

Устойчивость треугольника Рёло под действием нормальной нагрузки

В. Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
vntarasov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Фигурой постоянной ширины называется такая фигура, у которой расстояние между любыми параллельными опорными прямыми одно и то же. Ясно, что таким свойством обладает круг, но не только. Простейшей фигурой постоянной ширины (кроме круга) является треугольник Рёло. В настоящей работе решается задача устойчивости треугольника Рёло, находящегося под действием нормальной нагрузки. Получено значение критического давления.

Ключевые слова:

критическая сила, радиус кривизны, треугольник Рёло, упругая энергия, работа внешних сил, уравнение Эйлера

Введение

Исследование задач устойчивости гибких элементов конструкций и упругих систем в настоящее время занимает одно из центральных мест в механике деформируемого твердого тела и представляет значительный интерес. Теория устойчивости упругих систем берет свое начало с работ Эйлера по теории продольного изгиба (см. обзор Е. И. Николаи «О работах Л. Эйлера по теории продольного изгиба» в [1]). Проблемы упругой устойчивости исследовались многими авторами [2–5]. На основе вариационного подхода можно доказать теорему существования решения уравнений равновесия. Также можно убедиться, что в устойчивом положении равновесия функционал полной энергии достигает локального минимума. Общая концепция упругой бифуркационной устойчивости предложена в монографии В. В. Новожилова [6]. В связи со стремительным развитием вычислительной техники и появлением универсальных численных алгоритмов для решения краевых задач (методы граничных и конечных элементов) к настоящему времени имеются комплексы программ, позволяющие рассчитывать упругие конструкции на устойчивость, например [4]. Некоторые новые задачи устойчивости упругих систем при наличии ограничений в форме неравенств рассмотрены в [7–9].

В общем случае проблемы упругой устойчивости сводятся к нахождению точек бифуркации нелинейных уравнений или нахождению параметров, при которых некоторая вариационная задача имеет несколько решений.

Stability of the Reuleaux triangle under normal load

V. N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar
vntarasov@ipm.komisc.ru

Abstract

A figure of constant width is such a figure that the distance between any parallel reference lines is the same. It is clear that a circle has this property, but not only it. The simplest figure of constant width (except for a circle) is the Reuleaux triangle. This work solves the problem of stability of the Reuleaux triangle under normal load. The critical pressure value has been obtained.

Keywords:

critical force, radius of curvature, Reuleaux triangle, elastic energy, work of external force, Euler's equation

1. Постановка задачи

Представим себе круговое кольцо радиуса \tilde{R} , сжатое нормальным давлением P , равномерно распределенным по длине кольца. Круговая форма кольца будет устойчивой, если сила давления P не превосходит некоторого предела, который называется критическим давлением. Обозначим через μ — жесткость на изгиб кольца. Тогда критическое давление в случае нормальной нагрузки (сила давления направлена все время по нормали к деформированной оси кольца) вычисляется по формуле

$$P = \frac{3\mu}{\tilde{R}^3}. \quad (1)$$

Прямая называется опорой к выпуклой плоской фигуре, если она имеет общие точки с этой фигурой, и вся фигура лежит по одну сторону от прямой. Фигурой постоянной ширины называется такая любая выпуклая фигура, у которой расстояние между двумя любыми параллельными опорными прямыми одно и то же. Очевидно таким свойством обладает круг. Но кроме круга существует еще много фигур постоянной ширины. Простейшей из них является треугольник Рёло. Треугольник Рёло — пересечение трех равных кругов радиуса R с центрами в вершинах правильного треугольника. Таким образом, треугольник Рёло состоит из трех дуг окружностей радиуса R с центральным углом $\frac{\pi}{3}$ (рис. 1).

Представим, что тонкий упругий стержень, ось которого в недеформированном состоянии представляет собой дугу окружности радиуса R , находится под действием сил и нагрузки, распределенной по ее оси. Введем в точке M на оси стержня систему координат (x, y, z) , ось z направлена по касательной к оси стержня, оси x и y — по главным осям инерции поперечного сечения (ось x направлена к центру кривизны дуги, т. е. к соответствующей вершине треугольника). ds — элемент длины стержня, s — длина, отсчитываемая от некоторой точки M_0 . Пусть точка M движется с единичной скоростью ($\frac{ds}{dt} = 1$), тогда система координат (x, y, z) будет вращаться с некоторой угловой скоростью Ω , проекции которой на оси (x, y, z) обозначим через (p, q, r) .

