УДК 512.64, 519.1
DOI 10.19110/1994-5655-2024-5-11-15

О перманенте многомерных матриц

Д. Б. Ефимов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

defimov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Перманент многомерных матриц выражен в терминах операций над элементами коммутативной алгебры с нильпотентными индекса 2 образующими. С помощью техники, основанной на данной взаимосвязи, доказано несколько свойств перманента. Изучены различные виды многомерных перестановок. Перманент многомерных матриц рассмотрен с точки зрения перечисляющей функции многомерных перестановок.

Ключевые слова:

многомерная матрица, перманент, многомерная перестановка

On the permanent of multidimensional matrices

D. B. Efimov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

defimov@ipm.komisc.ru

Abstract

The permanent of multidimensional matrices is expressed in terms of operations on elements of commutative algebra with nilpotent index 2 generators. Using a technique based on this relationship, several properties of the permanent have been proved. Various types of multidimensional permutations are considered. The permanent of multidimensional matrices is considered from the point of view of the enumeration function of multidimensional permutations.

Keywords:

multidimensional matrix, permanent, multidimensional permutation

Введение

Перманент матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка определяется следующим образом:

$$\operatorname{Per} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

(суммирование ведется по всем перестановкам n-го порядка). Перманент нашел широкое применение в комбинаторике, так как его можно рассматривать в качестве перечисляющей функции различных объектов дискретной математики: совершенных паросочетаний двудольных графов, перестановок с ограниченными позициями и т. д. Обширный материал, касающийся перманента можно найти в ставшей уже классической монографии [1].

Понятие перманента можно обобщить и на случай многомерных матриц. Эта тематика стала разрабатываться сравнительно недавно. Подробный обзор, посвященный данной теме, можно найти в статье [2]. В нашей работе мы затрагиваем некоторые дополнительные вопросы, связанные с перманентом многомерных матриц, не отраженные, насколько нам известно, в литературе.

Рассмотрим ассоциативную алгебру над полем F, порожденную элементами ι_k, связанными следующими определяющими соотношениями: $\iota_k^2 = 0$, $\iota_k \iota_l = \iota_l \iota_k$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$. Хорошо известно [1, с. 110], что перманент матрицы можно выразить через произведение однородных элементов первой степени данной алгебры. Точнее, пусть дана матрица $A = (a_{ij})$ n-го порядка с элементами из F. Тогда, как нетрудно заметить,

$$\operatorname{Per} A\, \iota_1 \iota_2 \ldots \iota_n = \prod_{i=1}^{n} (a_{i1}\iota_1 + a_{i2}\iota_2 + \cdots + a_{in}\iota_n).$$

В первом разделе мы распространяем данную конструкцию на многомерный случай. С помощью техники, основанной на данной взаимосвязи, мы доказываем некоторые простейшие свойства перманента многомерных матриц.

Хорошо известно, что перманент можно использовать для перечисления перестановок с ограниченными позициями [3]. Во втором разделе мы рассматриваем многомерный аналог данной взаимосвязи на примере многомерных беспорядков.

1. Перманент многомерных матриц и некоторые его свойства

d-Мерной матрицей A порядка n над полем F называется d-мерный массив элементов из F, каждый индекс которого пробегает значения от 1 до n:

$$A = (a_{i_1 i_2 \ldots i_d}), \quad i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad a_{i_1 i_2 \ldots i_d} \in F.$$

Множество элементов матрицы A с фиксированными значениями $d - k$ индексов называется *k-мерной гранью*, $(d-1)$-мерную грань называют *гипергранью* [2]. *Диагональю* матрицы A называется любой набор из n ее элементов, отличающихся друг от друга в каждом индексе:

$$(a_{1\sigma_2(1)\ldots\sigma_d(1)},\ldots,a_{n\sigma_2(n)\ldots\sigma_d(n)}),\ \sigma_i\in S_n.$$

Обозначим через $L(A)$ множество всех диагоналей матрицы A. *Перманент* матрицы A определяется следующим образом:

$$\operatorname{Per}A=\sum_{l\in L(A)}\prod_{a\in l}a.$$

Очевидно, что если A — двумерная матрица, то мы получим обычное определение перманента.

