УДК 330.4, 519.86
DOI 10.19110/1994-5655-2024-5-84-89

Об одной связи моделей обмена и Леонтьева

И. В. Костяков, В. В. Куратов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Авторы показывают, что модель Леонтьева линейного многоотраслевого баланса можно получить предельным переходом по некоторым параметрам из линейной модели обмена с изменением экономического статуса некоторых участников хозяйственного процесса. Более того, саму модель Леонтьева можно подвергнуть такой же предельной процедуре и получить новую модель Леонтьева. Параметры могут иметь разные интерпретации, зависящие от конкретной ситуации в экономике: смена приоритетов в народном хозяйстве и др.

Ключевые слова:

модель Леонтьева, контракции групп Ли

On one connection of the exchange and Leontief models

I. V. Kostyakov, V. V. Kuratov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru

Abstract

The authors show that the Leontief model of linear interindustry balance can be available passing to the limit for some parameters from linear exchange model with change in economic status of some participants in economic operations. Moreover, the Leontief model itself can be subjected to the same limit procedure and transform to a new Leontief model. Parameters can have different interpretations, depending on the specific situation in the economy: change of priorities in the national economy, etc.

Keywords:

Leontief model, contractions of Lie groups

Введение

Афинные преобразования $\mathbb{R}^n$ — это обратимые отображения $\mathbb{R}^n$ в себя, которые в декартовых координатах задаются формулой

$$\vec{r} \to A\vec{r} + \vec{b},$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right),$$

$$\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t, \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t, \tag{1}$$

где t обозначает транспонирование, и образуют аффинную группу $A(n)$ [1]. Существует вложение пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ на единицу большей размерности с координатами $(x_1, \dots, x_{n+1})$, задаваемое гиперплоскостью $x_{n+1} = 1$, тогда каждому аффинному преобразованию $(A, \vec{b})$ из (1) можно сопоставить линейное преобразование, задаваемое $(n+1) \times (n+1)$-матрицей $\tilde{A}$:

$$(A, \vec{b}) \to \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{array} \right). \tag{2}$$

Ограничение этого преобразования на гиперплоскость $x_{n+1} = 1$ дает формулу (1). Отображение (2) задает гоморфное вложение группы аффинных преобразований $A(n)$ в группу $GL(n+1)$ [1].

Можно рассмотреть отображение, сопоставляющее каждому аффинному преобразованию (1) линейное преобразование

$$\vec{r} \to A\vec{r}, \tag{3}$$

которое является гомоморфизмом аффинной группы $A(n)$ на группу линейных преобразований $GL(n)$ [1]. Ядро этого гомоморфизма совпадает с группой сдвигов $T(\vec{b})$ пространства $\mathbb{R}^n$, которая является нормальной подгруппой аффинной группы $A(n)$. Если матрица A ортогональна, то будем иметь группу движений евклидовых пространств, являющуюся подгруппой $A(n)$.

Технически, аффинные преобразования пространства $\mathbb{R}^n$ могут быть также получены предельными переходами [2, 3] по некоторым параметрам ϵ_i из группы общих линейных преобразований $GL(n+1)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Параметры ϵ_i могут играть роль масштабных преобразований в пространстве представления $\mathbb{R}^{n+1}$. В случае одного параметра ϵ, при этом изменяется масштаб вдоль выделенного направления. Таким образом, параметр ϵ разделяет $(n+1)$-мерное пространство представления, на котором действовала группа $GL(n+1)$, на два пространства с разными свойствами (масштабами, физическими размерностями и т. д.) — n-мерное, на котором действует теперь афинная группа $A(n)$ и одномерное. Примером может служить получение группы движений евклидовой плоскости

$E(2)$ из ортогональной группы вращений трехмерного пространства $O(3)$. В физике элементарных частиц $E(2)$ симметрию безмассовых частиц можно получить в пределе бесконечных импульсов из $SO(3)$ симметрии массивных частиц [4]. Группу Галилея, действующую в пространстве двух величин разной природы — пространства и времени, также можно получить из группы вращений [2, 3].