В точке M приложены силы (V_x, V_y, V_z) и моменты (L_x, L_y, L_z) , а также вектор внешней нагрузки (F_x, F_y, F_z) . Тогда уравнения равновесия Кирхгофа [1] имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{ds} - rV_y + qV_z + F_x = 0, \\ \frac{dV_y}{ds} - pV_z + rV_x + F_y = 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x + pV_y + F_z = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{ds} - rL_y + qL_z - V_y = 0, \\ \frac{dL_y}{ds} - pL_z + rL_x + V_x = 0, \\ \frac{dL_z}{ds} - qL_x + pL_y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В недеформированном (первоначальном) состоянии оси x, y, z обозначим через x_0, y_0, z_0 . Соответствующую угловую скорость обозначим через Ω_0 с проекциями (p_0, q_0, r_0) на оси (x_0, y_0, z_0) соответственно.

В результате деформации стержня точка M получает перемещение, проекции которого на оси (x_0, y_0, z_0) обозначим через (u, v, w) . Векторы (p, q, r) и (p_0, q_0, r_0) характеризуют изменения кривизны стержня в результате деформации. Считая деформации малыми, можно записать уравнение Клебша [1]:

$$p = p_0 + \delta p, \quad q = q_0 + \delta q, \quad r = r_0 + \delta r,$$

$$\begin{cases} \delta p = \frac{d\alpha}{ds} - r_0\beta + q_0\gamma, \\ \delta q = \frac{d\beta}{ds} - p_0\gamma + r_0\alpha, \\ \delta r = \frac{d\gamma}{ds} - q_0\alpha + p_0\beta, \end{cases} \quad (4)$$

где (α, β, γ) — косинусы углов между осями (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) .

Таблица 1
Косинусы углов, заключенных между осями (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0)
Table 1
Cosines of angles between the axes (x, y, z) and (x_0, y_0, z_0)

	x	y	z
x_0	1	$-\alpha$	β
y_0	α	1	$-\alpha$
z_0	$-\beta$	α	1

Углы α, β, γ связаны с перемещением уравнениями:

$$\begin{cases} \beta = \frac{du}{ds} + q_0w - r_0v, \\ -\alpha = \frac{dv}{ds} + r_0u - p_0w, \\ 0 = \frac{dw}{ds} + p_0v - q_0u. \end{cases} \quad (5)$$

В табл. 1 приведены косинусы углов между осями x, y, z и x_0, y_0, z_0 . Так как ось стержня в недеформированном состоянии представляет собой дугу окружности, то $p_0 = 0$, $q_0 = \frac{1}{R}$, $r_0 = 0$ и, поскольку дуги нагружены нормальным давлением, то $F_y = 0$. Пусть $ds = R d\vartheta$, где ϑ — центральный угол дуги окружности. В нашем случае деформация кольца плоская, т. е. $p = 0$, $q = q_0$, $r = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$, $V_y = 0$, $L_x = 0$, $L_z = 0$. Таким образом, уравнения Кирхгофа-Клебша упрощаются:

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{ds} + qV_z + F_x = 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x = 0, \\ \frac{dL_y}{ds} + V_x = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку деформации предполагаются малыми, то можно написать [1]

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \delta q, \quad \delta q = \frac{d\beta}{ds}, \quad L_y = \mu \delta q, \\ \beta &= \frac{du}{ds} + q_0w, \quad \delta q = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u \right), \quad u = \frac{dw}{d\vartheta}. \end{aligned}$$

При всякой величине давления на дуги возможна первоначальная, недеформированная форма равновесия. Для этой формы имеем

