УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2024-5-46-57

Нерелятивистское приближение в 39-компонентной теории для частицы со спином 2

А. В. Ивашкевич[1], А. В. Бурый[1], Е. М. Овсиюк[2], В. В. Кисель[3], В. М. Редьков[1]

[1]Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, г. Минск, Беларусь
[2]Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина, г. Мозырь, Беларусь
[3]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск, Беларусь

ivashkevich.alina@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
e.ovsiyuk@mail.ru
vasiliy.bspu@mail.ru
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Аннотация

Цель работы — исследование нерелятивистского приближения в 39-компонентной теории частицы со спином 2. Используется явный вид матриц Γ^a размерности 39×39 основного уравнения, записанного в декартовых координатах и с учетом внешних электромагнитных полей. Для выделения в волновой функции больших и малых переменных с точки зрения нерелятивистского приближения используются проективные операторы, строящиеся на основе минимального полинома 7-й степени для матрицы Γ^0. Разбиение на большие и малые переменные проведено в явном виде, в каждой группе найдены независимые переменные, остальные выражены через них. В частности, среди больших переменных независимыми являются только 5. Выведено нерелятивистское уравнение для 5-компонентной волновой функции; в нем выделен член, описывающий взаимодействие магнитного момента частицы с внешним магнитным полем. Этот дополнительный член взаимодействия строится из проекций оператора спина и компонент внешнего магнитного поля.

Ключевые слова:

спин 2, внешнее электромагнитное поле, нерелятивистское приближение, проективные операторы, уравнение Паули для частицы со спином 2, магнитный момент

Nonrelativistic approximation in 39-component theory for a spin 2 particle

A. V. Ivashkevich[1], A. V. Bury[1], E. M. Ovsiyuk[2], V. V. Kisel[3], V. M. Redkov[1]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus
[3]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

ivashkevich.alina@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
e.ovsiyuk@mail.ru
vasiliy.bspu@mail.ru
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Abstract

The goal of the present paper is investigation of the nonrelativistic approximation in the 39-component theory for a spin 2 particle. We apply explicit expressions for four main matrices Γ^a with dimension 39×39 in the relevant first-order system of equations, written in Cartesian coordinates and in presence of external electromagnetic fields. For distinguishing the large and small constituents in the complete wave function, we apply three projective operators constructed on the base of the minimal polynomial of the 7-th order for the matrix Γ^0. The relevant large and small components are found in explicit form. In each group, we have found independent variables; in particular, among the large components there exist only five independent ones. We have derived the nonrelativistic equation for 5-component wave function; it has the term describing interaction of the magnetic moment of the spin 2 particle with the external magnetic field we distinguished. This additional term is constructed by the projections of spin operator S_i and the components of the magnetic field B_i.

Keywords:

spin 2, external electromagnetic field, nonrelativistic approximation, projective operators, Pauli like equation for the spin 2 particle, magnetic moment

Введение

Известная теория Паули-Фирца [1, 2] для частицы со спином 2 основана на уравнениях второго порядка. Ф. И. Федоровым была развита эквивалентная теория на основе уравнений первого порядка. При этом использовалась 39-компонентная полевая функция [3], см. [4]. Позднее им с соавторами была предложена более сложная 50-компонентная теория, которая описывает массивную частицу со спином 2, обладающую помимо электрического заряда аномальным магнитным моментом [5–14]. Цель настоящей работы — анализ нерелятивистского приближения в 39-компонентной теории частицы со спином 2. Следует отметить, что ранее этот вопрос уже исследовался [11]. Было выведено нерелятивистское уравнение для 6-компонентной волновой функции и показано, что связанные между собой шесть уравнений содержат только пять независимых. В работе [11] применялся метод обобщенных символов Кронекера и формализм элементов полной матричной алгебры, кроме того, использовалась ict-метрика Минковского. В настоящей работе этот вопрос исследован заново. При этом мы используем явный вид матриц Γ^a размерности 39×39 основного уравнения, записанного в декартовых координатах. Для выделения в волновой функции больших и малых переменных используются проективные операторы, строящиеся на основе минимального полинома для матрицы Γ^0. Разбиение на большие и малые переменные проведено в явном виде, в каждой группе найдены независимые переменные, а остальные выражены через них. В частности, среди больших переменных независимыми являются только пять. После выполнения необходимых приближений получено нерелятивистское уравнение для 5-компонентной волновой функции; в нем выделен член, описывающий взаимодействие магнитного момента частицы с внешним магнитным полем. Этот дополнительный член взаимодействия строится из проекций оператора спина частицы со спином 2 и компонент внешнего магнитного поля.

1. Представление волновой функции

Уравнение Федорова [3] имеет в матричной форме следующий вид (используем обозначения из [12])

$$\left(\Gamma^a \frac{\partial}{\partial x^a} - m\right) \Psi(x) = 0.$$

Явные выражения для всех матриц см. в [13]. Компоненты полной волновой функции (скаляр; вектор; симметричный тензор; тензор 3-го ранга, антисимметричный по двум индексам), перечисляем так:

$$\Psi = \{\Phi; \Phi_l; f, c, d, f_0; \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} =$$
$$= \{H; H_1; H_2; H_3\},$$
$$H_3 = \Phi_{[mn]l} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\Phi_{[01]l}, \Phi_{[02]l}, \Phi_{[03]l}, \Phi_{[23]l}, \Phi_{[31]l}, \Phi_{[12]l})^t \Rightarrow$$
$$(E_{1k}, E_{2k}, E_{3k}, B_{1k}, B_{2k}, B_{3k})^t = \varphi_k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

где ^{t} обозначает транспонирование. Матрица $\Gamma = \Gamma^0$ удовлетворяет минимальному уравнению $\Gamma^7 - \Gamma^5 = 0$. Это позволяет ввести три проективных оператора с необходимыми свойствами:

$$P_+ = \frac{1}{2}\Gamma^5(\Gamma + I) = P_1, \quad P_- = \frac{1}{2}\Gamma^5(\Gamma - I) = P_2,$$
$$P_0 = I - \Gamma^6 = P_3.$$

Находим явный вид этих трех операторов. Ввиду громоздкости эти выражения опускаем. Действуя проективными операторами на волновую функцию, получаем

$$\Psi_+ =$$
$$= \Big(0, 0, 0, 0, 0, (2E_{11} - E_{22} - E_{33} + 2f_1 - f_2 - f_3)/6,$$
$$(-E_{11} + 2E_{22} - E_{33} - f_1 + 2f_2 - f_3)/6,$$
$$(-E_{11} - E_{22} + 2E_{33} - f_1 - f_2 + 2f_3)/6,$$
$$(2c_1 + E_{23} + E_{32})/4, (2c_2 + E_{13} + E_{31})/4,$$
$$(2c_3 + E_{12} + E_{21})/4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$$
$$(2E_{11} - E_{22} - E_{33} + 2f_1 - f_2 - f_3)/6,$$
$$(2c_3 + E_{12} + E_{21})/4, (2c_2 + E_{13} + E_{31})/4,$$
$$0, 0, 0, (2c_3 + E_{12} + E_{21})/4,$$
$$(-E_{11} + 2E_{22} - E_{33} - f_1 + 2f_2 - f_3)/6,$$
$$(2c_1 + E_{23} + E_{12})/4, 0\Big)^t =$$
$$= \Big(0, 0, 0, 0, 0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, 0, 0, 0, 0, 0,$$
$$0, 0, 0, 0, 0, L_7, L_8, L_9, 0, 0, 0, L_{10}, L_{11}, L_{12}, 0\Big)^t,$$

$$\Psi_- =$$
$$= \Big(0, 0, 0, 0, 0, (-2E_{11} + E_{22} + E_{33} + 2f_1 - f_2 - f_3)/6,$$
$$(E_{11} - 2E_{22} + E_{33} - f_1 + 2f_2 - f_3)/6,$$
$$(E_{11} + E_{22} - 2E_{33} - f_1 - f_2 + 2f_3)/6,$$
$$(2c_1 - E_{23} - E_{32})/4, (2c_2 - E_{13} - E_{31})/4,$$
$$(2c_3 - E_{12} - E_{21})/4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$$
$$(2E_{11} - E_{22} - E_{33} - 2f_1 + f_2 + f_3)/6,$$
$$(-2c_3 + E_{12} + E_{21})/4, (-2c_2 + E_{13} + E_{31})/4,$$
$$0, 0, 0, (-2c_3 + E_{12} + E_{21})/4,$$
$$(-E_{11} + 2E_{22} - E_{33} + f_1 - 2f_2 + f_3)/6,$$
$$(-2c_1 + E_{23} + E_{32})/4, 0\Big)^t =$$
$$= \Big(0, 0, 0, 0, 0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, 0, 0, 0, 0, 0,$$
$$0, 0, 0, 0, 0, S_7, S_8, S_9, 0, 0, 0, S_{10}, S_{11}, S_{12}, 0\Big)^t,$$

