text{inv}$, матрицы B и C ищем в виде

$$\begin{aligned}
B_{4 \times 4} &= b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
C_{6 \times 6} &= c \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)
\end{aligned}$$

После простых вычислений находим связь между параметрами: $a = b = -c$. Для определенности пусть $a = 1$.

Найдем тензор энергии-импульса для безмассового поля Штюкельберга. Для этого рассмотрим величину (см. [6,7]):

$$T^a_b = \Phi^\dagger \eta \Gamma^a \partial_b \Phi - \delta_b^a \Psi^\dagger \eta P \Psi =$$

$$= H^\dagger a G^a \partial_b H_1 + H_1^\dagger B (\Delta^a \partial_b H + K^a \partial_b H_2) +$$

$$+ H_2^\dagger C L^a \partial_b H_1 - \delta_b^a H_1^\dagger B H_1. \quad (13)$$

Отсюда, с учетом подстановки для решений в виде плоских волн, получаем

$$T^a_b(x) = -i \left[H^\dagger A G^a k_b H_1 + H_1^\dagger B (\Delta^a k_b H +$$

$$+ K^a k_b H_2) + H_2^\dagger C L^a k_b H_1 \right] - \delta_b^a H_1^\dagger B H_1. \quad (14)$$

Вычисляя этот тензор для пяти независимых решений, убеждаемся, что в каждом случае он обращается в нуль.

Составим произвольную линейную комбинацию пяти решений (10):

$$\Psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 + a_3 \Psi_3 + a_4 \Psi_4 + a_5 \Psi_5 =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_2 + ia_1)k_0 + a_4 k_1 - a_3 k_2 \\ \frac{k_3}{a_1 k_0^2} \\ \frac{k_3}{a_1 k_1 k_0} \\ \frac{k_3}{a_1 k_2 k_0} \\ \frac{k_3}{a_1 k_0} \\ \frac{a_2 k_0 k_1 - a_3 k_2 k_1 - a_5 k_2 k_3 + a_4 (k_1^2 + k_3^2)}{a_2 k_0 k_2 + a_4 k_1 k_2 + a_5 k_1 k_3 - a_3 (k_2^2 + k_3^2)} \\ \frac{k_3 k_0}{k_3 k_0} \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

После выполнения необходимых вычислений находим выражение для тензора энергии-импульса, соответствующее линейной суперпозиции пяти решений. С использованием обозначений

$$a_i b_j + b_i a_j = a_i a_j^* + a_i^* a_j =$$

$$= 2 \operatorname{Re} a_i a_j^* = r_{ij}, \quad r_{ij}^* = r_{ij}$$

этот тензор представляем в следующем виде:

$$T = (T^a_b) = \begin{pmatrix} T_0^0 & T_1^0 & T_2^0 & T_3^0 \\ T_0^1 & T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_0^2 & T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_0^3 & T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{pmatrix} = 2ik_0 \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\frac{r_{41} k_0^2 k_1}{k_3^2} + \frac{r_{31} k_0^2 k_2}{k_3^2} - \frac{r_{21} k_0^3}{k_3^2} \\ \frac{r_{21} k_0^2 k_1}{k_3^2} + \frac{r_{41} k_0 k_1^2}{k_3^2} - \frac{r_{31} k_0 k_1 k_2}{k_3^2} \\ \frac{r_{21} k_0^2 k_2}{k_3^2} - \frac{r_{31} k_0 k_2^2}{k_3^2} + \frac{r_{41} k_0 k_1 k_2}{k_3^2} \\ \frac{r_{21} k_0^2}{k_3} + \frac{r_{41} k_0 k_1}{k_3} - \frac{r_{31} k_0 k_2}{k_3} \\ -\frac{r_{21} k_1 k_0^2}{k_3^2} - \frac{r_{41} k_1^2 k_0}{k_3^2} + \frac{r_{31} k_1 k_2 k_0}{k_3^2} \\ \frac{r_{41} k_1^3}{k_3^2} + \frac{r_{21} k_0 k_1^2}{k_3^2} - \frac{r_{31} k_2 k_1^2}{k_3^2} \\ \frac{r_{41} k_2 k_1^2}{k_3^2} + \frac{r_{21} k_2 k_0 k_1}{k_3^2} - \frac{r_{31} k_2^2 k_1}{k_3^2} \\ \frac{r_{41} k_1^2}{k_3} + \frac{r_{21} k_0 k_1}{k_3} - \frac{r_{31} k_2 k_1}{k_3} \\ -\frac{r_{21} k_2 k_0^2}{k_3^2} + \frac{r_{31} k_2^2 k_0}{k_3^2} - \frac{r_{41} k_1 k_2 k_0}{k_3^2} \\ \frac{r_{41} k_2 k_1^2}{k_3^2} + \frac{r_{21} k_2 k_0 k_1}{k_3^2} - \frac{r_{31} k_2^2 k_1}{k_3^2} \\ -\frac{r_{31} k_2^3}{k_3^2} + \frac{r_{21} k_0 k_2^2}{k_3^2} + \frac{r_{41} k_1 k_2^2}{k_3^2} \\ -\frac{r_{31} k_1^2}{k_3} + \frac{r_{21} k_0 k_2}{k_3} + \frac{r_{41} k_1 k_2}{k_3} \\ -\frac{r_{21} k_0^2}{k_3} - \frac{r_{41} k_1 k_0}{k_3} + \frac{r_{31} k_2 k_0}{k_3} \\ \frac{r_{41} k_1^2}{k_3} + \frac{r_{21} k_0 k_1}{k_3} - \frac{r_{31} k_2 k_1}{k_3} \\ \frac{k_3}{r_{31} k_2^2} + \frac{k_3}{r_{21} k_0 k_2} - \frac{k_3}{r_{41} k_1 k_2} \\ -\frac{k_3}{r_{41} k_1} - \frac{k_3}{r_{31} k_2} + \frac{k_3}{r_{21} k_0} \end{pmatrix}.$$

Тензор с нижними индексами (T_{cb}) отличается от (T^a_b) умножением строк с номерами 2-4 на -1 . Этот тензор симметричный с нулевым следом (убираем несущественный множитель $2ik_0$):

$$T^a_a = \frac{1}{k_3^2} (-r_{21} k_0 + r_{31} k_2 - r_{41} k_1) \times$$

$$\times (k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) = 0. \quad (16)$$

Напомним, что $k_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$. Если ввести обозначение $\varphi = -r_{21} k_0 + r_{31} k_2 - r_{41} k_1$, то найденное выражение для тензора энергии-импульса можно записать короче (общий множитель k_3^2 в знаменателях опускаем)

$$T_{cb} = \varphi \begin{pmatrix} k_0^2 & k_0 k_1 & k_0 k_2 & k_0 k_3 \\ k_0 k_1 & k_1^2 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_0 k_2 & k_1 k_2 & k_2^2 & k_2 k_3 \\ k_0 k_3 & k_1 k_3 & k_2 k_3 & k_3^2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Напомним равенства (коэффициент 2 при φ убираем)

$$\Psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 + a_3 \Psi_3 + a_4 \Psi_4 + a_5 \Psi_5,$$

$$\varphi = -\operatorname{Re} a_2 a_1^* k_0 + \operatorname{Re} a_3 a_1^* k_2 - \operatorname{Re} a_4 a_1^* k_1. \quad (18)$$

Дальше будем использовать обозначения

$$a_1^* a_2 = \beta_2, \quad a_1^* a_3 = \beta_3, \quad a_1^* a_4 = \beta_4,$$

$$\varphi = \text{Re}[-\beta_2 k_0 + \beta_3 k_2 - \beta_4 k_1].$$

Возможны следующие варианты:

$$T \neq 0, \quad \varphi \neq 0; \quad T = 0, \quad \varphi = 0, \quad (19)$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 \neq 0;$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0, \quad a_4 \neq 0, \quad a_5 = 0; \quad (20)$$

$$\text{Re}[-\beta_2 k_0 + \beta_3 k_2 - \beta_4 k_1] = 0, \quad a_5 = 0 \text{ (два решения)}.$$

Поскольку решения Ψ_1, \dots, Ψ_5 определены с точностью до произвольных комплексных множителей, то в разложениях (18) все коэффициенты a_1, \dots, a_5 можно считать вещественными. Тогда вместо (18) получаем

$$\Psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 + a_3 \Psi_3 + a_4 \Psi_4 + a_5 \Psi_5, \quad (21)$$

$$\varphi = a_1(-k_0 a_2 + k_2 a_3 - k_1 a_4).$$

Сначала рассмотрим состояния с нулевым тензором энергии-импульса. Первое решение такое:

$$\Phi_1, \quad T = 0,$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 1. \quad (22)$$

Еще три состояния с нулевым тензором энергии-импульса должны описываться соотношениями:

$$\Phi_2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{k_2}{k_0}, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0;$$

$$\Phi_3, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{k_1}{k_0}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 0;$$

$$\Phi_4, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = ?, \quad a_3 = ?, \quad a_4 = ?, \quad a_5 = 0. \quad (23)$$

Пока коэффициенты a_2, a_3, a_4 , описывающие решение Φ_4 , неизвестны. Зафиксируем их так:

$$\Phi_4, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = (k_2 - k_1)/k_0, \\ a_3 = 1, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 0.$$

Полученные векторы Φ_2, Φ_3, Φ_4 можно описать матрицей с размерностью 3×5 :

$$A_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 0 & (k_2 - k_1)/k_0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k_2/k_0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k_1/k_0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой матрицы равен 3, то векторы Φ_2, Φ_3, Φ_4 линейно независимы. Очевидно, что линейно независимыми являются все четыре решения $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ (их компоненты можно представить как строки матрицы)

$$A_{4 \times 5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_2 - k_1}{k_0} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{k_2}{k_0} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{k_1}{k_0} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Остается зафиксировать параметры, определяющие физическое решение Φ_{phys} с ненулевым тензором энергии-импульса:

$$\Phi_{phys}, \quad T \neq 0, \quad a_1 = 1, \\ -k_0 a_2 + k_2 a_3 - k_1 a_4 \neq 0, \quad a_5 = 0. \quad (25)$$

Нужно подобрать коэффициенты a_2, a_3, a_4 так, чтобы пять выделенных решений (сопоставляем им матрицу $A_{5 \times 5}$) были линейно независимы. Для этого требуем, чтобы определитель матрицы был отличен от нуля

$$A_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (k_2 - k_1)/k_0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k_2/k_0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k_1/k_0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det A_{5 \times 5} = -\frac{2(a_2 k_0 - a_3 k_2 + a_4 k_1)}{k_0} \neq 0;$$

одно из возможных решений такое:

$$a_2 = -1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad \text{Rank } A_{5 \times 5} = 5. \quad (26)$$

Таким образом, найдены пять решений, одно из которых является физически наблюдаемым, а остальные — калибровочными:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{phys} \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_2 - k_1}{k_0} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{k_2}{k_0} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{k_1}{k_0} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

В явном виде эти пять решений имеют следующую структуру:

$$\Phi_{phys} = \Psi_1 - \Psi_2, \quad \Phi_1 = \Psi_5, \\ \Phi_2 = \frac{k_2 - k_1}{k_0} \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4, \quad (28)$$

$$\Phi_3 = \Psi_1 + \frac{k_2}{k_0} \Psi_2 + \Psi_3, \quad \Phi_4 = \Psi_1 - \frac{k_1}{k_0} \Psi_2 + \Psi_4.$$

Приведем 11-мерный столбец, соответствующий физически наблюдаемому состоянию (записываем его в виде строки)

$$\Phi_{phys} = \left(\frac{(i-1)k_0}{k_3}, \frac{k_0^2}{k_3}, \frac{k_0 k_1}{k_3}, \frac{k_0 k_2}{k_3}, \right. \\ \left. k_0, -\frac{k_1}{k_3}, -\frac{k_2}{k_3}, -1, 0, 0, 0 \right)^t.$$

Заключение

Показано, что в декартовых координатах система уравнений Штюкельберга допускает существование пяти линейно независимых решений, описывающих разные состояния частицы. Получено выражение для тензора энергии-импульса этого поля. Тензор энергии-импульса вычислен для произвольной линейной комбинации пяти найденных решений. Выделены четыре комбинации, которым соответствует нулевой тензор энергии-импульса. Существует

только одно решение, приводящее к ненулевому тензору энергии-импульса. Оно описывает физически наблюдаемые состояния безмассового поля Штюкельберга со структурой плоской волны.

Литература

1. Duffin, R.I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R.I. Duffin // *Phys. Rev.* – 1938. – Vol. 54, № 12. – P. 1114–1117.
2. Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemer // *Proc. Roy. Soc. London. A.* 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
3. Огивецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И. Огивецкий, И.В. Полубаринов // *Ядерная физика.* – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
4. Stueckelberg, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E.C.G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312, P. 312–328.
5. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 19. – P. 3265–3348.
6. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Беларус. навука, 2009. – 486 с.
7. Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В.А. Плетюхов, В.М. Редьков, В.И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.
8. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc, 2018.
9. Овсюк, Е.М. Частица Штюкельберга во внешнем магнитном поле. Метод проективных операторов / Е.М. Овсюк, А.П. Сафронов, А.В. Ивашкевич, О.А. Семенюк // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 69–78.
10. Stueckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E.M. Ovsiyuk [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.

Для цитирования:

Семенюк, О.А. Безмассовое поле Штюкельберга, точные решения в декартовых координатах и калибровочные степени свободы / О.А. Семенюк, А.В. Ивашкевич, А.В. Бурый, В.А. Плетюхов, В.М. Редьков // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2023. – № 4 (62). – С. 63–68.

For citation:

Semenyuk, O.A. Bezmassovoe pole Shtyukel'berga, tochnye resheniya v dekartovykh koordinatah i kalibrovochnye stepeni svobody [Massless Stueckelberg field, exact solutions in Cartesian coordinates and gauge degrees of freedom] / O.A. Semenyuk, A.V. Ivashkevich, A.V. Bury, V.A. Pletyukhov, V.M. Red'kov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences".* – 2023. – № 4 (62). – P. 63–68.

Дата поступления статьи: 12.05.2023

Received: 12.05.2023

References

1. Duffin, R.I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R.I. Duffin // *Phys. Rev.* – 1938. – Vol. 54, № 12. – P. 1114–1117.
2. Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemer // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
3. Ogievetsky, V.I. Notof i ego vozmozhnie vzaimodeistviya [The notoph and its possible interactions] / V.I. Ogievetsky, I.V. Polubarinov // *Yad. Fiz.* – 1966. – Vol. 4. – P. 216–223 [Sov. J. Nucl. Phys. – 1967. – Vol. 4. – P. 156–161].
4. Stueckelberg, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E.C.G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312, P. 312–328.
5. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 19. – P. 3265–3348.
6. Red'kov, V.M. Polay chastis v rimanovskom prostranstve i gruppa Lorentsa [Fields in Riemannian space and the Lorentz group] / V.M. Red'kov. – Minsk: Belarus. navuka, 2009. – 486 p.
7. Pletyukhov, V.A. Relativistkie volnlvie uravneniya i vnutrennie stepeni svobody [Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom] / V.A. Pletyukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk: Belarus. navuka, 2015. – 328 p.
8. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc, 2018.
9. Ovsiyuk, E.M. Chastisa Shtyukelberga vo vneshnem magnetnom pole. Metod proektivnih operatorov [Stueckelberg particle in external magnetic field, and the method of projective operators] / E.M. Ovsiyuk, A.P. Safronov, A.V. Ivashkevich, O.A. Semenyuk // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences".* – 2022. – № 5 (57). – P. 69–78.
10. Stueckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E.M. Ovsiyuk [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.

Безмассовая частица Штюкельберга, решения с цилиндрической симметрией

О.А. Семенюк¹, В.А. Плетюхов¹, А.В. Бурый²,
А.В. Ивашкевич², В.М. Редьков²

¹Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина,
г. Брест, Беларусь

²Институт физики имени Б.И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

olya.vasiluyk.97@yandex.by
vladimir.pletyukhov@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
ivashkevich.alina@yandex.by
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Аннотация

Безмассовое поле Штюкельберга исследуется в цилиндрических координатах. Полевая функция состоит из скаляра, 4-вектора и антисимметричного тензора. Физически наблюдаемыми величинами являются только скаляр и 4-вектор. Используется матричное уравнение Штюкельберга, обобщенное на произвольное риманово пространство, в том числе и на любые криволинейные координаты пространства Минковского. Строятся решения этого уравнения с цилиндрической симметрией, при этом диагонализуются операторы энергии, третьей проекции полного углового момента и третьей проекции импульса. После разделения переменных в цилиндрической системе координат получена система из 11 дифференциальных уравнений по полярной координате. Она решается с использованием метода Федорова-Гронского. В соответствии с этим методом, 11 функций выражаются через три основные. По известной методике накладываются дифференциальные условия связи, которые совместны с полученными 11 уравнениями и позволяют преобразовать эти уравнения в алгебраические. Эта алгебраическая система решается стандартными методами. В результате найдены пять независимых решений. Вопрос об устранении калибровочных степеней свободы будет рассмотрен в отдельной работе.

Ключевые слова:

безмассовое поле Штюкельберга, цилиндрическая симметрия, метод проективных операторов, точные решения

Введение

В настоящей работе будем находить все независимые точные решения обобщенного 11-мерного уравнения Даффина-Кеммера для безмассового поля Штюкельберга [1–8]. Система тензорных уравнений для этой частицы име-

Massless Stueckelberg particle, solutions with cylindric symmetry

O.A. Semenyuk¹, V.A. Pletyukhov¹, A.V. Bury²,
A.V. Ivashkevich², V.M. Red'kov²

¹Brest State University named after A.S. Pushkin,
Brest, Belarus

²B.I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

olya.vasiluyk.97@yandex.by
vladimir.pletyukhov@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
ivashkevich.alina@yandex.by
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Abstract

The massless Stueckelberg field is studied in cylindrical coordinates. The field function consists of the scalar, 4-vector, and antisymmetric tensor. Physically observable components are the scalar and 4-vector. We apply the Stueckelberg tetrad-based matrix equation, generalized to arbitrary Riemannian space, including any curvilinear coordinates in the Minkowski space. We construct solutions with cylindric symmetry, while the operators of energy, of the third projection of the total angular momentum, and the third projection of the linear momentum are diagonalized. After separating the variables we derive the system of 11 first-order differential equations in polar coordinate. It is solved with the use of the Fedorov-Gronskiy method. According to this method, all 11 functions are expressed through 3 main functions. According to the known procedure we impose the differential constraints, which are consistent with the all 11 equations and allow us to transform these equations to algebraic form. This algebraic system is solved by standard methods. As a result, we obtain 5 linearly independent solutions. The problem of eliminating the gauge solutions will be studied in a separate paper.

Keywords:

massless Stueckelberg field, cylindrical symmetry, the method of projective operators, exact solutions

ет в декартовых координатах следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial^a \Psi_a &= 0, & \partial_a \Psi + \partial^b \Psi_{ab} &= \Psi_a, \\ \partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве волновой функции будем использовать 11-мерный столбец

$$\Phi = (\Psi; \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3; \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{03}, \Psi_{23}, \Psi_{31}, \Psi_{12}) = (H, H_1, H_2). \quad (2)$$

Система уравнений (1) может быть представлена в блочной матричной форме:

$$D_a G^a H_1 = 0, \quad \Delta^a D_a H + K^a D_a H_2 - H_1 = 0, \quad D_a L^a H_1 = 0 \quad (3)$$

или в 11-мерном виде

$$(D_a \Gamma^a - P)\Phi = 0, \quad (4)$$

где

$$\Phi = (H, H_1, H_2)^t,$$

$$\Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & G^a & 0 \\ \Delta^a & 0 & K^a \\ 0 & L^a & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_0 = (1000), \quad G_1 = (0 - 100),$$

$$G_2 = (00 - 10), \quad G_3 = (000 - 1),$$

$$\Delta^0 = (1, 0, 0, 0)^t, \quad \Delta^1 = (0, 1, 0, 0)^t,$$

$$\Delta^2 = (0, 0, 1, 0)^t, \quad \Delta^3 = (0, 0, 0, 1)^t,$$

$$K^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее t обозначает транспонирование.

Уравнение (4) обобщается с использованием тетрадного формализма на случай римановой геометрии пространства-времени (в том числе и на использование любых криволинейных координат в пространстве Минковского) в соответствии со стандартной методикой [6]. Для этого при заданной метрике $g_{\alpha\beta}(x)$ нужно выбрать некоторую тетраду:

$$dS^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta, \quad g_{\alpha\beta}(x) \rightarrow e_{(a)\alpha}(x), \quad (5)$$

тогда уравнение (4) должно записываться в пространстве (5) так:

$$\left[\Gamma^\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Sigma_\alpha(x) \right) - P \right] \Psi(x) = 0. \quad (6)$$

Локальные матрицы $\Gamma^\alpha(x)$ определяются с использованием тетрады

$$\Gamma^\alpha(x) = e_{(a)}^\alpha(x) \Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & -G^a e_{(a)}^\alpha & 0 \\ \Delta^a e_{(a)}^\alpha & 0 & K^a e_{(a)}^\alpha \\ 0 & L^a e_{(a)}^\alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Связность $\Sigma_\alpha(x)$ задается соотношениями

$$J^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1^{ab} & 0 \\ 0 & 0 & J_2^{ab} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\Sigma_1)_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (\Sigma_2)_\alpha \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\Sigma_1(x) = \frac{1}{2} J_{(1)}^{ab} e_{(a)}^\beta(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x),$$

$$\Sigma_2(x) = \frac{1}{2} J_{(2)}^{ab} e_{(a)}^\beta(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x),$$

а $J_{(1)}^{ab}$ и $J_{(2)}^{ab}$ обозначают генераторы соответственно для вектора $\Psi_k(x)$ и антисимметричного тензора $\Psi_{mn}(x)$. Уравнение (6) записывается короче с использованием коэффициентов вращения Риччи:

$$\left[\Gamma^c \left(e_{(c)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} J^{ab} \gamma_{abc} \right) - P \right] \Psi(x) = 0,$$

$$\gamma_{[ab]c} = -\gamma_{[ba]c} = e^{(b)\rho;\sigma} e_{(a)}^\rho e_{(c)}^\sigma. \quad (9)$$

1. Цилиндрические координаты, разделение переменных

Будем рассматривать уравнение (9) в цилиндрических координатах (r, φ, z) . В работе [9] после разделения переменных была получена система уравнений по переменной r для массивной частицы Штюкельберга в магнитном поле (аналогичный анализ в кулоновском поле был сделан в работе [10]). В статье [9] использовалась следующая подстановка для волновой функции в циклическом базисе (в котором генераторы J_1^{12}, J_2^{12} диагональны):

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} (H, H_1, H_2)^t, \quad H = h(r), \\ H_1 &= (h_0(r), h_1(r), h_2(r), h_3(r))^t, \\ H_2 &= (E_i(r), B_i(r))^t. \end{aligned}$$

Из этой системы уравнений, учитывая отсутствие магнитного поля и ограничения, связанные с безмассовостью частицы, получаем следующие 11 уравнений:

$$\begin{aligned} -i\epsilon h_0 - ikh_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} h'_1 - \frac{2m-2}{2\sqrt{2}r} h_1 - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} h'_3 - \frac{2m+2}{2\sqrt{2}r} h_3 &= 0; \quad (10) \\ -i\epsilon h - ikE_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} E'_1 - \frac{2m-2}{2\sqrt{2}r} E_1 - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} E'_3 - \frac{2m+2}{2\sqrt{2}r} E_3 &= h_0, \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} h' - \frac{m}{\sqrt{2}r} h + \frac{1}{\sqrt{2}} B'_2 + \\ + \frac{2m}{2\sqrt{2}r} B_2 - ikB_3 + i\epsilon E_1 &= h_1, \\ ikh + i\epsilon E_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} B'_1 - \frac{2m+2}{2\sqrt{2}r} B_1 - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} B'_3 + \frac{2m-2}{2\sqrt{2}r} B_3 &= h_2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} h' - \frac{m}{\sqrt{2}r} h + \frac{1}{\sqrt{2}} B'_2 - \\ - \frac{2m}{2\sqrt{2}r} B_2 + ikB_1 + i\epsilon E_3 &= h_3; \quad (11) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} h'_0 + \frac{2m}{2\sqrt{2}r} h_0 - i\epsilon h_1 &= 0, \\ -ikh_0 - i\epsilon h_2 &= 0, \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} h'_0 + \frac{2m}{2\sqrt{2}r} h_0 - i\epsilon h_3 &= 0, \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} h'_2 + \frac{2m}{2\sqrt{2}r} h_2 + ikh_3 &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} h'_1 - \frac{2m-2}{2\sqrt{2}r} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} h'_3 + \frac{2m+2}{2\sqrt{2}r} h_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$-ikh_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} h'_2 - \frac{2m}{2\sqrt{2}r} h_2 = 0; \quad (12)$$