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = -RP.$$

Полагая в уравнениях (6)

$$V_z = -RP + \delta V_z$$

и отбрасывая в этих уравнениях нелинейные слагаемые, получим

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{d\vartheta} + \delta V_z - RP\delta q = 0, \\ \frac{d\delta V_z}{d\vartheta} - V_x + RPz = 0, \\ \frac{dL_y}{d\vartheta} + RV_x = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Из уравнений (7) легко имеем

$$\frac{d^2V_x}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{R^3P}{\mu} \right) V_x - RPz = 0.$$

Если давление остается нормальным к оси дуги, то $P_z = 0$. Из третьего уравнения (7) получаем

$$V_x = -\frac{1}{R} \frac{dL_y}{d\vartheta} = -\frac{\mu}{R^3} \left(\frac{d^3u}{d\vartheta^3} + \frac{du}{d\vartheta} \right).$$

С учетом условия несжимаемости $u = w'$ окончательно находим уравнение равновесия:

$$\frac{d^6w}{d\vartheta^6} + 2\frac{d^4w}{d\vartheta^4} + \frac{d^2w}{d\vartheta^2} + \rho \left(\frac{d^4u}{d\vartheta^4} + \frac{d^2w}{d\vartheta^2} \right) = 0, \quad (8)$$

где введено обозначение $\rho = \frac{PR^3}{\mu}$. Для функции u уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^4u}{d\vartheta^4} + 2\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u + \rho \left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u \right) + \frac{1}{2 + \rho} (c_5\vartheta + c_6) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (8) является уравнением Эйлера для функционала

$$J = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left[\frac{1}{2} (w''' + w')^2 - \frac{\rho}{2} (w''^2 - w'^2) \right] d\vartheta. \quad (10)$$

Заметим, что первое слагаемое пропорционально потенциальной (упругой) энергии деформированной дуги

$$U = \frac{\mu}{2R^3} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (w''' + w')^2 d\vartheta$$

а второе — пропорционально работе внешних сил

$$W = \frac{P}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (w''^2 - w'^2) d\vartheta.$$

Общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$w = c_1 \sin \vartheta + c_2 \cos \vartheta + c_3 \sin(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) + c_4 \cos(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) + \frac{1}{2 + \rho} (c_5 \vartheta + c_6). \quad (11)$$

2. Решение задачи

Треугольник Рёло состоит из трех дуг окружности радиуса R , точки пересечения этих дуг являются вершинами правильного треугольника, центры кривизны дуг находятся в вершинах, поэтому центральный угол дуг равен $\frac{\pi}{3}$ (рис. 1).

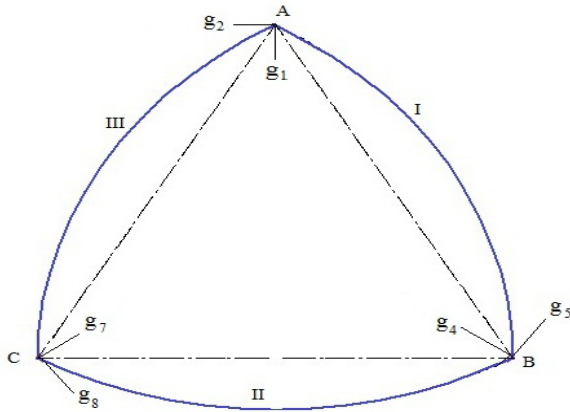


Рисунок 1. Треугольник Рёло. Направления перемещений вершин треугольника Рёло в результате деформации.

Figure 1. Reuleaux triangle. Directions of movement of the vertices of the Reuleaux triangle as a result of deformation.