$$\Psi_0 =$$
$$= \Big(\Phi, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, (f_1 + f_2 + f_3)/3,$$
$$(f_1 + f_2 + f_3)/3, (f_1 + f_2 + f_3)/3, 0, 0, 0,$$
$$d_1, d_2, d_3, f_0, E_{10}, E_{20}, E_{30}, B_{10}, B_{20}, B_{30},$$
$$(E_{11} + E_{22} + E_{33})/3, (E_{21} - E_{12})/2,$$
$$(E_{31} - E_{13})/2, B_{11}, B_{21}, B_{31},$$
$$(E_{12} - E_{21})/2, (E_{11} + E_{22} + E_{33})/3,$$
$$(E_{32} - E_{23})/2, B_{12}\Big)^t =$$

$$= \Big(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, 0, 0, 0, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12},$$
$$s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21},$$
$$s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28}\Big)^t.$$

Ищем независимые компоненты в каждой из трех групп переменных:

$$\Psi_+, \quad L_{10},\ L_{11},\ L_{13},\ L_{14},\ L_{15},$$
$$L_1 = -L_{11} - L_{15},\ L_2 = L_{11},\ L_3 = L_{15},$$
$$L_4 = L_{14},\ L_5 = L_{13},\ L_6 = L_{10},\ L_7 = -L_{11} - L_{15},$$
$$L_8 = L_{10},\ L_9 = L_{13},\ L_{12} = L_{14};$$
$$\Psi_-, \quad S_{10},\ S_{11},\ S_{13},\ S_{14},\ S_{15},$$
$$S_6 = -S_{10},\ S_7 = -S_{11} - S_{15},\ S_8 = S_{10},$$
$$S_9 = S_{13},\ S_{12} = S_{14};$$
$$\Psi_0, \quad s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6,\ s_9,\ s_{10},\ s_{11},\ s_{12},\ s_{13},$$
$$s_{14},\ s_{15},\ s_{16},\ s_{17}, s_{18},\ s_{19},\ s_{20},\ s_{21},$$
$$s_{22},\ s_{23},\ s_{24},\ s_{27},\ s_{28},\ s_{29},\ s_{30},\ s_{34},\ s_{35},\ s_{36},$$
$$s_7 = s_6,\ s_8 = s_6,\ s_{25} = -s_{20},\ s_{26} = s_{19},$$
$$s_{31} = -s_{21},\ s_{32} = -s_{27},\ s_{33} = s_{19}.$$

2. Получение системы из 39 уравнений

Подставляем волновую функцию, выраженную через независимые большие и малые переменные, в исходное уравнение

$$\left(\Gamma^0 D_0 + \Gamma^1 D_1 + \Gamma^2 D_2 + \Gamma^3 D_3 - M\right)\Psi = 0,$$
$$D_a = (\partial_a + ieA_a). \tag{1}$$

В результате получаем систему из 39 уравнений в явном виде. Сразу же учитываем необходимость для получения нерелятивистских уравнений выделять энергию покоя. Это достигается формальной заменой (здесь M вещественный и положительный массовый параметр)

$$D_0 \Rightarrow (D_0 - iM), \quad M^* = M, \quad M > 0.$$

Важно, что при осуществлении этой формальной замены предполагается вещественность и положительность параметра массы. Ниже мы убедимся, что фактически входящий в уравнение (1) параметр M связан с физической массой $\mu > 0$ соотношением $M = -i\mu$. Следовательно, в конце нужно будет сделать замену

$$-iM = -i(-i\mu) = -\mu, \quad \mu > 0. \tag{2}$$

Кроме того, при получении нерелятивистского приближения следует предполагать, что порядок малости величин следующий:

$$L:\ 1,\ S:\ x,\ s:\ x,\ \frac{1}{M}D_i:\ x,\ \frac{D_0}{M}D_i:\ x^2. \tag{3}$$

Это позволит в каждом уравнении различать большие и малые величины.

В явном виде находим 39 уравнений. Заменяем параметр M в крайних членах в каждом уравнении на δiM. Как становится ясным ниже из требования, чтобы не возникали условия связи на пять независимых больших переменных (см., например, анализ случаев 6–8), следует полагать $\delta = -1$. Пренебрегаем малыми компонентами S_i, s_i на фоне больших L_i и учитываем соотношения (3). Затем собираем в отдельные группы большие величины одного порядка:

$$\mathbf{1}.\quad (D_0 - iM)s_2 - D_1 s_3 - D_2 s_4 - D_3 s_5 - \delta iM s_1 = 0,$$
$$x^1:\quad i(s_1 - s_2) = 0,\ \delta = -1,\ s_2 - s_1 = 0;$$

$$\mathbf{2}.\quad \frac{D_1 s_9}{3M} + \frac{D_2 s_{10}}{3M} + \frac{D_3 s_{11}}{3M} +$$
$$+\left(\frac{D_0}{M} - i\right)\left(\frac{s_1}{2} - \frac{s_{12}}{3}\right) - \delta i s_2 = 0,$$
$$x^1:\quad -\frac{1}{6}i(6\delta s_2 + 3s_1 - 2s_{12}) = 0,\ \delta = -1,$$
$$\frac{1}{2}s_1 - s_2 - \frac{1}{3}s_{12} = 0;$$

$$\mathbf{3}.\quad D_1\left(\frac{1}{3}(-L_{11} - L_{15} + s_6 + S_{11} + S_{15}) + \frac{s_1}{2}\right) +$$
$$+\frac{1}{3}D_2(L_{10} - S_{10}) + \frac{1}{3}D_3(L_{13} - S_{13}) -$$
$$-\frac{1}{3}(D_0 - iM)s_9 - \delta iM s_3 = 0,$$
$$x^1:\quad \frac{D_2 L_{10}}{3M} + \frac{D_3 L_{13}}{3M} - \frac{D_1(L_{11} + L_{15})}{3M} +$$
$$+\frac{1}{3}i(3s_1 + s_9) = 0;$$

$$\mathbf{4}.\quad D_2\left(\frac{1}{3}(L_{11} + s_6 - S_{11}) + \frac{s_1}{2}\right) +$$
$$+\frac{1}{3}D_1(L_{10} - S_{10}) + \frac{1}{3}D_3(L_{14} - S_{14}) -$$
$$-\frac{1}{3}(D_0 - iM)s_{10} - \delta iM s_4 = 0,$$
$$x^1:\quad \frac{D_1 L_{10}}{3M} + \frac{D_2 L_{11}}{3M} + \frac{D_3 L_{14}}{3M} +$$
$$+\frac{1}{3}i(3s_4 + s_{10}) = 0;$$

$$\mathbf{5}.\quad D_3\left(\frac{1}{3}(L_{15} + s_6 - S_{15}) + \frac{s_1}{2}\right) +$$
$$+\frac{1}{3}D_1(L_{13} - S_{13}) + \frac{1}{3}D_2(L_{14} - S_{14}) -$$
$$-\frac{1}{3}(D_0 - iM)s_{11} - \delta iM s_5 = 0,$$
$$x^1:\quad \frac{D_1 L_{13}}{3M} + \frac{D_2 L_{14}}{3M} + \frac{D_3 L_{15}}{3M} +$$
$$+\frac{1}{3}i(3s_5 + s_{11}) = 0;$$

6. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(\frac{1}{4}(-L_{11}-L_{15}-2s_{19}-S_{11}-S_{15})+\right.$

$$+\left.\frac{3}{4}(-L_{11}-L_{15}+s_{19}-S_{11}-S_{15})+\frac{s_2}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_3}{M}\left(-\frac{s_5}{2}+\frac{s_{15}}{4}-\frac{3s_{23}}{4}-\frac{s_{28}}{4}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(-\frac{s_4}{2}+\frac{s_{14}}{4}+\frac{3s_{24}}{4}+\frac{s_{34}}{4}\right)+$$

$$+\frac{D_1}{M}\left(\frac{3s_3}{2}+\frac{s_{13}}{4}+\frac{s_{30}}{4}-\frac{s_{35}}{4}\right)-$$

$$-\delta i(-L_{11}-L_{15}+s_6+S_{11}+S_{15})=0,$$

$$x^0: \quad 0=0,$$

$$x^1: \quad -\frac{1}{4}i\,(2s_2-4s_6+s_{19}-8(S_{11}+S_{15}))=0,$$

$$x^2: \; -\frac{D_0}{M}(L_{11}+L_{15})-\frac{D_3}{4M}(2s_5-s_{15}+3s_{23}+s_{28})+$$

$$+\frac{D_2}{4M}(-2s_4+s_{14}+3s_{24}+s_{34})+$$

$$+\frac{D_1}{4M}(6s_3+s_{13}+s_{30}-s_{35})=0;$$

7. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(\frac{1}{4}(L_{11}-2s_{19}+S_{11})+\right.$

$$+\left.\frac{3}{4}(L_{11}+s_{19}+S_{11})+\frac{s_2}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_3}{M}\left(-\frac{s_5}{2}+\frac{s_{15}}{4}+\frac{s_{23}}{4}+\frac{3s_{28}}{4}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(\frac{3s_4}{2}+\frac{s_{14}}{4}-\frac{s_{24}}{4}+\frac{s_{34}}{4}\right)+$$

$$+\frac{D_1}{M}\left(-\frac{s_3}{2}+\frac{s_{13}}{4}-\frac{3s_{30}}{4}-\frac{s_{35}}{4}\right)-$$

$$-\delta i(L_{11}+s_6-S_{11})=0,$$

$$x^0:\ 0=0,\ x^1:\ -\frac{1}{4}i\,(2s_2-4s_6+s_{19}+8S_{11})=0,$$

$$x^2: \quad \frac{D_0L_{11}}{M}+\frac{D_3}{4M}(-2s_5+s_{15}+s_{23}+3s_{28})+$$

$$+\frac{D_2}{4M}(6s_4+s_{14}-s_{24}+s_{34})-$$

$$-\frac{D_1}{4M}(2s_3-s_{13}+3s_{30}+s_{35})=0;$$

8. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(\frac{1}{4}(L_{15}-2s_{19}+S_{15})+\right.$

$$+\left.\frac{3}{4}(L_{15}+s_{19}+S_{15})+\frac{s_2}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_3}{M}\left(\frac{3s_5}{2}+\frac{s_{15}}{4}+\frac{s_{23}}{4}-\frac{s_{28}}{4}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(-\frac{s_4}{2}+\frac{s_{14}}{4}-\frac{s_{24}}{4}-\frac{3s_{34}}{4}\right)+$$

$$+\frac{D_1}{M}\left(-\frac{s_3}{2}+\frac{s_{13}}{4}+\frac{s_{30}}{4}+\frac{3s_{35}}{4}\right)-$$

$$-\delta i(L_{15}+s_6-S_{15})=0,$$

$$x^0:\ 0=0,\ x^1:\ -\frac{1}{4}i\,(2s_2-4s_6+s_{19}+8S_{15})=0,$$

$$x^2: \quad \frac{D_0L_{15}}{M}+\frac{D_3}{4M}(6s_5+s_{15}+s_{23}-s_{28})-$$

$$-\frac{D_2}{4M}(2s_4-s_{14}+s_{24}+3s_{34})+$$

$$+\frac{D_1}{4M}(-2s_3+s_{13}+s_{30}+3s_{35})=0;$$

9. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(\frac{1}{2}(L_{14}-s_{27}+S_{14})+\right.$

$$+\left.\frac{1}{2}(L_{14}+s_{27}+S_{14})\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(s_5-\frac{s_{28}}{2}\right)+\frac{D_3}{M}\left(s_4+\frac{s_{34}}{2}\right)+$$

$$\frac{D_1}{M}\left(\frac{s_{29}}{2}-\frac{s_{36}}{2}\right)-\delta i(L_{14}-S_{14})=0,$$

$$x^0:\ 0=0,\quad x^1:\ -2iS_{14}=0,$$

$$x^2: \quad \frac{D_0L_{14}}{M}-\frac{D_2}{2M}(s_{28}-2s_5)+$$

$$+\frac{D_3}{2M}(2s_4+s_{34})+\frac{D_1}{2M}(s_{29}-s_{36})=0;$$

10. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(\frac{1}{2}(L_{13}-s_{21}+S_{13})+\right.$

$$+\left.\frac{1}{2}(L_{13}+s_{21}+S_{13})\right)+$$

$$+\frac{D_1}{M}\left(s_5+\frac{s_{23}}{2}\right)+\frac{D_3}{M}\left(s_3-\frac{s_{35}}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(\frac{s_{36}}{2}-\frac{s_{22}}{2}\right)-\delta i(L_{13}-S_{34})=0,$$

$$x^0:\ 0=0,\quad x^1:\ -2iS_{13}=0,$$

$$x^2: \quad \frac{D_0L_{13}}{M}+\frac{D_1}{2M}(2s_5+s_{23})-$$

$$-\frac{D_3}{2M}(s_{35}-2s_3)+\frac{D_2}{2M}(s_{36}-s_{22})=0;$$

11. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(\frac{1}{2}(L_{10}-s_{20}+S_{10})+\right.$

$$+\left.\frac{1}{2}(L_{10}+s_{20}+S_{10})\right)+$$

$$+\frac{D_1}{M}\left(s_4-\frac{s_{24}}{2}\right)+\frac{D_3}{M}\left(\frac{s_{22}}{2}-\frac{s_{29}}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(s_3+\frac{s_{30}}{2}\right)-\delta i(L_{10}-S_{10})=0,$$

$$x^0:\ 0=0,\quad x^1:\ -2iS_{10}=0,$$

$$x^2:\ \frac{D_0L_{10}}{M}-\frac{D_1}{2M}(s_{24}-2s_4)+$$

$$+\frac{D_3}{2M}(s_{22}-s_{29})+\frac{D_2}{2M}(2s_3+s_{30})=0;$$

12. $$\frac{D_2}{M}\left(\frac{1}{2}(L_{10}+s_{20}+S_{10})+\frac{s_{18}}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_3}{M}\left(\frac{1}{2}(L_{13}+s_{21}+S_{13})-\frac{s_{17}}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_1}{M}\left(\frac{1}{2}(-L_{11}-L_{15}+s_{19}-S_{11}-S_{15})+s_2\right)+$$

$$+\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(s_3+\frac{s_{13}}{2}\right)-\delta i s_9=0,$$

$$x^1:\ \frac{D_2L_{10}}{2M}+\frac{D_3L_{13}}{2M}-\frac{D_1(L_{11}+L_{15})}{2M}-$$

$$-\frac{1}{2}i(2s_3-2s_9+s_{13})=0;$$

13. $$\frac{D_1}{M}\left(\frac{1}{2}(L_{10}-s_{20}+S_{10})-\frac{s_{18}}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(\frac{1}{2}(L_{11}+s_{19}+S_{11})+s_2\right)+$$

$$+\frac{D_3}{M}\left(\frac{1}{2}(L_{14}+s_{27}+S_{14})+\frac{s_{16}}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(s_4+\frac{s_{14}}{2}\right)-\delta i s_{10}=0,$$

$$x^1:\ \frac{D_1L_{10}}{2M}+\frac{D_2L_{11}}{2M}+\frac{D_3L_{14}}{2M}-$$

$$-\frac{1}{2}i(2s_4-2s_{10}+s_{14})=0;$$

14. $$\frac{D_1}{M}\left(\frac{1}{2}(L_{13}-s_{21}+S_{13})+\frac{s_{17}}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(\frac{1}{2}(L_{14}-s_{27}+S_{14})-\frac{s_{16}}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_3}{M}\left(\frac{1}{2}(L_{15}+s_{19}+S_{15})+s_2\right)+$$

$$+\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(s_5+\frac{s_{15}}{2}\right)-\delta i s_{11}=0,$$