Аффинные преобразования используются в различных приложениях. Например, преобразования Пуанкаре в релятивистской физике являются подгруппой афинных преобразований и могут быть записаны в виде (1) или (2), где $\vec{r}$ — четырехмерный вектор пространства-времени, $A = (A_{ij}) \in SO(3,1)$ — матрица преобразований группы Лоренца, $\vec{b}$ — четырехмерный вектор трансляции. Группу Пуанкаре можно получить предельным переходом из групп псевдовращений де Ситтера $SO(1,4)$ или анти-де Ситтера $SO(2,3)$.

В квантовой механике матрица плотности кубита может быть представлена в виде [5]

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & 1 - x_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

и эволюцию открытой квантовой системы, описываемую преобразованиями Крауса, можно свести к действию группы сжимающих аффинных преобразований (1) на вектор $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ [6].

Еще один пример из математической модели нейрона, которую предложили МакКаллош и Питс [7]. Активационный потенциал нейрона u_k получается афинным преобразованием в результате суммирования входных сигналов x_j с различными весами a_{kj} и сдвига на постоянную величину b_k — барьер активации [8]

$$u_k = \sum_{j=1}^{N} a_{kj} x_j + b_k. \tag{5}$$

Наконец, в математических моделях экономики стационарные состояния отображений (1) и (3) соответствуют моделям Леонтьева и линейным моделям обмена. В данной статье мы используем идею предельных переходов $GL(n+1) \rightarrow A(n)$ для получения модели Леонтьева для n участников из модели линейного обмена или международной торговли для $n+1$ участников. При этом один из участников меняет свою “природу” — экономический статус и становится “чистым” потребителем.

1. Модель Леонтьева

Применение математических методов в экономике имеет богатое прошлое. Теорию, методологию и практику межотраслевого баланса предложил В. В. Леонтьев [9]. В 1973 г. ему была присуждена Нобелевская премия по экономике "за развитие метода "затраты-выпуск" и применение его к важнейшим экономическим проблемам". Математические модели экономики, отражающие с помощью математических соотношений основные свойства экономических процессов и явлений, представляют собой эффективный инструмент исследования сложных экономических проблем. Большой вклад в развитие экономико-математических исследований, в том числе межотраслевого баланса, внесли отечественные ученые [10–12].

Эффективное ведение народного хозяйства предполагает наличие баланса между отдельными отраслями [9–14]. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой — как потребитель продуктов, производимых другими отраслями.

Будем предполагать, что вся производящая сфера народного хозяйства разбита на некоторое число n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт, причем разные отрасли производят разные продукты [12–14]. Например, межотраслевой баланс СССР за 1959 г. был построен по 83 отраслям, а за 1972 г. — по 112 отраслям [12].

Введем следующие обозначения:

x_i — общий объем продукции отрасли i за данный промежуток времени — валовой выпуск i-й отрасли;

x_{ij} — объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе производства;

y_i — объем продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере — объем конечного потребления.

Объем конечного потребления составляет обычно более 75 % всей произведенной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт [14].

В народном хозяйстве должно выполняться соотношение баланса, т. е. для любого i выполняться равенство

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i. \tag{6}$$

Единицы измерения всех величин могут быть натуральными (кубометры, тонны, штуки и т. п.) или стоимостными.

В. В. Леонтьев, рассматривая развитие американской экономики 30-е г. XX в., обратил внимание на то, что величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются постоянными в течение ряда лет. Это обуславливается примерным постоянством используемой технологии. Коэффициенты a_{ij} называют коэффициентами прямых затрат (коэффициентами материалоемкости).

Используя гипотезу линейности, получаем систему линейных уравнений, описывающую неподвижные при отображении (1) точки (положения равновесия)

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}. \tag{7}$$

Вектор $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ называется вектором валового выпуска, вектор $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ — вектором конечного потребления, а матрица A — матрицей прямых затрат [13, 14].