переменные $E_{1,2,3}, B_{1,2,3}$ относятся к шести компонентам антисимметричного тензора; $h, h_{0,1,2,3}$ относятся к скаляру и 4-вектору. Размерности этих компонент подчиняются правилу

$$\begin{aligned} [h] = 1, \quad [E_i] = 1, \quad [B_i] = 1, \\ [h_0], [h_1], [h_2], [h_3] = \frac{1}{L}. \quad (13) \end{aligned}$$

Введем сокращающие обозначения

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} \right), \quad b_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} \right), \\ a_{m+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} \right), \\ b_{m+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{m+1}{r} \right), \\ a_{m-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m-1}{r} \right), \\ b_{m-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r} \right), \quad (14) \end{aligned}$$

тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} -i\epsilon h_0 - ikh_2 + b_{m-1} h_1 - a_{m+1} h_3 &= 0; \quad (15) \\ -i\epsilon h - ikE_2 + b_{m-1} E_1 - a_{m+1} E_3 &= h_0, \\ -a_m h + a_{m+1} B_2 - ikB_3 + i\epsilon E_1 &= h_1, \\ ikh + i\epsilon E_2 - a_{m+1} B_1 - b_{m-1} B_3 &= h_2, \\ b_m h + b_m B_2 + ikB_1 + i\epsilon E_3 &= h_3; \quad (16) \\ a_m h_0 - i\epsilon h_1 = 0, \quad -ikh_0 - i\epsilon h_2 &= 0 \\ -b_m h_0 - i\epsilon h_3 = 0, \quad -b_m h_2 + ikh_3 &= 0, \\ b_{m-1} h_1 + a_{m+1} h_3 = 0, \quad -ikh_1 - a_m h_2 &= 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Дальше будем использовать метод Федорова-Гронского [11]. Для этого введем оператор третьей проекции спина $Y = -iJ^{12}$ (он относится к циклическому базису). Убеждаемся, что эта 11-мерная матрица удовлетворяет минимальному уравнению $Y(Y-1)(Y+1) = 0$. Оно позволяет ввести три проективных оператора с необходимыми свойствами

$$\begin{aligned} P_1 = \frac{1}{2} Y(Y-1), \quad P_2 = \frac{1}{2} Y(Y+1), \quad P_3 = 1 - Y^2; \\ P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_3^2 = P_3, \quad P_1 + P_2 + P_3 = 1. \quad (18) \end{aligned}$$

Соответственно, полную волновую функцию можно разложить в сумму трех частей

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3, \quad \Psi_\sigma = P_\sigma \Psi, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Получаем явный вид проективных операторов

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Затем находим структуру проективных составляющих полной волновой функции (учитываем, что в соответствии с методом Федорова-Гронского каждая составляющая должна определяться только одной функцией от переменной r):

$$\begin{aligned} \Psi_1(r) &= (0, 0, h_1, 0, 0, E_1, 0, 0, 0, 0, B_3)^t f_1(r), \\ \Psi_2(r) &= (0, 0, 0, 0, h_3, 0, 0, E_3, B_1, 0, 0)^t f_2(r), \\ \Psi_3(r) &= (h, h_0, 0, h_2, 0, 0, E_2, 0, 0, B_2, 0)^t f_3(r). \end{aligned} \quad (19)$$

Действуя проективными операторами на систему уравнений (15)–(17), получаем три подсистемы

$$P_1: \quad \begin{aligned} -a_m h + a_m B_2 - ikB_3 + imE_1 &= h_1, \\ a_m h_0 - imh_1 &= 0, \quad -ikh_1 - a_m h_2 = 0; \end{aligned}$$

$$P_2: \quad \begin{aligned} b_m h + b_m B_2 + ikB_1 + imE_3 &= h_3, \\ -b_m h_0 - imh_3 &= 0, \quad -b_m h_2 + ikh_3 = 0; \end{aligned}$$

$$P_3: \quad \begin{aligned} -imh_0 - ikh_2 + b_{m-1}h_1 - a_{m+1}h_3 &= 0, \\ -imh - ikE_2 + b_{m-1}E_1 - a_{m+1}E_3 &= h_0, \\ ikh + imE_2 - a_{m+1}B_1 - b_{m-1}B_3 &= h_2, \\ -ikh_0 - imh_2 = 0, \quad b_{m-1}h_1 + a_{m+1}h_3 &= 0. \end{aligned}$$

Накладываем условия Федорова-Гронского (эти условия позволяют преобразовать дифференциальные уравнения в алгебраические):

$$\begin{aligned} P_1 \quad & -a_m f_3(r)h + a_m f_3(r)B_2 - ikf_1(r)B_3 + \\ & + imf_1(r)E_1 = f_1(r)h_1 \Rightarrow a_m f_3 = C_1 f_1, \\ & a_m f_3(r)h_0 - imf_1(r)h_1 = 0 \Rightarrow a_m f_3 = C_1 f_1, \\ & -ikf_1(r)h_1 - a_m f_3(r)h_2 = 0 \Rightarrow a_m f_3 = C_1 f_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 \quad & b_m f_3(r)h + b_m f_3(r)B_2 + ikf_2(r)B_1 + \\ & + imf_2(r)E_3 = f_2(r)h_3 \Rightarrow b_m f_3 = C_2 f_2, \\ & -b_m f_3(r)h_0 - imf_2(r)h_3 = 0 \Rightarrow b_m f_3 = C_2 f_2, \\ & -b_m f_3(r)h_2 + ikf_2(r)h_3 = 0 \Rightarrow b_m f_3 = C_2 f_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 \quad & -imf_3(r)h_0 - ikf_3(r)h_2 + b_{m-1}f_1(r)h_1 - \\ & -b_{m-1}f_1(r)h_3 = 0 \Rightarrow b_{m-1}f_1 = C_3 f_3, \\ & -imf_3(r)h - ikf_3(r)E_2 + b_{m-1}f_1(r)E_1 - \\ & -a_{m+1}f_2(r)E_3 = f_3(r)h_0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow b_{m-1}f_1 = C_3 f_3, \quad a_{m+1}f_2 = C_4 f_3, \\ & ikf_3(r)h + imf_3(r)E_2 - a_{m+1}f_2(r)B_1 - \\ & -b_{m-1}f_1(r)B_3 = f_3(r)h_2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow b_{m-1}f_1 = C_3 f_3, \quad a_{m+1}f_2 = C_4 f_3, \\ & -ikf_3(r)h_0 - imf_3(r)h_2 = 0, \\ & b_{m-1}f_1(r)h_1 + a_{m+1}f_2(r)h_3 = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow b_{m-1}f_1 = C_3 f_3, \quad a_{m+1}f_2 = C_4 f_3. \end{aligned}$$

С учетом наложенных связей получаем алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} -C_1 h + C_1 B_2 - ikB_3 + imE_1 &= h_1, \\ C_1 h_0 - imh_1 = 0, \quad -ikh_1 - C_1 h_2 &= 0, \\ C_2 h + C_2 B_2 + ikB_1 + imE_3 &= h_3, \\ -C_2 h_0 - imh_3 = 0, \quad -C_2 h_2 + ikh_3 &= 0, \\ -imh_0 - ikh_2 + C_3 h_1 - C_3 h_3 &= 0, \\ -imh - ikE_2 + C_3 E_1 - C_4 E_3 &= 0, \\ ikh + imE_2 - C_4 B_1 - C_3 B_3 &= h_2, \\ -ikh_0 - imh_2 = 0, \quad C_3 h_1 + C_4 h_3 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Соберем вместе дифференциальные условия связи

$$\begin{aligned} b_{m-1}f_1(r) &= C_3 f_3(r), \quad a_m f_3(r) = C_1 f_1(r), \\ a_{m+1}f_2(r) &= C_4 f_3(r), \quad b_m f_3(r) = C_2 f_2(r). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следуют уравнения второго порядка для отдельных функций

$$\begin{aligned} b_{m-1}a_m f_3 &= C_1 C_3 f_3, \quad a_m b_{m-1}f_1 = C_1 C_3 f_1, \\ a_{m+1}b_m f_3 &= C_2 C_4 f_3, \quad b_m a_{m+1}f_2 = C_2 C_4 f_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Параметры в каждой паре могут быть выбраны одинаковыми: $C_3 = C_1$, $C_4 = C_2$. При этом условия связи и уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} b_{m-1}f_1(r) &= C_1f_3, & a_mf_3 &= C_1f_1, \\ a_{m+1}f_2(r) &= C_2f_3, & b_mf_3 &= C_2f_2; \\ [b_{m-1}a_m - C_1^2]f_3 &= 0, & [a_mb_{m-1} - C_1^2]f_1 &= 0, \\ [a_{m+1}b_m - C_2^2]f_3 &= 0, & [b_ma_{m+1} - C_2^2]f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом явного вида (14) операторов первого порядка полученные четыре уравнения записываются так:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - 2C_1^2 \right] f_3 &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-1)^2}{r^2} - 2C_1^2 \right] f_1 &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - 2C_2^2 \right] f_3 &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2} - 2C_2^2 \right] f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, должно выполняться условие $2C_2^2 = 2C_1^2 \equiv C^2$, т. е. имеем три уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - C^2 \right) f_3 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-1)^2}{r^2} - C^2 \right) f_1 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2} - C^2 \right) f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Напомним, что в теории обычной безмассовой векторной частицы также возникает уравнение вида (24):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + m^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0,$$

$$A_{11 \times 11} = \begin{pmatrix} 0 & -im & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -im & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & -ik & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik \\ ik & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} \\ \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im & ik & \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ik & 0 & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & ik & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ik & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi = (h, h_1, h_2, h_3, E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3)^t.$$

Убеждаемся, что определитель этой матрицы обращается тождественно в нуль при любом выборе параметра C . Ранг матрицы равен восьми. Удаление строк с номерами 9–11 приводит к матрице $A_{8 \times 11}$ нового размера с тем же

$$z = \sqrt{m^2 - k^2}r, \quad f(z) = J_{\pm m}(z). \quad (25)$$

Следовательно, в уравнениях (24) надо полагать

$$-C^2 = m^2 - k^2 \Rightarrow C = i\sqrt{m^2 - k^2}. \quad (26)$$

В новой переменной $z = -iCr = \sqrt{m^2 - k^2}r$ уравнения (24) принимают бесселевский вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1 - \frac{m^2}{z^2} \right) f_3 &= 0, & f_3 &= J_{\pm m}(z), \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1 - \frac{(m-1)^2}{z^2} \right) f_1 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1 - \frac{(m+1)^2}{z^2} \right) f_2 &= 0, \\ f_1 &= J_{\pm(m-1)}(z), & f_2 &= J_{\pm(m+1)}(z). \end{aligned} \quad (27)$$

2. Анализ алгебраической системы

Напомним равенства $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C/\sqrt{2}$ и обратимся к алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned} -imh_0 - ikh_2 + C/\sqrt{2}h_1 - C/\sqrt{2}h_3 &= 0, \\ -imh - ikE_2 + C/\sqrt{2}E_1 - C/\sqrt{2}E_3 &= h_0, \\ -C/\sqrt{2}h + C/\sqrt{2}B_2 - ikB_3 + imE_1 &= h_1, \\ ikh + imE_2 - C/\sqrt{2}B_1 - C/\sqrt{2}B_3 &= h_2, \\ C/\sqrt{2}h + C/\sqrt{2}B_2 + ikB_1 + imE_3 &= h_3, \\ C/\sqrt{2}h_0 - imh_1 &= 0, & -ikh_0 - imh_2 &= 0, \\ -C/\sqrt{2}h_0 - imh_3 &= 0, & -C/\sqrt{2}h_2 + imh_3 &= 0, \\ C/\sqrt{2}h_1 + C/\sqrt{2}h_3 &= 0, & -ikh_1 - C/\sqrt{2}h_2 &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Ее можно записать в матричной форме $A_{11 \times 11} \Psi = 0$

$$\begin{pmatrix} -im & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik \\ ik & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{C}{\sqrt{2}} \\ \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im & ik & \frac{C}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ik & 0 & -im & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times (h, h_0, h_1, h_2, h_3, E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3)^t = 0.$$

Переносим вправо столбцы, отвечающие переменным h, E_3, B_1, B_2, B_3 , и приходим к неоднородной системе уравнений с пятью свободными параметрами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\sqrt{2}} & -ik \\ 0 & -1 & 0 & 0 & im & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & im \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{C}{\sqrt{2}} & -im & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ik & 0 & -im & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} =$$

$$= - \left(-im, -\frac{C}{\sqrt{2}}, ik, \frac{C}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)^t h -$$

$$- \left(-\frac{C}{\sqrt{2}}, 0, 0, im, 0, 0 \right)^t E_3 -$$

$$- \left(0, 0, -\frac{C}{\sqrt{2}}, ik, 0, 0 \right)^t B_1 -$$

$$- \left(0, \frac{C}{\sqrt{2}}, 0, \frac{C}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)^t B_2 -$$

$$- \left(0, -ik, -\frac{C}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0 \right)^t B_3.$$

В результате находим пять линейно независимых решений:

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -im \\ -\frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}} \\ ik \\ \frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} h,$$

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{2}m^2}{\sqrt{m^2-k^2}} \\ -im \\ \frac{i\sqrt{2}km}{\sqrt{m^2-k^2}} \\ im \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{m^2-k^2}} \end{pmatrix} E_3,$$

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{2}km}{\sqrt{m^2-k^2}} \\ -ik \\ \frac{i\sqrt{2}k^2}{\sqrt{m^2-k^2}} \\ ik \\ -\frac{k}{m} \\ \frac{k^2+m^2}{\sqrt{2m}\sqrt{m^2-k^2}} \end{pmatrix} B_1,$$

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -im \\ -\frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}} \\ ik \\ \frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2-k^2}}{m} \\ \frac{k}{m} \end{pmatrix} B_2,$$

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, E_1, E_2)^t =$$

$$= \left(0, 0, 0, 0, \frac{k}{m}, \frac{\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}m} \right)^t B_3.$$

Представляем найденные решения в 11-мерной форме:

$$\Psi_1 = \left(1, -im, -\frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}}, ik, \frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right)^t;$$

$$\Psi_2 = \left(0, -\frac{i\sqrt{2}m^2}{\sqrt{m^2-k^2}}, -im, \frac{i\sqrt{2}km}{\sqrt{m^2-k^2}}, im, -1, \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{m^2-k^2}}, 1, 0, 0, 0 \right)^t;$$

$$\Psi_3 = \left(0, -\frac{i\sqrt{2}km}{\sqrt{m^2-k^2}}, -ik, \frac{i\sqrt{2}k^2}{\sqrt{m^2-k^2}}, ik, -\frac{k}{m}, \frac{k^2+m^2}{\sqrt{2m}\sqrt{m^2-k^2}}, 0, 1, 0, 0 \right)^t;$$

$$\Psi_4 = \left(0, -im, -\frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}}, ik, \frac{i\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2-k^2}}{m}, \frac{k}{m}, 0, 0, 1, 0 \right)^t;$$

$$\Psi_5 = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{m}, \frac{\sqrt{m^2-k^2}}{\sqrt{2}m}, 0, 0, 0, 1 \right)^t.$$

При подстановке их в исходную систему (28) все пять решений дают нули. Следует учитывать, что эти решения найдены с точностью до произвольных множителей.

Заключение

Уравнение для безмассовой частицы Штюкельберга решено в цилиндрических координатах. Полевая функция состоит из скаляра, 4-вектора и антисимметричного тензора. Физически наблюдаемыми величинами являются скаляр (переменная h) и 4-вектор (переменные h_0, h_1, h_2, h_3); физически ненаблюдаемые переменные — компоненты антисимметричного тензора (переменные E_i, B_i). Найдены пять линейно независимых решений. При этом свободными параметрами являются h, E_3, B_1, B_2, B_3 .

Литература

- Duffin, R.I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R.I. Duffin // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 54, № 12. – P. 1114–1117.
- Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
- Огивецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И. Огивецкий, И.В. Полубаринов // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
- Stueckelberg, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E.C.G. Stueckelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312, 312–328.
- Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 19. – P. 3265–3348.
- Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Беларус. навука, 2009. – 486 с.
- Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В.А. Плетюхов, В.М. Редьков, В.И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.
- Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018.
- Овсиюк, Е.М. Частица Штюкельберга во внешнем магнитном поле. Метод проективных операторов / Е.М. Овсиюк [и др.] // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 69–78.
- Stueckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E.M. Ovsyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.
- Гронский, В.К. Магнитные свойства частицы со спином 3/2. / В.К. Гронский, Ф.И. Федоров // Доклады Национальной Академии наук Беларуси. – 1960. – Т. 4, № 7. – С. 278–283.
- Duffin, R.I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R.I. Duffin // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 54, № 12. – P. 1114–1117.
- Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
- Ogievetsky, V.I. Notof i ego vozmozhnie vzaimodeistviya [The notoph and its possible interactions] / V.I. Ogievetsky, I.V. Polubarinov // Yad. Fiz. – 1966. – Vol. 4. – P. 216–223 [Sov. J. Nucl. Phys. – 1967. – Vol. 4. – P. 156–161].
- Stueckelberg, E.C.G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E.C.G. Stueckelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312, P. 312–328.
- Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 19. – P. 3265–3348.
- Red'kov, V.M. Polay chastis v rimanovskom prostranstve i gruppa Lorentsa [Fields in Riemannian space and the Lorentz group] / V.M. Red'kov. – Minsk: Belarus. navuka. – 2009. – 486 p.
- Pletyukhov, V.A. Relativistkie volnnye uravneniya i vnutrennie stepeni svobody [Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom] / V.A. Pletyukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk: Belarus. navuka. – 2015. – 328 p.
- Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018.
- Ovsyuk, E.M. Chastisa Shtukelberga vo vneshnem magnitnom pole. Metod proektivnih operatorov [Stueckelberg particle in external magnetic field, and the method of projective operators] / E.M. Ovsyuk [et al.] // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 69–78.
- Stueckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E.M. Ovsyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.
- Gronskiy, V.K. Magnitnie svoystva chastisi so spinom 3/2 [Magnetic properties of a particle with spin 3/2] / V.K. Gronskiy, F.I. Fedorov // Doklady nacionalnoi akademii Belarusii [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus]. – 1960. – Vol. 4, № 7. – P. 278–283.

References

Для цитирования:

Семенюк, О.А. Безмассовая частица Штюкельберга, решения с цилиндрической симметрией / О.А. Семенюк, В.А. Плетюхов, А.В. Бурый, А.В. Ивашкевич, В.М. Редьков // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 69–76.

For citation:

Semenyuk, O.A. Bezmassovaya chastica SHtyukel'berga, resheniya s cilindricheskoj simmetriej [Massless Stueckelberg particle, solutions with cylindric symmetry] / O.A. Semenyuk, V.A. Pletyukhov, A.V. Bury, A.V. Ivashkevich, V.M. Red'kov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 69–76.

Дата поступления рукописи: 10.04.2023

Received: 10.04.2023

Fermion with three mass parameters in the uniform magnetic field

E.M. Ovsiyuk¹, A.P. Safronov¹, A.D. Koralkov¹,
Ya.A. Voynova²

¹Mozyr State Pedagogical University
named after I.P. Shamyakin,
Mozyr, Belarus

²Minsk Suворov Military School, Minsk, Belarus

e.ovsiyuk@mail.ru
safronov_mspu@mail.ru
artemkoralkov@gmail.com
voinovayanina@mail.ru

Abstract

Recently, models for a spin $1/2$ particle with two (or three) mass parameters were developed. Specific features of these models are as follows. For corresponding two (or three) bispinors in absence of external fields, separate Dirac-like equations are derived, they differ in masses. However, in presence of external electromagnetic or gravitational fields with non-vanishing Ricci scalar, the wave equation for bispinors does not split into separated equations but makes quite a definite mixing of two (or three) equations arises. In the present paper, the model of a fermion with three mass parameters is studied in presence of the external uniform magnetic field. After performing a diagonalizing transformation, three separate equations are obtained for particles with different anomalous magnetic moments. Their exact solutions and generalized energy spectra are found.

Keywords:

fermion with three mass parameters, magnetic field, anomalous magnetic moment, exact solutions, energy spectrum

Introduction

In the context of existence of the similar neutrinos of different masses, we examine a possibility within the theory of relativistic wave equations to describe particles with several mass parameters. In general, existence of more general wave equations than commonly used ones is well known within the Gel'fand-Yaglom formalism – see references [1-5].

In particular, models for a spin $1/2$ particle with two and three mass parameters were developed [6-15]. Specific features of these models are as follows. For two (or three) bispinors, in absence of external fields separate Dirac-like equations are derived, they differ in masses. However, in

Фермион с тремя массовыми параметрами во внешнем магнитном поле

Е.М. Овсийук¹, А.П. Сафронов¹, А.Д. Коральков¹,
Я.А. Войнова²

¹Мозырский государственный педагогический университет
имени И.П. Шамякина,
г. Мозырь, Беларусь

²Минское суворовское военное училище,
г. Минск, Беларусь

e.ovsiyuk@mail.ru
safronov_mspu@mail.ru
artemkoralkov@gmail.com
voinovayanina@mail.ru

Аннотация

Недавно были развиты модели для частицы со спином $1/2$ с двумя (или тремя) массовыми параметрами. Особенности этих моделей заключаются в следующем. Для соответствующих двух (или трех) биспиноров в отсутствие внешних полей выводятся отдельные уравнения дираковского типа, различающиеся массами. Однако при наличии внешних электромагнитных или гравитационных полей с ненулевым скаляром Риччи волновое уравнение для биспиноров не распадается на отдельные уравнения, а возникает связанная система из двух (или трех) уравнений. В настоящей работе исследуется модель фермиона с тремя массовыми параметрами в присутствии внешнего однородного магнитного поля. После диагонализации матрицы смешивания получаются три отдельных уравнения для частиц с разными аномальными магнитными моментами; найдены их точные решения и получены обобщенные энергетические спектры.

Ключевые слова:

фермион с тремя массовыми параметрами, магнитное поле, аномальный магнитный момент, точные решения, энергетический спектр

presence of external electromagnetic field or gravitational field with non-vanishing Ricci scalar, the wave equation for bispinors does not split into separated equations, instead a quite definite mixing of two (or three) equations arises. It was shown that generalized equations for Majorana particle with several mass parameters exist as well. Such generalized Majorana equations are not trivial if the Ricci scalar does not vanish.

In the present paper, the model of a fermion with three mass parameters is studied in presence of the external uniform magnetic field. After applying the diagonalizing trans-

formation, three separate equations are obtained effectively for particles with different anomalous magnetic moments. Their exact solutions and generalized energy spectra are found.