Пример. Рассмотрим трехмерную матрицу 2-го порядка: $A=(a_{ijk})$, $i,j,k=1,2$. Графически ее можно изобразить в виде $2\times2\times2$ куба или двух обычных 2×2 матриц:

$$A=\left\{\begin{pmatrix}a_{111}&a_{112}\\a_{121}&a_{122}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_{211}&a_{212}\\a_{221}&a_{222}\end{pmatrix}\right\}.$$

Здесь первый индекс отвечает за номер матрицы, второй — за номер строки в матрице, третий — за номер столбца. Перманент данной матрицы имеет следующий вид:

$$\operatorname{Per}A=a_{111}a_{222}+a_{112}a_{221}+a_{121}a_{212}+a_{122}a_{211}.$$

Рассмотрим ассоциативную алгебру над полем F, порожденную образующими ι_{jk}, $j,k=1,2$, удовлетворяющими следующим определяющим соотношениям:

$$\iota_{jk}\iota_{st}=\begin{cases}0 & \text{, если } j=s \text{ или } k=t,\\ \iota_{st}\iota_{jk} & \text{, в противном случае.}\end{cases}$$

Данная алгебра, как нетрудно видеть, является шестимерной. Каждый ее элемент однозначно разлагается по базисным элементам ι_{11}, ι_{12}, ι_{21}, ι_{22}, $\iota_{11}\iota_{22}$, $\iota_{12}\iota_{21}$, составленным из образующих и их всевозможных ненулевых произведений с точностью до порядка сомножителей. Назовем такой базис *основным*. Пусть дана трехмерная матрица 2-го порядка $A=(a_{ijk}),i,j,k=1,2$. Рассмотрим следующие два элемента указанной выше алгебры:

$$a_i=a_{i11}\iota_{11}+a_{i12}\iota_{12}+a_{i21}\iota_{21}+a_{i22}\iota_{22},\quad i=1,2.$$

Коэффициенты элемента a_1 соответствуют гиперграни матрицы A, образованной элементами с первым индексом, равным 1, а коэффициенты элемента a_2 — гиперграни, образованной элементами с первым индексом, равным 2. Рассмотрим произведение этих элементов:

$$a_1a_2=(a_{111}a_{222}+a_{122}a_{211})\iota_{11}\iota_{22}+\\+(a_{112}a_{221}+a_{121}a_{212})\iota_{12}\iota_{21}.$$

Нетрудно видеть, что сумма коэффициентов элемента a_1a_2 в разложении по основному базису равна перманенту матрицы A. Таким образом, если через $sc(a)$ обозначить сумму коэффициентов элемента a в разложении по основному базису, то $sc(a_1a_2)=\operatorname{Per}A$.

Можно рассмотреть элементы алгебры, соответствующие другим гиперграням, например, следующие:

$$b_i=a_{1i1}\iota_{11}+a_{1i2}\iota_{12}+a_{2i1}\iota_{21}+a_{2i2}\iota_{22},\quad i=1,2.$$

Их произведение

$$b_1b_2=(a_{111}a_{222}+a_{121}a_{212})\iota_{11}\iota_{22}+\\+(a_{112}a_{221}+a_{211}a_{122})\iota_{12}\iota_{21}$$

в общем случае будет отличаться от a_1a_2, но сумма коэффициентов произведения также будет равна перманенту матрицы A: $sc(b_1b_2)=\operatorname{Per}A$.