$$x^1:\ \frac{D_1L_{13}}{2M}+\frac{D_2L_{14}}{2M}+\frac{D_3L_{15}}{2M}-$$

$$-\frac{1}{2}i(2s_5-2s_{11}+s_{15})=0;$$

15. $$\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(\frac{1}{4}(L_{11}+s_{19}+S_{11})+\right.$$

$$+\frac{1}{4}(-L_{11}-L_{15}+s_{19}-S_{11}-S_{15})+$$

$$\left.+\frac{1}{4}(L_{15}+s_{19}+S_{15})+\frac{3s_2}{2}\right)+$$

$$+\frac{D_3}{M}\left(\frac{s_5}{2}+\frac{3s_{15}}{4}-\frac{s_{23}}{4}+\frac{s_{28}}{4}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{M}\left(\frac{s_4}{2}+\frac{3s_{14}}{4}+\frac{s_{24}}{4}-\frac{s_{34}}{4}\right)+$$

$$+\frac{D_1}{M}\left(\frac{s_3}{2}+\frac{3s_{13}}{4}-\frac{s_{30}}{4}+\frac{s_{35}}{4}\right)-\delta i s_{12}=0,$$

$$x^0:\ 0=0,\ x^1:\ -\frac{1}{4}i\,(6s_2-4s_{12}+3s_{19}+)=0,$$

$$x^2:\ \frac{D_3}{4M}(2s_5+3s_{15}-s_{23}+s_{28})+$$

$$+\frac{D_2}{4M}(2s_4+3s_{14}+s_{24}-s_{34})+$$

$$+\frac{D_1}{4M}(2s_3+3s_{13}-s_{30}+s_{35})=0;$$

16. $$\frac{D_1}{M}\left(\frac{1}{3}(-L_{11}-L_{15}+s_6+S_{11}+S_{15})-s_{12}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{3M}\,(L_{10}-S_{10})+\frac{D_3}{3M}\,(L_{13}-S_{13})+$$

$$+\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\frac{2s_9}{3}-\delta i s_{13}=0,$$

$$x^1:\ \frac{D_2L_{10}}{3M}+\frac{D_3L_{13}}{3M}-\frac{D_1L_{11}+(L_{15})}{3M}-$$

$$-\frac{2}{3}is_9+is_{13}=0;$$

17. $$\frac{D_2}{M}\left(\frac{1}{3}(L_{11}+s_6-S_{11})-s_{12}\right)+$$

$$+\frac{D_1}{3M}\,(L_{10}-S_{10})+\frac{D_3}{3M}\,(L_{14}-S_{14})+$$

$$+\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\frac{2s_{11}}{3}-\delta i s_{14}=0,$$

$$x^1:\ \frac{D_1L_{10}}{3M}+\frac{D_2L_{11}}{3M}+\frac{D_3L_{14}}{3M}-$$

$$-\frac{2}{3}is_{10}+is_{14}=0;$$

18. $$\frac{D_3}{M}\left(\frac{1}{3}(L_{15}+s_6-S_{15})-s_{12}\right)+$$

$$+\frac{D_1}{3M}\,(L_{13}-S_{13})+\frac{D_2}{3M}\,(L_{14}-S_{14})+$$

$$+\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\frac{2s_{11}}{3}-\delta i s_{15}=0,$$

$$x^1:\ \frac{D_1L_{13}}{3M}+\frac{D_2L_{14}}{3M}+\frac{D_3L_{15}}{3M}-$$

$$-\frac{2}{3}is_{11}+is_{15}=0;$$

19. $$-D_3s_{10}+D_2s_{11}-\delta iMs_{16}=0,$$

$$x^1: \ \ is_{16}=0, \ \ x^2: \ \ \frac{D_2 s_{11}}{M}-\frac{D_3 s_{10}}{M}=0;$$

20. $\ -D_3 s_9 - D_1 s_{11} - \delta i M s_{17} = 0, \ \ x^1: \ \ is_{17}=0;$

21. $\ -D_2 s_9 + D_1 s_{19} - \delta i M s_{18} = 0, \ \ x^1: \ \ is_{18}=0;$

22. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(-L_{11}-L_{15}+s_6-\frac{s_{12}}{3}+S_{11}+S_{15}\right)-$

$$-\frac{2D_1 s_9}{3M}+\frac{D_2 s_{10}}{3M}+\frac{D_3 s_{11}}{3M}-$$

$$-\delta i(-L_{11}-L_{15}+s_{19}-S_{11}-S_{15})=0,$$

$$x^0: \quad 0=0,$$

$$x^1: \quad -\frac{1}{3}i\left(3s_6-s_{12}-3s_{19}+6(S_{11}+S_{15})\right)=0,$$

$$x^2: \ -\frac{D_0(L_{11}+L_{15})}{M}-\frac{2D_1 s_9}{3M}+\frac{D_2 s_{10}}{3M}+\frac{D_3 s_{11}}{3M}=0;$$

23. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)(L_{10}-S_{10})-\frac{D_2 s_9}{3M}-$

$$-\delta i(L_{10}+s_{20}+S_{10})=0,$$

$$x^0: \quad 0=0, \quad x^1: \ \ i(s_{20}+2S_{10})=0,$$

$$x^2: \ \ \frac{D_0 L_{10}}{M}-\frac{D_2 s_9}{M}=0;$$

24. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)(L_{13}-S_{13})-\frac{D_3 s_9}{M}-$

$$-\delta i(L_{13}+s_{21}+S_{13})=0,$$

$$x^0: \quad 0=0, \quad x^1: \ \ i(s_{21}+2S_{13})=0,$$

$$x^2: \ \ \frac{D_0 L_{13}}{M}-\frac{D_3 s_9}{M}=0;$$

25. $\frac{D_3}{M}(L_{10}-S_{10})+\frac{D_2}{M}(L_{13}-S_{13})-\delta i s_{22}=0,$

$$\delta=-1, \ \ x^1: \ \ -\frac{D_3 L_{10}}{M}+\frac{D_2 L_{13}}{M}+is_{22}=0;$$

26. $\frac{D_3}{M}\Big(\frac{1}{3}(L_{15}+s_6-S_{15})-L_{11}-L_{15}+$

$$+s_6+S_{11}+S_{15}\Big)-\frac{2}{3M}D_1(L_{13}-S_{13})+$$

$$+\frac{1}{3M}D_2(L_{14}-S_{14})-\frac{1}{3M}(D_0-iM)s_{11}-\delta i s_{23}=0,$$

$$x^1: \ \ -\frac{2D_1 L_{13}}{3M}+\frac{D_2 L_{14}}{3M}-\frac{D_3(3L_{11}+2L_{15})}{3M}+$$

$$+\frac{1}{3}i(s_{11}+3s_{23})=0;$$

27. $\frac{D_2}{3}M(2L_{11}+3L_{15}-4s_6-2S_{11}-3S_{15})+$

$$+\frac{2D_1}{3M}(L_{10}-S_{10})+\frac{D_3}{3M}(S_{14}-L_{14})+$$

$$+\frac{(D_0-iM)s_{10}}{3M}+is_{24}=0, \quad \delta=-1,$$

$$x^1: \ \ \frac{2D_1 L_{10}}{3M}-\frac{D_3 L_{14}}{3M}+\frac{D_2(2L_{11}+3L_{15})}{3M}-$$

$$-\frac{1}{3}i(s_{10}-3s_{24})=0;$$

28. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)(L_{10}-S_{10})-\frac{D_1 s_{10}}{3M}-$

$$-\delta i(L_{10}-s_{20}+S_{10})=0,$$

$$x^0: \quad 0=0, \quad x^1: \ \ -i(s_{20}-2S_{10})=0,$$

$$x^2: \ \ \frac{D_0 L_{10}}{M}-\frac{D_1 s_{10}}{M}=0;$$

29. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)\left(L_{11}+s_6-\frac{s_{12}}{3}-S_{11}\right)+$

$$+\frac{D_1 s_9}{3M}-\frac{2D_2 s_{10}}{3M}+\frac{D_3 s_{11}}{3M}-$$

$$-\delta i(L_{11}+s_{19}+S_{11})=0,$$

$$x^0: \quad 0=0,$$

$$x^1: \quad -\frac{1}{3}i\left(-3(s_{19}+2S_{11})+3s_6-s_{12}\right)=0,$$

$$x^2: \ \ \frac{D_0 L_{11}}{M}+\frac{D_1 s_9}{3M}-\frac{2D_2 s_{10}}{3M}+\frac{D_3 s_{11}}{3M}=0;$$

