

Научный журнал  
Основан в 2010 г.  
Выходит девять раз в год

Учредитель  
Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр  
«Коми научный центр УрО РАН»

# ИЗВЕСТИЯ

КОМИ НАУЧНОГО ЦЕНТРА  
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 5 (71)

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

2024

**Главный редактор** – акад. РАН А. М. Асхабов  
**Зам. главного редактора** – чл.-корр. РАН С. В. Дёгтева  
**Зам. главного редактора** – чл.-корр. РАН В. Н. Лажнецов  
**Ответственный секретарь** – к.и.н. Д. В. Милохин

## Редакционный совет:

акад. РАН В. В. Алексеев, акад. РАН А. А. Барях, акад. РАН В. И. Бердышев, д.м.н. Е. Р. Бойко,  
чл.-корр. РАН И. Н. Болотов, акад. РАН В. Н. Большаков, Ph.D. (Econ.) К. Борисова-Маринова (Болгария),  
д.ф.-м.н. Т. М. Бречко (Польша), к.г.-м.н. И. Н. Бурцев, акад. РАН А. Д. Гвишиани, д.ф.-м.н. Н. А. Громов,  
д.и.н. И. Л. Жеребцов, д.б.н. В. Г. Зайнуллин, чл.-корр. РАН В. А. Ильин, акад. РАН С. В. Кривовичев,  
И. В. Курляк, акад. РАН А. В. Кучин, чл.-корр. РАН Ю. Б. Марин, акад. РАН В. П. Матвеев,  
д.и.н. В. И. Меньковский (Беларусь), акад. РАН Г. А. Месяц, чл.-корр. РАН А. А. Москалев,  
д.э.н. Л. А. Попова, чл.-корр. РАН В. Н. Пучков, д.г.-м.н. А. М. Пыстин, чл.-корр. РАН И. М. Рощевская,  
акад. РАН М. П. Рощевский, д.х.н. С. А. Рубцова, д.и.н. Э. А. Савельева, д.и.н. Т. С. Садыков (Казахстан),  
чл.-корр. РАН А. Ф. Титов, д.б.н. С. Н. Харин, к.б.н. И. Ф. Чадин, акад. РАН В. Н. Чарушин, д.т.н. Ю. Я. Чукарев,  
д.б.н. Е. В. Шамрикова, акад. РАН В. С. Шацкий, д.э.н. А. Г. Шеломенцев, к.э.н. А. А. Юдин

## Редакционная коллегия серии «Физико-математические науки»:

д.ф.-м.н. Н. А. Беляева, д.ф.-м.н. С. Г. Бобков (США), д.ф.-м.н. В. А. Бушуев, д.ф.-м.н. В. П. Голубятников,  
д.т.н. А. П. Господариков, д.ф.-м.н. О. Н. Граничин, д.ф.-м.н. Н. А. Громов (ответственный редактор),  
д.ф.-м.н. А. В. Жубр, д.ф.-м.н. Ю. А. Курочкин (Беларусь), д.ф.-м.н. В. В. Мазалов, д.ф.-м.н. В. И. Манько,  
д.ф.-м.н. В. М. Нежинский, д.ф.-м.н. А. Б. Певный, д.ф.-м.н. С. М. Полещиков, д.ф.-м.н. В. И. Пунегов,  
д.ф.-м.н. В. М. Редьков (Беларусь), д.ф.-м.н. В. Н. Сивков, д.ф.-м.н. В. Ф. Соколов,  
к.ф.-м.н. Д. А. Тимушев (ответственный секретарь), д.ф.-м.н. А. Н. Тихомиров, д.ф.-м.н. В. В. Ульянов,  
д.ф.-м.н. С. М. Хрящев, д.ф.-м.н. П. С. Щербakov

## Адрес редакции:

167982, ГСП-2, Республика Коми, г. Сыктывкар,  
ул. Коммунистическая, д. 24  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, каб. 317, 318.  
Тел. (8212) 24-47-79, факс (8212) 24-22-64  
E-mail: journal@frc.komisc.ru  
www.izvestia.komisc.ru

ISSN 1994-5655

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору  
за соблюдением законодательства в сфере массовых  
коммуникаций и охране культурного наследия.