Пусть теперь в общем случае дана $(d+1)$-мерная матрица n-го порядка $A=(a_{i_1i_2\ldots i_{d+1}})$ над полем F. Рассмотрим алгебру $P_{d,n}(\iota)$ над F с образующими $\iota_{j_1j_2\ldots j_d}$, $j_1,j_2,\ldots,j_d=1,\ldots,n$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$\begin{cases}\iota_{j_1\ldots j_d}\cdot\iota_{j'_1\ldots j'_d}=0 & ,\exists s: j_s=j'_s,\\ \iota_{j_1\ldots j_d}\cdot\iota_{j'_1\ldots j'_d}=\iota_{j'_1\ldots j'_d}\cdot\iota_{j_1\ldots j_d} & \text{, иначе.}\end{cases}\qquad(1)$$

Как и в трехмерном случае, ее основным базисом назовем базис, составленный из образующих и их всевозможных ненулевых произведений с точностью до порядка сомножителей. Рассмотрим в этой алгебре следующие элементы:

$$a_i=\sum_{i_1,\ldots,i_d}a_{ii_1\ldots i_d}\iota_{i_1\ldots i_d},\ \ i=1,2,\ldots,n.$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$sc(a_1a_2\ldots a_n)=\operatorname{Per}A.\qquad(2)$$

Аналогично трехмерному случаю, в общем случае в качестве сомножителей можно брать элементы алгебры, соответствующие и другим гиперграням матрицы.

Соотношение (2) позволяет, например, доказывать свойства перманента многомерных матриц в терминах преобразования элементов алгебры $P_{d,n}(\iota)$. Прежде чем привести пример, рассмотрим два простейших свойства функции sc.

1. **Линейность.** Если $\alpha,\beta\in F$, $a,b\in P_{d,n}(F)$, то

$$sc(\alpha a+\beta b)=\alpha sc(a)+\beta sc(b).\qquad(3)$$

2. **Мультипликативность**. Предположим, что элементы $a,b,ab\in P_{d,n}(\iota)$, рассматриваемые как элементы векторного пространства, имеют m, n и mn ненулевых координат в основном базисе соответственно. Это возможно тогда и только тогда, когда произведение любого базисного элемента, входящего в разложение a с ненулевым коэффициентом, на любой базисный элемент, входящий в разложение b с ненулевым коэффициентом, не равно нулю. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$sc(ab)=sc(a)sc(b).\qquad(4)$$

Например, пусть $a=2\iota_{11}+3\iota_{12}$, $b=3\iota_{23}-4\iota_{33}$ — два элемента алгебры $P_{2,3}(\iota)$ над $\mathbb{R}$. Тогда

$$ab=6\iota_{11}\iota_{23}+9\iota_{12}\iota_{23}-8\iota_{11}\iota_{33}-12\iota_{12}\iota_{33}.$$

При этом $sc(a)=5$, $sc(b)=-1$, $sc(ab)=-5$, и свойство (4) выполняется.

В качестве примера использования соотношения (2) докажем формально аналог свойства разложения перманента по строке (столбцу) для многомерных матриц. Пусть дана d-мерная матрица $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})$ n-го порядка. Тогда

$$\mathrm{Per}A = sc\left(\prod_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2,\dots,i_d=1}^{n} a_{i_1 i_2\dots i_d}\iota_{i_2\dots i_d}\right) =$$

$$= sc\left(\sum_{i_2,\dots,i_d=1}^{n} a_{1 i_2\dots i_d}\iota_{i_2\dots i_d}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\prod_{j_1=2}^{n}\sum_{j_2,\dots,j_d=1}^{n} a_{j_1 j_2\dots j_d}\iota_{j_2\dots j_d}\right)\right).$$

Принимая во внимание первое из определяющих соотношений (1), а также свойства (3), (4), мы можем продолжить преобразования следующим образом:

$$\mathrm{Per}A = sc\left(\sum_{i_2,\dots,i_d=1}^{n} a_{1 i_2\dots i_d}\iota_{i_2\dots i_d}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\prod_{j_1=2}^{n}\sum_{\substack{j_k\neq i_k\\ k=2,\dots,n}} a_{j_1 j_2\dots j_d}\iota_{j_2\dots j_d}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i_2,\dots,i_d=1}^{n} a_{1 i_2\dots i_d} sc\left(\prod_{j_1=2}^{n}\sum_{\substack{j_k\neq i_k\\ k=2,\dots,n}} a_{j_1 j_2\dots j_d}\iota_{j_2\dots j_d}\right) =$$

$$= \sum_{i_2,\dots,i_d=1}^{n} a_{1 i_2\dots i_d}\mathrm{Per}\left(A\{1, i_2, \dots, i_d\}\right).$$

Здесь через $A\{1, i_2, \dots, i_d\}$ мы обозначили *дополнительную матрицу* элемента $a_{1 i_2 \dots i_d}$, т. е. матрицу, получаемую из матрицы A вычеркиванием всех элементов, лежащих с $a_{1 i_2 \dots i_d}$ в одной гиперграни. Очевидно, что в доказательстве можно проводить суммирование и относительно элементов других гиперграней. Таким образом, перманент многомерной матрицы равен сумме произведений элементов некоторой гиперграни на перманенты дополнительных матриц этих элементов.