Матрица A — неотрицательная (все ее компоненты неотрицательны). Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ тоже неотрицательны. Уравнение (7) называется уравнением линейного межотраслевого баланса (моделью Леонтьева) [13, 14]. Основная задача межотраслевого баланса: найти такой вектор валового выпуска $\vec{x}$, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного потребления $\vec{y}$. Матрица A называется продуктивной, если для любого вектора $\vec{y} \geqslant 0$ существует решение $\vec{x} \geqslant 0$ уравнения (7). В этом случае и модель Леонтьева, определяемая матрицей A, тоже называется продуктивной.

Систему линейных уравнений (7), используя отображение (2), можно переписать как [14]

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1.n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n+1} \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где y_i и $a_{i,n+1}$ связаны равенством $y_i = a_{i,n+1}x_{n+1}$.

Уравнение (7) можно решить относительно $\vec{x}$

$$\vec{x} = S\vec{y}, \quad S = (E - A)^{-1}. \tag{10}$$

Матрица S называется матрицей полных затрат. Элементы этой матрицы s_{ij} — величины валового выпуска продукции i-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-й отрасли. Существует несколько критериев продуктивности матрицы A [13, 14].

Первый критерий — матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица S существует и неотрицательна.

Второй критерий — матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса λ_A (максимальное положительное собственное число матрицы A) меньше единицы.

Число Фробениуса λ_A неотрицательной матрицы удовлетворяет неравенствам [14]

$$r \leqslant \lambda_A \leqslant R, \quad s \leqslant \lambda_A \leqslant S, \tag{11}$$

где $r = \min r_i$, $R = \max r_i$, $s = \min s_i$, $S = \max s_i$, r_i — сумма элементов i-й строки, s_i — сумма элементов i-го столбца. Если матрица A положительна, то все неравенства строгие.

Мы можем рассмотреть и более общую модель

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = B\vec{\xi}, \tag{12}$$

где $\vec{\xi}$ — k-мерный вектор непроизводящей сферы народного хозяйства, D — матрица размера $k \times k$, B — матрица размера $k \times n$. Непроизводящие отрасли связаны соотношением $\vec{\xi} = D\vec{\xi}$, которое формально выглядит как линейная модель обмена, обсуждаемая ниже. Эта модель означает, что отрасли x_i не пользуются продуктами отраслей ξ_m, а отрасли ξ_m используют продукты отраслей x_i.

Модель Леонтьева (7) или (8),(9) для n участников может быть получена из модели линейного обмена с матрицей $\tilde{A}$ для $n+1$ участника

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

занулением элементов $a_{n+1,i}$, при этом $a_{n+1,n+1} = 1$, а элементы $a_{i,n+1}$ становятся произвольными числами. Как следствие изменяется роль одного из участников. В физических теориях этому соответствует изменение природы $(n+1)$-го направления.

Введение параметра ϵ в матрицу $\tilde{A} \to \tilde{A}(\epsilon)$ и последующее устремление этого параметра к нулю известно в математике и физических приложениях как контракция [2, 3]. Мы будем вводить параметр ϵ таким образом, чтобы занулялись элементы $a_{n+1,i}, i = 1, \dots, n$, а элемент $a_{n+1,n+1}$ стремился бы к 1.

2. Линейная модель обмена

Линейная модель обмена или модель международной торговли дает ответ на следующий вопрос: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, т. е. не было значительного дефицита торгового баланса для каждой из стран участниц [14]?

Пусть x_i — национальные бюджеты i-й страны, a_{ij} — доли бюджетов x_j, которую j-я страна тратит на покупку товаров i-й страны. Будем полагать, что весь национальный бюджет каждой страны расходуется только на закупку товаров либо внутри страны, либо вне ее, т. е. выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \ j = 1, \dots, n$. Условие бездифицитной торговли принимает вид [13, 14]

$$\vec{x} = A\vec{x}. \tag{14}$$

Все элементы вектора $\vec{x}$ и матрицы A неотрицательны: $x_i \geqslant 0, a_{ij} \geqslant 0$.