1. General theory in presence of electromagnetic and gravitational fields

We start with the system of equations for a fermion with 3 mass parameters [12, 15]:

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_1(x) - \\ - M_1\Phi_1(x) + Y_1\Sigma(x)\Phi(x) = 0, \\ i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_2(x) - \\ - M_2\Phi_2(x) + Y_2\Sigma(x)\Phi(x) = 0, \\ i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_3(x) - \\ - M_3\Phi_3(x) + Y_3\Sigma(x)\Phi(x) = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

where the notations are used

$$Y_i = \frac{4c_3}{3M}c_2(\lambda_i - c_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad L = c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}},$$

$$\Phi(x) = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x),$$

$$\Sigma(x) = -ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{4}R(x),$$

$$L_1 = \frac{-L|c_4|^2 - L|c_3|^2 + c_2^2 - c_2(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}{Lc_2c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$L_2 = \frac{-L|c_4|^2 - L|c_3|^2 + c_2^2 - c_2(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3\lambda_1}{Lc_2c_3(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$L_3 = \frac{-L|c_4|^2 - L|c_3|^2 + c_2^2 - c_2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2}{Lc_2c_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

With the notation $|c_4| = a$, $|c_3| = b$, the mixing matrix in the equation (1) is specified by the relations

$$Y_1L_1 = \frac{4}{3M}(\lambda_1 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}{L(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$Y_1L_2 = \frac{4}{3M}(\lambda_1 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3\lambda_1}{L(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$Y_1L_3 = \frac{4}{3M}(\lambda_1 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2}{L(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)},$$

$$Y_2L_1 = \frac{4}{3M}(\lambda_2 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}{L(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$Y_2L_2 = \frac{4}{3M}(\lambda_2 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3\lambda_1}{L(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$Y_2L_3 = \frac{4}{3M}(\lambda_2 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2}{L(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)},$$

$$Y_3L_1 = \frac{4}{3M}(\lambda_3 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}{L(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$Y_3L_2 = \frac{4}{3M}(\lambda_3 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3\lambda_1}{L(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$Y_3L_3 = \frac{4}{3M}(\lambda_3 - c_2) \times \frac{-L(a^2 + b^2) + c_2^2 - c_2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2}{L(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

We will consider eq. (1) in the cylindrical coordinates and tetrad

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2d\phi^2 - dz^2,$$

$$x^\alpha = (t, r, \phi, z),$$

$$e_{(a)}^\beta(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ricci rotation coefficients are as follows: $\gamma_{ab0} = 0$, $\gamma_{ab1} = 0$, $\gamma_{122} = -\gamma_{212} = 1/r$, $\gamma_{ab3} = 0$. The external magnetic field directed along the axis x_3 is determined as follows

$$A_\phi = -\frac{1}{2}Br^2, \quad F_{12}(x) = F_{r\phi} = -Br,$$

$$-ieF_{\alpha\beta}(x) = -ieF_{12}(x)\gamma^1(x)\gamma^2(x) = ieB\gamma^1\gamma^2 =$$

$$= ieB \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix} = eB\Sigma.$$

So, the main equation (1) takes the form (we simplify the notation, $eB \Rightarrow B$)

$$\begin{aligned} \left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\gamma^2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i\frac{Br^2}{2} \right) + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \Phi_1 - \\ - M\Phi_1 + B\Sigma Y_1(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\gamma^2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i\frac{Br^2}{2} \right) + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \Phi_2 - M\Phi_2 + BSY_2(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0,$$

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\gamma^2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i\frac{Br^2}{2} \right) + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \Phi_3 - M\Phi_3 + BSY_3(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0.$$

For three involved bispinors, we will use the following substitutions

$$\Phi_1 = e^{-i\epsilon t} e^{im\varphi} e^{ikz} (f_1, f_2, f_3, f_4)^t,$$

$$\Phi_2 = e^{-i\epsilon t} e^{im\varphi} e^{ikz} (g_1, g_2, g_3, g_4)^t,$$

$$\Phi_3 = e^{-i\epsilon t} e^{im\varphi} e^{ikz} (h_1, h_2, h_3, h_4)^t,$$

where $()^t$ stands for transpose. Then the previous system reads

$$\left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k\gamma^3 - M \right] \Phi_1 + (M - M_1)\Phi_1 + BSY_1(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0,$$

$$\left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k\gamma^3 - M \right] \Phi_2 + (M - M_2)\Phi_2 + BSY_2(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0,$$

$$\left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k\gamma^3 - M \right] \Phi_3 + (M - M_3)\Phi_3 + BSY_3(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0,$$

where

$$\mu(r) = m + \frac{1}{2}Br^2, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Using the shortening notations for elements of the mixing matrix

$$Z_{kj} = (BY_k)L_j = d_k L_j,$$

we present the system as follows

$$\hat{\partial}\Phi_k + Z_{kj}\Phi_j = 0,$$

$$\hat{\partial} = \Sigma^{-1} \left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k\gamma^3 - M \right].$$

The mixing matrix should be reduced to a diagonal form by a linear transformation

$$\bar{\Phi} = S\Phi, \quad \hat{\partial}\bar{\Phi} = SZS^{-1}\bar{\Phi},$$

$$SZS^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

As a result we get

$$\Sigma^{-1}\hat{\partial} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \end{pmatrix} = 0,$$

or

$$\left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k\gamma^3 - M \right] \bar{\Phi}_1 + \mu_1 \Sigma \bar{\Phi}_1 = 0,$$

$$\left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k\gamma^3 - M \right] \bar{\Phi}_2 + \mu_2 \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0,$$

$$\left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k\gamma^3 - M \right] \bar{\Phi}_3 + \mu_3 \Sigma \bar{\Phi}_3 = 0. \quad (2)$$

Thus, after transformation, three separate equations are obtained effectively for particles with different anomalous magnetic moments.

2. Solving the basic equation

Let us briefly describe the procedure for solving the basic equation (2):

$$\left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \sigma(r) - k\gamma^3 - M + \Gamma Z \right] \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Using the spinor basis for the Dirac matrices [3, 6], we obtain four equations

$$-i \left(\frac{d}{dr} + \mu \right) f_4 + (\epsilon + k)f_3 + (\Gamma - M)f_1 = 0,$$

$$-i \left(\frac{d}{dr} - \mu \right) f_3 + (\epsilon - k)f_4 - (\Gamma + M)f_2 = 0,$$

$$i \left(\frac{d}{dr} + \mu \right) f_2 + (\epsilon - k)f_1 + (\Gamma - M)f_3 = 0,$$

$$i \left(\frac{d}{dr} - \mu \right) f_1 + (\epsilon + k)f_2 - (\Gamma + M)f_4 = 0. \quad (3)$$

Let $\frac{d}{dr} \pm \mu(r) = D_{\pm}$. Equations (3) can be considered as two linear subsystems and their solutions are

$$f_1 = +i \frac{(\epsilon + k)D_+ f_2 + (\Gamma - M)D_+ f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\epsilon^2 - k^2)},$$

$$f_2 = +i \frac{(\epsilon - k)D_- f_1 - (\Gamma + M)D_- f_3}{(\Gamma + M)^2 - (\epsilon^2 - k^2)},$$

$$f_3 = -i \frac{(\Gamma - M)D_+ f_2 + (\epsilon - k)D_+ f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\epsilon^2 - k^2)},$$

$$f_4 = -i \frac{-(\Gamma + M)D_- f_1 + (\epsilon + k)D_- f_3}{(\Gamma + M)^2 - (\epsilon^2 - k^2)}.$$

Eliminating the variables f_1, f_3 in the equations above, we obtain

$$-\frac{\Gamma + M}{\Gamma - M} f_2 + \frac{\epsilon - k}{\Gamma - M} f_4 = \frac{D_- D_+ f_2}{(\Gamma - M)^2 - (\epsilon^2 - k^2)} + \frac{\epsilon - k}{\Gamma - M} \times \frac{D_- D_+ f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\epsilon^2 - k^2)}, \quad (4)$$

$$f_2 - \frac{\Gamma + M}{\epsilon + k} f_4 = \frac{D_- D_+ f_2}{(\Gamma - M)^2 - (\epsilon^2 - k^2)} + \frac{\Gamma - M}{\epsilon + k} \times \frac{D_- D_+ f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\epsilon^2 - k^2)}.$$

Subtract the second equation from the first equation and substitute the resulting expression for f_2 into (4), so we obtain the fourth order equation for f_4 :

$$\begin{aligned} & -\frac{d^4 f_4}{dr^4} + \left[\frac{e^2 B^2}{2} r^2 - eB(2m-1) - \right. \\ & \left. -2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2) + \frac{2m(m+1)}{r^2} \right] \frac{d^2 f_4}{dr^2} + \\ & + \left[e^2 B^2 r - 4 \frac{m(m+1)}{r^3} \right] \frac{df_4}{dr} + \left[-\frac{e^4 B^4}{16} r^4 + \right. \\ & + \frac{e^2 B^2}{4} [eB(2m-1) + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2)] r^2 - \\ & - eB(2m-1)(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2) - (\Gamma^2 + M^2 + k^2 - \epsilon^2)^2 + \\ & + 4\Gamma^2 M^2 - \frac{e^2 B^2}{4} (6m^2 - 2m - 1) + \\ & + \frac{m(m+1)[eB(2m-1) + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2)]}{r^2} - \\ & \left. - \frac{m(m-2)(m+3)(m+1)}{r^4} \right] f_4 = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Similarly, we can obtain the fourth order equation for the function f_2 . Equations for f_2 and f_4 turn out to be the same. To study the fourth order equation, we will use the factorization method:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_4(r)f(r) &= \widehat{f}_2(r)\widehat{g}_2(r)f(r) = 0, \\ \widehat{f}_2(r) &= \frac{d^2}{dr^2} + P_0 r^2 + P_1 + \frac{P_2}{r^2}, \\ \widehat{g}_2(r) &= \frac{d^2}{dr^2} + Q_0 r^2 + Q_1 + \frac{Q_2}{r^2}. \end{aligned}$$

Computing the product

$$\begin{aligned} \widehat{F}_4 &= \left(\frac{d^2}{dr^2} + P_0 r^2 + P_1 + \frac{P_2}{r^2} \right) \times \\ & \times \left(\frac{d^2}{dr^2} + Q_0 r^2 + Q_1 + \frac{Q_2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

and equating the result to the operator (5), we find two solutions for sets of numerical coefficients:

$$I \quad P_0 = -\frac{1}{4} B^2 e^2, \quad P_2 = -m(m+1),$$

$$P_1 = eB \left(m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2 + 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2},$$

$$II \quad Q_0 = -\frac{1}{4} B^2 e^2, \quad Q_2 = -m(m+1),$$

$$Q_1 = eB \left(m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2 - 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2}.$$

The variant II differs only in sign at the parameter Γ . Thus, we are to solve two second-order differential equations:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{B^2 e^2 r^2}{4} + eB \left(m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2 + 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2} - \frac{m(m+1)}{r^2} \right] f = 0, \quad (6)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{B^2 e^2 r^2}{4} + eB \left(m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2 - 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2} - \frac{m(m+1)}{r^2} \right] g = 0.$$

They differ only in sign at the parameter Γ . Consider the equation (6). Let us make the change of the variable $x = eBr^2/2$. Solutions are constructed in the form $f = x^a e^{bx} F$. Taking into account the constraints $a = -m/2, (m+1)/2$ and $b = -1/2$, we obtain the equation for F :

$$\begin{aligned} & x \frac{d^2 F}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} + 2a - x \right) \frac{dF}{dx} - \\ & - \frac{1}{4eB} \left[eB(4a+1) - 4\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2} - (2m-1)eB - \right. \\ & \left. - 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2) \right] F = 0. \end{aligned}$$

It is an equation of the confluent hypergeometric type with parameters

$$\gamma = 2a + \frac{1}{2},$$

$$a = -\frac{1}{4eB} \left[eB(4a+1) - 4\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2} - (2m-1)eB - 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \epsilon^2) \right].$$

To construct solutions corresponding to bound states, one should use the positive values of the parameter a (for definiteness, we assume that $eB > 0$):

$$a = -\frac{m}{2} \quad (m < 0); \quad a = \frac{m+1}{2} > 0 \quad (m \geq 0).$$

The polynomial conditions $\alpha = -n$ (let $\epsilon^2 - k^2 = \lambda$) provides us with the quantization rule for energy values

$$a + \frac{1}{2} - \frac{m}{2} + \frac{M^2 - \Gamma^2}{2eB} + n = \frac{\Gamma\sqrt{\lambda}}{eB} + \frac{\lambda}{2eB}.$$

Hence, using the notation $M^2 + 2eB(a + 1/2 - m/2 + n) = N$, we obtain

$$\lambda = (\sqrt{N} - \Gamma)^2 > 0. \quad (7)$$

From (7) we find the formula for the energy values

$$\epsilon^2 - k^2 = \left[\sqrt{M^2 + 2eB \left(a + \frac{1-m}{2} + n \right)} - \Gamma \right]^2.$$

Depending on the value of a , we have two expressions for N :

$$m < 0, \quad a = -\frac{m}{2},$$

$$\epsilon^2 - k^2 = \left[\sqrt{M^2 + 2eB(1/2 - m + n)} - \Gamma \right]^2;$$

$$m \geq 0, \quad a = \frac{m+1}{2},$$

$$\epsilon^2 - k^2 = \left[\sqrt{M^2 + 2eB(1+n)} - \Gamma \right]^2.$$

Thus, we obtain two series of energies

$$I: \quad \lambda = (\sqrt{N} - \Gamma)^2; \quad II: \quad \lambda = (\sqrt{N} + \Gamma)^2.$$

Let us consider a special case of an electrically neutral particle with the magnetic moment (neutron). The transition to the case of a neutral particle can be carried out with the help of simple formal changes, $e \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, $e\lambda \rightarrow \Lambda$, so that

$$\Gamma = \lambda \frac{e B \hbar}{\hbar m c} \Rightarrow \Gamma = \Lambda \frac{B}{m c^2}.$$

No additional calculations are needed. We obtain two second-order equations:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + (\sqrt{\epsilon^2 - k^2} + \Gamma)^2 - M^2 - \frac{m(m+1)}{r^2} \right] f &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + (\sqrt{\epsilon^2 - k^2} - \Gamma)^2 - M^2 - \frac{m(m+1)}{r^2} \right] f &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

General solutions of equations (8) have the form

$$\begin{aligned} f(r) &= \sqrt{r} (J_{m+1/2}(x) + Y_{m+1/2}(x)), \\ x &= \sqrt{(\sqrt{\epsilon^2 - k^2} + \Gamma)^2 - M^2} r; \\ g(r) &= \sqrt{r} (J_{m+1/2}(y) + Y_{m+1/2}(y)), \\ y &= \sqrt{(\sqrt{\epsilon^2 - k^2} - \Gamma)^2 - M^2} r. \end{aligned}$$

From the form of these equations, we can conclude that the magnetic moment manifests itself in an external magnetic field in a quite definite way: in fact, everything reduces to solutions with cylindrical symmetry for an ordinary free particle with spin 1/2, but with a certain replacement

$$\epsilon^2 - M^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\epsilon^2 - k^2} \pm \Gamma \right)^2 - M^2.$$

The main manifestation of the magnetic moment of a neutral particle is the modification (spatial scaling) of the wave functions in directions transverse to the magnetic field. Apparently, such a modification of the transverse structure of a neutron beam can be observed experimentally, for example, in neutron Bessel beams. Obviously, the transition to the

situation of an electrically neutral particle can also be carried out in the case of a particle with three mass parameters.

3. Diagonalization of the mixing matrix

Let us turn back to the system of three equations

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} \left[\epsilon \gamma^0 + i \gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k \gamma^3 - M \right] \Phi_1 + \\ + (d_1 L_1 \Phi_1 + d_1 L_2 \Phi_2 + d_1 L_3 \Phi_3 + (M - M_1) \Phi_1) &= 0, \\ \Sigma^{-1} \left[\epsilon \gamma^0 + i \gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k \gamma^3 - M \right] \Phi_2 + \\ + (d_2 L_1 \Phi_1 + d_2 L_2 \Phi_2 + d_2 L_3 \Phi_3 + (M - M_2) \Phi_2) &= 0, \\ \Sigma^{-1} \left[\epsilon \gamma^0 + i \gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k \gamma^3 - M \right] \Phi_3 + \\ + (d_3 L_1 \Phi_1 + d_3 L_2 \Phi_2 + d_3 L_3 \Phi_3 + (M - M_3) \Phi_3) &= 0, \end{aligned}$$

or briefly

$$\hat{\partial} = \Sigma^{-1} \left[\epsilon \gamma^0 + i \gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r} \mu(r) - k \gamma^3 - M \right],$$

$$\hat{\partial} \Phi_k + T_{kj} \Phi_j = 0.$$

To find the transformation matrix S , which will diagonalize the mixing matrix, we are to study the following equation $ST = T_0 S$, or in detail

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 & d_1 L_2 \\ d_2 L_1 & M - M_2 + d_2 L_2 \\ d_3 L_1 & d_3 L_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} d_1 L_3 \\ d_2 L_3 \\ M - M_3 + d_3 L_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hence we obtain three linear subsystems:

$$\begin{aligned} (M - M_1 + d_1 L_1) s_{11} + d_2 L_1 s_{12} + d_3 L_1 s_{13} &= \mu_1 s_{11}, \\ d_1 L_2 s_{11} + (M - M_2 + d_2 L_2) s_{12} + d_3 L_2 s_{13} &= \mu_1 s_{12}, \\ d_1 L_3 s_{11} + d_2 L_3 s_{12} + (M - M_3 + d_3 L_3) s_{13} &= \mu_1 s_{13}; \\ (M - M_1 + d_1 L_1) s_{11} + d_2 L_1 s_{12} + d_3 L_1 s_{13} &= \mu_1 s_{11}, \\ d_1 L_2 s_{11} + (M - M_2 + d_2 L_2) s_{12} + d_3 L_2 s_{13} &= \mu_1 s_{12}, \\ d_1 L_3 s_{11} + d_2 L_3 s_{12} + (M - M_3 + d_3 L_3) s_{13} &= \mu_1 s_{13}; \\ (M - M_1 + d_1 L_1) s_{31} + d_2 L_1 s_{32} + d_3 L_1 s_{33} &= \mu_3 s_{31}, \\ d_1 L_2 s_{31} + (M - M_2 + d_2 L_2) s_{32} + d_3 L_2 s_{33} &= \mu_3 s_{32}, \\ d_1 L_3 s_{31} + d_2 L_3 s_{32} + (M - M_3 + d_3 L_3) s_{33} &= \mu_3 s_{33}. \end{aligned}$$

Here we have three eigenvalue problems

$$\begin{pmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_1 & d_2 L_1 & d_3 L_1 \\ d_1 L_2 & M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_1 & d_3 L_2 \\ d_1 L_3 & d_2 L_3 & M - M_3 + d_3 L_3 - \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_2 & d_2 L_1 & d_3 L_1 \\ d_1 L_2 & M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_2 & d_3 L_2 \\ d_1 L_3 & d_2 L_3 & M - M_3 + d_3 L_3 - \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_3 & d_2 L_1 & d_3 L_1 \\ d_1 L_2 & M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_3 & d_3 L_2 \\ d_1 L_3 & d_2 L_3 & M - M_3 + d_3 L_3 - \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{31} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

Note that the three rows of the matrix S may be found only up to arbitrary multipliers. The condition for the existence of solutions for these three systems is the vanishing of the determinant

$$\det \begin{pmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 - \mu & d_2 L_1 & d_3 L_1 \\ d_1 L_2 & M - M_2 + d_2 L_2 - \mu & d_3 L_2 \\ d_1 L_3 & d_2 L_3 & M - M_3 + d_3 L_3 - \mu \end{pmatrix} = 0.$$

$$+ M^3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3}\right) = 0. \quad (9)$$

Let us get the explicit form of the third order equation for parameter μ :

$$\begin{aligned} & -\mu^3 + (3M - M_1 - M_2 - M_3 + d_1 L_1 + d_2 L_2 + d_3 L_3) \mu^2 + \\ & + [-d_1 L_1 (2M - M_2 - M_3) - d_2 L_2 (2M - M_1 - M_3) - \\ & - d_3 L_3 (2M - M_2 - M_1) - 3M^2 + 2(M_1 + M_2 + M_3)M - \\ & - (M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3)] \mu + \\ & + d_1 L_1 (M - M_2)(M - M_3) + d_2 L_2 (M - M_3)(M - M_1) + \\ & + d_3 L_3 (M - M_1)(M - M_2) + \\ & + (M - M_1)(M - M_2)(M - M_3) = 0. \end{aligned}$$

Given the relation $M_i = M/\lambda_i$, the equation can be transformed into the following form

$$\begin{aligned} & -\mu^3 + \left[M \left(3 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) + L_1 d_1 + L_2 d_2 + \right. \\ & \left. + L_3 d_3 \right] \mu^2 + \left[-M L_1 d_1 \left(2 - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) - \right. \\ & - M L_2 d_2 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3} \right) - M L_3 d_3 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - \\ & - 3M^2 + 2M^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) - \\ & \left. - M^2 \left(\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} \right) \right] \mu + \\ & + \left[M^2 L_1 d_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) + \right. \\ & + M^2 L_2 d_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \\ & \left. + M^2 L_3 d_3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \right. \end{aligned}$$

Let us detail the explicit form of the elements of the mixing matrix. First, we take into account that the parametrization of possible values of the mass parameters $M_i = \frac{M}{\lambda_i}$ can be simplified. Recall that the roots λ_i are solutions of the characteristic equation

$$\lambda^3 - (c_1 + c_2) \lambda^2 + (c_1 c_2 + a^2 + b^2) \lambda - (c_1 a^2 + c_2 b^2) = 0,$$

where $c_3 = b > 0$, $c_4 = a > 0$. Taking into account the identities

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\lambda_3},$$

we find expressions for λ_1, λ_2 in terms of λ_3 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\lambda_3}}, \\ \lambda_2 &= \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\lambda_3}}. \end{aligned}$$

The value of the root λ_3 may be arbitrary, because the physically meaningful parameter is $M_3 = M/\lambda_3$ (at an arbitrary M). The simplest expression for λ_3 is obtained when $c_1 = c_2 = 1$. In this case, the cubic equation is simplified

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + (1 + k)\lambda - k = 0, \quad k = a^2 + b^2.$$

Its roots are given by the formulas

$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4k},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4k}, \quad k \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

$$M_2 = \frac{2M}{1 + \sqrt{1-4k}}, \quad k \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Accordingly, the mass parameters M_i are specified by the formulas

$$M_3 = M, \quad M_1 = \frac{2M}{1 - \sqrt{1-4k}},$$

Let us construct tables of values for λ_i and $\lambda_i^{-1} = M_i/M$, $i = 1, 2$, ($\lambda_3 = \lambda_3^{-1} = 1$), depending on the parameter k :

Parameter values $\lambda_i = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1-4k})$, $i = 1, 2$ depending on k

Table 1

Значения параметров $\lambda_i = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1-4k})$, $i = 1, 2$ в зависимости от k

Таблица 1

k	0.24	0.22	0.209	0.207	0.205	0.203	0.20	0.16	0.12	0.08	0.04	0.01
λ_1	0.4	0.327	0.298	0.293	0.288	0.283	0.276	0.2	0.139	0.088	0.042	0.01
λ_2	0.6	0.673	0.702	0.707	0.712	0.717	0.724	0.8	0.861	0.912	0.958	0.989

Parameter values $\lambda_i^{-1} = 2(1 \mp \sqrt{1-4k})^{-1}$, $i = 1, 2$ depending on k

Table 2

Значения параметров $\lambda_i^{-1} = 2(1 \mp \sqrt{1-4k})^{-1}$, $i = 1, 2$ в зависимости от k

Таблица 2

k	0.24	0.22	0.209	0.207	0.205	0.203	0.20	0.16	0.12	0.08	0.04	0.01
$1/\lambda_1$	2.5	3.058	3.356	3.413	3.472	3.534	3.623	5	7.194	11.364	23.810	100
$1/\lambda_2$	1.667	1.486	1.425	1.414	1.404	1.395	1.381	1.250	1.161	1.096	1.044	1.011

Let us detail the coefficients L_i in the expression for $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x),$$

$$L_1 = \frac{-2k}{b} \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{1}{2Lb} \frac{1 - 2(\lambda_2 + \lambda_3) + 4\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$L_2 = \frac{-2k}{b} \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{1}{2Lb} \frac{1 - 2(\lambda_3 + \lambda_1) + 4\lambda_3\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

$$L_3 = \frac{-2k}{b} \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{1}{2Lb} \frac{1 - 2(\lambda_1 + \lambda_2) + 4\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)},$$

or (we take into account that $\lambda_3 = 1$)

$$L_1 = \frac{1}{b} \frac{1}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ -2k + \frac{1}{2L}(-1 + 2\lambda_2) \right\},$$

$$L_2 = \frac{1}{b} \frac{1}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \times \left\{ -2k + \frac{1}{2L}(-1 + 2\lambda_1) \right\},$$

$$L_3 = \frac{1}{b} \frac{1}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} \times \left\{ -2k + \frac{1}{2L}(1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2) \right\}, \quad (10)$$

where

$$L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}}, \quad (a^2 + b^2) = k < \frac{1}{4}, \quad 0 < 2b < 1.$$