Пусть каждая дуга нагружена нормальным давлением P , тогда касательное и нормальное перемещения точек каждой дуги определяются формулами:

$$\begin{aligned} u &= w' = c_1 \cos \vartheta - c_2 \sin \vartheta + \\ &+ c_3 \sqrt{\rho + 1} \cos(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) - \\ &- c_4 \sin(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) \sqrt{\rho + 1} + c_5 \frac{1}{2 + \rho}, \quad (12) \\ u' &= w'' = -c_1 \sin \vartheta - c_2 \cos \vartheta - \\ &- c_3 (\rho + 1) \sin(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) - \end{aligned}$$

$$-c_4 \cos(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) (\rho + 1), \quad (13)$$

$$\beta = \frac{1}{R} \left(-c_3 \rho \sin(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) - c_4 \rho \cos(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) + \frac{c_5 \vartheta + c_6}{(2 + \rho)} \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u'' &= -c_1 \cos \vartheta + c_2 \sin \vartheta - \\ &- c_3 \cos(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) (\rho + 1)^{3/2} + \\ &+ c_4 \sin(\sqrt{\rho + 1}\vartheta) (\rho + 1)^{3/2}. \quad (15) \end{aligned}$$

Подставляя (12)–(15) в (10), получим выражение полной энергии для деформированных дуг.

Постоянные интегрирования не могут быть совершенно произвольными: проекции перемещений дуг треугольника Рёло на направления $g_1, g_2, g_4, g_5, g_7, g_8$ на концах дуг должны совпадать. Также должны совпадать углы поворота:

$$\beta(0) = g_3 \text{ для дуги I, } \beta\left(\frac{\pi}{3}\right) = g_3 \text{ для дуги III,}$$

$$\beta\left(\frac{\pi}{3}\right) = g_6 \text{ для дуги I, } \beta(0) = g_6 \text{ для дуги II,}$$

$$\beta\left(\frac{\pi}{3}\right) = g_9 \text{ для дуги II, } \beta(0) = g_9 \text{ для дуги III.}$$

Таким образом, для дуги III $w(\frac{\pi}{3})$ и $u(\frac{\pi}{3})$ должны определяться через перемещения g_1, g_2 вершины A . Для дуги I через эти же перемещения определяются $w(0), u(0)$. Аналогично, для дуги I величины $w(\frac{\pi}{3}), u(\frac{\pi}{3})$ должны определяться через перемещения g_4, g_5 вершины B . Через эти же перемещения определяются $w(0), u(0)$ для дуги II. Значения $w(\frac{\pi}{3}), u(\frac{\pi}{3})$ для дуги II определяются через перемещения g_7, g_8 вершины C . Через эти же перемещения определяются величины $w(0), u(0)$ для дуги III.

Для дуги I постоянные интегрирования обозначим через c_1, c_2, \dots, c_6 , для дуги II — через c_7, c_8, \dots, c_{12} , а для дуги III — через $c_{13}, c_{14}, \dots, c_{18}$. В результате имеем три вектора $C_i \in R^6, i = 1, 2, 3$.

Введем в рассмотрение матрицу H с элементами $h_{ij}, i, j \in 1, \dots, 6$ вида

$$h_{11} = 0, \quad h_{12} = 1, \quad h_{13} = 0,$$

$$h_{14} = 1, \quad h_{15} = 0, \quad h_{16} = \frac{1}{2 + \rho},$$

$$h_{21} = 1, \quad h_{22} = 0, \quad h_{23} = \sqrt{\rho + 1},$$

$$h_{24} = 0, \quad h_{25} = \frac{1}{2 + \rho}, \quad h_{26} = 0,$$

$$h_{31} = 0, \quad h_{32} = 0, \quad h_{33} = 0,$$

$$h_{34} = -\frac{\rho^2 + 2\rho}{2 + \rho}, \quad h_{35} = 0, \quad h_{36} = \frac{1}{2 + \rho},$$

$$h_{41} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad h_{42} = \frac{1}{2}, \quad h_{43} = \sin\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right),$$

$$h_{44} = \cos\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right), \quad h_{45} = \frac{\pi}{3(2+\rho)},$$

$$h_{46} = \frac{1}{2+\rho}, \quad h_{51} = \frac{1}{2}, \quad h_{52} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$h_{53} = \cos\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\sqrt{\rho+1},$$

$$h_{5,4} = -\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\sqrt{\rho+1},$$

$$h_{55} = \frac{1}{(2+\rho)}, \quad h_{56} = 0,$$

$$h_{61} = 0, \quad h_{62} = 0,$$

$$h_{63} = \frac{-3\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\rho^2 - 6\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\rho}{3(2+\rho)},$$