30. $\left(\frac{D_0}{M}-i\right)(L_{14}-S_{14})-\frac{D_3 s_{10}}{M}-$

$$-\delta i(L_{14}+s_{27}+S_{14})=0, \quad x^0: \ \ 0=0,$$

$$x^1: \ \ i(s_{27}+2S_{14})=0, \quad x^2: \ \ \frac{D_0 L_{14}}{M}-\frac{D_3 s_{10}}{M}=0;$$

31. $\frac{D_3}{3M}(-3L_{11}-L_{15}-4s_6+3S_{11}+S_{15})+$

$$+\frac{D_1}{3M}(S_{13}-L_{13})+\frac{2D_2}{3M}(L_{14}-S_{14})+$$

$$+\frac{(D_0-iM)s_{11}}{3M}-\delta i s_{28}=0,$$

$$x^1: \ \ -\frac{D_1 L_{13}}{3M}+\frac{2D_2 L_{14}}{3M}-\frac{D_3(3L_{11}+L_{15})}{3M}-$$

$$-\frac{1}{3}i(s_{11}-3s_{28})=0;$$

32. $\frac{D_3}{M}(L_{10}-S_{10})+\frac{D_1}{M}(S_{14}-L_{14})-\delta i s_{29}=0,$

$$\delta=-1, \ \ x^1: \ \ \frac{D_3 L_{10}}{M}-\frac{D_1 L_{14}}{3M}+is_{29}=0;$$

33. $\frac{D_1}{M}\Big(\frac{1}{3}(-L_{11}-L_{15}+s_6+S_{11}+S_{15})+$

$$+L_{11}+s_6-S_{11}\Big)-\frac{2D_2}{3M}(L_{10}-S_{10})+\frac{D_3}{3M}(L_{13}-S_{13})-$$

$$-\frac{(D_0-iM)s_9}{3M}-\delta i s_{30}=0,$$

$$x^1: \ \ -\frac{2D_2 L_{10}}{3M}+\frac{D_3 L_{13}}{3M}-\frac{D_1(L_{15}-2L_{11})}{3M}+$$

$$+\frac{1}{3}i(s_9+3s_{30})=0;$$

34. $$\left(\frac{D_0}{M}-i\right)(L_{13}-S_{13})-\frac{D_1 s_{11}}{M}-$$
$$-\delta i(L_{13}-s_{21}+S_{13})=0,\quad x^0:\ \ 0=0,$$
$$x^1:\ \ -i(s_{21}-2S_{13})=0,\quad x^2:\ \ \frac{D_0L_{13}}{M}-\frac{D_1s_{11}}{M}=0;$$

35. $$\left(\frac{D_0}{M}-i\right)(L_{14}-S_{14})-\frac{D_2 s_{11}}{M}-$$
$$-\delta i(L_{14}-s_{27}+S_{14})=0,\quad x^0:\ \ 0=0,$$
$$x^1:\ \ -i(s_{27}-2S_{14})=0,\quad x^2:\ \ \frac{D_0L_{14}}{M}-\frac{D_2s_{11}}{M}=0;$$

36. $$\left(\frac{D_0}{M}-i\right)(L_{15}+s_6-\frac{s_{12}}{3}-S_{15})+\frac{D_1s_9}{3M}+$$
$$+\frac{D_2s_{10}}{3M}-\frac{2D_3s_{11}}{3M}-\delta i(L_{15}+s_{19}+S_{15})=0,$$
$$x^0:\ \ 0=0,\ \ x^1:\ \ -\frac{1}{3}i(-3(s_{19}+2S_{15})+3s_6-s_{12})=0,$$
$$x^2:\ \ \frac{D_0L_{15}}{M}+\frac{D_1s_9}{3M}+\frac{D_2s_{10}}{3M}-\frac{2D_3s_{11}}{3M}=0;$$

37. $$\frac{D_2}{M}\Big(\frac{1}{3}(L_{11}+s_6-S_{11})+L_{15}+s_6-S_{15}\Big)+$$
$$+\frac{D_1}{3M}(L_{10}-S_{10})-\frac{2D_3}{3M}(L_{14}-S_{14})-$$
$$-\frac{(D_0-iM)s_{10}}{3M}-\delta i s_{34}=0,$$
$$x^1:\ \ \frac{D_1L_{10}}{3M}-\frac{2D_3L_{14}}{3M}+\frac{D_2(L_{11}+3L_{15})}{3M}+$$
$$+\frac{1}{3}i(s_{10}+3s_{34})=0;$$

38. $$\frac{D_1}{M}(L_{11}-2L_{15}-4s_6-S_{11}+2S_{15})+$$
$$+\frac{D_2}{3M}(L_{10}-S_{10})+\frac{2D_3}{3M}(L_{13}-S_{13})+$$
$$+\frac{(D_0-iM)s_9}{3M}-\delta i s_{35}=0,$$
$$x^1:\ \ -\frac{D_2L_{10}}{3M}+\frac{2D_3L_{13}}{3M}+\frac{D_1(L_{11}-2L_{15})}{3M}-$$
$$-\frac{1}{3}i(s_9-3s_{35})=0;$$

39. $$\frac{D_2}{M}(S_{13}-L_{13})+\frac{D_1}{3M}(L_{14}-S_{14})-\delta i s_{36}=0,$$
$$x^1:\ \ -\frac{D_2L_{13}}{M}+\frac{D_1L_{14}}{M}+is_{36}=0.$$

3. Исключение малых компонент

Эти уравнения можно распределить в три группы: в группу I собираем линейные связи между малыми переменными, в группу II — уравнения, позволяющие выразить малые переменные через большие с использованием операторов D_1, D_2, D_3, в группу III —уравнения, содержащие оператор D_0. Для получения уравнений с нерелятивистской структурой достаточно воспользоваться только уравнениями из групп II и III. Решаем систему уравнений из группы II относительно малых переменных, в результате получаем

$$s_3=0,\ \ s_4=0,\ \ s_5=0,$$
$$s_9=\frac{i}{M}\big(D_2L_{10}+D_3L_{13}-D_1(L_{11}+L_{15})\big)=s_{13},$$
$$s_{10}=\frac{i}{M}(D_1L_{10}+D_2L_{11}+D_3L_{14})=s_{14},$$
$$s_{11}=\frac{i}{M}(D_1L_{13}+D_2L_{14}+D_3L_{15})=s_{15},$$
$$s_{22}=\frac{i}{M}(D_2L_{13}-D_3L_{10}),$$
$$s_{23}=-\frac{i}{M}\big(D_1L_{13}+D_3(L_{11}+L_{15})\big),$$
$$s_{24}=\frac{i}{M}\big(D_1L_{10}+D_2(L_{11}+L_{15})\big),$$
$$s_{28}=\frac{i}{M}(D_2L_{14}-D_3L_{11}),$$
$$s_{29}=\frac{i}{M}(D_3L_{10}-D_1L_{14}),$$
$$s_{30}=\frac{i}{M}(D_1L_{11}-D_2L_{10}),$$
$$s_{34}=\frac{i}{M}(D_2L_{15}-D_3L_{14}),$$
$$s_{35}=\frac{i}{M}(D_3L_{13}-D_1L_{15}),$$
$$s_{36}=\frac{i}{M}(D_1L_{14}-D_2L_{13}).$$

Подставляем эти выражения для малых переменных в уравнения из группы III. В получающихся уравнениях группируем слагаемые по большим переменным. В результате получаем 15 уравнений с необходимой нерелятивистской структурой. Для дальнейшего их удобно пронумеровать, также вводим более короткие обозначения

$$L_{10}=L_1,\ L_{11}=L_2,\ L_{13}=L_3,\ L_{14}=L_4,\ L_{15}=L_5$$

и выделяем в уравнениях члены с производной D_0:

1. $$iD_2D_1L_1+iD_2D_2L_2+iD_3D_3L_2+iD_3D_1L_3+$$
$$+iD_2D_2L_5+iD_3D_3L_5-D_0L_2M-D_0L_5M=0,$$