Let us detail the coefficients d_i :

$$d_1 = \frac{4Bb}{6M} \left(\lambda_1 - \frac{1}{2} \right), \quad d_2 = \frac{4Bb}{6M} \left(\lambda_2 - \frac{1}{2} \right),$$

$$d_3 = \frac{4Bb}{6M} \left(\lambda_3 - \frac{1}{2} \right). \quad (11)$$

Combinations $d_i L_j$ appear in the mixing matrix, so the parameter b in the denominators in (10) will be canceled with the parameter b in (11). Also, since the dimension of the quantity B is M^2 (inverse square meter), we can introduce substitutions

$$4B = 6rM^2 \Rightarrow d_i = M \frac{4B}{6M^2} b \left(\lambda_i - \frac{1}{2} \right) = Mrb \left(\lambda_i - \frac{1}{2} \right) = MD_i,$$

where the quantities D_i are dimensionless. With this in mind, the cubic equation (9) is transformed to the form

$$-\mu^3 + M \left[3 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} + L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3 \right] \mu^2 + M^2 \left[-L_1 D_1 \left(2 - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) - L_2 D_2 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3} \right) - L_3 D_3 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - 3 + 2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{\lambda_3} \right) \mu + \\
& + M^3 \left[L_1 D_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) + \right. \\
& \quad + L_2 D_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \\
& \quad + L_3 D_3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \\
& \quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

The roots of this equation can be found in the form $\mu_i = M\Delta_i$, where Δ_i are dimensionless quantities; then the equation for $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ takes the form

$$\begin{aligned}
& -\Delta^3 + \left[3 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} + L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3 \right] \Delta^2 + \\
& + \left[-L_1 D_1 \left(2 - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) - L_2 D_2 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3} \right) - \right. \\
& \quad - L_3 D_3 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - 3 + 2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) - \\
& \quad \left. - \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{\lambda_3} \right) \right] \Delta + \\
& + \left[L_1 D_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) + \right. \\
& \quad + L_2 D_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \\
& \quad + L_3 D_3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \\
& \quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Allow for that $\lambda_3 = 1$, then we get

$$\begin{aligned}
& \Delta^3 + \left[2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3 \right] \Delta^2 + \\
& + \left[L_1 D_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) + L_2 D_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \right. \\
& \quad + L_3 D_3 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + 3 - 2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + 1 \right) + \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \Delta -
\end{aligned}$$

$$-L_3 D_3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 0.$$

Since the parameter b enters as a multiplier into D_1, D_2, D_3 and the denominators of the expressions for the coefficients L_1, L_2, L_3 , then in combinations

$$L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3, \quad L_1 D_1, \quad L_2 D_2, \quad L_3 D_3$$

this parameter is reduced. With this in mind, we have the identities

$$L_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ -2k + \frac{1}{2L}(2\lambda_2 - 1) \right\},$$

$$L_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \left\{ -2k + \frac{1}{2L}(2\lambda_1 - 1) \right\},$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \frac{1}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} \times \\
& \times \left\{ -2k + \frac{1}{2L}(1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2) \right\},
\end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{r}{2}(2\lambda_1 - 1), \quad D_2 = \frac{r}{2}(2\lambda_2 - 1), \quad D_3 = \frac{r}{2},$$

where

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4k} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4k} \right),$$

$$k \in \left(1, \frac{1}{4} \right), \quad L = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad (a^2 + b^2) = k < \frac{1}{4}.$$

Also, we should take into account the identities

$$2\lambda_1 - 1 = -\sqrt{1 - 4k}, \quad 2\lambda_2 - 1 = +\sqrt{1 - 4k},$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = -\sqrt{1 - 4k}, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = +\sqrt{1 - 4k},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 - 1 = -\lambda_2, \quad \lambda_2 - 1 = -\lambda_1,$$

$$1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2 = 4k - 1, \quad \lambda_1\lambda_2 = k,$$

then we get simpler expressions

$$L_1 = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - 4k})\sqrt{1 - 4k}} \left\{ -2k + \frac{1}{2L}\sqrt{1 - 4k} \right\},$$

$$L_2 = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - 4k})\sqrt{1 - 4k}} \left\{ 2k + \frac{1}{2L}\sqrt{1 - 4k} \right\},$$

$$L_3 = \frac{1}{k} \left\{ -2k + \frac{1}{2L}(4k - 1) \right\},$$

$$D_1 = -\frac{r}{2}\sqrt{1 - 4k}, \quad D_2 = +\frac{r}{2}\sqrt{1 - 4k}, \quad D_3 = \frac{r}{2},$$

$$L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}}, \quad 0 < b < \frac{1}{2}.$$

In this way, we arrive at the following cubic equation for Δ :

$$\Delta^3 + A\Delta^2 + B\Delta + C = 0,$$

where the coefficients are (take into account the properties of the roots λ_1, λ_2)

$$A = 2 - \frac{1}{k} + L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3, \quad C = L_3 D_3,$$

$$B = -L_1 D_1 \frac{1 - \sqrt{1 - 4k}}{1 + \sqrt{1 - 4k}} - L_2 D_2 \frac{1 + \sqrt{1 - 4k}}{1 - \sqrt{1 - 4k}} + L_3 D_3 \left(2 - \frac{1}{k}\right) + 1.$$

Using identities

$$L_1 D_1 = \frac{2k - l\sqrt{1 - 4k}}{1 + \sqrt{1 - 4k}} r,$$

$$L_2 D_2 = \frac{2k + l\sqrt{1 - 4k}}{1 - \sqrt{1 - 4k}} r,$$

$$L_3 D_3 = -\left(1 + l\frac{1 - 4k}{2k}\right) r,$$

we transform the cubic equation to a simpler form

$$\Delta^3 + \frac{2k - 1}{k} \Delta^2 + \left[1 + \left(1 - l\frac{1 - 4k}{2k}\right) r\right] \Delta + \left(1 + l\frac{1 - 4k}{2k}\right) r = 0.$$

Allowing for the expression for the parameter l :

$$l = \frac{1}{2L} = \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{6} + b)},$$

we obtain

$$\Delta^3 + \frac{2k - 1}{k} \Delta^2 + \left[1 + \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{6} + b)} \frac{1 - 4k}{2k}\right) r\right] \Delta + \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{6} + b)} \frac{1 - 4k}{2k}\right) r = 0, \quad (12)$$

where

$$0 < k < \frac{1}{4}, \quad 0 < b < 2.$$

For definiteness, we set $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2$. The parameter r was introduced by the relation $4B = 6rM^2$ from physical considerations, we will assume that the dimensionless parameter r is small. Below we will follow several situations $r = 10^{-5}, r = 10^{-3}, r = 1$. The last value $|r| = 1$ corresponds to a very strong magnetic field. Numerical study showed that dependence of the roots Δ_i upon parameter $b \in (0, 2)$ is very insignificant. By this reason below we take the value $b = 0$. Let us construct tables of values for the roots $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ equations (12) (see tables 3–5).

The values of the roots $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ of equation (12) for $b = 0, r = 10^{-5}$

Table 3

Таблица 3

Значения корней $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ уравнения (12) для $b = 0, r = 10^{-5}$

k	0.24	0.22	0.208	0.204	0.20	0.16	0.10	0.06	0.02	0.01
Δ_1	0.667	0.485	0.419	0.400	0.382	0.250	0.127	0.069	0.021	0.010
Δ_2	1.500	2.060	2.389	2.502	2.618	3.999	7.873	14.598	47.979	97.990
Δ_3	-0.00001	-0.00001	-0.00001	-0.00001	-0.00001	-0.00002	-0.00002	-0.00004	-0.00012	-0.00024

The values of the roots $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ of equation (12) for $b = 0, r = 10^{-3}$

Table 4

Таблица 4

Значения корней $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ уравнения (12) для $b = 0, r = 10^{-3}$

k	0.24	0.22	0.208	0.204	0.20	0.16	0.12	0.08	0.04	0.01
Δ_1	0.670	0.487	0.420	0.401	0.384	0.252	0.164	0.099	0.049	0.021
Δ_2	1.489	2.059	2.388	2.502	2.617	3.999	6.171	10.404	22.957	97.990
Δ_3	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.003	-0.005	-0.012

Finally, with an even greater increase in the parameter r , the roots become complex-valued

The values of the roots $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ of equation (12) for $b = 0, r = 1$

Table 5

Таблица 5

Значения корней $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ уравнения (12) для $b = 0, r = 1$

k	0.24	0.209	0.206	0.203	0.18	0.12	0.06	0.01
Δ_1	1.265+1.129i	1.588+0.726i	1.625+0.656i	1.662+0.574i	1.173	0.695	0.503	0.406
Δ_2	-0.362	-0.392	-0.395	-0.398	2.804	6.128	14.727	98.221
Δ_3	1.265-1.129i	1.588-0.726i	1.625-0.656i	1.662-0.574i	-0.422	-0.489	-0.653	-0.627

This means that at such magnetic field, the model becomes non-interpretable.

Conclusions

In the present paper, the model of a fermion with three mass parameters is studied in presence of the external

uniform magnetic field. After diagonalizing transformation, three separate equations are obtained effectively for particles with different anomalous magnetic moments. Their exact solutions and generalized energy spectra are found. After diagonalizing the mixing matrix, we reduce the problem for three separated Dirac-like equations for particles with different anomalous magnetic moment. It is shown that for

a very strong magnetic field, the model becomes non-interpretable, because the effective anomalous moments turns out to be complex-valued.

References

- Gelfand, I.M. Obshchiye relyativistski invariantnyye uravneniya i beskonechnomernyye predstavleniya gruppy Lorentsa [General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group] / I.M. Gelfand, A.M. Yaglom // Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. – 1948. – Vol. 18. № 8. P. 703–733.
- Gelfand, I.M. Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications / I.M. Gelfand, R.A. Minlos, Z.Ya. Shapiro. – New York: Pergamon Press, 1963. – 366 p.
- Red'kov, V.M. Polya chastic v rimanovom prostranstve i gruppа Lorentsa [Fields in Riemannian space and the Lorentz group] / V.M. Red'kov. – Minsk: Belorusskaya nauka, 2009. – 486 p.
- Pletyukhov, V.A. Relyativistskie volnovyye uravneniya i vnutrennie stepeni svobody [Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom] / V.A. Pletyukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk: Belorusskaya nauka, 2015. – 327 p.
- Kisel, V.V. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V. Balan, O.V. Veko, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 418, 414 pp.
- Ovsiyuk, E.M. Kvantovaya mekhanika chastic so spinom v magnitnom pole [Quantum mechanics of the particles with spin in magnetic field] / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V.M. Red'kov. – Minsk: Belorusskaya nauka, 2017. – 517 p.
- Ovsiyuk, E.M. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, Ya.A. Voynova, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.
- Ovsiyuk, E.M. Kvantovaya mekhanika elektrona v magnitnom pole, uchet anomal'nogo magnitnogo momenta [Quantum mechanics of the electron in the magnetic field, taking into account of the anomalous magnetic moment] / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Doklady NAN Belarusi, 2016. – Vol. 60, № 4. – P. 67–73.
- Kisel, V.V. Spin 1/2 particle with two mass states, interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20. – P. 404–423.
- Kisel, V.V. Fermion s vnutrennim spektrom mass vo vneshnih polyah [Fermion with internal mass spectrum in external fields] / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Bulletin of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. – 2018. – № 33. – P. 81–88. (Proceedings of the Int. Sem. "Group Theoretical Methods for the Study of Physical Systems", 2017, September 21–23, Syktyvkar).
- Kisel, V.V. Fermion s tremya massovymi parametrami: vzaimodejstvie s vneshnimi polyami [Fermion with three mass parameters: interaction with external fields] / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, O.V. Veko [et al.] // Doklady NAN Belarusi. – 2018. – Vol. 62, № 6. – P. 661–667.
- Pletyukhov, V.A. Fermion s tremya massovymi parametrami, obshchaya teoriya, vzaimodejstvie s vneshnimi polyami [Fermion with three mass parameters, general theory, interaction with external fields] / V.A. Pletyukhov, V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, O.V. Veko [et al.] // Uchenye zapiski Brestskogo gosudarstvennogo universiteta imeni A.S. Pushkina. Estestvennye nauki [Scientific notes of Brest State University named after A.S. Pushkin. Natural Sciences]. – 2018. – Vol. 14. – P. 16–50.
- Ovsiyuk, E.M. Spin 1/2 particle with two masses in external magnetic field / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov, V.V. Kisel [et al.] // J. Mech. Cont. and Math. Sci. Special Issue. – 2019. – Vol. 1. – P. 651–660.
- Ovsiyuk, E.M. On modeling neutrinos oscillations by geometry methods in the frames of the theory for a fermion with three mass parameters / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky [et al.] // J. Phys. Conf. Ser. – 2019. – Vol. 1416. – Paper 012040.
- Kisel, V.V. Fermion with three mass parameters / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov // Chapter in: Future of Relativity, Gravitation, Cosmology. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2023. – P. 262–289.

Литература

- Гельфанд, И.М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
- Gelfand, I.M. Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications / I.M. Gelfand, R.A. Minlos, Z.Ya. Shapiro. – New York: Pergamon Press, 1963. – 366 p.
- Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
- Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В.А. Плетюхов, В.М. Редьков, В.И. Стражев. – Минск: Белорусская наука, 2015. – 327 с.
- Kisel, V.V. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V. Balan, O.V. Veko, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 418, 414 pp.
- Овсиюк, Е.М. Квантовая механика частиц со спином в магнитном поле / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, Я.А. Войнова, В.В. Кисель, В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2017. – 517 с.
- Ovsiyuk, E.M. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions /

- Е.М. Ovsiyuk, V.V. Kisel, Ya.A. Voynova, O.V. Veko, V.M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.
8. Овсиюк, Е.М. Квантовая механика электрона в магнитном поле, учет аномального магнитного момента / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, Я.А. Войнова, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси, 2016. – Т. 60, № 4. – С. 67–73.
 9. Kisel, V.V. Spin 1/2 particle with two mass states, interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2017. – Vol. 20. – P. 404–423.
 10. Кисель, В.В. Фермион с внутренним спектром масс во внешних полях / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Вестник Коми научного центра УрО РАН. – 2018. – Вып. 33. – С. 81–88. (Труды Межд. сем. «Теоретико-групповые методы исследования физических систем», 21–23 сентября 2017 г., г. Сыктывкар).
 11. Кисель, В.В. Фермион с тремя массовыми параметрами: взаимодействие с внешними полями / В.В. Кисель, В.А. Плетюхов, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, О.В. Веко [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 661–667.
 12. Плетюхов, В.А. Фермион с тремя массовыми параметрами, общая теория, взаимодействие с внешними полями / В.А. Плетюхов, В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, О.В. Веко [и др.] // Ученые записки Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина. Естественные науки. – 2018. – Вып. 14, ч. 2. – С. 16–50.
 13. Ovsiyuk, E.M. Spin 1/2 particle with two masses in external magnetic field / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov, V.V. Kisel. [et al.] // *J. Mech. Cont. and Math. Sci. Special Issue*. – 2019. – Vol. 1. – P. 651–660.
 14. Ovsiyuk, E.M. On modeling neutrinos oscillations by geometry methods in the frames of the theory for a fermion with three mass parameters / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky [et al.] // *J. Phys. Conf. Ser.* – 2019. – Vol. 1416. – Paper 012040.
 15. Kisel, V.V. Fermion with Three Mass Parameters / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov // Chapter in: *Future of Relativity, Gravitation, Cosmology*. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2023. – P. 262–289.

For citation:

Ovsiyuk, E.M. Fermion with three mass parameters in the uniform magnetic field / E.M. Ovsiyuk, A.P. Safronov, A.D. Koralkov, Ya.A. Voynova // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. – 2023. – № 4 (62). – P. 77–87.

Для цитирования:

Овсиюк, Е.М. Фермион с тремя массовыми параметрами во внешнем магнитном поле / Е.М. Овсиюк, А.П. Сафронов, А.Д. Коральков, Я.А. Войнова // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 77–87.

Дата поступления статьи: 05.05.2023

Received: 05.05.2023

Dynamical theory of X-ray diffraction in crystals based on two-dimensional recurrent relations

S.I. Kolosov, V.I. Punegov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

kolos.20vek@gmail.com
vpunegov@ipm.komisc.ru

Abstract

Using two-dimensional recurrence relations, a description of dynamical X-ray diffraction in crystals is presented. It is shown that this approach makes it possible to calculate X-ray fields inside the crystal and reciprocal space maps.

Keywords:

dynamical X-ray diffraction, rocking curve, reciprocal space map

Introduction

To describe diffraction in lateral crystals of a rectangular cross section, two-dimensional recurrent relations were obtained [1, 2], which differ from the one-dimensional Darwin algebraic equations. On the other hand, diffraction in perfect crystals of a rectangular cross section can also be considered using the two-dimensional Takagi-Taupin equations [3]. On the example of a cylindrical crystal, it was shown that two-dimensional recurrence relations can be used to calculate reciprocal space maps (RSMs) for crystals of arbitrary shape [4]. It should be noted that numerical integration based on the Takagi-Taupin equations is not always stable, while calculations based on two-dimensional recurrence relations are always stable. In this paper, we show that the diffraction of spatially restricted X-ray beams in periodic structures can be described using two-dimensional recurrence relations. Using these recurrence relations, it is possible to calculate the x-ray fields inside the crystal and RSMs.

Recurrent relations

Two-dimensional recurrent relations can be written in the following form

$$\begin{aligned} T_n^m &= a T_{n-1}^{m-1} + b_1 S_{n-1}^{m-1}, \\ S_n^m &= a S_{n+1}^{m-1} + b_2 T_{n+1}^{m-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

Динамическая теория дифракции рентгеновских лучей на основе двумерных рекуррентных соотношений

С.И. Колосов, В.И. Пунегов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

kolos.20vek@gmail.com
vpunegov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Представлено описание динамической дифракции рентгеновских лучей в кристаллах с использованием двумерных рекуррентных соотношений. Показано, что такой подход позволяет рассчитывать поля рентгеновских лучей внутри кристалла.

Ключевые слова:

рентгеновские лучи, динамическая дифракция, обратное пространство, карта распределения интенсивности

where T_n^m and S_n^m are the amplitudes of the transmitted and diffracted wave, $a = (1 - i q_0) \exp\left(i \frac{2\pi d}{\lambda \sin \theta_B}\right)$, $b_1 = -i \bar{q} \exp\left(i \frac{2\pi d}{\lambda \sin \theta_B}\right)$, $b_2 = -i q \exp\left(i \frac{2\pi d}{\lambda \sin \theta_B}\right)$, $q_0 = -\frac{\pi d}{\lambda \sin \theta_B} \chi_0$, $\bar{q} = -\frac{\pi d}{\lambda \sin \theta_B} \chi_{-g}$, $q = -\frac{\pi d}{\lambda \sin \theta_B} \chi_g$, χ_0 , χ_h and χ_{-h} — are the Fourier components of the X-ray polarizability, $d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta_B}$ — is the interplanar distance, λ is the X-ray wave length, θ_B is the Bragg angle for reflective lattice planes. The distance between nodes along the x axis is $\Delta x = d / \operatorname{tg} \theta_B$.

Figure 1a shows the directions of the transmitted and diffracted X-ray beam, taking into account the dynamical interaction of X-ray waves. The horizontal lines represent the crystal planes, which are numbered from top to bottom. Arrows directed down correspond to transmitted waves, arrows directed up refer to diffracted waves.

According to Figure 1a, the magnitude of the amplitude T_n^m of the transmitted beam at the node $(m; n)$ consists of the contributions of the transmitted T_{n-1}^{m-1} and reflected downward S_{n-1}^{m-1} waves at the node $(m - 1; n - 1)$. This physical process is described by the first equation of recurrent relations (1). The diffraction wave S_n^m at the node $(m; n)$ is formed as a result of the upward passage of the wave S_{n+1}^{m-1} and the

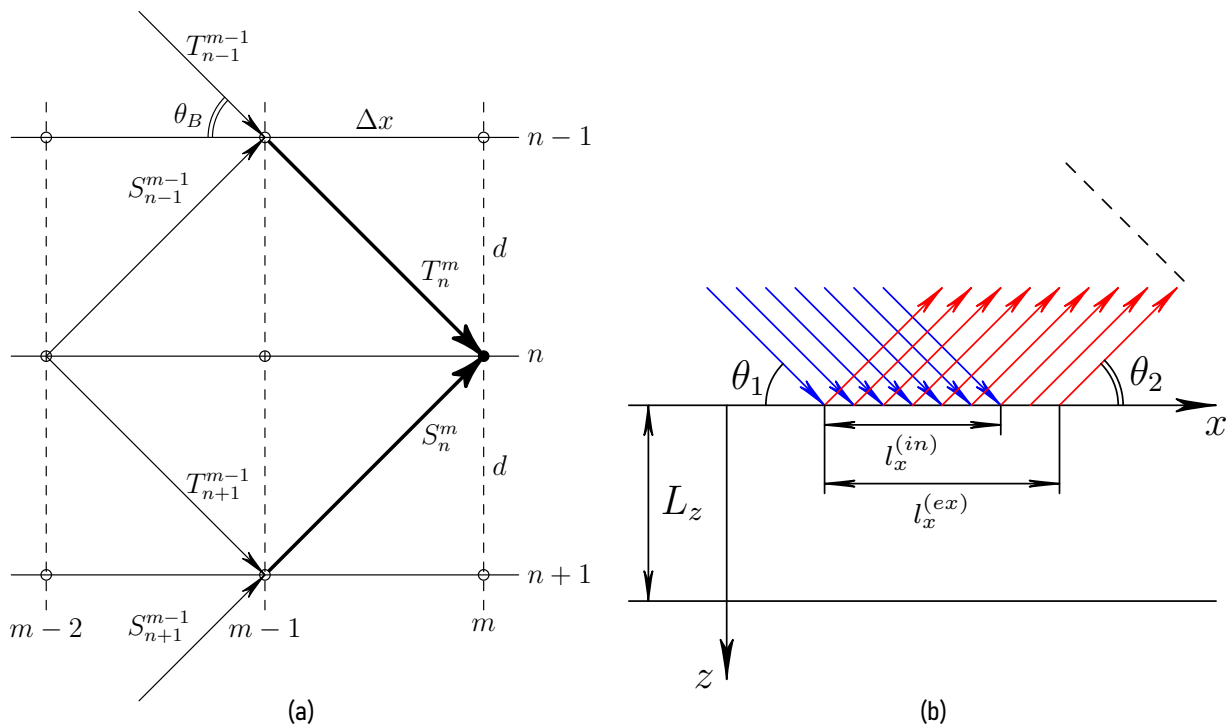


Figure 1. (a) Scheme of two-dimensional X-ray diffraction on discrete crystal lattice planes. The vertical coordinate (see (b)) is defined as $z = nd$, where n is the number of the crystal plane. The horizontal coordinate is $x = m\Delta x$, where Δx is the lateral distance between the nodes, m is the node number. (b) Geometry of X-ray diffraction. The incident restricted beam illuminates the surface of the crystal $l_x^{(in)}$. The exited beam size is $l_x^{(ex)}$. Рисунок 1. (a) Схема двумерной дифракции рентгеновских лучей на кристаллических плоскостях. Вертикальная координата определена как $z = nd$, где n – номер кристаллической плоскости. Горизонтальная координата: $x = m\Delta x$, где Δx – расстояние между узлами в латеральном направлении, m – номер узла. (b) Геометрия дифракции рентгеновских лучей. Ширина падающего на кристалл пучка $l_x^{(in)}$. Ширина выходящего пучка $l_x^{(ex)}$.

diffraction of the wave T_{n+1}^{m-1} at the node $(m-1; n+1)$. The exponential factor $\exp\left(i\frac{2\pi d}{\lambda \sin \theta_B}\right)$, which is included in the coefficients of the recurrence relations, takes into account the phase variation during the passage of X-ray waves from one crystal plane to the neighboring plane.

To solve the diffraction problem, recurrent relations (1) must be supplemented with boundary conditions (Figure 1b). Let the X-ray beam fall on the crystal surface at an angle θ_1 , which, in the general case, may differ from the Bragg angle θ_B . We consider the case when an incident X-ray wave illuminates the crystal surface $l_x^{(in)}$, then the boundary condition has the form

$$\begin{aligned} T_0^m &= \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_1 \cdot m\Delta x\right), \quad m\Delta x \leq l_x^{(in)}, \\ T_0^m &= 0, \quad m\Delta x > l_x^{(in)}. \end{aligned} \quad (2)$$

It follows from relations (2) that the modulus of the amplitude of the incident X-ray beam on the crystal surface is equal to unity. The exponential factor takes into account the change in the phase of the incident wave amplitude along the x axis (Figure 1b).

The calculation of the amplitudes of X-ray fields is performed on the basis of recurrence relations (1) taking into account the boundary conditions (2) for all nodes of a rectangular network $(m; n)$, where $0 \leq m \leq M_x = l_x^{(in)}/\Delta x$ and $0 \leq n \leq N_z = L_z/d$, L_z is the thickness of the crystal.