Прежде чем перейти к доказательству следующего свойства, введем дополнительные обозначения. Обозначим через $Q_{k,n}$ — множество всех k-элементных неупорядоченных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})$ — d-мерная матрица n-го порядка и α_1, α_2,…,$\alpha_d \in Q_{k,n}$. Через $A[\alpha_{l=1,\dots,d}]$ обозначим d-мерную матрицу k-го порядка, которая состоит из элементов $a_{i_1 i_2 \dots i_d}$ матрицы A таких, что $i_1 \in \alpha_1$, $i_2 \in \alpha_2, \dots, i_d \in \alpha_d$, а через $A\{\alpha_{l=1,\dots,d}\}$ — d-мерную матрицу $(n-k)$-го порядка, получаемую из A удалением элементов $a_{i_1 i_2 \dots i_d}$ таких, что $i_1 \in \alpha_1$, $i_2 \in \alpha_2$,…, $i_d \in \alpha_d$. Матрицы $A[\alpha_{l=1,\dots,d}]$ и $A\{\alpha_{l=1,\dots,d}\}$ будем называть *дополнительными* друг другу.

Рассмотрим перманент суммы двух матриц. Пусть $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})$ и $B = (b_{i_1 i_2 \dots i_d})$ — две d-мерные матрицы порядка n. Тогда

$$\mathrm{Per}(A+B) =$$

$$= sc\left(\prod_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2,\dots,i_d=1}^{n}\left(a_{i_1 i_2\dots i_d}+b_{i_1 i_2\dots i_d}\right)\iota_{i_2\dots i_d}\right) =$$

$$= sc\left(\prod_{i_1=1}^{n}\left(\sum_{i_2,\dots,i_d=1}^{n} a_{i_1 i_2\dots i_d}\iota_{i_2\dots i_d} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i_2,\dots,i_d=1}^{n} b_{i_1 i_2\dots i_d}\iota_{i_2\dots i_d}\right)\right) =$$

$$= sc\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\alpha_l\in Q_{k,n}\\ l=1,\dots,d}}\left(\sum_{d\in D(A[\alpha_{l=1,\dots,d}])}\prod_{a\in d} a\iota_a\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{d\in D(B\{\alpha_{l=1,\dots,d}\})}\prod_{b\in d} b\iota_b\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\alpha_l\in Q_{k,n}\\ l=1,\dots,d}}\left[sc\left(\sum_{d\in D(A[\alpha_{l=1,\dots,d}])}\prod_{a\in d} a\iota_a\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, sc\left(\sum_{d\in D(B\{\alpha_{l=1,\dots,d}\})}\prod_{b\in d} b\iota_b\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\alpha_l\in Q_{k,n}\\ l=1,\dots,d}}\mathrm{Per}(A[\alpha_{l=1,\dots,d}])\mathrm{Per}(B\{\alpha_{l=1,\dots,d}\}).$$

Таким образом, перманент суммы двух матриц равен сумме по всем подматрицам первой матрицы (включая пустую) произведений перманента подматрицы на перманент дополнительной матрицы аналогичной подматрицы во второй матрице.

2. Перечисление многомерных перестановок

Обычное понятие перестановки легко обобщается на многомерный случай. Пусть, например, числа $1, 2, \dots, n$ расположены в матрице $n \times n$ так, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно по одному числу. Назовем такое расположение *двумерной (квадратичной) перестановкой* n-го порядка. За *тождественную* можно принять перестановку, при которой каждое число i расположено на пересечении i-й строки и i-го столбца.