2. $$iD_1D_2L_1-iD_1D_1L_2-iD_3D_3L_2+$$
$$+iD_3D_2L_4+D_0L_2M=0,$$

$$\mathbf{3}.\quad iD_1D_3L_3+iD_2D_3L_4-iD_1D_1L_3- -iD_2D_2L_3+D_0L_5M=0,$$

$$\mathbf{4}.\ \frac{1}{2}iD_1D_3L_4+\frac{1}{2}iD_2D_3L_2+\frac{1}{2}iD_1D_2L_3-iD_1D_1L_4- -\frac{1}{2}iD_2D_2L_4-\frac{1}{2}iD_3D_3L_4+\frac{1}{2}iD_3D_2L_5+D_0L_4M=0,$$

$$\mathbf{5}.\ \frac{1}{2}iD_2D_3L_1-\frac{1}{2}iD_1D_3L_2-\frac{1}{2}iD_1D_1L_3-iD_2D_2L_3- -\frac{1}{2}iD_3D_3L_3+\frac{1}{2}iD_2D_1L_4+\frac{1}{2}iD_3D_1L_5- -\frac{1}{2}iD_1D_3L_5+D_0L_3M=0,$$

$$\mathbf{6}.\ -\frac{1}{2}iD_1D_1L_1-\frac{1}{2}iD_2D_2L_1-iD_3D_3L_1+\frac{1}{2}iD_2D_1L_2- -\frac{1}{2}iD_1D_2L_2+\frac{1}{2}iD_3D_2L_3+\frac{1}{2}iD_3D_1L_4- -\frac{1}{2}iD_1D_2L_5+D_0L_1M=0,$$

$$\mathbf{7}.\ \frac{1}{3}iD_2D_1L_1-\frac{2}{3}iD_1D_2L_1+\frac{2}{3}iD_1D_1L_2+\frac{1}{3}iD_2D_2L_2+ +\frac{1}{3}iD_3D_1L_3-\frac{2}{3}iD_1D_3L_3+\frac{1}{3}iD_3D_2L_4+\frac{1}{3}iD_2D_3L_4+ +\frac{2}{3}iD_1D_1L_5+\frac{1}{3}iD_3D_3L_5-D_0L_2M-D_0L_5M=0,$$

$$\mathbf{8}.\quad -iD_2D_2L_1+iD_2D_1L_2-iD_2D_3L_3+ +iD_2D_1L_5+D_0L_1M=0,$$

$$\mathbf{9}.\quad -iD_3D_2L_1+iD_3D_1L_2-iD_3D_3L_3+ +iD_3D_1L_5+D_0L_3M=0,$$

$$\mathbf{10}.\ -iD_1D_1L_1-iD_1D_2L_2-iD_1D_3L_4+D_0L_1M=0,$$

$$\mathbf{11}.\ -\frac{2}{3}iD_2D_1L_1+\frac{1}{3}iD_1D_2L_1-\frac{1}{3}iD_1D_1L_2- -\frac{2}{3}iD_2D_2L_2+\frac{1}{3}iD_3D_1L_3+\frac{1}{3}iD_1D_3L_3+\frac{1}{3}iD_3D_2L_4- -\frac{2}{3}iD_2D_3L_4-\frac{1}{3}iD_1D_1L_5+\frac{1}{3}iD_3D_3L_5+D_0L_2M=0,$$

$$\mathbf{12}.\ -iD_3D_1L_1-iD_3D_2L_2-iD_3D_3L_4+D_0L_4M=0,$$

$$\mathbf{13}.\ -iD_1D_1L_3-iD_1D_2L_4-iD_1D_3L_5+D_0L_3M=0,$$

$$\mathbf{14}.\ -iD_2D_1L_3-iD_2D_2L_4-iD_2D_3L_5+D_0L_4M=0,$$

$$\mathbf{15}.\ \frac{1}{3}iD_2D_1L_1+\frac{1}{3}iD_1D_2L_1-\frac{1}{3}iD_1D_1L_2+ +\frac{1}{3}iD_2D_2L_2-\frac{2}{3}iD_3D_1L_3+\frac{1}{3}iD_1D_3L_3-\frac{2}{3}iD_3D_2L_4+ +\frac{1}{3}iD_2D_3L_4-\frac{1}{3}iD_1D_1L_5-\frac{2}{3}iD_3D_3L_5+D_0L_5M=0.$$

Далее преобразуем все уравнения с учетом тождеств

$$D_iD_j=\frac{1}{2}(D_iD_j+D_jD_i)+\frac{1}{2}(D_iD_j-D_jD_i)= =\frac{1}{2}(D_iD_j+D_jD_i)+ieF_{ij}=D_{ij}+ieF_{ij}.$$

Тогда возникнут уравнения, составленные из величин

$$2iMD_0L_k,\ D_{(11)}=D_1^2L_k,\ D_{(22)}=D_2^2L_k,$$

$$D_{(33)}=D_3^2L_k,\ D_{(23)}L_k,\ D_{(32)}L_k,\ D_{(12)}L_k,$$

$$F_{(23)}L_k,\ F_{(31)}L_k,\ F_{(12)}L_k.$$

Будем комбинировать эти уравнения, как указано ниже.

Сначала получаем пять уравнений с нужной структурой

$$\mathbf{10},\ 2iD_0L_1M+2D_{11}L_1+2D_{12}L_2+2D_{31}L_4+ +2ieF_{12}L_2-2ieF_{31}L_4=0,$$

$$\mathbf{2+10},\ 2iD_0L_2M-\frac{2D_{12}L_1}{3}+\frac{4D_{11}L_2}{3}+\frac{2D_{22}L_2}{3}+ +D_{33}L_2-\frac{2D_{31}L_3}{3}-\frac{2D_{23}L_4}{3}+\frac{D_{11}L_5}{3}-\frac{D_{33}L_5}{3}- -2ieF_{12}L_1+2ieF_{23}L_4=0,$$

$$\mathbf{13},\ 2iD_0L_3M+2D_{11}L_3+2D_{12}L_4+2D_{31}L_5+ +2ieF_{12}L_4-2ieF_{31}L_5=0,$$

$$\mathbf{14},\ 2iD_0L_4M+2D_{12}L_3+2D_{22}L_4+2D_{23}L_5- -2ieF_{12}L_3+2ieF_{23}L_5=0,$$

$$\mathbf{3},\ 2iD_0L_5M-2D_{31}L_3-2D_{23}L_4+2D_{11}L_5+ +2D_{22}L_5+2ieF_{31}L_3-2ieF_{23}L_4=0. \qquad (4)$$

4. Уравнения связи

Потом получаем уравнения связи (около каждого уравнения указан способ его получения) $(\mathbf{1+7})+(\mathbf{2+11})+\mathbf{2}\cdot(\mathbf{3})$

$$-\frac{8D_{12}L_2}{3}+\frac{4D_{11}L_2}{3}-\frac{4D_{22}L_2}{3}-\frac{20D_{23}L_4}{3}+$$
$$+\frac{10D_{11}L_5}{3}+2D_{22}L_5-\frac{10D_{33}L_5}{3}=0,$$

$\mathbf{1-7}$

$$-\frac{8D_{12}L_2}{3}+\frac{4D_{11}L_2}{3}-\frac{4D_{22}L_2}{3}-2D_{33}L_2-\frac{8D_{31}L_3}{3}+$$
$$+\frac{4D_{23}L_4}{3}+\frac{4D_{11}L_3}{3}-2D_{22}L_5-\frac{4D_{33}L_5}{3}3=0,$$

$\mathbf{6-10}$

$$-D_{11}L_1+D_{22}L_1+2D_{33}L_1-2D_{12}L_2-D_{23}L_3-$$
$$-D_{31}L_4+D_{12}L_5+ieF_{23}L_3+ieF_{31}L_4+ieF_{12}L_5=0,$$

$\mathbf{8-10}$

$$-D_{11}L_1+2D_{22}L_1-4D_{12}L_2+2D_{23}L_3-2D_{31}L_4-$$
$$-2D_{12}L_5+2ieF_{23}L_3+2ieF_{31}L_4+2ieF_{12}L_5=0,$$

$\mathbf{2-11}$

$$-\frac{8D_{12}L_1}{3}+\frac{4D_{11}L_2}{3}-\frac{4D_{22}L_2}{3}+2D_{33}L_2+\frac{4D_{31}L_3}{3}-$$
$$-\frac{8D_{23}L_4}{3}-\frac{2D_{11}L_5}{3}+2D_{33}L_5=0,$$