Свид. о регистрации средств массовой информации  
ПИ № ФС 77-26969 от 11 января 2007 г.

Подписной индекс в каталоге «Почта России» 52047

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий ВАК

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр  
«Коми научный центр УрО РАН», 2024

Science Journal  
Founded in 2010  
Published 9 times a year

Established by  
Federal State Budgetary  
Institution of Science  
Federal Research Centre  
«Komi Science Centre, Ural Branch, RAS»

# PROCEEDINGS

OF THE KOMI SCIENCE CENTRE  
URAL BRANCH  
RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**№ 5 (71)**

**«PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES» series**

**2024**

**Editor-in-chief** – RAS acad. A. M. Askhabov

**Deputy editor-in-chief** – RAS corresp. member S. V. Degteva

**Deputy editor-in-chief** – RAS corresp. member V. N. Lazhentsev

**Executive secretary** – Cand. Sci. (Hist.) D. V. Milokhin

## Editorial Council:

RAS acad. V. V. Alekseev, RAS acad. A. A. Baryakh, RAS acad. V. I. Berdyshev, Dr. Sci. (Med.) E. R. Bojko,  
RAS corresp. member I. N. Bolotov, RAS acad. V. N. Bolshakov, Ph.D. (Econ.) K. Borissova-Marinova (Bulgaria),  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) T. M. Brechko (Poland), Cand. Sci. (Geol.-Mineral.) I. N. Burtsev, RAS acad. A. D. Gvishiani,  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) N. A. Gromov, Dr. Sci. (Hist.) I. L. Zherebtsov, Dr. Sci. (Biol.) V. G. Zainullin,  
RAS corresp. member V. A. Ilyin, RAS acad. S. V. Krivovichev, I. V. Kurlyak, RAS acad. A. V. Kuchin,  
RAS corresp. member Yu. B. Marin, RAS acad. V. P. Matveenko, Dr. Sci. (Hist.) V. I. Men'kovsky (Belarus),  
RAS acad. G. A. Mesyats, RAS corresp. member A. A. Moskalev, Dr. Sci. (Econ.) L. A. Popova,  
RAS corresp. member V. N. Puchkov, Dr. Sci. (Geol.-Mineral.) A. M. Pystin, RAS corresp. member I. M. Roshchevskaya,  
RAS acad. M. P. Roshcheyev, Dr. Sci. (Chem.) S. A. Rubtsova, Dr. Sci. (Hist.) E. A. Savelyeva,  
Dr. Sci. (Hist.) T. S. Sadykov (Kazakhstan), RAS corresp. member A. F. Titov,  
Dr. Sci. (Biol.) S. N. Kharin, Cand. Sci. (Biol.) I. F. Chadin, RAS acad. V. N. Charushin,  
Dr. Sci. (Tech.) Yu. Ya. Chukreev, Dr. Sci. (Biol.) E. V. Shamrikova, RAS acad. V. S. Shatsky,  
Dr. Sci. (Econ.) A. G. Shelomentsev, Cand. Sci. (Econ.) A. A. Yudin

## Editorial Board of the series «Physical and Mathematical Sciences»:

Dr. Sci. (Phys.-Math.) N. A. Belyaeva, Dr. Sci. (Phys.-Math.) S. G. Bobkov (USA), Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. A. Bushuev,  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. P. Golubyatnikov, Dr. Sci. (Tech.) A. P. Gospodarikov,  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) O. N. Granichin, Dr. Sci. (Phys.-Math.) N. A. Gromov (Executive editor),  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) A. V. Zhubr, Dr. Sci. (Phys.-Math.) Yu. A. Kurochkin (Belarus),  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. V. Mazalov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. I. Man'ko, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. M. Nezhinskij,  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) A. B. Pevnyi, Dr. Sci. (Phys.-Math.) S. M. Poleshchikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. I. Punegov,  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. M. Red'kov (Belarus), Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. N. Sivkov,  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. F. Sokolov, Cand. Sci. (Phys.-Math.) D. A. Timushev (Executive secretary),  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) A. N. Tikhomirov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. V. Ulyanov,  
Dr. Sci. (Phys.-Math.) S. M. Khryashchev, Dr. Sci. (Phys.-Math.) P. S. Shcherbakov