Пример. Квадратичные перестановки 2-го порядка:

$$\begin{pmatrix}1 & \cdot\\ \cdot & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & \cdot\\ \cdot & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cdot & 1\\ 2 & \cdot\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cdot & 2\\ 1 & \cdot\end{pmatrix}.$$

Квадратичные перестановки 3-го порядка:

$$\begin{pmatrix}1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & 2 & \cdot\\ \cdot & \cdot & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & 3\\ \cdot & 2 & \cdot\end{pmatrix},\ \dots$$

Аналогично можно рассмотреть трехмерные (кубические) (т. е. расположение чисел от 1 до n в кубе $n \times n \times n$), четырехмерные, пятимерные и т. д. перестановки. Вообще, d-мерную перестановку можно определить как набор d

обычных перестановок $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_d)$ [4]. Первая отвечает за перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$ в одном «направлении», вторая — в другом и т. д. Как и в обычном (одномерном) случае, каждой такой перестановке можно поставить в соответствие $(d+1)$-мерную $(0,1)$-матрицу (*матрицу перестановки*). В этой матрице элементы на позициях $(i, \pi_1(i), \pi_2(i), \ldots, \pi_d(i))$ будут равны единице, а все остальные элементы равны нулю. В такой матрице каждая гипергрань будет содержать ровно одну единицу.

Отметим, что существуют и другие подходы к понятию многомерной перестановки. Так, в работах [5, 6] рассматриваются многомерные перестановки, которые задаются многомерными $(0,1)$-матрицами, содержащими ровно по одной единице в каждой одномерной грани. В работе [6] такие перестановки называют *плотными* (англ. dense) в отличие от рассмотренных выше *разреженных* (англ. sparse). Плотные перестановки однозначно ассоциируются с латинскими квадратами размерности n. В дальнейшем под многомерной перестановкой мы будем понимать разреженную перестановку.

В качестве примера рассмотрим многомерное обобщение *перестановок без неподвижных точек (беспорядков)*. Напомним, что беспорядком (англ. derangement) называется перестановка $\pi \in S_n$ такая, что $\pi(i) \neq i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. При обобщении таких перестановок на многомерный случай возникают сразу несколько вариантов. *Частичным d-мерным беспорядком n-го порядка* назовем такую d-мерную перестановку $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_d)$, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдется k такое, что $\pi_k(i) \neq i$. Применяя метод включений-исключений нетрудно показать, что общее число таких перестановок равно

$$p_d(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left[(n-k)!\right]^d .$$

Пусть $m \leq d$. *d-Мерным беспорядком n-го порядка по m индексам* назовем d-мерную перестановку $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_d)$, в которой найдутся индексы $k_1, k_2, \ldots, k_m$ такие, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\pi_{k_1}(i) \neq i$, $\pi_{k_2}(i) \neq i$, …, $\pi_{k_m}(i) \neq i$. Опять же, используя принцип включения-исключения, можно показать, что общее число таких беспорядков равно

$$l_d(n) = (n!)^d \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)^m .$$

Как и в классическом случае, любая $(d+1)$-мерная $(0,1)$-матрица A задает целый класс d-мерных перестановок. А именно, в этот класс попадают те перестановки, для матриц инцидентности P которых выполняется неравенство $P \leq A$, т. е. каждый элемент матрицы P не больше соответствующего элемента матрицы A. Тогда перманент матрицы A, как и в классическом случае, будет равен числу перестановок в этом классе. Например, если рассмотреть $(d+1)$-мерную матрицу n-го порядка A_n^{d+1}, у которой диагональные элементы $a_{ii\ldots i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ равны нулю, а все остальные элементы — единице, то перманент такой матрицы будет равен числу частичных d-мерных беспорядков n-го порядка (ср. [2]):

$$\operatorname{Per} A_n^{d+1} = p_d(n).$$

Рассмотрим $(d+1)$-мерную $(0,1)$-матрицу n-го порядка B_n^{d+1}, в которой элемент равен нулю тогда и только тогда, когда его первый индекс совпадает с одним из m других индексов под номерами k_1, k_2, …, k_m. Тогда перманент этой матрицы равен числу беспорядков по m индексам:

$$\operatorname{Per} B_n^{d+1} = l_d(n).$$

В данных примерах, зная количество перестановок в классе, мы говорили о значении перманента. Но это соотношение можно использовать и в обратную сторону: вычисляя (оценивая) перманент многомерной $(0,1)$-матрицы, получать характеристику количества соответствующих многомерных перестановок.