In a triple-axis diffraction scheme, the exited beam is reg-

istered, for example, at a different angle θ_2 . In this case, it is necessary to take into account additional phase variations $\varphi_m = -(2\pi/\lambda)m\Delta x \cos \theta_2$ for the reflected X-ray wave at the front of the exited beam, which is shown by the dotted line in Figure 1b.

The intensity of the diffracted X-ray wave is found from the relation:

$$I_h(q_x, q_z) = \left| \sum_{m=0}^{M_x} S_0^m \exp(i\varphi_m) \right|^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{where } q_x &= \frac{2\pi \sin \theta_B}{\lambda} (\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2), \quad q_x = \\ &= -\frac{2\pi \cos \theta_B}{\lambda} (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2), \quad \Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_B, \quad \Delta\theta_2 = \\ &= \theta_2 - \theta_B. \end{aligned}$$

Calculated results

Numerical calculations of X-ray diffraction in a perfect silicon crystal are performed for symmetric (333) reflection of σ -polarized X-ray $\text{CuK}_{\alpha 1}$ radiation. The calculation results are presented taking into account the shift of the coordinate system by the angular distance associated with the X-ray refraction, which is proportional to the real part of the coefficient a_0 in the diffraction equations (1). The length of the primary Bragg extinction for (333) reflection from silicon is $l_{ext} = \lambda |\sin \theta_B| / (C\pi |\chi_h|) = 8.03 \mu\text{m}$. The Bragg angle for the selected reflection is 47.476 arc. deg. The interplanar distance of the reflecting planes is $d = 0.1045 \text{ nm}$.

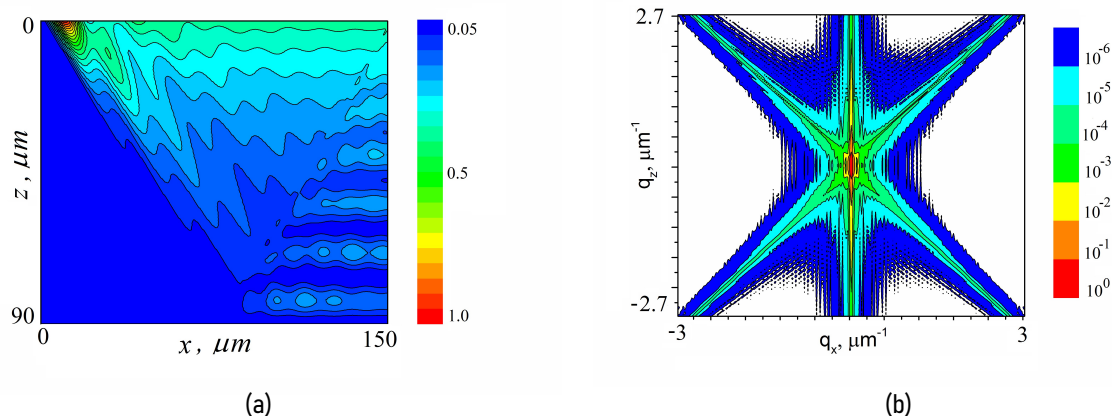


Figure 2. (a) The calculated distribution of the diffraction intensity inside the crystal at a deviation from the Bragg angle by 2 arc. sec. (b) RSM on a logarithmic scale, calculated on the basis of two-dimensional recurrence relations. The width of the incident and diffraction beams is $110 \mu\text{m}$.

Рисунок 2. (а) Распределение интенсивности дифрагированной волны внутри кристалла при отклонении от угла Брегга на 2 угловые сек. (б) Карта интенсивности в логарифмическом масштабе, рассчитанная методом рекуррентных соотношений. Ширина падающего и отраженного пучков $110 \mu\text{m}$.

Using recurrent relations (1), the field of the diffracted wave inside the crystal was calculated for an arbitrary angle of incidence, which differs slightly from the Bragg angle. Figure 2a shows the scattering intensity distribution inside the crystal when the incident beam deviates from the Bragg angle by 2 arc.sec.

Solution (3) makes it possible to calculate RSMs for various sizes of X-ray beams. Figure 2b shows the calculated RSM on a logarithmic scale, which completely coincides with calculations based on differential diffraction equations. The width of the incident beam is $110 \mu\text{m}$. The effective depth of penetration of X-ray wave into a crystal is $82 \mu\text{m}$.

The study was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 23-22-00062.

Для цитирования:

Колосов, С.И. Динамическая теория дифракции рентгеновских лучей на основе двумерных рекуррентных соотношений / С.И. Колосов, В.И. Пунегов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 88–90.

For citation:

Kolosov, S.I. Dynamical theory of X-ray diffraction in crystals based on two-dimensional recurrent relations / S.I. Kolosov, V.I. Punegov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 88–90.

Дата поступления рукописи: 01.06.2023

Received: 01.06.2023

References

1. Punegov, V.I. Darwin's approach to X-ray diffraction on lateral crystalline structures / V.I. Punegov, S.I. Kolosov, K.M. Pavlov // Acta Cryst. – 2014. – Vol. A70. – P. 64–71.
2. Punegov, V.I. Bragg–Laue X-ray dynamical diffraction on perfect and deformed lateral crystalline structures / V.I. Punegov, S.I. Kolosov, K.M. Pavlov // J. Appl. Cryst. – 2016. – Vol. 49. – P. 1190–1202.
3. Authier, A. Dynamical theory of X-ray diffraction / A. Authier. – New York: Oxford University Press, 2001.
4. Punegov, V.I. Simulation of X-ray diffraction in a cylindrical crystal / V.I. Punegov, S.I. Kolosov // J. Appl. Cryst. – 2020. – Vol. 53. – P. 1203–1211.

Брэгговские отражения многослойной дифракционной решетки

А.В. Карпов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
karpov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Исследовано обратное пространство многослойной дифракционной решетки в некомпланарной геометрии дифракции. Выписаны прямые и обратные соотношения между углами волновых векторов и координатами обратного пространства. Записаны углы брэгговского и дифракционного отражений. На примере продемонстрированы конусы дифракции и карты обратного пространства.

Ключевые слова:

многослойная дифракционная решетка, условие Вульфа-Брэгга, конус дифракции, карты обратного пространства

Введение

Известные и простые условия дифракции Вульфа-Брэгга рентгеновских лучей в кристаллах основываются на принципе конструктивной интерференции и законе отражения. Похожие условия брэгговской дифракции можно записать для многослойных дифракционных решеток (далее — МДР). Их можно найти в ряде работ, например в [1, 2]. Однако они посвящены компланарной дифракции. Настоящая статья призвана восполнить этот пробел для некомпланарной дифракции рентгеновских лучей в МДР. На рис. 1 представлена схема некомпланарной дифракции. Введем систему координат: пусть оси x и y направлены вдоль поверхности МДР, ось z — уходит вглубь. МДР может иметь произвольный азимутальный поворот вокруг оси z с углом φ . Период дифракционной решетки обозначим как d_φ , период многослойного рентгеновского зеркала (МРЗ) — как d_z . Считаем, что плоская волна с длиной волны λ и волновым вектором \vec{k}_T падает на МДР под углом скольжения ϑ_T , а отраженная волна распространяется с волновым вектором \vec{k}_R , направление которого можем обозначить полярным ϑ_R и азимутальным φ_R углами:

$$\begin{cases} \vec{k}_T = k \cos \vartheta_T \vec{e}_x + k \sin \vartheta_T \vec{e}_z, \\ \vec{k}_R = k \cos \vartheta_R \cos \varphi_R \vec{e}_x + k \cos \vartheta_R \sin \varphi_R \vec{e}_y - k \sin \vartheta_R \vec{e}_z. \end{cases} \quad (1)$$

Модуль волновых векторов равен волновому числу в вакууме $k = 2\pi/\lambda$.

Bragg's reflections of a multilayer grating

A.V. Karpov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar
karpov@ipm.komisc.ru

Abstract

The reciprocal space of multilayer grating in the non-coplanar geometry of diffraction is investigated. Direct and inverse relations between the angles of wave vectors and coordinates of reciprocal space are written out. The Bragg's and diffraction reflection angles are written. By example, cones of diffraction and reciprocal space mapping are demonstrated.

Keywords:

multilayer grating, Bragg's law, diffraction cone, reciprocal space mapping

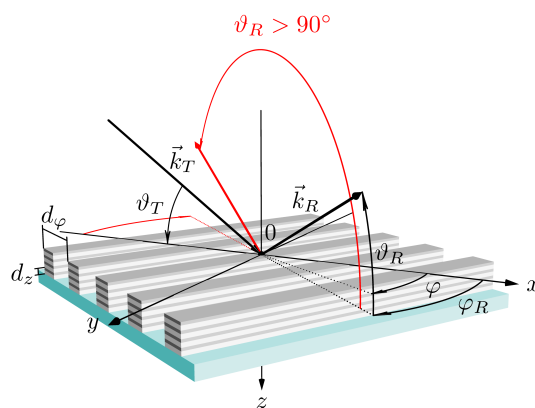


Рисунок 1. Схема некомпланарной дифракции рентгеновской волны на МДР.

Figure 1. Schematic representation of non-coplanar X-ray diffraction on multilayer grating.

1. Обратное пространство

Рентгенодифракционный анализ кристаллов принято проводить в обратном пространстве. Исследование обратного пространства кристаллов некомпланарной дифракции в Брэгг- и Лауэ-геометрии можно найти в работе [3]. Следуя этой традиции, рассмотрим вектор дифракции \vec{Q} как радиус-вектор обратного пространства МДР:

$$\vec{Q} = \vec{k}_R - \vec{k}_T. \quad (2)$$

Запишем определение (2) для каждой проекции $Q_{x|y|z}$:

$$\begin{cases} Q_x = k \cos \vartheta_R \cos \varphi_R - k \cos \vartheta_T, \\ Q_y = k \cos \vartheta_R \sin \varphi_R, \\ Q_z = -k \sin \vartheta_T - k \sin \vartheta_R. \end{cases} \quad (3)$$

Равенства (3) будем называть *прямыми соотношениями*. Добавим к ним *определенное условие*:

$$\vartheta_R = 90^\circ \Rightarrow \varphi_R = 0^\circ. \quad (4)$$

Углы в уравнениях (3) имеют естественные ограничения:

$$\begin{cases} 0^\circ < \vartheta_T < 180^\circ, \\ 0^\circ < \vartheta_R < 180^\circ, \\ -90^\circ < \varphi_R \leq 90^\circ. \end{cases} \quad (5)$$

Следовательно, есть ограничения для \vec{Q} :

$$\begin{cases} Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 \leq 2k\sqrt{Q_x^2 + Q_z^2}, \\ (Q_x \pm k)^2 + Q_y^2 + Q_z^2 \geq k^2, \\ Q_z \leq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Все множество векторов \vec{Q} , удовлетворяющих условию (6), назовем *областью определения* \mathbb{Q} уравнений (3). Область \mathbb{Q} показана на рис. 2. Она имеет форму половины тора, на торцах которого вырезаны две полусферы радиусом k . Если вектор \vec{Q} принадлежит \mathbb{Q} , то возможны *обратные соотношения*.

$$\begin{cases} \cos \vartheta_T = -\frac{Q_x}{2k}C - s\frac{Q_z}{2k}\sqrt{\frac{(2k)^2}{Q_x^2 + Q_z^2} - C^2}, \\ \cos \vartheta_R = S\sqrt{\left(\cos \vartheta_T + \frac{Q_x}{k}\right)^2 + \left(\frac{Q_y}{k}\right)^2}, \\ \sin \varphi_R = \frac{Q_y}{k \cos \vartheta_R}, \end{cases} \quad (7)$$

здесь $S = \text{sign}(\cos \vartheta_T + Q_x/k)$, $C = 1 + \frac{Q_y^2}{Q_x^2 + Q_z^2}$.

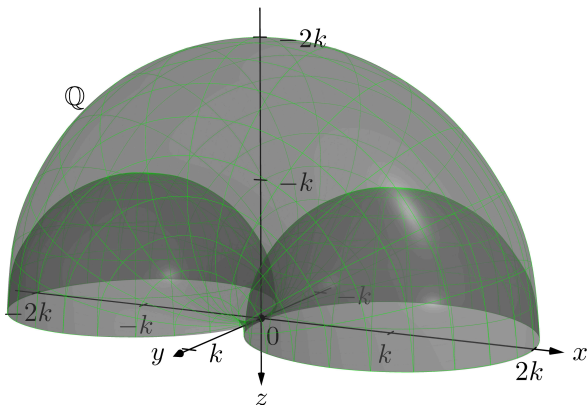


Рисунок 2. Область определения \mathbb{Q} .
Figure 2. The definition region \mathbb{Q} .

Уравнения (3) имеют два решения, и знак $s = \pm 1$ различает их. На рис. 3 синими (нижними) векторами показано решение с $s = +1$, красными (верхними) – с $s = -1$.

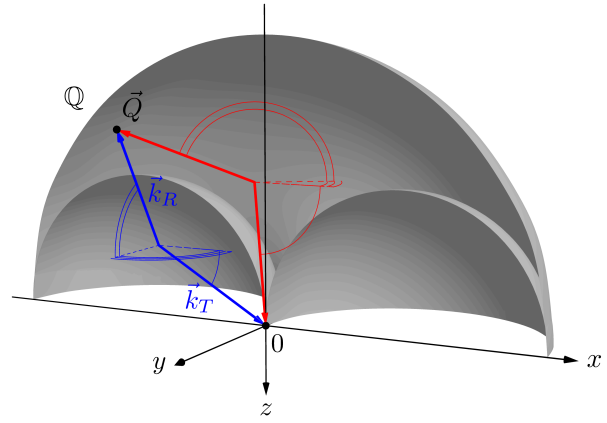


Рисунок 3. Два решения для \vec{Q} . Одинарной линией показаны углы ϑ_T , двойной – ϑ_R , тройной – φ_R .
Figure 3. The two solutions for \vec{Q} . Single lines show angles ϑ_T , double lines – ϑ_R , triple lines – φ_R .

2. Брэгговские отражения

Периодичности кристаллической решетки в прямом пространстве соответствует сетка узлов, составленная из векторов обратной решетки \vec{h}_i , в обратном пространстве. МДР имеет латеральную и вертикальную периодичность. Латеральной периодичности МДР сопоставим вектор

$$\vec{h}_\varphi = h_\varphi \cos \varphi \vec{e}_x + h_\varphi \sin \varphi \vec{e}_y, \quad (8)$$

вертикальной –

$$\vec{h}_z = -h_z \vec{e}_z, \quad (9)$$

а сетке узлов обратной решетки МДР –

$$\vec{h}_{m,n} = m \vec{h}_\varphi + n \vec{h}_z, \quad (10)$$

где m и n – целые числа, называемые *порядками дифракции*. Модули векторов равны $h_{\varphi|z} = 2\pi/d_{\varphi|z}$.

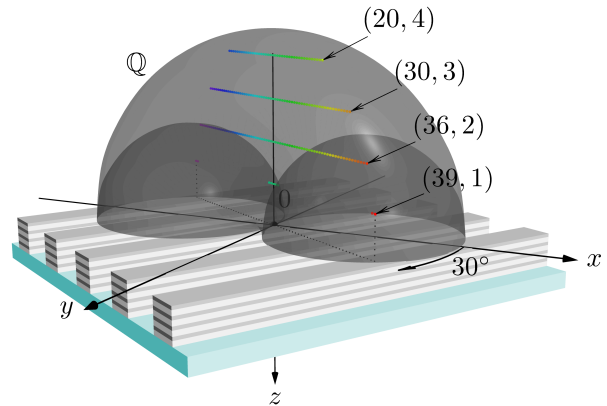


Рисунок 4. Пример обратной решетки МДР.
Figure 4. The example of a reciprocal lattice of multilayer grating.

На рис. 4 показан пример сетки из узлов $\vec{h}_{m,n}$. Цифрами указаны дифракционные порядки (m, n) . Цветом выделены точки с одинаковыми m . Все точки лежат в одной плоскости. В моделировании используем следующие значения параметров (безразмерные):

$$d_\varphi = 1, d_z = d_\varphi/10, \lambda = \sqrt{4/2125}, \varphi = 30^\circ. \quad (11)$$

На примере видно, как полусферы разрывают цепочку узлов с $n = 1$. В связи с этим можно говорить о разрешенных (реализуемых) и запрещенных (нереализуемых) дифракционных порядках.

Запишем условие Вульфа-Брэгга в векторном виде для МДР:

$$\vec{Q} = \vec{h}_{m,n}. \quad (12)$$

Из (7) и (12) следуют решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_{m,n}^{(T)} = -\frac{m\lambda C \cos \varphi}{2d_\varphi} + sn \sqrt{\frac{d_\varphi^2}{(md_z \cos \varphi)^2 + (nd_\varphi)^2} - \left(\frac{\lambda C}{2d_z}\right)^2}, \\ \cos \theta_{m,n}^{(R)} = S \sqrt{\left(\cos \theta_{m,n}^{(T)} + \frac{m\lambda \cos \varphi}{d_\varphi}\right)^2 + \left(\frac{m\lambda \sin \varphi}{d_\varphi}\right)^2}, \\ \sin \phi_{m,n}^{(R)} = \frac{m\lambda \sin \varphi}{d_\varphi \cos \theta_{m,n}^{(R)}}. \end{array} \right. \quad (13)$$

Здесь

$$S = \text{sign} \left(\cos \theta_{m,n}^{(T)} + \frac{m\lambda \cos \varphi}{d_\varphi} \right),$$

$$C = \frac{(md_z)^2 + (nd_\varphi)^2}{(mh_z \cos \varphi)^2 + (nd_\varphi)^2}.$$

Если выполняется условие

$$\vartheta_T = \theta_{m,n}^{(T)}, \quad \vartheta_R = \theta_{m,n}^{(R)}, \quad \varphi_R = \phi_{m,n}^{(R)}, \quad (14)$$

то будем говорить, что наблюдается *брэгговское отражение* в (m, n) -й дифракционный порядок. Заметим: 1) одному и тому же дифракционному порядку соответствуют две конфигурации углов; 2) брэгговское отражение некомпланарной дифракции характеризуется тремя углами Брэгга.

3. Дифракционные отражения и конусы дифракции

Если угол ϑ_T не соответствует точному условию (14), то, чтобы найти направление отраженной волны в (m, n) -й дифракционный порядок, необходимо использовать *закон отражения для МДР*:

$$\left(\vec{Q} - \vec{h}_{m,n} \right) \cdot \vec{e}_{x|y} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) сохраняет только тангенциальные компоненты векторов \vec{k}_T и \vec{k}_R в условии Вульфа-Брэгга. Из (15) следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_m^{(R)} = S \sqrt{\left(\cos \vartheta_T + m \frac{\lambda \cos \varphi}{d_\varphi} \right)^2 + \left(m \frac{\lambda \sin \varphi}{d_\varphi} \right)^2}, \\ \sin \phi_m^{(R)} = m \frac{\lambda \sin \varphi}{d_\varphi \cos \theta_m^{(R)}}, \end{array} \right. \quad (16)$$

здесь $S = \text{sign} \left(\cos \vartheta_T + \frac{m\lambda \cos \varphi}{d_\varphi} \right)$. Равенства (16) определяют углы *дифракционного отражения* $\theta_m^{(R)}$ и $\phi_m^{(R)}$. Эти углы однозначны и не зависят от n . Углы брэгговских отражений (13) являются частным случаем углов дифракционных отражений (16): если $\vartheta_T = \theta_{m,n}^{(T)}$, то $\theta_m^{(R)} = \theta_{m,n}^{(R)}$ и $\phi_m^{(R)} = \phi_{m,n}^{(R)}$.

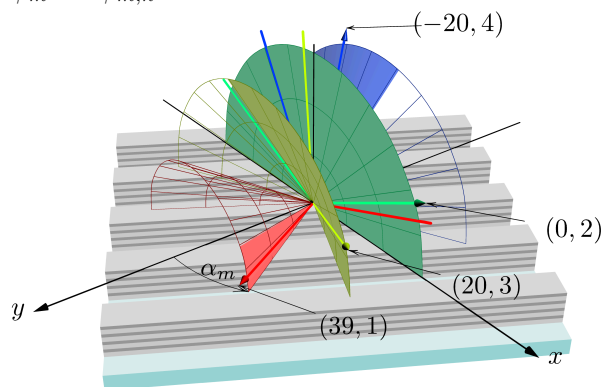


Рисунок 5. Пример конусов дифракции и брэгговских отражений отдельных (m, n) -х дифракционных порядков.

Figure 5. The example of diffraction cones and Bragg's reflections of individual (m, n) -diffraction orders.

В некомпланарной геометрии волновые векторы дифракционных отражений направлены вдоль образующих линий прямых круговых конусов. Пример с параметрами (11) демонстрирует на рис. 5 конусы дифракции. Стрелками указаны волновые вектора $\vec{k}_{m,n}^{(T)}$ и $\vec{k}_{m,n}^{(R)}$ отдельных брэгговских отражений, цифрами — номера дифракционных порядков (m, n) , цветная заливка конусов — допустимые направления дифракционных отражений. Некомпланарную дифракцию называют *конической дифракцией*. Прямой круговой конус для m -дифракционного порядка имеет раствор угла при вершине, равный $2\alpha_m$, где

$$\alpha_m = \arccos \left(m \frac{\lambda \sin \varphi}{d_\varphi} \right). \quad (17)$$

Ось конуса лежит на оси y . Если $\alpha_m < 90^\circ$, то расширение конуса сонаправлено с осью y ; если $\alpha_m > 90^\circ$, то расширение будет в противоположную сторону от оси y ; если $\alpha_m = 90^\circ$, то конус вырождается в диск.

4. Компланарная дифракция

Компланарная дифракция, когда векторы \vec{k}_T , \vec{k}_R и \vec{e}_z лежат в одной плоскости, является частным случаем некомпланарной дифракции с углом $\varphi = 0^\circ$. Следовательно, $Q_y = 0$ и $\varphi_R = 0$, а основные решения значительно упрощаются:

$$\begin{cases} \cos \vartheta_{T|R} = \mp \frac{Q_x}{2k} - s \frac{Q_z}{2k} \sqrt{\frac{(2k)^2}{Q_x^2 + Q_z^2} - 1}, \\ \cos \theta_{m,n}^{(T|R)} = \mp \frac{m\lambda}{2d_\varphi} \\ - sn \sqrt{\frac{d_\varphi^2}{(md_z)^2 + (nd_\varphi)^2} - \left(\frac{\lambda}{2d_z}\right)^2}, \\ \cos \theta_m^{(R)} = \cos \vartheta_T + \frac{m\lambda}{d_\varphi}. \end{cases} \quad (18)$$

Заметим, что если конфигурации углов $(\vartheta_T, \vartheta_R)$ соответствует вектор дифракции \vec{Q} , то нетрудно убедиться, что конфигурации углов $(\vartheta'_T, \vartheta'_R)$, где

$$\vartheta'_T = \pi - \vartheta_R, \quad \vartheta'_R = \pi - \vartheta_T \quad (19)$$

соответствует тот же вектор дифракции \vec{Q} .

5. Карты обратного пространства

Картирование интенсивности рассеяния (RSM – reciprocal space mapping), когда строится двумерная карта контуров равных интенсивностей в логарифмическом масштабе в координатах обратного пространства, является важным методом анализа дифракционных данных. В качестве пары координат выбирают (Q_y, Q_x) , (Q_y, Q_z) или (Q_x, Q_z) . Исследование некомпланарной дифракции поверхностных дифракционных решеток методом малоуглового рассеяния при скользющем падении пучка (GISAXS – grazing-incidence small-angle scattering) с помощью RSM можно найти в ряде работ [4–9]. На примере (11) проанализируем положение дифракционных отражений на RSM, представленных на рис. 6. На картах обратного пространства точкам соответствуют дифракционные отражения при угле $\vartheta_T \approx 12.5^\circ$, указаны числа m . Точечными линиями показано, как меняются положения дифракционных отражений в обратном пространстве при смене угла ϑ_T . Эти линии принято называть *усеченными стержнями дифракционной решетки* (GTR – grating truncation rod). Если дифракционные отражения на картах (Q_y, Q_x) (рис. 6 а) выстроены в линию, то дифракционные отражения на картах (Q_y, Q_z) (рис. 6 б) лежат на дуге, которую можно описать каноническим уравнением эллипса:

$$\frac{(Q_y + k \cos \vartheta_T \sin(2\varphi)/2)^2}{(k \sin \varphi)^2 (1 - \cos^2 \vartheta_T \sin^2 \varphi)} + \frac{(Q_z + k \sin \vartheta_T)^2}{k^2 (1 - \cos^2 \vartheta_T \sin^2 \varphi)} = 1. \quad (20)$$

Из (20) следует, что, зная экспериментальный угол ϑ_T и точки (Q_y, Q_z) на линии дуги дифракционных отражений, можно попытаться восстановить угол азимутального поворота φ .