Уравнение (14) означает, что "вектор бюджетов" $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы A с собственным значением λ_A, равным 1. Известно, что если в неотрицательной матрице A сумма элементов каждого столбца (строки) равна одному и тому же числу λ, то ее число Фробениуса λ_A равно λ. В линейной модели обмена сумма всех элементов в столбце равна 1, поэтому число Фробениуса λ_A для нее равно 1, а значит, имеется нетривиальное решение уравнения (14).

3. Предельный переход

Покажем, что модель Леонтьева (7) для n участников можно получить из модели международной торговли для $n+1$ участника в результате выделения строки и столбца $(n+1)$-го участника модели обмена введением специальным образом параметра ϵ и последующего предельного перехода.

Рассмотрим модель (14) с матрицей $A = \tilde{A}$ и $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})^t$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Число Фробениуса этой матрицы равно 1, так как сумма всех a_{ij} в каждом столбце равна 1

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1. \tag{16}$$

Заметим, что если мы вычеркнем из этой матрицы любую i-ю строку и i-й столбец, то получим матрицу A размером $n \times n$, у которой число Фробениуса меньше 1, так как сумма оставшихся элементов a_{ij} в каждом столбце будет меньше 1, что как раз и является условием продуктивности модели Леонтьева.

Поскольку все элементы матрицы $\tilde{A}$, в том числе и элементы $a_{n+1,i}$ $a_{i,n+1}$, меньше единицы, то можно эти элементы обозначить как $a_{n+1,i} = \sin\phi_i$, $a_{i,n+1} = \sin y_i$, $a_{n+1,n+1} = \cos\phi_{n+1}$. Введем теперь параметр ϵ несимметричным вариантом контракции [2] и перейдем к пределу $\epsilon \to 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \tilde{A}(\epsilon) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \frac{1}{\epsilon}\sin\epsilon y_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & \frac{1}{\epsilon}\sin\epsilon y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \frac{1}{\epsilon}\sin\epsilon y_n \\ \epsilon\sin\epsilon\phi_1 & \dots & \epsilon\sin\epsilon\phi_n & \cos\epsilon\phi_{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vec{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Число Фробениуса матрицы A с элементами a_{ij} $i,j = 1,\dots,n$ размером $n \times n$ меньше 1, что и является условием продуктивности полученной модели Леонтьева. При этом один из участников меняет свой статус и становится потребителем.

Далее можно устроить новый предельный переход уже в модели Леонтьева с матрицей A, вводя в нее новый параметр и получить новую модель с двумя объектами непроизводственной сферы, которая также будет продуктивна.

4. Одномерная модель Леонтьева

В качестве простого примера рассмотрим одномерную модель Леонтьева, в которой есть один производитель, выпускающий продукцию x_1. Часть продукции ($a_{11} < 1$) идет на внутреннее потребление, остальное — на внешнее потребление (y)

$$x_1 = a_{11}x_1 + y. \tag{18}$$

Элемент одномерной матрицы a_{11} совпадает в этом случае с числом Фробениуса и условие продуктивности $a_{11} < 1$ выполняется.

Эту модель можно записать как модель для двух участников

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; y = a_{12}x_2. \tag{19}$$

Можно зафиксировать $x_2 = 1$ и привести к виду

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Задавая значения y в уравнениях (18),(20) или x_2 в уравнении в (19), будем находить необходимый объем выпуска продукции x_1.

Рассмотрим линейную модель обмена для двух участников

$$\vec{x} = \tilde{A}\vec{x},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Для баланса нужно, чтобы сумма элементов в каждом столбце матрицы равнялась единице

$$a_{1i} + a_{2i} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Число Фробениуса матрицы $\tilde{A}$ равно 1, при этом $a_{11} < 1$. Так как все элементы a_{ij} меньше 1, их можно обозначить как $a_{21} = \sin\phi_{21}$, $a_{12} = \sin y$, $a_{22} = \cos\phi_{22}$. Выделим второго участника модели Леонтьева и изменим его экономическую "природу" с производителя на потребителя, организуя тем самым предельный переход [2]

$$\tilde{A} \to \tilde{A}(\epsilon) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{\epsilon}\sin\epsilon y \\ \epsilon\sin\epsilon\phi_{21} & \cos\epsilon\phi_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\epsilon\to 0}$$

$$\xrightarrow{\epsilon\to 0} \tilde{A}(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Это означает, что второй участник процесса потребляет продукцию первого, а первый не использует продукцию второго. Получим продуктивную модель Леонтьева.