3. Заключение

В работе рассмотрено выражение перманента многомерных матриц через произведение однородных элементов коммутативной ассоциативной алгебры с нильпотентными индекса 2 образующими. На основе этой взаимосвязи доказаны некоторые простейшие свойства перманента. Рассмотрена его связь с перечислением многомерных перестановок. В частности, более подробно разобран случай многомерных беспорядков.

Отметим, что перманент обычных (двумерных) матриц задается сходным образом с определителем, но, по сравнению с последним, является менее «удобной» для изучения функцией, так как обладает значительно меньшей симметрией с точки зрения преобразований матриц. Многие задачи, связанные с перманентом, не имеют «хорошего» решения в общем виде и сводятся к рассмотрению частных случаев. В многомерном варианте сложность, естественно, еще более возрастает. Тем не менее переход в высшие размерности полезен с той точки зрения, что помимо самостоятельного интереса позволяет с другого ракурса взглянуть и на «базовый» двумерный случай.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Минк, Х. Перманенты / Х. Минк. – Москва : Мир, 1982. – 210 с.
2. Тараненко, А. А. Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения / А. А. Тараненко // Дискретный анализ и исследование операций. – 2016. – Т. 23, № 4. – С. 35–101.
3. Шевелев, В. С. Некоторые вопросы теории перечисления перестановок с ограниченными позициями / В. С. Шевелёв // Итоги науки и техники. Серия Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. – 1992. – Т. 30. – С. 113–177.
4. Zhang, H. Enumeration of factorizable multi-dimensional permutations / H. Zhang, D. Gildea // Journal of Integer Sequences. – 2007. – Vol. 10.

5. Linial, N. An upper bound on the number of high-dimensional permutations / N. Linial, Z. Luria // Combinatorica. – 2014. – V. 25, № 4. – P. 471–486.
6. Eriksson, K. A Combinatorial Theory of Higher-Dimensional Permutation Arrays / K. Eriksson, S. Linusson // Advances in Applied Mathematics. – 2000. – V. 25. – P. 194–211.

References

1. Minc, H. Permanents / H. Minc. – Cambridge University Press, 1984. – 205 p.
2. Taranenko, A. A. Permanenty mnogomernyh matrits: svojstva i prilozhenija [Permanents of multidimensional matrices: properties and applications] / A. A. Taranenko // Diskretnyj analiz i issledovanie operacij [Discrete Analysis and Operations Research]. – 2016. – Vol. 23., № 4. – P. 35–101.
3. Shevelev, V. S. Some problems of the theory of enumerating the permutations with restricted positions / V. S. Shevelev // Journal of Soviet Mathematics. – 1992. – Vol. 61, № 4. – P. 2272–2317.
4. Zhang, H. Enumeration of factorizable multi-dimensional permutations / H. Zhang, D. Gildea // Journal of Integer Sequences. – 2007. – Vol. 10.
5. Linial, N. An upper bound on the number of high-dimensional permutations / N. Linial, Z. Luria // Combinatorica. – 2014. – Vol. 25, № 4. – P. 471–486.
6. Eriksson, K. A combinatorial theory of higher-dimensional permutation arrays / K. Eriksson, S. Linusson // Advances in Applied Mathematics. – 2000. – Vol. 25. – P. 194–211.

Благодарность (госзадание)
Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

Acknowledgement (state task)
The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

Для цитирования:
Ефимов, Д. Б. О перманенте многомерных матриц / Д. Б. Ефимов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 11–15.

For citation:
Efimov, D. B. On the permanent of multidimensional matrices / D. B. Efimov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2024. – № 5 (71). – P. 11–15.

Дата поступления статьи: 10.06.2024
Received: 10.06.2024