$\mathbf{5-13}$

$$-D_{23}L_1+D_{31}L_2-D_{11}L_3+2D_{22}L_3+D_{33}L_3-$$
$$-3D_{12}L_4-2D_{31}L_5-ieF_{23}L_1-ieF_{31}L_2-ieF_{12}L_4=0,$$

$\mathbf{9-13}$

$$2D_{23}L_1-2D_{31}L_2-2D_{11}L_3+2D_{33}L_3-2D_{12}L_4-$$
$$-4D_{31}L_5-2ieF_{23}L_1-2ieF_{31}L_2-2ieF_{12}L_4=0,$$

$\mathbf{4-14}$

$$-D_{31}L_1-D_{23}L_2-3D_{12}L_3+2D_{11}L_4-D_{22}L_4+$$
$$+D_{33}L_4-3D_{23}L_5+ieF_{31}L_1-$$
$$-ieF_{23}L_2+ieF_{12}L_3-ieF_{23}L_5=0,$$

$\mathbf{12-14}$

$$2D_{31}L_1+2D_{23}L_2-2D_{12}L_3-2D_{22}L_4+2D_{33}L_4-$$
$$-2D_{23}L_5+2ieF_{31}L_1-2ieF_{23}L_2+$$
$$+2ieF_{12}L_3-2ieF_{23}L_5=0,$$

$\mathbf{15-3}$

$$-\frac{4D_{12}L_1}{3}+\frac{2D_{11}L_2}{3}-\frac{2D_{22}L_2}{3}+\frac{8D_{31}L_3}{3}+$$
$$+\frac{8D_{23}L_4}{3}-\frac{4D_{11}L_5}{3}-2D_{22}L_5+\frac{4D_{33}L_5}{3}=0,$$

Запишем последнюю систему из 10 уравнений в матричной форме

$$A_{(10\times15)}\big(D_{12}L_1,D_{12}L_2,D_{12}L_3,D_{12}L_4,D_{12}L_5,$$
$$D_{31}L_1,D_{31}L_2,D_{31}L_3,D_{31}L_4,D_{31}L_5,D_{23}L_1,$$
$$D_{23}L_2,D_{23}L_3,D_{23}L_4,D_{23}L_5\big)^t=Y_{(10\times1)}. \quad (5)$$

Столбец $Y_{(10\times1)}$ имеет следующие строки

$$Y_1=-\frac{4D_{11}L_2}{3}+\frac{4D_{22}L_2}{3}-\frac{10D_{11}L_5}{3}-$$
$$-2D_{22}L_5+\frac{10D_{33}L_5}{3},$$
$$Y_2=-\frac{4D_{11}L_2}{3}+\frac{4D_{22}L_2}{3}+2D_{33}L_2-\frac{4D_{11}L_5}{3}+$$
$$+2D_{22}L_5+\frac{4D_{33}L_5}{3},$$
$$Y_3=D_{11}L_1-D_{22}L_1-2D_{33}L_1-ieF_{23}L_3-$$
$$-ieF_{31}L_4-ieF_{12}L_5,$$
$$Y_4=2D_{11}L_1-2D_{22}L_1-$$
$$-2ieF_{23}L_3-2ieF_{31}L_4-2ieF_{12}L_5,$$
$$Y_5=-\frac{4D_{11}L_2}{3}+\frac{4D_{22}L_2}{3}-2D_{33}L_2+$$
$$+\frac{2D_{11}L_5}{3}-\frac{2D_{33}L_5}{3},$$
$$Y_6=D_{11}L_3-2D_{22}L_3-D_{33}L_3+ieF_{23}L_1+$$
$$+ieF_{31}L_2+ieF_{12}L_4,$$
$$Y_7=2D_{11}L_3-2D_{33}L_3+2ieF_{23}L_1+$$
$$+2ieF_{31}L_2+2ieF_{12}L_4,$$
$$Y_8=-2D_{11}L_4+D_{22}L_4-D_{33}L_4-ieF_{31}L_1+ieF_{23}L_2-$$
$$-ieF_{12}L_3+ieF_{23}L_5,$$
$$Y_9=2D_{22}L_4-2D_{33}L_4-2ieF_{31}L_1+2ieF_{23}L_2-$$
$$-2ieF_{12}L_3+2ieF_{23}L_5,$$
$$Y_{10}=-\frac{2D_{11}L_2}{3}+\frac{2D_{22}L_2}{3}+\frac{4D_{11}L_5}{3}+$$
$$+2D_{22}L_5-\frac{4D_{33}L_5}{3}. \quad (6)$$

Матрица $A_{(10\times15)}$ в левой части уравнения (5) имеет следующие ненулевые элементы

$$A_{11}=A_{21}=A_{51}=A_{28}=A_{5,14}=-A_{10,8}=$$
$$=-A_{10,14}=-\frac{8}{3},\quad A_{58}=A_{2,14}=-A_{10,1}=\frac{4}{3},$$
$$A_{32}=A_{93}=A_{74}=A_{45}=A_{96}=A_{77}=A_{49}=$$
$$=A_{6,10}=A_{9,15}=-A_{96}=-A_{7,11}=-A_{9,12}=$$
$$=-A_{4,13}=-2,\quad A_{83}=A_{64}=A_{39}=A_{8,15}=-3,$$
$$A_{42}=A_{7,10}=-4,\quad A_{86}=A_{6,11}=A_{8,12}=A_{3,13}=$$

$$= -A_{35} = -A_{67} = -1, \quad A_{18} = A_{1,14} = -\frac{20}{3}.$$

Остальные элементы матрицы равны нулю.

Убеждаемся, что ранг матрицы $A_{(10\times 15)}$ равен 9, поскольку при отбрасывании первой строки ранг не меняется. Следовательно, первая строка должна раскладываться по девяти остальным $x_1 = b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_{10}x_{10}$. Легко находим необходимые коэффициенты: $b_2 = 1,\ b_3 = 0,\ b_4 = 0,\ b_5 = 1,\ b_6 = 0,\ b_7 = 0,\ b_8 = 0,\ b_9 = 0,\ b_{10} = -2$. Убеждаемся, что такое же разложение верно и для строк в правой части уравнения $y_1 = b_2y_2 + b_3y_3 + \ldots + b_{10}y_{10}$. Следовательно, в системе 10 уравнений первое можно отбросить, поскольку оно — это следствие остальных. Таким образом, получаем более простую неоднородную систему из девяти уравнений

$$A_{(9\times 15)}\big(D_{12}L_1, D_{12}L_2, D_{12}L_3, D_{12}L_4, D_{12}L_5,$$
$$D_{31}L_1, D_{31}L_2, D_{31}L_3, D_{31}L_4, D_{31}L_5, D_{23}L_1,$$
$$D_{23}L_2, D_{23}L_3, D_{23}L_4, D_{23}L_5\big)^t = \hat{Y}_{(9\times 1)}.$$

Строки столбца $\hat{Y}_{(9\times 1)}$ совпадают со строками столбца $Y_{(10\times 1)}$ (6) начиная со второй $\hat{Y}_k = Y_{k+1},\quad k = 1, 2, \ldots, 9.$