5. Заключение

Мы показали, что модель международного обмена и модель Леонтьева, будучи математически совершенно разными, тем не менее генетически связаны предельным переходом.

В физике предельными переходами можно связать разные теории. Например, квантовую и классическую механики можно связать предельным переходом, в котором параметром служит постоянная Планка $\epsilon = \hbar$. Классическую механику можно получить предельным переходом к малым скоростям по сравнению со скоростью света из специальной теории относительности с параметром $\epsilon = \dfrac{v}{c}$. Похожим образом могут быть связаны и две разные экономические модели — модель Леонтьева и линейная модель обмена. Здесь параметр ϵ выделяет одного из производителей, уменьшая в процессе предельного перехода его вклад в общее производство и превращая в потребителя. Таким образом, происходит разделение $(n+1)$-го производителей на n производителей и одного потребителя.

Параметр ϵ появляется и в соотношении, связывающим запас продуктивности $\alpha(\epsilon)$ и число Фробениуса $\lambda_L(\epsilon)$ полученной модели Леонтьева [12,14]

$$(1+\alpha(\epsilon))\lambda_L(\epsilon) = \lambda_{\tilde{A}} = 1,$$

откуда

$$\alpha(\epsilon) = \frac{1}{\lambda_L(\epsilon)} - 1.$$

Мы полагаем, что предельные переходы между различными моделями могут использоваться для описания кризисных экономических процессов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Новиков, С. П. Современные геометрические структуры и поля / С. П. Новиков, И. А. Тайманов. – Москва: МЦНМО, 2014. – 581 с.
2. Громов, Н. А. Контракции классических и квантовых групп / Н. А. Громов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 318 с.
3. Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E. P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39, № 6. – P. 510–524.
4. Емельянов, В. М. Фундаментальные симметрии / В. М. Емельянов. – Москва : МИФИ, 2008. – 560 с.
5. Нильсен, М. А. Квантовые вычисления и квантовая информация / М. А. Нильсен, И. Л. Чанг. – Москва : Мир, 2006. – 824 с.
6. Ruskai, M. B. An analysis of completely-positive trace-preserving maps on 2x2 matrices / M. B. Ruskai, S. Szarek, E. Werner // Lin. Alg. Appl. – 2002. – Vol. 347. – P. 159–187. ArXiv:quant-ph/0101003.
7. McCulloch, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity / W. McCalloch, W. Pitts // Bull. Math. Biophys. – 1943. – V. 5. – P. 115-133.
8. Алтайский, М. В. Квантовые нейронные сети: современное состояние и перспективы развития / М. В. Алтайский, Н. Е. Капуткина, В. А. Крылов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2014. – Т. 45, № 5/6. – С. 1824–1864.
9. Леонтьев, В. В. Избранные произведения в 3-х томах. Т. 1. Общеэкономические проблемы межотраслевого анализа / В. В. Леонтьев. – Москва : Экономика, 2006. – 406 с.
10. Аганбегян, А. Г. Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР / А. Г. Аганбегян, А. Г. Гранберг. – Москва : Мысль, 1968. – 357 с.
11. Немчинов, В. С. Избранные произведения в 6 т. Планирование и народно-хозяйственные балансы. Т. 5 / В. С. Немчинов. – Москва : Наука, 1968. – 430 с.
12. Гранберг, А. Г. Математические модели социалистической экономики: Общие принципы моделирования и статические модели народного хозяйства: учебное пособие для вузов / А. Г. Гранберг. – Москва : Экономика, – 1978. – 351 с.
13. Колемаев, В. А. Математическая экономика: учебник для вузов / В. А. Колемаев. – Москва : ЮНИТИ, 2002. – 399 с.
14. Солодовников, А. С. Математика в экономике: учебник. Ч. 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандра. – Москва : Финансы и статистика, 2013. – 384 с.