$$h_{64} = \frac{-3\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\rho^2 - 6\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\rho}{3(2+\rho)},$$

$$h_{65} = \frac{\pi}{3(2+\rho)}, \quad h_{66} = \frac{1}{2+\rho}.$$

Введем матрицу поворота M_p

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и обозначим через M_b матрицу

$$M_b = H^{-1}M_p.$$

Пусть g_1, g_2 перемещения вершины треугольника A , причем g_1 направлено к центру треугольника, а g_2 — перпендикулярно к g_1 так, что поворот от g_2 к g_1 происходит против часовой стрелки; g_3 есть угол поворота вершины A . Аналогично g_4, g_5 перемещения вершины B , а g_6 угол поворота вершины B . Величины g_7, g_8 , соответствующие перемещения вершины C , а g_9 угол поворота этой вершины (см. рис. 1).

Деформация дуги l определяется уравнениями (12)–(15), произвольные постоянные c_1, c_2, \dots, c_6 могут быть однозначно выражены через g_1, g_2, \dots, g_6 . Для того, чтобы исключить перемещения треугольника Рёло как жесткого целого, следует положить $g_5 = 0, g_7 = 0, g_8 = 0$.

Введем новые переменные

$$d_1 = g_1, d_2 = g_2, d_3 = g_3, d_4 = g_4, d_5 = g_6, d_6 = g_9.$$

Рассмотрим три вектора

$$l_1 = (d_1, d_2, d_3, d_4, 0, d_6), \quad l_2 = (d_4, 0, d_6, 0, 0, d_6), \\ l_3 = (0, 0, d_6, d_1, d_2, d_3).$$

Векторы C_1, C_2, C_3 выражаются через переменные d_1, d_2, \dots, d_6 по формулам

$$C_i = M_b l_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (12)–(15) для дуг I, II, III, находим выражения для полной энергии деформированных дуг

$$J_i = \int_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} (w_i'' + w_i')^2 - \frac{\rho}{2} (w_i''^2 - w_i'^2) \right] d\vartheta. \quad (17)$$

Полная энергия деформированного треугольника равна

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Заметим, что J представляет собой квадратичную форму от переменных $d = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$. Матрицу этой квадратичной формы обозначим через D . Таким образом, получаем функцию

$$f(d) = \frac{1}{2}(Dd, d).$$

Матрица D зависит от безразмерного параметра $\rho = \frac{PR^3}{\mu}$, который в свою очередь определяется давлением P , радиусом R и жесткостью дуги на изгиб $\mu = EJ_y$ вокруг оси перпендикулярной плоскости дуги. Здесь E — модуль Юнга, J_y — момент инерции поперечного сечения.

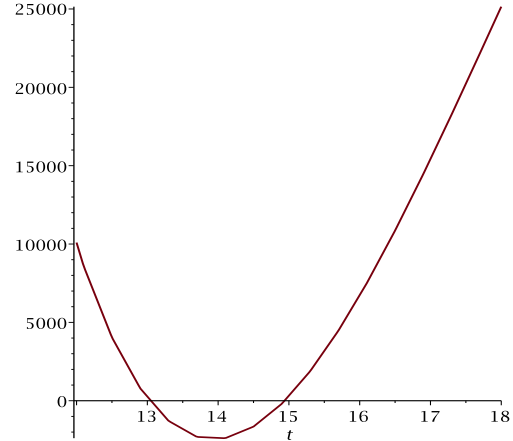


Рисунок 2. График функции $\delta(\rho)10^{-6}$.
Figure 2. Graph of function $\delta(\rho)10^{-6}$.