В матрице 9×15 ищем подматрицу 9×9 с ненулевым определителем. Убеждаемся, что можно оставить столбцы $1, 2, \ldots, 8, 14$. В результате получаем эквивалентное неоднородное уравнение. Его решение находим стандартным методом

$$D_{12}L_1 = \frac{1}{2}(D_{11}L_2 - D_{22}L_2 - D_{22}L_5),$$

$$D_{12}L_2 = \frac{1}{2}(-D_{11}L_1 + D_{22}L_1 + D_{33}L_1 - 2D_{31}L_4 +$$
$$+ieF_{23}L_3 + ieF_{31}L_4 + ieF_{12}L_5),$$

$$D_{12}L_3 = \frac{1}{2}(D_{11}L_4 - D_{22}L_4 + D_{33}L_4 - 2D_{23}L_5 +$$
$$+ieF_{31}L_1 - ieF_{23}L_2 + ieF_{12}L_3 - ieF_{23}L_5),$$

$$D_{12}L_4 = \frac{1}{2}(-D_{11}L_3 + D_{22}L_3 + D_{33}L_3 - 2D_{31}L_5 -$$
$$-ieF_{23}L_1 - ieF_{31}L_2 - ieF_{12}L_4),$$

$$D_{12}L_5 = -D_{33}L_1 + D_{23}L_3 + D_{31}L_4,$$

$$D_{31}L_1 = \frac{1}{2}(-2D_{23}L_2 + D_{11}L_4 + D_{22}L_4 - D_{33}L_4 -$$
$$-ieF_{31}L_1 + ieF_{23}L_2 - ieF_{12}L_3 + ieF_{23}L_5),$$

$$D_{31}L_2 = \frac{1}{2}(2D_{23}L_2 - D_{11}L_3 - D_{22}L_3 + D_{33}L_3 -$$
$$2D_{31}L_5 - ieF_{23}L_1 - ieF_{31}L_2 - ieF_{12}L_4),$$

$$D_{31}L_3 = \frac{1}{2}(-D_{33}L_2 + D_{11}L_5 - D_{33}L_5),$$

$$D_{23}L_4 = \frac{1}{2}(D_{33}L_2 + D_{22}L_5).$$

5. Система нерелятивистских уравнений

Учтем эти равенства в уравнениях (4). В результате получаем

$$2iMD_0L_1 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_1 +$$
$$+ie\{-F_{23}L_3 + F_{31}L_4 + F_{12}(-2L_3 - L_5)\},$$
$$2iMD_0L_2 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_2 +$$
$$+ie\{-2F_{23}L_4 + 2F_{12}L_1\},$$
$$2iMD_0L_3 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_3 +$$
$$+ie\{F_{23}L_1 + F_{31}(L_2 + 2L_5) - F_{12}L_4\},$$
$$2iMD_0L_4 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_4 +$$
$$+ie\{F_{23}(L_2 - L_5) - F_{31}L_1 + F_{12}L_3\},$$
$$2iMD_0L_5 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_5 +$$
$$+ie\{2F_{23}L_4 - 2F_{31}L_3\}.$$

С учетом замены (2), запишем эту систему в виде искомого нерелятивистского матричного уравнения для частицы со спином 2

$$iD_0\Psi = -\frac{1}{2\mu}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)\Psi -$$
$$-\frac{ie}{2\mu}(F_{23}S_1 + F_{31}S_2 + F_{12}S_3)\Psi, \tag{7}$$

где

$$\Psi = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)^t,$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что имеют место правильные коммутационные соотношения для компонент оператора спина

$$[S_1, S_2] = S_3, \quad [S_2, S_3] = S_1, \quad [S_3, S_1] = S_2.$$

6. Заключение

В заключение отметим следующее. Ввиду того, что система пяти нерелятивистских уравнений значительно проще 39 релятивистских, выведенное нерелятивистское уравнение позволяет решить квантовомеханические задачи с участием частиц со спином 2. Это становится актуальной задачей в свете того, что экспериментально обнаружены короткоживущие массивные частицы со спином 2. В частности, это задачи о частице в магнитном и кулоновском полях. Также возникает задача об обобщении развитого подхода на общековариантный случай для того, чтобы иметь возможность учитывать влияние гравитационных эффектов на массивные частицы со спином 2.

Кроме того, полученный результат следует обобщить на теорию частицы со спином 2, имеющей ненулевой аномальный магнитный момент. Соответствующая релятивистская теория развита на основе использования 5-компонентной системы уравнений первого порядка. Понятно, что анализ нерелятивистского предела здесь будет представлять существенно более сложную задачу.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.
4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5. – № 2. – P. 325–326.
5. Богуш, А. А. О матрицах уравнений для частиц со спином 2 / А. А. Богуш, Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 1968. – Т. 1. – С. 74–81.
6. Кисель, В. В. К релятивистским волновым уравнениям для частицы со спином 2 / В. В. Кисель // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 1986. – Т. 5. – С. 94–99.
7. Богуш, А. А. Об описании аномального магнитного момента массивной частицы со спином 2 в теории релятивистских волновых уравнений / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Известия вузов. Физика. – 1988. – Т. 31, № 3. – С. 11–16.
8. Богуш, А. А. Об уравнениях для частицы со спином 2 во внешних электромагнитных и гравитационных полях / А. А. Богуш, В. В. Кисель, Н. Г. Токаревская, В. М. Редьков // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 62–67.
9. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya, V. V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 772–778.
10. Кисель, В. В. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 / В. В. Кисель, Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 58–63.
11. Кисель, В. В. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / В. В. Кисель, Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.
12. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 486 с.
13. Ivashkevich, A. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich, A. Buryy, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Kisel, V. Red'kov / Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 45–66.
14. Ivashkevich, A. V. On new form of the 50-component theory for spin 2 particle with anomalous magnetic moment in the basis of tensors of 2-nd and 3-rd ranks / A. V. Ivashkevich, A. V. Bury, V. M. Red'kov, V. V. Kisel // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2023. – Vol. 29. – P. 289–330.

References

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Fedorov, F. I. K teorii chasticy so spinom 2 [On the theory of the spin 2 particle] / F. I. Fedorov // Uch. zap. BGU. Ser. fiz.-mat. [Proceedings of Belorussian State University. Ser. phys.-math.]. – 1951. – Iss. 12. – P. 156–173.
4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325 – 326.
5. Bogush, A. A. O matricah uravnenij dlya chastic so spinom 2 [On matrices of the equations for spin 2 particles] / A. A. Bogush, B. V. Krylov, F. I. Fedorov // Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 1968. – № 1. – P. 74–81.
6. Kisel, V. V. K relyativistskim volnovym uravneniyam dlya chasticy so spinom 2 [On relativistic wave equations for a spin 2 particle] / V. V. Kisel // Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 1986. – № 5. – P. 94–99.
7. Bogush, A. A. Ob opisanii anomalnogo magnitnogo momenta massivnoj chasticy so spinom 2 v teorii relyativistskih volnovyh uravnenij [On describing the anomalous magnetic moment of the massive spin 2 particle in the theory of relativistic wave equations] / A. A. Bogush,

V. V. Kisel // Izvestiya vuzov. Fizika [News of universities. Physics]. – 1988. – Vol. 31, № 3. – P. 11–16.
8. Bogush, A. A. Ob uravnenijah dlja chasticy so spinom 2 vo vneshnih jelektromagnitnyh i gravitacionnyh poljah [On equations for spin 2 particle in external electromagnetic and gravitational fields] / A. A. Bogush, V. V. Kisel, N. G. Tokarevskaya, V. M. Red'kov // Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 2003. – № 1. – P. 62–67.
9. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N G. Tokarevskaya, V. V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 772–778.
10. Kisel, V. V. Analiz vklada kalibrovochnyh stepenej svobody v strukturu tenzora jenergii-impul'sa bezmassovogo polja so spinom 2 [Contribution of the gauge degrees of freedom in energy-momentum tensor of the massless spin 2 field] / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 2015. – № 2. – P. 58–63.
11. Kisel, V. V. Nereljativistskij predel v teorii chasticy so spinom 2 [Nonrelativistic approximation in the theory of spin 2 particle] / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // Doklady NAN Belarusi [Doklady NAS of Belarus]. – 2015. – Vol. 59, № 3. – P. 21–27.
12. Red'kov, V. M. Polja chastic v rimanovom prostranstve i gruppa Lorenca [Fields of particles in the Riemannian space and the Lorentz group] / V. M. Red'kov. – Minsk : Belorusskaja nauka [Belarusian Science], 2009. – 486 p.
13. Ivashkevich, A. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich, A. Buryy, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Kisel, V. Red'kov / Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 45–66.
14. Ivashkevich, A. V. On new form of the 50-component theory for spin 2 particle with anomalous magnetic moment in the basis of tensors of 2-nd and 3-rd ranks / A. V. Ivashkevich, A. V. Bury, V. M. Red'kov, V. V. Kisel // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2023. – Vol. 29. – P. 289–330.

Для цитирования:
Ивашкевич, А. В. Нерелятивистское приближение в 39-компонентной теории для частицы со спином 2 / А. В. Ивашкевич, А. В. Бурый, Е. М. Овсиюк, В. В. Кисель, В. М. Редьков // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 46–57.

For citation:
Ivashkevich, A. V. Nonrelativistic approximation in 39-component theory for a spin 2 particle / A. V. Ivashkevich, A. V. Bury, E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Redkov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2024. – № 5 (71). – P. 46–57.

Дата поступления рукописи: 08.04.2024
Received: 08.04.2024