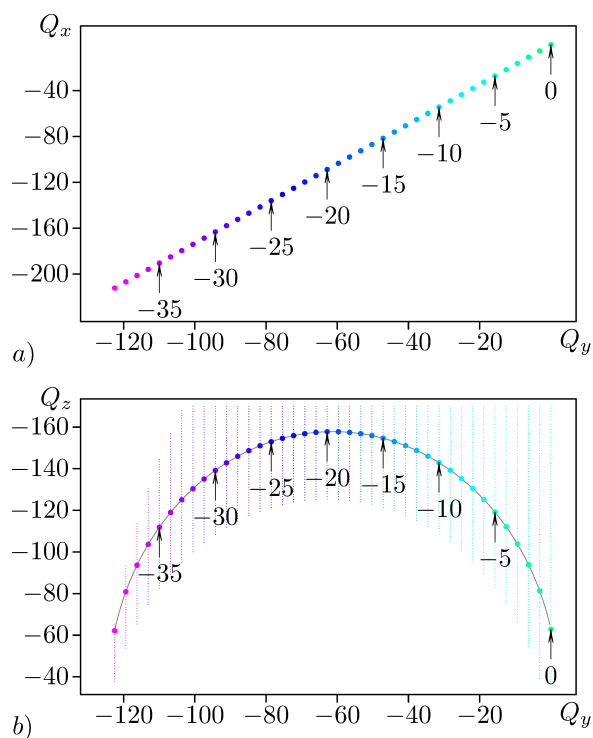


Рисунок 6. Примеры карт обратного пространства. Точками показаны дифракционные отражения для угла $\vartheta_T \approx 12.5^\circ$, точечными линиями – положения дифракционных отражений при смене угла ϑ_T ; цифрами указаны числа m .

Figure 6. The examples of reciprocal space maps. Dots show diffraction reflections for angle $\vartheta_T \approx 12.5^\circ$, dotted lines show positions of diffraction reflections when the angle changes; numbers indicate m .

Заключение

Применяя к МДР аналогичное условие Вульфа-Брэгга, записанное для кристаллов в векторном виде, в работе были получены углы Брэгга МДР в некомпланарной дифракции. Условие брэгговского отражения МДР определяется тремя углами. При углах Брэгга должно наблюдаться сильное дифракционное отражение. Однако закон Брэгга не учитывает эффект преломления рентгеновских лучей в МДР и конечного углового интервала дифракционного отражения. Понятно, что в этом случае необходимы поправки к углам, учитывающие эти эффекты. Здесь на помощь приходит закон отражения (15), который позволяет вычислить углы дифракционного отражения, если угол падающей волны отличается от условия Вульфа-Брэгга. Если МДР имеет азимутальный поворот и ее штрихи не перпендикулярны волновому вектору падающей волны, то дифракционные отражения с числом $m \neq 0$ будут распределены вдоль образующих линий прямых круговых конусов. Соответствующая дифракционному отражению область обратного пространства (6) представляет собой половинку тора, из торцов которого исключены полусферы. Радиусы окружности и оси вращения тора, а также радиус полусфер равны волновому числу падающей волны. Это приводит к тому, что для МДР так же, как и для кристаллов, существуют запрещенные и разрешенные дифракционные порядки. Одному и тому же дифракционному порядку соответствуют две разные конфигурации углов падающей и отраженной волн.

Исследование выполнено при финансовой поддержке
Министерства науки и высшего образования России в рам-
ках соглашения N 075-15-2021-1351.

References

1. Sammar, A. Diffraction of multilayer gratings and zone plates in the X-ray region using the Born approximation / A. Sammar, J.-M. André // J. of the Optical Society of America A-optics Image Science and Vision. – 1993. – Vol. 10. – P. 600–613.
2. Yang, X. Design of a multilayer-based collimated plane-grating monochromator for tender X-ray range / X. Yang, H. Wang, M. Hand, K. Sawhney, B. Kaulich [et al.] // J. of Synchrotron Radiation. – 2017. – Vol. 24, № 1. – P. 168–174.
3. Yefanov, O. Accessible reciprocal-space region for non-coplanar Bragg and Laue geometries / O. Yefanov // J. of Applied Crystallography. – 2008. – Vol. 41. – P. 110–114.
4. Mikulík, P. Coplanar and non-coplanar X-ray reflectivity characterization of lateral W/Si multilayer gratings / P. Mikulík, M. Jergel, T. Baumbach, E. Majková, E. Pinčík [et al.] // J. of Physics D: Applied Physics. – 2001. – Vol. 34. – P. A188–A192.
5. Rueda, D. Grazing-incidence small-angle X-ray scatter-
ing of soft and hard nanofabricated gratings / D. Rueda, I. Martín-Fabiani, M. Soccio, N. Alayo, F. Pérez-Murano [et al.] // J. of Applied Crystallography. – 2012. – V. 45. – P. 1038–1045.
6. Wernecke, J. Direct structural characterisation of line gratings with grazing incidence small-angle X-ray scattering / J. Wernecke, F. Scholze, M. Krumrey // Review of Scientific Instruments. – 2012. – Vol. 83, № 10, – 103906.
7. Suh, H.S. Characterization of the shape and line-edge roughness of polymer gratings with grazing incidence small-angle X-ray scattering and atomic force microscopy / H.S. Suh, X. Chen, P.A. Rincon-Delgadillo, Z. Jiang, J. Strzalka [et al.] // J. of Applied Crystallography. – 2016. – Vol. 49, № 3. – P. 823–834.
8. Pflüger, M. Grazing incidence small angle X-Ray scattering (GISAXS) on small targets using large beams / M. Pflüger, V. Soltwisch, J. Probst, F. Scholze, M. Krumrey // IUCrJ. – 2017. – Vol. 4. – P. 431–438.
9. Soltwisch, V. Reconstructing detailed line profiles of lamellar gratings from GISAXS patterns with a Maxwell solver / V. Soltwisch, A. Fernández Herrero, M. Pflüger, A. Haase, J. Probst [et al.] // J. of Applied Crystallography – 2017. – Vol. 50, № 5. – P. 1524–1532.

Для цитирования:

Карпов, А.В. Брэгговские отражения многослойной дифракционной решетки / А.В. Карпов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 91–95.

For citation:

Karpov, A.V. Breggovskie otrazheniya mnogoslujnoj difrakcionnoj reshetki [Bragg's reflections of a multilayer grating] / A.V. Karpov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2023. – № 4 (62). – P. 91–95.

Дата поступления статьи: 27.06.2023

Received: 27.06.2023

Особенности численного решения уравнений Максвелла методом FDTD в однородной и неоднородной формулировках

П.А. Макаров¹, В.А. Устюгов², В.И. Щеглов³

¹Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,

г. Сыктывкар

²ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»,

г. Сыктывкар

³ИРЭ им. Котельникова РАН,

г. Москва

makarovpa@ipm.komisc.ru

ustyugov@syktsu.ru

vshcheg@cplire.ru

Аннотация

В работе исследованы особенности численного FDTD-решения уравнений Максвелла, сформулированных в виде задач Коши для соответствующих однородных и неоднородных систем уравнений. Показано, что для случая ограниченных во времени источников поля задача Коши для неоднородной системы эквивалентна соответствующей задаче Коши для однородной системы. Определен критерий оценки степени корректности полученного решения. Проанализированы особенности численного решения однородных и неоднородных задач Коши для различных форм начальных конфигураций электромагнитных полей и задающих импульсов. Сформулированы необходимые и достаточные условия корректности получаемых решений.

Ключевые слова:

электродинамика, моделирование, метод FDTD, численный эксперимент

Введение

Ни для кого не является секретом актуальность и востребованность в науке и технических приложениях современных численных методов, позволяющих просто, наглядно и информативно моделировать процессы распространения электромагнитных сигналов в различных условиях. Одним из таких методов является техника FDTD (Finite-Difference Time-Domain) — метод численного решения волновых уравнений, разработанный К. Йи в 1966 г. [1], основанный на аппроксимации производных отношением конечных разностей

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Данная аппроксимация выполняется путем некоторого «огрубления задачи», состоящего в дискретизации

Numerical solution features of Maxwell equations by FDTD method in the homogeneous and non-homogeneous formulations

P.A. Makarov¹, V.A. Ustyugov², V.I. Shcheglov³

¹Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

²Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Pitirim Sorokin Syktyvkar State University”, Syktyvkar

³Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the
Russian Academy of Sciences, Moscow

makarovpa@ipm.komisc.ru

ustyugov@syktsu.ru

vshcheg@cplire.ru

Abstract

In this paper we investigate the features of the numerical FDTD solution of Maxwell's equations formulated as Cauchy problems for the corresponding homogeneous and inhomogeneous systems of equations. It is shown that for the case of time-limited field sources the Cauchy problem for an inhomogeneous system is equivalent to the corresponding Cauchy problem for a homogeneous system. The criterion for evaluating the correctness of the obtained solution is defined. The features of the numerical solution of homogeneous and non-homogeneous Cauchy problems for different forms of initial configurations of electromagnetic fields and setting pulses are analyzed. Necessary and sufficient conditions of correctness of the obtained solutions are formulated.

Keywords:

electrodynamics, simulation, FDTD method, numerical experiment

пространства-времени, при котором дифференциальные уравнения для непрерывных функций заменяются конечно-разностным уравнением для функций дискретных переменных.

Эта схема в настоящее время нашла широкое применение в различных областях науки, техники и самых разнообразных приложениях. Так, известны примеры использования метода для решения биологических и медицинских задач [2–5], а также проблем в области экологии, геологии, минералогии и геологоразведки [6, 7]. Достаточно очевидным, однако несколько не потерявшим своей актуальности, является применение метода FDTD в оптике, фотонике, электронике, связи и телекоммуникациях [8–11]. Помимо непосредственно научной литературы, существует множество учебных изданий [12–14], посвященных методу FDTD.

Такое широкое использование метода, очевидно, обосновывается большим числом его достоинств, немалое значение среди которых имеет простота реализации расчетного алгоритма. Конечно, ценой этой простоты является некоторая ресурсоемкость выполняемых вычислений, определяемая заметными затратами машинного времени и памяти. На первых порах это существенно ограничивало применение метода FDTD, однако в настоящее время, в связи со значительным прогрессом вычислительной техники, эти ограничения потеряли свое значение. Еще одним важным преимуществом рассматриваемого метода является возможность исследования сигналов со сложной структурой спектра в ходе однократного численного эксперимента. В связи с этим в электродинамических задачах FDTD обычно используют для моделирования поведения импульсных сигналов, однако часто рассматривается и квазигармонический режим нагрузки передающей линии [12].

Приведенный выше краткий обзор источников может создать ошибочное впечатление о том, что метод FDTD является очень хорошо разработанным инструментом с досконально изученной научной базой. Последнее не совсем корректно, так как, несмотря на обширную библиографию по методу FDTD, его тщательное обоснование и всестороннее исследование по сей день не исчерпало себя. Во многом это обуславливается тем, что в имеющейся литературе практически не рассматриваются вопросы строгой оценки корректности решений, полученных методом FDTD в различных постановках задачи.

Во всех известных авторам данной статьи работах метод FDTD используется для решения уравнений Максвелла с источниками (т.е. в форме неоднородных дифференциальных уравнений). Вместе с тем имеется возможность применять этот метод и в иной постановке задачи, переформулируя ее в виде задачи Коши для однородной системы уравнений. При этом естественным образом возникают вопросы эквивалентности данных формулировок и оценки корректности решений, полученных в их рамках. Кроме того, численное решение уравнений Максвелла в однородной формулировке требует строгого отбора корректных начальных условий для соответствующей задачи Коши и отсев недопустимых конфигураций электромагнитного поля.

Более того, даже при традиционной схеме решения в неоднородной формулировке часто возникают вопросы строгой оценки корректности применения метода FDTD для сигналов со сложной формой спектра. Этот факт имеет место быть даже для гармонических сигналов, однако в литературе (включая наши предыдущие работы [18, 19] по этой теме) он освещается недостаточно подробно.

Аналізу отмеченных вопросов и посвящена настоящая работа. Основные ее результаты представляют собой две гипотезы, сформулированные в форме утверждений в основном тексте статьи. Строгое математическое доказательство этих утверждений не приводится, однако обосновываются их мотивировка и обоснование справедливости на «физическом уровне строгости». Кроме того, приводится аргументация, подкрепленная численными примерами, подтверждающими сделанные выводы.

1. Основные формулировки

Микроскопические уравнения Максвелла в вакууме, записанные в форме дифференциальных уравнений для трехмерных вектор-функций в системе единиц СИ, имеют следующий вид [15–17]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ext}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} — это напряженности электрического и магнитного полей, ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, а плотность заряда ρ_{ext} и плотность тока \mathbf{J}_{ext} играют роль сторонних источников электромагнитного поля.

Будем решать задачу в отсутствии сторонних зарядов

$$\rho_{\text{ext}} = 0. \quad (3)$$

Отбрасывая уравнения (2), дающие в принятых нами условиях (3) статическое решение для полей, и вводя обозначения (здесь использована краткая запись $\partial_t = \partial/\partial t$)

$$\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \nabla \times & \mu_0 \partial_t \\ \nabla \times & -\varepsilon_0 \partial_t \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}_{\text{ext}} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

законы Фарадея и Максвелла-Ампера (1) можно записать в компактной матрично-операторной форме

$$\hat{\mathcal{L}}\psi = \varphi. \quad (5)$$

Следуя общепринятой классификации [17], решениями уравнений (5) могут быть как нестационарные, так и квазистационарные или стационарные поля. С математической точки зрения выражение (5) представляет собой сокращенную запись неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Очевидно, что в отсутствии сторонних токов

$$\mathbf{J}_{\text{ext}} = 0 \quad (6)$$

выражение (5) обращается в однородную систему

$$\hat{\mathcal{L}}\psi = 0, \quad (7)$$

решениями которой теперь могут быть исключительно нестационарные поля.

В дальнейшем везде, как для однородных (7), так и для неоднородных (5) формулировок, будем решать задачи Коши с начальными условиями $\psi_0 = \psi(\mathbf{r}, 0)$. Обозначим символом $\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)$ точное решение соответствующей задачи Коши для неоднородной системы (5), которое формально можно записать в виде

$$\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{L}}_{\psi_0}^{-1} \varphi. \quad (8)$$

Определение 1. Будем называть произвольную функцию $f(\mathbf{r}, t)$ функцией ограниченной длительности, если существует такой момент времени τ , после достижения которого она тождественно обращается в нуль

$$f(\mathbf{r}, t) \equiv 0, \quad \forall \mathbf{r}, t > \tau.$$

Утверждение 1. Всякая задача Коши для неоднородной системы (5) с источниками $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ограниченной длительности τ эквивалентна задаче Коши для однородной системы (7) с начальным условием

$$\psi_0 = \bar{\psi}(\mathbf{r}, t - \tau).$$

Эквивалентность этих задач состоит в том, что их решения идентичны.

Обсуждение данного утверждения отложим вплоть до раздела 4, так как для осмысления заложенного в него содержания предварительно требуется обсудить множество деталей, изложенных в последующих разделах.

2. Общая схема численного FDTD-решения

В основных чертах материал данного раздела следует нашим предыдущим работам [18, 19] и классическим руководствам [12–14], однако для полноты картины и ясности понимания воспроизведем здесь все необходимые выкладки.

С целью упрощения изложения и максимальной наглядности полученных результатов будем рассматривать одномерный случай. Это нисколько не умаляет общности обсуждаемых результатов, так как их масштабирование на случаи большей размерности не вносит ничего принципиально нового.

Итак, пусть электромагнитное поле распространяется вдоль декартовой оси Ox , а $\mathbf{J}_{\text{ext}} = J(x, t)\mathbf{e}_z$. В этих условиях $\mathbf{E} = E_z(x, t)\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{H} = H_y(x, t)\mathbf{e}_y$, а основная система уравнений (5) принимает вид

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = J. \quad (9)$$

Дискретизируем пространство-время и выполним переход от непрерывных функций к их точечным аналогам согласно преобразованию

$$f(x, t) \rightarrow f^q[m] = \widehat{D}f(x, t) = f(m\Delta x, q\Delta t), \quad (10)$$

где $\Delta x, \Delta t$ – фиксированные шаги пространственно-временной сетки, а $m, q \in \mathbb{N}_0$ – соответствующие индексы, определяющие ее узел. Обратное преобразование $f^q[m] \rightarrow f(x, t)$ будем обозначать символом \widehat{D}^{-1} .

Далее, следуя классической работе [1] и используя преобразование (10), введем две сетки для электрического $E_z^q[m]$ и магнитного $H_y^{q \pm \frac{1}{2}}[m \pm \frac{1}{2}]$ полей, смещенные по отношению друг к другу в шахматном порядке. Это позволяет записать конечно-разностный аналог уравнений (9) в форме

$$H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m + \frac{1}{2}\right] = H_y^{q-\frac{1}{2}}\left[m + \frac{1}{2}\right] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]), \quad (11)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} J^{q+\frac{1}{2}}[m] + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m + \frac{1}{2}\right] - H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m - \frac{1}{2}\right] \right). \quad (12)$$

Равенства (11) и (12) отличает от аналогов, полученных нами ранее [18, 19], то, что они записаны для вакуума. В англоязычной литературе [12–14] за уравнениями (11) и (12) закрепилось название Update Equations, отражающее тот факт, что при заданных начальных условиях

$$\begin{pmatrix} E_z^0 \\ H_y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \widehat{D}\psi_0, \quad (13)$$

данные уравнения позволяют вычислять временную динамику электромагнитного поля рекуррентно.

На практике систему уравнений (11), (12) используют в эквивалентной, но несколько более общей, форме. Для этого вместо одновременного задания Δx и Δt регламентируют величину их отношения числом Куранта [12]

$$S_c = \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \quad (14)$$

где скорость света в вакууме c , как известно [15–17], связана с параметрами ε_0 и μ_0 следующим образом

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (15)$$

Замечание 1. Выбор $S_c = 1$ определяет временной шаг сетки Δt точно соответствующим времени распространения света в вакууме между двумя соседними узлами сетки, расположенными на расстоянии Δx друг относительно друга. Несмотря на кажущуюся оптимальность, такой выбор заведомо не является корректным даже в вакууме при моделировании достаточно высокочастотных сигналов, период которых $\mathcal{T} \leq \Delta t$.

С помощью (14), (15) несложно привести коэффициенты уравнений (11), (12) к виду

$$\frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} = \frac{S_c}{\eta}, \quad \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} = S_c \eta, \quad (16)$$

где использовано обозначение характеристического импеданса вакуума

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 \text{ Ом}. \quad (17)$$

Замечание 2. Введение импеданса вакуума связано с выбором системы физических единиц и теории измерений в широком смысле. Как известно, в системе СГС подобной сущности в принципе не возникает. Поэтому использование η – есть следствие того, что мы выполняем исследование, используя систему СИ. Величина η влияет исключительно на взаимное отношение между электрической и магнитной компонентами электромагнитного поля, однако на динамику (и физику в принципе) это, конечно, не влияет. Переход к единицам СГС выполнить достаточно просто. При этом нет необходимости вводить импеданс вакуума, а число Куранта (14) трансформируется в параметр, имеющий размерность обратной скорости и определяемый как отношение шагов сетки

$$S_c = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

В подавляющем большинстве случаев амплитуда и знак функции источника J не имеют значения. Это связано с тем, что при вычислении сечения рассеяния, коэффициента отражения и других подобных величин всегда используется нормировка по падающему полю. Поэтому нет необходимости явно задавать коэффициент $\Delta t/\varepsilon_0$ в (12) — достаточно считать его содержащимся в самой функции источника. Таким образом, можно сделать переход

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon_0} J^{q+\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{J}^{q+\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Окончательно, с учетом всех принятых нами соглашений, дискретные аналоги уравнений (5) принимают вид

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] + \frac{S_c}{\eta} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]), \quad (19)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] - \mathcal{J}^{q+\frac{1}{2}}[m] + S_c \eta \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right] \right). \quad (20)$$

Далее будем рассматривать электромагнитное поле в некоторой активной области — ограниченной области пространства $X \subset \mathbb{R} \rightarrow m \in [0, N-1]$. Здесь и далее N — это число узлов электрической и магнитной сеток, отвечающих данной активной области.

Для простоты моделирования, чтобы не учитывать многократные переотражения электромагнитного поля от границ активной области, будем использовать поглощающие граничные условия (АВС — Absorbing Boundary Conditions), которые в рассматриваемом нами одномерном случае могут быть записаны в виде:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1], \\ H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[N - \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[N - \frac{3}{2} \right]. \quad (21)$$

Таким образом, состояния полей на границах рассматриваемой нами области не фиксированы жестко, а динамически изменяются в соответствии с тем, что «к ним подходит изнутри». За счет этого реализуется «убегание» поля из активной области за ее пределы, что моделирует поведение электромагнитного поля в открытом пространстве.

Уравнения (13), (19)–(21) позволяют реализовать итерационный алгоритм Йи [1, 12–14], определяющий всю динамику электромагнитного поля $\psi_y^q[m]$. Зададимся теперь вопросом определения корректности такого решения. Для этого требуется оценить справедливость равенства

$$\psi_y^q[m] = \widehat{D}\bar{\psi}(x, t), \quad (22)$$

где правая часть понимается как результат дискретизации (10) решения задачи, точного в смысле (8).

Очевидно, что строгое выполнение равенства (22) принципиально недостижимо в силу неизбежных ошибок численного счета, поэтому требуется более реалистичная процедура оценки корректности решения $\psi_y^q[m]$.

Здесь следует упомянуть следующее. В наших более ранних работах [18, 19] отмечалось, что «успех реализации» сформулированного метода во многом определяется «правильно подобранными» параметрами пространственно-временной сетки, для которых приводились следующие оценки

$$\Delta x \ll \lambda, \quad \Delta t \ll 1/\nu, \quad (23)$$

где λ — длина волны, а ν — частота исследуемого сигнала.

На текущий момент нами установлено, что выполнение неравенств (23) не является ни достаточным, ни необходимым условием «успешности» численного решения уравнений (5). Примеры, подкрепляющие этот тезис, показаны на рис. 1 и 2, подробное описание и анализ которых приводится нами в следующем разделе. Данные примеры отчетливо демонстрируют, что требуется как более точная формулировка самого понятия «успешности» решения $\psi_y^q[m]$, полученного в результате численного расчета по схеме (13), (19)–(21), так и более корректный критерий его достижения.

3. Задача Коши для неоднородного уравнения

Как следует из вышесказанного, традиционно уравнения Максвелла (5) численно решают следуя схеме Йи (13), (19)–(21). С точки зрения математики данная методика представляет собой итерационный алгоритм решения дискретного аналога задачи Коши для системы неоднородных уравнений. При этом на практике интересуются именно реакцией системы на действие источников $\mathcal{J} \rightarrow \psi_y^q[m]$, поэтому во всех известных нам публикациях полагают начальное состояние системы невозбужденным, т.е. выбирают

$$\psi_0 \equiv 0. \quad (24)$$

Вообще говоря, задание именно такого тривиально-го начального условия не является обязательным. Вместе с тем нами установлено, что далеко не любой выбор $\psi_0 \neq 0$ приводит к корректному решению задачи. В связи с этим отложим обсуждение данного вопроса до раздела 4, а в рамках этого пункта будем исследовать именно традиционную схему решения с начальным условием (24).

Определение 2. Будем называть решение $\psi_y^q[m]$, полученное в ходе итерационного алгоритма Йи (13), (19)–(21), корректным с точностью $\epsilon > 0$ в заданной области $X \times T = \{(x, t) | x \in X, t \in T\}$, где $X \subset \mathbb{R}$, а $T \subseteq \mathbb{R}_+ \cup 0$, в случае выполнения условия

$$\left| \frac{\widehat{D}^{-1}\psi_y^q[m] - \bar{\psi}(x, t)}{\bar{\psi}(x, t)} \right| \leq \epsilon. \quad (25)$$

Менее строго, будем называть решение $\psi_y^q[m]$ корректным тогда, когда

$$\left| \widehat{D}^{-1}\psi_y^q[m] - \bar{\psi}(x, t) \right| \ll \bar{\psi}(x, t). \quad (26)$$

Теперь, прежде чем формулировать критерий корректности решения $\psi_y[m]$, приведем несколько конкретных примеров, демонстрирующих особенности поведения $\psi_y[m]$ при различных источниках сигнала \mathcal{J} . Во всех

наших примерах будем полагать, что источник поля — точечный, он расположен в узле сетки с номером $m = 50$ и генерирует сигналы ограниченной длительности τ . Кроме того, будем считать, что формируемые источником сигналы обладают определенной направленностью и для определенности распространяются вправо ($m \geq 50$). Для программной реализации такой схемы возбуждения необходимо использовать технику, известную в литературе под названием TF/SF — Total-Field/Scattered-Field (см., например, [12–14]). Мы не будем останавливаться на ее описании, поскольку для основного содержания статьи это не так важно, а все необходимые детали можно найти в указанных источниках.