В положении равновесия функция $f(d)$ принимает минимальное значение, следовательно,

$$\frac{\partial f(d)}{\partial d} = Dd = 0. \quad (18)$$

В уравнении (18) $\frac{\partial f(d)}{\partial d}$ есть градиент функции $f(d)$. Для того, чтобы система уравнений (18) имела нетривиальное

решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta(\rho) = \det(D) = 0. \quad (19)$$

На рис. 2 представлен график определителя матрицы D в зависимости от безразмерного параметра $\rho = \frac{PR^3}{\mu}$. Функция δ обращается в 0 при $\rho = 13.05$ и 14.945 . Ясно, что минимальная критическая нагрузка будет равна

$$P_* = \frac{13.05\mu}{R^3}.$$

Радиус дуг, составляющих треугольник Рёло, равен R и равен диаметру треугольника. Если рассмотреть круг диаметра $R = 2\bar{R}$, то, согласно (1), критическая сила для него будет равна $\frac{24\mu}{R^3}$. Таким образом, круг выдерживает большую нагрузку по сравнению с треугольником Рёло. Если рассматривать замкнутое кольцо, радиус которого равен радиусу кривизны дуг, составляющих треугольник Рёло, то треугольник Рёло будет выдерживать в $\frac{13.05}{3} = 4.35$ большую нормальную нагрузку. Наконец, рассмотрим кольцо, описанное вокруг треугольника ABC (см. рис. 1). Радиус его равен $R_0 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, следовательно, критическая сила для него равна $\frac{3\mu}{R_0^3} = \frac{\sqrt{3}\mu}{R^3}$, т. е. в $\sqrt{3}$ раз меньше.

3. Заключение

Получено значение критического нормального давления P_* для фигуры постоянной ширины — треугольника Рёло. Задача решалась аналитическим методом. Для уравнений равновесия дуг, из которых состоит треугольник Рёло, выписывалось общее решение. Произвольные постоянные определялись из условий непрерывности перемещений и углов поворота концов дуг.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Николаи, Е. Л. Труды по механике / Е. Л. Николаи. – Москва : Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 583 с.
2. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – Москва : Наука, 1967. – 984 с.
3. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения // под ред: Дж. Б. Келлера и С. Антмана. – Москва : Мир, 1974. – 254 с.
4. Перельмутер, А. В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Москва : Издательство СКАД СОФТ, 2010. – 686 с.
5. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Наука, 1967. – 376 с.
6. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – Москва : Гостехиздат, 1948. – 211 с.
7. Тарасов, В. Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих

систем / В. Н. Тарасов. – Сыктывкар : Коми научный центр УрО РАН, 2013. – 238 с.

8. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
9. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

References

1. Nikolai, E. L. Trudy po mekhanike [Writings on mechanics] / E. L. Nikolai. – Moscow : Izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury [Publishing house of technical and theoretical literature], 1955. – 583 p.
2. Vol'mir, A. S. Ustojchivost' deformiruemykh sistem [Stability of deformable systems] / A. S. Vol'mir. – Moscow : Nauka, 1967. – 984 p.
3. Teoriya vetvleniya i nelineynye zadachi na sobstvennye znacheniya [Branching theory and nonlinear eigenvalue problems] // Pod red: Dzh. B. Kellera i S. Antmana. Moscow : Mir, 1974. – 254 p.
4. Perel'muter, A. V. Ustojchivost' ravnovesiya konstrukcij i rodstvennye problemy [Stability of the equilibrium of structures and related problems] / A. V. Perel'muter, V. I. Slivker. – Moscow : Izdatel'stvo SKAD SOFT, 2010. – 686 p.
5. Feodos'ev, V. I. Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected tasks and questions on the resistance of materials] / V.I. Feodos'ev. – Moscow : Nauka, 1967. – 376 p.
6. Novozhilov, V. V. Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti [Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity] / V. V. Novozhilov. – Moscow : Gostekhizdat, 1948. – 211 p.
7. Tarasov, V. N. Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem [Optimization methods in the study of constructive-nonlinear problems of mechanics of elastic systems]. – Syktyvkar : Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2013. – 238 p.
8. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
9. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

Acknowledgement (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

Для цитирования:

Тарасов, В. Н. Устойчивость треугольника Рёло под действием нормальной нагрузки / В. Н. Тарасов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 16–21.

For citation:

Tarasov, V. N. Stability of the Reuleaux triangle under normal load / V. N. Tarasov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2024. – № 5 (71). – P. 16–21.

Дата поступления рукописи: 24.06.2024

Received: 24.06.2024