References

1. Novikov S. P. Modern geometric structures and fields / S. P. Novikov, I. A. Taimanov. – Amer. Math. Soc., 2006. – 659 p.
2. Gromov, N. A. Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups] / N. A. Gromov. – Moscow : FIZMATLIT, 2012. – 318 p.
3. Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E. P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39, № 6. – P. 510–524.
4. Emel'yanov, V. M. Fundamental'nye simmetrii [Fundamental symmetries] / V. M. Emel'yanov. – Moscow : MIFI, 2008. – 560 p.
5. Nielsen, M. A. Quantum computation and quantum information / M. A. Nielsen, I. L. Chuang. – Cambridge University Press, 2010. – 702 p.
6. Ruskai, M. B. An analysis of completely-positive trace-preserving maps on 2x2 matrices / M. B. Ruskai, S. Szarek, E. Werner // Lin. Alg. Appl. – 2002. – Vol. 347. – P. 159–187. ArXiv:quant-ph/0101003.
7. McCulloch, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity / W. McCalloch, W. Pitts // Bull. Math. Biophys. – 1943. – Vol. 5. – P. 115–133.
8. Altaisky, M. V. Quantum neural networks: Current status and prospects for development / M. V. Altaisky, N. E. Kaputkina, V. A. Krylov // Physics of Particles and Nuclei. – 2014. – Vol. 45. – P. 1013–1032.
9. Leont'ev, V. V. Izbrannye proizvedeniya v 3-x tomax. V. 1. Obšeékonomicheskie problemy mezhotraslevogo analiza [Selected works in 3 volumes. Vol. 1. General economic problems of intersectoral analysis] / V. V. Leont'ev. – Moscow : Ekonomika, 2006. – 406 p.
10. Aganbegyan, A. G. Ekonomiko-matematicheskij analiz mezhotraslevogo balansa SSSR [Economic and mathematical analysis of the USSR interindustry balance] / A. G. Aganbegyan, A. G. Granberg. – Moscow : Mysl', 1968. – 357 p.
11. Nemchinov, V. S. Izbrannye proizvedeniya v 6 t. Planirovanie i narodno-xozyajstvennye balansy. T. 5. [Selected works in 6 volumes. Vol. 5. Planning and national-economic balances] / V. S. Nemchinov. – Moscow : Nauka, 1968. – 430 p.
12. Granberg, A. G. Matematicheskie modeli socialisticheskoj ekonomiki: Obshchie principy modelirovaniya i statichеskie modeli narodnogo hozyajstva: uchebnoe posobie dlya vuzov [Mathematical models of a socialist economy: General principles of modeling and static models of the national economy: study guide for universities] / A. G. Granberg. – Moscow : Ekonomika, – 1978. – 351 p.

13. Kolemaev, V. A. Matematicheskaya ekonomika: uchebnik dlya vuzov [Mathematical economics: textbook for universities] / V. A. Kolemaev. – Moscow : YuNITI, 2002. – 399 p.
14. Solodovnikov, A. S. Matematika v ekonomike: uchebnik. Ch. 1. Linejnaya algebra, analiticheskaya geometriya i linejnoe programmirovanie [Mathematics in economics: textbook. Part 1. Linear algebra, analytical geometry and linear programming] / A. S. Solodovnikov, V. A. Babajcev, A. V. Brailov, I. G. Shandra. – Moscow : Finansy i statistika, 2013. – 384 p.

Благодарность (госзадание)
Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

Acknowledgement (state task)
The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

The authors thank the reviewer for insightful comments.

Для цитирования:
Костяков, И. В. Об одной связи моделей обмена и Леонтьева / И. В. Костяков, В. В. Куратов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 84–89.

For citation:
Kostyakov, I. V. On one connection of the exchange and Leontief models / I. V. Kostyakov, V. V. Kuratov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2024. – № 5 (71). – P. 84–89.

Дата поступления рукописи: 27.06.2024
Received: 27.06.2024