3.1. Квазигармонические сигналы. Рассмотрим сначала сигналы с наиболее простым спектром, а именно: пусть источник «включается» в момент времени $t = 0$ и ток в нем представляет собой синусоидальные функции времени

$$J_s(x, t) = \delta(x - 50\Delta x)A \sin\left(\frac{2\pi ct}{\lambda_0}\right) \quad (27)$$

и меняющиеся со временем по закону косинуса

$$J_c(x, t) = \delta(x - 50\Delta x)A \cos\left(\frac{2\pi ct}{\lambda_0}\right). \quad (28)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, указывающая положение источника, A — амплитуда создаваемого им сигнала. Во всех наших численных примерах будем полагать $A = 1$. Далее, при достижении времени τ , источник «выключается», и ток в нем обращается в нуль $J(x, t)|_{t>\tau} \equiv 0$.

Процессы включения/выключения источника математически можно смоделировать, умножая функции (27) и (28) на комбинацию функций Хевисайда вида $\theta(t)[1 - \theta(t - \tau)]$. Здесь первый множитель регулирует момент включения источника, второй — определяет время его выключения. В связи с тем, что источник, по нашему предположению, работает ограниченное время, сигналы, создаваемые им, не являются строго монохроматическими, однако всегда можно выбрать $\tau \gg \Delta t$. Это позволит пренебречь влиянием такого рода немонахроматичности и считать всю систему работающей в квазигармоническом режиме. Для достижения этого зададим $\tau = 100\Delta t$.

Теперь, после перечисления всех предварительных деталей реализации схемы (13), (19)–(21), обсудим ее непосредственные результаты, полученные для источников (27) и (28).

Так, на рис. 1 показан результат численного расчета для синусоидального источника (27), генерирующего сигнал с основной длиной волны в спектре $\lambda_0 = 3\Delta x$. Очевидно, что для этого случая сильное условие (23) заведомо не выполняется. Вместе с тем из рисунка следует, что результаты моделирования в этой ситуации можно считать корректными с точностью не хуже, чем $\epsilon = 0.14$. Важно отметить, что результаты дискретизации $\mathcal{J}^q[m] = \hat{D}J(x, t)$ тока (27) в этих условиях корректны с той же степенью точности, что и сами результаты моделирования, представляющие собой состояние электромагнитного поля.

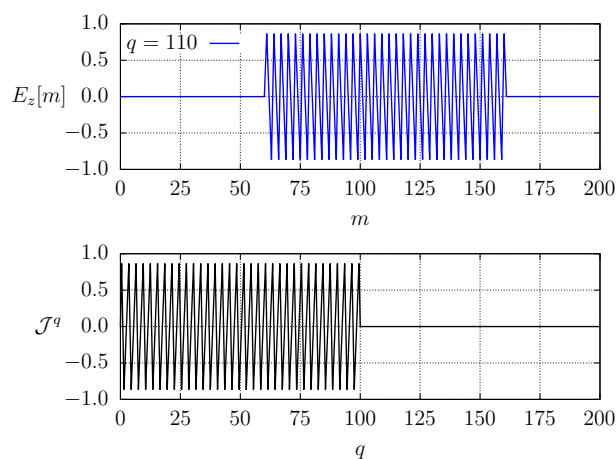


Рисунок 1. Результаты моделирования для синусоидального точечного источника (27) при $\lambda_0 = 3\Delta x$ (все остальные параметры расчета подробно описаны в основном тексте).

Figure 1. Simulation results for a sinusoidal point source (27) at $\lambda_0 = 3\Delta x$ (all other calculation parameters are described in detail in the main text).

Подтверждениями описанных выше фактов являются следующие результаты. На верхней части рис. 1 хорошо виден сигнал, имеющий синусоидальную форму и распространяющийся вправо так, что его передний фронт к моменту времени $q = 110$ успел преодолеть дистанцию $\Delta m = 110$. При этом область пространства, занимаемая волновым пакетом, соответствует ровно $\ell = 33\lambda_0$, как это и должно быть при избранных нами параметрах моделирования.

Кривые, изображенные на рис. 1, строго говоря, не являются синусоидальными сигналами. Причины этого легко понять, если учесть, что при выбранной нами длине волны $\lambda_0 = 3\Delta x$ и числе Куранта $S_c = 1$ временные отсчеты дискретизируют задающий сигнал всего три раза за его период T . Вкпе с неизбежными ошибками округления при численном счете это как раз и приводит к отмеченному поведению \mathcal{J}^q . Стоит, однако, подчеркнуть, что на характере самого поля $\psi_y^q[m]$ указанные ошибки дискретизации тока (27) сказываются не столь существенно, как в случае источника (28). Решающим здесь является именно процесс начального развития сигнала, который хоть и является достаточно резким (см. начальный участок нижней кривой \mathcal{J}^q , изображенный на рис. 1, в сравнении с передним фронтом поля E_z вблизи узла $m = 160$ на верхней кривой того же рисунка), но эта резкость не столь принципиальна, так как является не характеристикой самого сигнала (см. обсуждения, связанные с рис. 2, и утверждение 2), а лишь следствием не самой удачной его дискретизации.

Выполненные нами дополнительные расчеты показывают, что с увеличением λ_0 корректность (в смысле определения 2) схемы решения (13), (19)–(21) для синусоидального источника (27) растет (а ϵ , соответственно, уменьшается), так как при этом все более справедливыми становятся условия (23). Кроме того, твердо установлено, что при $\lambda_0 \leq \Delta x$ ни о какой корректности решения говорить не приходится.

После столь подробного анализа результатов моделирования для синусоидального источника (27) перейдем к обсуждению особенностей работы источника (28). На

рис. 2 показаны итоги расчетов (13), (19)–(21) в случае, когда $\lambda_0 = 100\Delta x$. При этом условия (23) заведомо выполняются, и результаты расчета должны быть существенно лучше тех, что представлены на рис. 1.

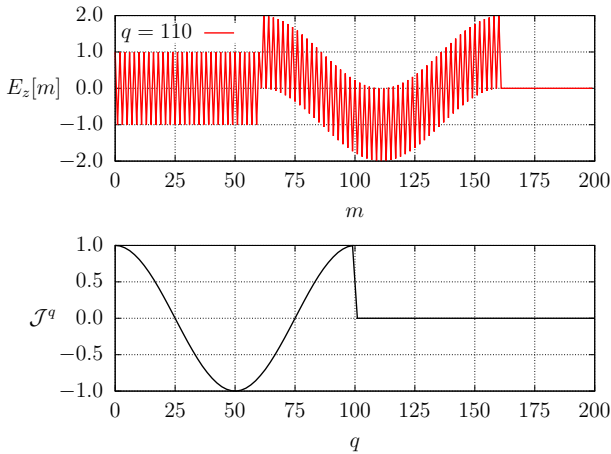


Рисунок 2. Результаты моделирования для точечного источника (28) при $\lambda_0 = 100\Delta x$.
Figure 2. Simulation results for a point source (28) at $\lambda_0 = 100\Delta x$.

В действительности все обстоит ровно наоборот — мгновенные значения решения $\psi_y^q[m]$, представленные на рис. 2, не могут быть признаны корректными в смысле определения 2, так как представляют собой некоторый «пилообразный» сигнал (как мы увидим впоследствии, это достаточно типичная картина, возникающая в ходе FDTD-моделирования). Более того, выделяется и то, что сигнал «проникает» в область $m < 50$, в которой его не должно быть согласно принятой нами схеме TF/SF.

Вместе с тем заметим, в данном конкретном случае результат усреднения мгновенных значений $\psi_y^q[m]$, который можно получить как полусумму его верхней и нижней огибающих, вполне соответствует поведению ожидаемого точного решения $\bar{\psi}^q[m]$ и может быть признан корректным. Так ли это в случае произвольного источника — вопрос на данный момент открытый и требует более подробного изучения.

Попробуем понять причину столь разительного отличия результатов моделирования в рассмотренных нами случаях. Для этого отметим, что в некоторых источниках (см., например, [12]) упоминается влияние на результаты моделирования постоянной составляющей в спектре исследуемого сигнала. Результатом Фурье-преобразования

$$\tilde{f}(\omega) = \hat{\mathcal{F}}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (29)$$

временной части сигналов (27) и (28) являются следующие обобщенные функции

$$\tilde{J}_s(\omega) = iA\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)], \quad (30)$$

$$\tilde{J}_c(\omega) = A\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (31)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что в правых ча-

стях выражений (30) и (31) фигурируют дельта-функции Дирака. Это является следствием того, что мы вычисляли преобразование Фурье (29) для неограниченных во времени (и потому строго монохроматических) функций (27) и (28). Учет ограниченной длительности данных сигналов (другими словами, их квазигармоничности) приводит к трансформации дельта-функций в функции более сложного вида. В частности, первое слагаемое выражения (30) преобразуется к виду

$$\frac{i\tau}{2\sqrt{2\pi}} A \exp\left[-i\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right] \operatorname{sinc}\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}.$$

Здесь использовано достаточно стандартное обозначение функции $\operatorname{sinc} x = \sin(x)/x$. Для остальных слагаемых в (30) и (31) имеют место аналогичные замены, которые не выписаны полностью в виду их громоздкости.

Для нас существенно то, что как для Фурье-трансформант (30) и (31), так и для более точных их аналогов, можно с уверенностью утверждать отсутствие постоянной составляющей сигнала, т. е. $\hat{\mathcal{F}}[J_{s,c}(t)](0) = 0$.

3.2. Импульсы и негармонические сигналы. Теперь обсудим особенности моделирования сигналов с более сложным спектральным составом. Начнем со случая отдельных импульсов, в котором ограничимся только двумя примерами: импульсами гауссова вида

$$J_g(t) = A \exp\left[-\frac{(t - t_0)^2}{w^2}\right] \quad (32)$$

и импульсами в форме вейвлета Рикера

$$J_r(t) = A \left(1 - 2[\pi\nu_m(t - t_0)]^2\right) \times \exp\left(-[\pi\nu_m(t - t_0)]^2\right). \quad (33)$$

Здесь, как и всегда, амплитуда $A = 1$, а t_0 , w и ν_m — есть параметры сигналов (32) и (33), определяющие их форму. Величина t_0 в обоих случаях задает основную временную задержку, т. е. тот момент времени, к которому достигается $J(t_0) = A$. Значение w регламентирует основную продолжительность гауссова сигнала, так что его подавляющая мощность источника тока сосредоточена во временном интервале $[t_0 - w, t_0 + w]$. Нам будет удобно выражать этот параметр в единицах шагов временной сетки $w = w\Delta t$. Величина ν_m задает ту частоту в спектре вейвлета Рикера, на которую приходится его максимум. Для целей сопоставления всех результатов этого раздела нам удобнее задавать не ν_m , а отвечающую ей длину волны $\lambda_m = c/\nu_m$, которую можно выразить в единицах шагов пространственной сетки $\lambda_m = l_m\Delta x$.

Для гауссова импульса временную задержку t_0 можно непосредственно задавать в форме $t_0 = d_g\Delta t$, в то время как для вейвлета Рикера ее удобнее представлять в единицах обратной частоты, множителем d_r , определенным согласно:

$$t_0 = d_r \frac{1}{\nu_m} = d_r \frac{\lambda_m}{c} = d_r \frac{l_m}{S_c} \Delta t. \quad (34)$$

Последнее равенство здесь записано с помощью определения числа Куранта (14). В дальнейшем нижний индекс у параметра d в явном виде указывать не будем, так как его смысл виден из контекста.

На рис. 3 показаны результаты моделирования согласно схеме (13), (19)–(21) для источника (32), формирующего направленные вправо гауссовы импульсы с разной шириной w . На верхней части рисунка показаны мгновенные распределения поля $E_z[m]$ в пространстве для обоих импульсов, вычисленные для удобства в такие моменты времени q , чтобы дистанции Δm , пройденные данными сигналами, отличались в два раза. Нижняя часть того же рисунка иллюстрирует временную динамику тока \mathcal{J}^q , формирующего эти импульсы.

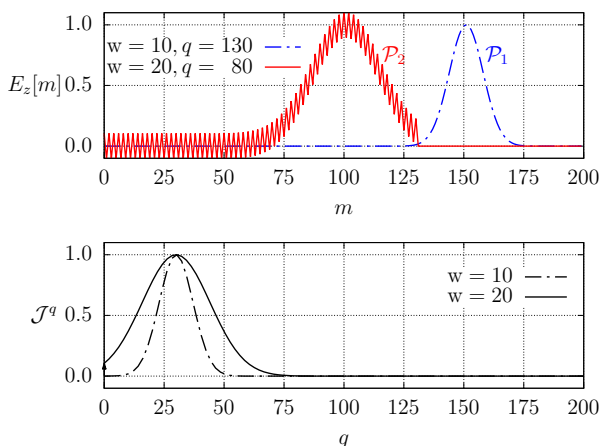


Рисунок 3. Результаты моделирования для точечного источника (32) при $d = 30$.
Figure 3. Simulation results for a point source (32) at $d = 30$.

Беглого взгляда, обращенного на данный рисунок, вполне достаточно для утверждения, что результаты численного расчета электромагнитного поля для сигнала меньшей ширины w вполне корректны. В то же время результат моделирования поля, созданного более широким импульсом тока, проявляет те же особенности, что были отмечены нами при анализе работы источника (28). А именно, мгновенные значения поля $\psi_y^q[m]$, рассчитанные в этом случае, демонстрируют «пилообразное поведение», так что истинную форму сигнала можно восстановить только как полусумму его огибающих.

Вместе с тем, как было отмечено нами ранее, форма гауссова сигнала определяется не только его шириной w , но и задержкой d . Влияние этого параметра можно оценить изучая рис. 4, на котором представлены результаты расчета для гауссова источника (32), формирующего сигналы одинаковой шириной $w = 10$, но с разной задержкой d .

На рис. 4 показано, что уменьшение временной задержки d гауссова импульса при том же значении его ширины w ухудшает корректность результатов расчета. Это ухудшение воспринимается не столь значительным, поскольку изменение значения d от 30 до 20 при $w = 10$ пусть и увеличивает начальный ток \mathcal{J}_g^0 примерно в 100 раз, но сама его величина остается сравнительно небольшой и составляет $\approx 2\%$ от максимального значения. Заметим, что дальнейшее сокращение d , например до значения 10, ухуд-

шит корректность результатов расчета сигнала \mathcal{P}_3 сильнее, чем для более широкого импульса \mathcal{P}_2 , представленного на рис. 3.

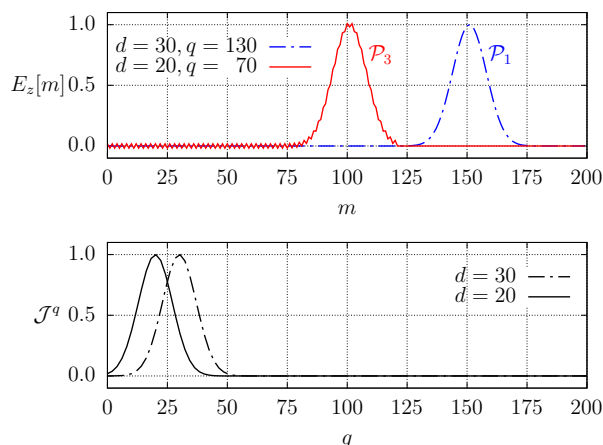


Рисунок 4. Результаты моделирования для точечного источника (32) при $w = 10$.
Figure 4. Simulation results for a point source (32) at $w = 10$.

Таким образом, рассмотренные примеры приводят к выводу о том, что на корректность результатов численного расчета по алгоритму Йи (13), (19)–(21) самым существенным образом влияет именно величина начального тока \mathcal{J}^0 источника (на рис. 3 этот уровень отмечен небольшой вертикальной стрелкой при нулевой абсциссе).

Заметим, что спектр гауссова сигнала

$$\tilde{J}_g(\omega) = \frac{w}{\sqrt{2}} A \exp \left[- \left(\frac{\omega w}{2} \right)^2 - i\omega t_0 \right], \quad (35)$$

вообще говоря, имеет достаточно существенный вклад постоянной составляющей. Поэтому для подтверждения выводов, сформулированных в предыдущем абзаце, необходимо исключить влияние данного фактора. При этом удобно исследовать импульсы как раз в форме вейвлета Рикера, поскольку их спектральный состав

$$\tilde{J}_r(\omega) = \frac{\omega^2}{2\sqrt{2}\pi^3\nu_m^3} A \times \exp \left[- \left(\frac{\omega}{2\pi\nu_m} \right)^2 - i\omega t_0 \right] \quad (36)$$

не имеет постоянной составляющей.

На рис. 5 представлены результаты численного расчета динамики электромагнитного поля согласно алгоритму Йи (13), (19)–(21) для источника (33), формирующего направленные вправо импульсы в форме вейвлета Рикера с разной длиной волны, отвечающей максимуму в спектре l_w . Как и всегда до этого, верхняя часть рисунка представляет собой распределение электрического поля в пространстве, тогда как нижняя — дает представление о развитии со временем тока, являющегося источником сигнала.

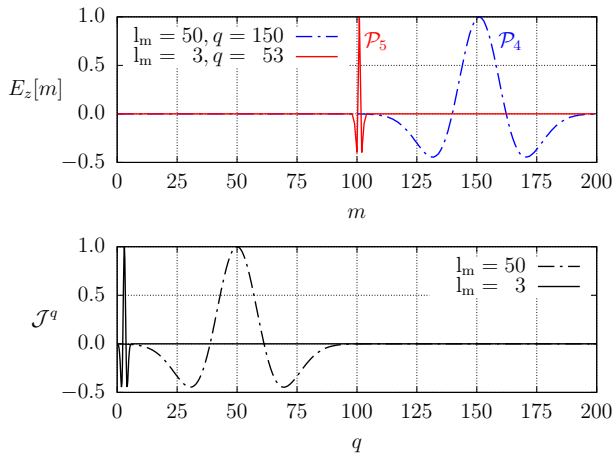


Рисунок 5. Результаты моделирования для точечного источника (33) при $d = 1$.

Figure 5. Simulation results for a point source (33) at $d = 1$.

Параметры l_w , использованные для двух источников, действие которых показано на рис. 5, подобраны так, чтобы формируемые ими импульсы существенно отличались. Так, при малом значении $l_w = 3$ (при этом $\lambda_m \gtrsim \Delta x$, но $\lambda_m \gg \Delta x$) пространственная протяженность соответствующего волнового пакета настолько узка, что оказывается сопоставимой с пространственным шагом сетки, однако его спектральный состав достаточно широк. В противоположность этому, для большого значения $l_w = 50$ все обстоит ровно наоборот. Существенно, что для обоих импульсов временная задержка выбрана одинаковой и единичной $d = 1$, так что изначально (в момент времени $q = 0$) оба импульса практически неотличимы от нуля, а максимума достигают к моментам времени $q = 3$ и $q = 50$ соответственно.

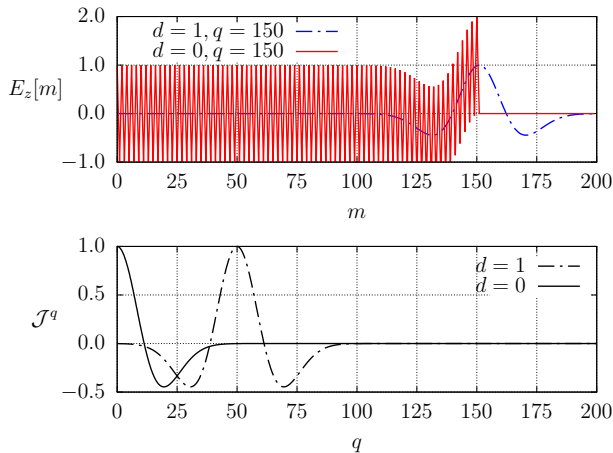


Рисунок 6. Результаты моделирования для точечного источника (33) при $l_w = 50$.

Figure 6. Simulation results for a point source (33) at $l_w = 50$.

Как и для рис. 3 и 4, мгновенные значения электрического поля на верхней части рис. 5 приведены для моментов времени, когда импульсы P_4 и P_5 успели пройти дистанции, отличающиеся друг от друга в два раза. При этом очень хорошо видно, что результаты моделирования являются корректными в обоих случаях, и это обстоятельство никак не связано со спектральным составом обоих импульсов. Совершенно иначе обстоит дело тогда, когда

существенным оказывается начальное значение тока источника $\mathcal{J}_r^0 \neq 0$. Добиться этого можно уменьшая значение задержки d . Сопоставление результатов моделирования с критическим случаем $d = 0$ показано на рис. 6, все остальные параметры на котором заданы такими же, как и для импульса P_4 на рис. 5.

Рис. 6 прекрасно иллюстрирует те выводы, которые постепенно формулировались при обсуждении результатов моделирования для всех предыдущих источников сигнала. Можно утверждать, что рис. 6 в некотором смысле комбинирует результаты, представленные ранее на рис. 1 и 2.

3.3. Результаты раздела. Дополнительно нами установлено, что все особенности численного решения задачи Коши для неоднородного уравнения (5) с начальным условием (24) согласно схеме (13), (19)–(21), рассмотренные в данном пункте, остаются справедливыми и для других часто встречающихся сигналов, таких как треугольные импульсы, меандр и т. д. Таким образом, можно сформулировать основной результат данного раздела в следующей форме. **Утверждение 2.** *Необходимым и достаточным условием корректности численного решения $\psi_y^q[m]$ задачи Коши для неоднородного уравнения Максвелла в вакууме (5) с некоторым начальным условием ψ_0 , полученного в ходе итерационного алгоритма Йи (13), (19)–(21), являются следующие ограничения:*

1. Шаг пространственной сетки $\Delta x \leq \lambda_{\min}$ (где λ_{\min} — это минимальная длина волны в спектре сигнала, генерируемого источником);
2. Начальный ток источника не имеет существенных скачков по сравнению с заданной начальной конфигурацией электрического поля $\mathcal{J}^0[m] \ll E_z^0[m]$.

Замечание 3. Требование $\Delta t \leq 1/\nu_{\max}$, вообще говоря, излишне, так как оно обеспечивается автоматически при соблюдении первого условия Утверждения 2 и разумном выборе числа Куранта ($S_c \leq 1$).

Замечание 4. Характер спектра сигналов, генерируемых источником тока, не влияет на корректность моделирования в рассматриваемом нами случае распространения в вакууме. Вместе с тем спектральный состав (и в особенности его постоянная составляющая $\hat{\mathcal{F}}[\varphi(t)](0)$) сигналов — один из ключевых факторов, влияющих на корректность моделирования в случае их генерации и распространения в той или иной среде. Этот вопрос очень обширен и требует отдельного рассмотрения.

4. Задача Коши для однородного уравнения

До этого момента с помощью алгоритма Йи мы исследовали поведение электромагнитного поля $\psi_y^q[m]$, создаваемого источником тока $\mathcal{J}^q[m]$ при нулевой начальной конфигурации поля. С математической точки зрения решалась задача Коши для неоднородного уравнения Максвелла (5) с тривиальным начальным условием (24). Теперь посмотрим на задачу с иной точки зрения. А именно, будем считать то решение $\psi_y^q[m]$, которое нами получено для неоднородной задачи Коши к моменту завершения действия ограниченного по времени источника, начальным состоянием поля $\psi_0[m] = \psi_y^q[m] \Big|_{q \geq \tau/\Delta t}$.

Поскольку оператор $\widehat{\mathcal{L}}$, определенный согласно (4), абсолютно одинаков как для однородного, так для неоднородного уравнения, то совершенно ясно, что решение сформулированной таким образом задачи Коши для однородного уравнения полностью эквивалентно решению соответствующей задачи Коши для неоднородного уравнения. Именно это и имелось в виду при формулировании утверждения 1, причем единственным необходимым условием здесь является только ограниченность во времени источника поля.

4.1. Конфигурации полей, соответствующие бегущим волнам. Наиболее просто продемонстрировать эквивалентность задач Коши, о которых говорилось выше, можно в случае конфигураций электромагнитного поля с той или иной избранной направленностью. В частности, в предыдущем разделе с помощью техники TF/SF мы везде моделировали волны, распространяющиеся в вакууме вправо от источника, расположенного в точке $m = 50$. При этом, поскольку векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} составляют в электромагнитной плоской волне правую тройку [15–17], всегда справедливо

$$H_y^q[m] = -\frac{E_z^{q+\frac{1}{2}}[m - \frac{1}{2}]}{\eta}. \quad (37)$$

В случае распространения волны влево предыдущее равенство должно быть заменено соотношением:

$$H_y^q[m] = \frac{E_z^{q+\frac{1}{2}}[m + \frac{1}{2}]}{\eta}. \quad (38)$$

Пользуясь этим, зададим начальную конфигурацию электромагнитного поля вида:

$$\psi_0[m] = \begin{pmatrix} E_z^*[m] \\ E_z^*[m + \frac{1}{2}]/\eta \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где $E_z^*[m]$ — распределение напряженности электрического поля, показанное на рис. 4 для импульса \mathcal{P}_1 . Далее, следуя описанной ранее схеме Йи (13), (19)–(21), будем решать задачу без источников $\mathcal{J} = 0$. Результат решения в данном случае приведен на рис. 7.

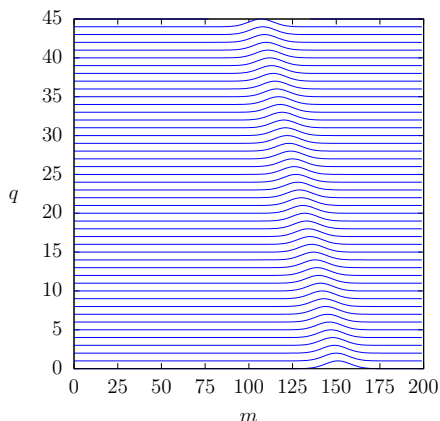


Рисунок 7. Решение задачи Коши для однородного уравнения Максвелла с начальным условием в виде гауссова импульса (39), направленного влево.

Figure 7. Solution of the Cauchy problem for the homogeneous Maxwell equation with initial condition in the form of Gaussian pulse (39) directed to the left.

Как и следовало ожидать, картина, изображенная на рис. 7, представляет собой гауссов импульс, распространяющийся из начального состояния влево без искажения формы. Результаты моделирования вполне можно признать корректными с точки зрения определения 2. Нами установлено, что тоже самое относится к импульсам и ограниченным сигналам любой другой формы — коль скоро начальная конфигурация поля представляет собой (37) или (38) (для любого наперед заданного распределения $E_z^*[m]$), решение задачи Коши для однородного уравнения всегда будет корректным.

4.2. Конфигурации поля, соответствующие излучению ненаправленных источников. В случае, когда говорить о конкретной направленности электромагнитного поля нельзя, начальное состояние электромагнитного поля должно представлять собой суперпозицию обеих конфигураций (37) и (38) одновременно.

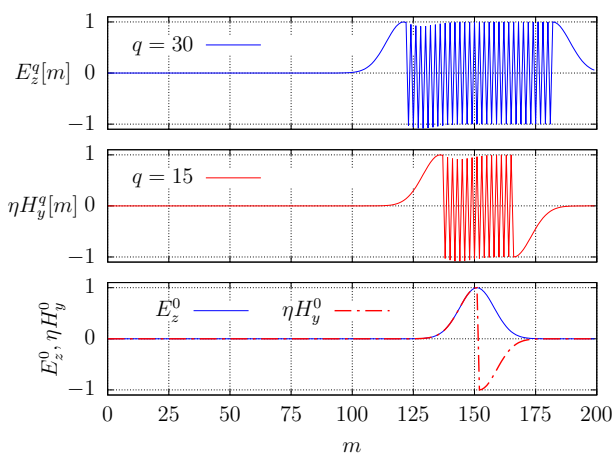


Рисунок 8. Некорректно заданная начальная конфигурация электромагнитного поля вида (40) для ненаправленного гауссовского импульса и его развитие во времени.

Figure 8. Incorrectly specified initial configuration of the electromagnetic field of the form (40) for a non-directional Gaussian pulse and its evolution over time.

Здесь очень важно подчеркнуть, что распределение напряженности электрического поля $E_z^*[m]$, показанное на рис. 4 для импульса \mathcal{P}_1 и уже использованное нами ранее в предыдущем подпункте, не может рассматриваться теперь в качестве «отправной точки» для задания $\psi_0[m]$. Это связано с тем, что для данной конфигурации электрического поля импульсы, разбегающиеся в противоположные от источника стороны, еще «не разделились окончательно» (другими словами, прошло лишь время $\tau/2$, но никак не τ). Это вызывает существенные численные ошибки и неправильные результаты моделирования в целом, что очень легко понять, анализируя рис. 8.

Нижняя часть данного рисунка демонстрирует начальную конфигурацию электромагнитного поля, для которой принято заданное распределение напряженности электрического поля $E_z^*[m]$, соответствующее импульсу \mathcal{P}_1 рис. 4. Распределение напряженности магнитного поля задается с помощью комбинации (38) для левой половины пакета и (37) для правой соответственно. Очевидно, что здесь имеется существенная «нефизическая» особен-

ность — конечный разрыв напряженности магнитного поля в центре волнового пакета.

Разрывное поведение магнитного поля в начальной конфигурации волнового пакета ответственно за дальнейшее некорректное поведение решения. А именно, верхняя часть рис. 8 иллюстрирует, что в последующие моменты времени как магнитное, так и электрическое поле демонстрируют «пилообразное поведение» в центральной зоне пространства, расположенной между двумя «половинками начального гауссова импульса, расходящимися влево и вправо».

Остается нераскрытым лишь следующий вопрос. Действительно ли указанная начальная конфигурация поля некорректна? Если попытаться придать ей некий физический смысл, то такое поведение решения можно интерпретировать следующим образом. В начальный момент времени источник тока оказался «резко выключен» именно в той ситуации, когда формируемый им сигнал достиг максимума. Очевидно, что при этом неизбежно должно проявиться явление самоиндукции, действие которого как раз и наблюдается в виде «бесконечного пилообразного сигнала» в постоянно расширяющейся центральной области. Впрочем, если вспомнить развиваемые нами ранее соображения об усреднении некорректно ведущих себя сигналов по их огибающим, то данным явлением, вообще говоря, можно пренебречь, так как средние значения напряженностей полей в центральной области всегда остаются нулевыми, и две половинки начального гауссова импульса действительно расходятся влево и вправо. Насколько можно пользоваться такой интерпретацией решения — вопрос, по всей видимости, еще открытый, но не лишенный смысла.

4.3. Иные конфигурации поля. Метод FDTD в том виде, в котором он сформулирован в данной работе, вообще говоря, некорректен для задач статики, поскольку уравнения Максвелла (2) нами были отброшены в самом начале и никак не принимались в расчет при алгоритмизации схемы решения (13), (19)–(21). В связи с этим очевидно, что конфигурации электромагнитного поля вида

$$\psi_0^e[m] = \begin{pmatrix} E_z[m] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

или

$$\psi_0^m[m] = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y[m] \end{pmatrix} \quad (41)$$

в общем случае не могут рассматриваться нами в качестве корректно заданных начальных условий для однородной (а равно и неоднородной) задачи Коши. Вместе с тем достаточно интересным представляется исследование поведения решений, определяемых алгоритмом Ии (13), (19)–(21), и в этих случаях.

В качестве примеров достаточно посмотреть на рис. 9 и 10, которые иллюстрируют поведение численного решения однородной задачи Коши для начальных конфигураций вида (40). На рис. 9 исходное распределение $E_z[m]$ задано равным конфигурации электрического поля импульса \mathcal{P}_1 (см. рис. 3), а на рис. 10 — соответствующим импульсу \mathcal{P}_4 (см. рис. 5).

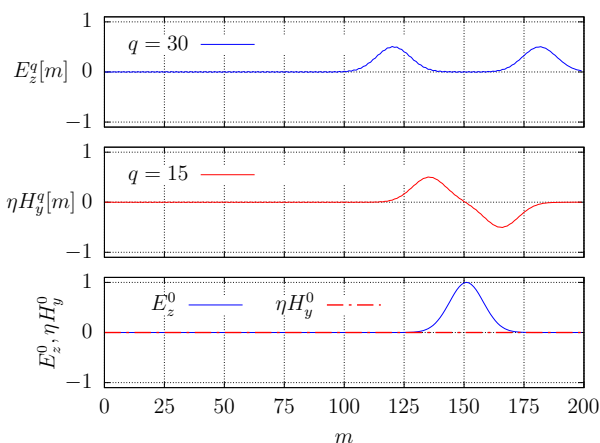


Рисунок 9. Некорректно заданная начальная конфигурация электромагнитного поля вида (40) для ненаправленного гауссова импульса и ее развитие со временем.

Figure 9. Incorrectly specified initial configuration of the electromagnetic field of the form (40) for a non-directional Gaussian pulse and its evolution over time.

Очевидно, что результаты моделирования ни в том, ни в другом случае, строго говоря, не могут быть признаны корректными, хотя для гауссова импульса решение выглядит «несколько более плавным». Понятно, что руководствоваться такими соображениями при оценке корректности решения нельзя, тем более, что здесь важнейшим является вопрос правильной интерпретации полученных результатов. Данный вопрос на текущий момент нами еще не закрыт, а его более подробное изучение может быть продолжено в последующих работах.

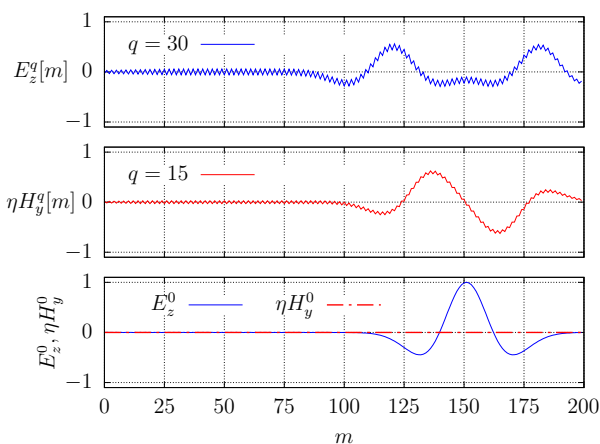


Рисунок 10. Некорректно заданная начальная конфигурация электромагнитного поля вида (40) для ненаправленного импульса в форме вейвлета Рикера и ее развитие со временем.

Figure 10. Incorrectly specified initial configuration of the electromagnetic field of the form (40) for a non-directional impulse in the form of a Ricker wavelet and its evolution over time.

Заключение

Таким образом, в данной работе исследованы особенности численного решения уравнений Максвелла методом FDTD в различных формулировках. Показано, что для случая ограниченных во времени источников поля задачу Коши для неоднородной системы уравнений можно сформулировать в форме эквивалентной задачи Коши для системы однородных уравнений, в качестве начального условия

которой выступает решение исходной задачи, полученное к моменту окончания действия источника. Указано, что для бегущих волн с избранной направленностью такая переформулировка возможна всегда, в то время как для расходящихся волн при определении начальной конфигурации поля имеются некоторые особенности, которые обязательно следует учитывать.

Кроме того, нами определен критерий для оценки степени корректности численного решения, полученного методом FDTD согласно алгоритму Йи. С помощью данного критерия проанализированы особенности численного решения однородных и неоднородных задач Коши для различных форм начальных конфигураций электромагнитных полей и задающих импульсов. Сформулированы необходимые и достаточные условия корректности получаемых решений.

Авторы благодарны Р.Н. Скандакову (ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН), В.С. Власову (Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина) и В.В. Темнову (LSI, Ecole Polytechnique, CEA/DRF/IRAMIS, CNRS, Institut Polytechnique de Paris) за конструктивную критику, полезные замечания и внимание, стимулировавшие данное исследование.

Литература

1. Yee, K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // IEEE Trans. on Ant. and Prop. – 1966. – Vol. 14. – № 3. – P. 302–307.
2. Miyazaki, Y. FDTD analysis of spatial filtering of scattered waves for optical CT of medical diagnosis / Y. Miyazaki, K. Kouno // IEEE Trans. FM. – 2009. – Vol. 129. – № 10. – P. 693–698.
3. Tan, T. Single realization stochastic FDTD for weak scattering waves in biological random media / T. Tan, A. Taflove, V. Backman // IEEE Trans. AP. – 2013. – Vol. 61. – № 2. – P. 818–828.
4. Stark, J. Light scattering microscopy measurements of single nuclei compared with GPU-accelerated FDTD simulations / J. Stark [et al.] // Phys. Med. Biol. – 2016. – Vol. 61. – № 7. – P. 2749–2761.
5. Nzao, A.B.S. Analysis and FDTD modeling of the influences of microwave electromagnetic waves on human biological systems / A.B.S. Nzao // Open Journal of Applied Sciences. – 2022. – Vol. 12. – P. 912–929.
6. Glubokovskikh, S. Seismic monitoring of CO₂ geosequestration: CO₂CRC Otway case study using full 4D FDTD approach / S. Glubokovskikh [et al.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. – 2016. – Vol. 49. – P. 201–216.
7. Yu, J. Modeling of whole-space transient electromagnetic responses based on FDTD and its application in the mining industry / J. Yu, R. Malekian, J. Chang, B. Su // IEEE Trans. Indust. Inform. – 2017. – Vol. 13. – № 6. – P. 2974–2982.
8. Fantoni, A. A model for the refractive index of amorphous silicon for FDTD simulation of photonics waveguides / A. Fantoni, P. Lourenço, M. Vieira // International Conference on Numerical Simulation of Optoelectronic Devices (NUSOD), Copenhagen, Denmark. – 2017. – P. 167–168.
9. Mishra, C.S. FDTD approach to photonic based angular waveguide for wide range of sensing application / C.S. Mishra [et al.] // Optik. – 2019. – Vol. 176. – P. 56–59.
10. Mohanty, S.P. FDTD method to photonic waveguides for application of optical demultiplexer at 3-communication windows / S.P. Mohanty, S.K. Sahoo, A. Panda, G. Palai // Optik. – 2019. – Vol. 185. – P. 146–150.
11. Bakirtzis, S. FDTD-based diffuse scattering and transmission models for ray tracing of millimeter-wave communication systems / S. Bakirtzis, T. Hashimoto, C.D. Sarris // IEEE Trans. AP. – 2021. – Vol. 69. – № 6. – P. 3389–3398.
12. Schneider, J.B. Understanding the finite-difference time-domain method / J.B. Schneider. – www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd, 2010. – 403 p.
13. Inan, U.S. Numerical electromagnetics. The FDTD method / U.S. Inan, R.A. Marshall. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 406 p.
14. Taflove, A. Advances in FDTD computational electrodynamics photonics and nanotechnology / A. Taflove, A. Oskooi, S.G. Johnson. – Boston: Artech House, 2013. – 639 p.
15. Бредов, М.М. Классическая электродинамика / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. – Москва: Наука, 1985. – 400 с.
16. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: Т. II. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 536 с.
17. Кугушев, А.М. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн / А.М. Кугушев, Н.С. Голубева, В.Н. Митрохин. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 368 с.
18. Makarov, P. Simulation of electromagnetic wave propagation in magnetic randomly inhomogeneous magnetic media / P. Makarov [et al.] // IEEE Magnetics Letters. – 2022. – Vol. 13. – P. 1–5.
19. Макаров, П.А. Моделирование распространения электромагнитных волн в магнитно-неоднородных средах / П.А. Макаров, В.А. Устюгов, В.И. Щеглов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 100–105.

References

1. Yee, K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // IEEE Trans. on Ant. and Prop. – 1966. – Vol. 14. – № 3. – P. 302–307.
2. Miyazaki, Y. FDTD analysis of spatial filtering of scattered waves for optical CT of medical diagnosis / Y. Miyazaki, K. Kouno // IEEE Trans. FM. – 2009. – Vol. 129. – № 10. – P. 693–698.
3. Tan, T. Single realization stochastic FDTD for weak scattering waves in biological random media / T. Tan, A. Taflove, V. Backman // IEEE Trans. AP. – 2013. – Vol. 61. – № 2. – P. 818–828.

4. Stark, J. Light scattering microscopy measurements of single nuclei compared with GPU-accelerated FDTD simulations / J. Stark [et al.] // *Phys. Med. Biol.* – 2016. – Vol. 61. – № 7. – P. 2749–2761.
5. Nzaio, A.B.S. Analysis and FDTD modeling of the influences of microwave electromagnetic waves on human biological systems / A.B.S. Nzaio // *Open Journal of Applied Sciences.* – 2022. – Vol. 12. – P. 912–929.
6. Glubokovskikh, S. Seismic monitoring of CO₂ geosequestration: CO2CRC Otway case study using full 4D FDTD approach / S. Glubokovskikh [et al.] // *International Journal of Greenhouse Gas Control.* – 2016. – Vol. 49. – P. 201–216.
7. Yu, J. Modeling of whole-space transient electromagnetic responses based on FDTD and its application in the mining industry / J. Yu, R. Malekian, J. Chang, B. Su // *IEEE Trans. Indust. Inform.* – 2017. – Vol. 13. – № 6. – P. 2974–2982.
8. Fantoni, A. A model for the refractive index of amorphous silicon for FDTD simulation of photonics waveguides / A. Fantoni, P. Lourenço, M. Vieira // *International Conference on Numerical Simulation of Optoelectronic Devices (NUSOD), Copenhagen, Denmark.* – 2017. – P. 167–168.
9. Mishra, C.S. FDTD approach to photonic based angular waveguide for wide range of sensing application / C.S. Mishra [et al.] // *Optik.* – 2019. – Vol. 176. – P. 56–59.
10. Mohanty, S.P. FDTD method to photonic waveguides for application of optical demultiplexer at 3-communication windows / S.P. Mohanty, S.K. Sahoo, A. Panda, G. Palai // *Optik.* – 2019. – Vol. 185. – P. 146–150.
11. Bakirtzis, S. FDTD-based diffuse scattering and transmission models for ray tracing of millimeter-wave communication systems / S. Bakirtzis, T. Hashimoto, C.D. Sarris // *IEEE Trans. AP.* – 2021. – Vol. 69. – № 6. – P. 3389–3398.
12. Schneider, J.B. Understanding the finite-difference time-domain method / J.B. Schneider. – www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd, 2010. – 403 p.
13. Inan, U.S. Numerical electromagnetics. The FDTD method / U.S. Inan, R.A. Marshall. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 406 p.
14. Taflove, A. Advances in FDTD computational electrodynamics photonics and nanotechnology / A. Taflove, A. Oskooji, S.G. Johnson. – Boston: Artech House, 2013. – 639 p.
15. Bredov, M.M. Classical electrodynamics / M.M. Bredov, V.V. Romyantsev, I.N. Toptygin. – Moscow: Nauka, 1985. – 400 p.
16. Landau, L.D. Theoretical Physics: Vol. II. Field Theory / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Moscow: FIZMATLIT, 2006. – 536 p.
17. Kugushev, A.M. Fundamentals of radioelectronics. Electrodynamics and radio waves propagation / A.M. Kugushev, N.S. Golubeva, V.N. Mitrohin. – Moscow: Bauman Moscow State Technical University Press, 2001. – 368 p.
18. Makarov, P. Simulation of electromagnetic wave propagation in magnetic randomly inhomogeneous magnetic media / P. Makarov [et al.] // *IEEE Magnetics Letters.* – 2022. – Vol. 13. – P. 1–5.
19. Makarov, P.A. Modelling of electromagnetic wave propagation in magnetically inhomogeneous media / P.A. Makarov, V.A. Ustyugov, V.I. Shcheglov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences".* – 2022. – № 5 (57). – P. 100–105.

Для цитирования:

Макаров, П.А. Особенности численного решения уравнений Максвелла методом FDTD в однородной и неоднородной формулировках / П.А. Макаров, В.А. Устюгов, В.И. Щеглов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2023. – № 4 (62). – С. 96–107.

For citation:

Makarov, P.A. Osobennosti chislennogo resheniya uravnenij Maksvella metodom FDTD v odnorodnoj i neodnorodnoj formulirovках [Numerical solution features of Maxwell equations by FDTD method in the homogeneous and non-homogeneous formulations of the problems] / P.A. Makarov, V.A. Ustyugov, V.I. Shcheglov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences".* – 2023. – № 4 (62). – P. 96–107.

Дата поступления рукописи: 12.07.2023

Received: 12.07.2023

Юбилей

Отдел математики Коми НЦ УрО РАН (к 30-летию образования)

Тридцать лет назад, 13 мая 1993 г., в Коми научном центре Уральского отделения Российской академии наук был создан на правах института Отдел математики — первое самостоятельное математическое подразделение центра. В ознаменование этого события публикуем Постановление Президиума Российской академии наук от 11 мая 1993 г. «Об организации Отдела математики Коми научного центра Уральского отделения РАН (представление Президиума Уральского отделения)». Впоследствии Отдел математики преобразован в Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН.

Anniversaries

The Department of Mathematics of the Komi SC UB RAS (to the 30th anniversary of foundation)

Thirty years ago, on May 13, 1993, the Department of Mathematics was established as an institute at the Komi Science Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. It was the first independent mathematical unit of the center. In commemoration of this event, we publish Resolution of the Presidium of the Russian Academy of Sciences dated from May 11, 1993 "On organization of the Department of Mathematics of the Komi Science Centre of the Ural Branch RAS (recommendation of the Presidium of the Ural Branch)". Then, the Department of Mathematics was renamed into the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРЕЗИДИУМ

ПОСТАНОВЛЕНИЕ

11 мая 1993 г.

№ 91

Москва

Об организации Отдела математики Коми научного центра Уральского отделения РАН (представление Президиума Уральского отделения)

В целях дальнейшего развития фундаментальных математических исследований Президиум Российской академии наук ПОСТАНОВЛЯЕТ:

1. Организовать Отдел математики Коми научного центра Уральского отделения РАН на правах самостоятельного научного учреждения в г.Сыктывкаре на базе Лаборатории математики Отдела информатики Института биологии Коми научного центра Уральского отделения РАН.

2. Одобрить следующие основные направления научной деятельности Отдела математики Коми научного центра Уральского отделения РАН:

алгебро-геометрические методы современной физики;
математические методы гидродинамики и механики сплошных сред;
теория вероятностей и математическая статистика, в том числе асимптотические методы изучения случайных процессов.

3. Возложить на Отделение математики РАН научно-методическое руководство Отделом математики Коми научного центра Уральского отделения РАН.

4. Назначить доктора физико-математических наук Громова Николая Алексеевича исполняющим обязанности заведующего Отделом математики Коми научного центра Уральского отделения РАН с последующим избранием в установленном порядке.

Президент
Российской академии наук
академик П.С.Фаддеев
Главный ученый секретарь
Российской академии наук
академик И.М.Медведев

Н.А. Громов,
главный научный сотрудник
ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

Редакционный совет журнала «Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук»
поздравляет коллектив Физико-математического института с юбилейной датой!
Желаем новых научных открытий и достижений.



Научный журнал

ИЗВЕСТИЯ

Коми научного центра
Уральского отделения Российской академии наук

**Серия «Физико-математические науки»
№ 4 (62)**

Номер подготовили:

Ответственный редактор серии – д.ф.-м.н. Н.А. Громов
Ответственный секретарь серии – к.ф.-м.н. Д.А. Тимушев
Выпускающий редактор – И.В. Курляк
Редакторы – К.А. Полова, О.А. Гросу
Переводчик – Е.С. Кузьмина
Компьютерное макетирование – Л.В. Михайлова
Дизайн обложки – Я.С. Куликова

Лицензия № 0047 от 10.01.1999.

Подписано в печать 07.08.2023. Дата выхода в свет 08.08.2023.

Уч.-изд.л. 14,0. Усл.-печ.л. 14,5. Тираж 100. Заказ № 33.

Формат 60x84¹/₈. Свободная цена.

Подготовлено к изданию и отпечатано в редакционно-издательском центре ФИЦ Коми НЦ УрО РАН
167982, Российская Федерация, ГСП-2, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, д. 24.

Адрес учредителя, издателя: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр «Коми научный центр УрО РАН».
167982, Российская Федерация, ГСП-2, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, д. 24.