### Editorial Office:

Office 317, 318 Komi Science Centre, Ural Branch, RAS  
24, Kommunisticheskaya st., GSP-2,  
Syktyvkar 167982, Komi Republic  
Tel. +7 8212 244779, Fax +7 8212 242264  
E-mail: journal@frc.komisc.ru  
www.izvestia.komisc.ru

### ISSN 1994-5655

Registered by the Russian Federal Surveillance Service  
for Compliance with the Law in Mass Communications  
and Cultural Heritage Protection.

The certificate of mass media registration –  
ПИ № ФС 77-26969 dated 11 January, 2007

The "Russian Post" catalogue subscription index 52047

*The journal is included in the list of peer-reviewed scientific  
publications of the Higher Attestation Commission  
of the Russian Federation*

© Federal State Budgetary Institution  
of Science Federal Research Centre  
"Komi Science Centre, Ural Branch, RAS", 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>А. Карабанов</b> Уравнения Лакса на супералгебрах Ли .....	5
<b>Д. Б. Ефимов</b> О перманенте многомерных матриц .....	11
<b>В. Н. Тарасов</b> Устойчивость треугольника Рёло под действием нормальной нагрузки .....	16
<b>В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов</b> Об устойчивости круговых подкрепленных арок в случае пространственной деформации .....	22
<b>Н. А. Громов, В. В. Куратов</b> Контракции калибровочных групп и спонтанное нарушение симметрии .....	28
<b>А. В. Ивашкевич, П. О. Саченок, В. М. Редьков</b> Частица Штюкельберга в электрическом поле, решения с цилиндрической симметрией .....	38
<b>А. В. Ивашкевич, А. В. Бурый, Е. М. Овсюк, В. В. Кисель, В. М. Редьков</b> Нерелятивистское приближение в 39-компонентной теории для частицы со спином 2 .....	46
<b>А. М. Кузьмич, А. В. Бурый, Е. М. Овсюк</b> Уравнения Максвелла в пространстве Лобачевского и моделирование среды со специальными свойствами .....	58
<b>Д. В. Казаков, А. В. Карпов, С. И. Колосов, Д. М. Мальков, В. И. Пунегов</b> К теории рентгеновской Лауэ дифракции в термомиграционном кристаллическом канале с легирующей примесью ..	64
<b>С. И. Колосов, Д. М. Мальков, В. И. Пунегов</b> Асимметричная рентгеновская дифракция ограниченных пучков в кристаллах .....	68
<b>П. А. Макаров, Р. Н. Скандаков, В. А. Устюгов, В. И. Щеглов</b> Влияние числа Куранта на результаты численного моделирования распространения сигналов в недиспергирующих однородных средах .....	73
<b>И. В. Костяков, В. В. Куратов</b> Об одной связи моделей обмена и Леонтьева .....	84
<b>Юбилей</b> Василий Ильич Пунегов .....	90

## CONTENTS

<b>A. Karabanov</b> Lax equations on Lie superalgebras .....	5
<b>D. B. Efimov</b> On the permanent of multidimensional matrices .....	11
<b>V. N. Tarasov</b> Stability of the Reuleaux triangle under normal load .....	16
<b>V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov</b> On the stability of circular reinforced arches in the case of spatial deformation .....	22
<b>N. A. Gromov, V. V. Kuratov</b> Contractions of gauge groups and spontaneous symmetry breaking .....	28
<b>A. V. Ivashkevich, P. O. Sachenok, V. M. Red'kov</b> Stueckelberg particle in the uniform electric field, solutions with cylindrical symmetry .....	38
<b>A. V. Ivashkevich, A. V. Bury, E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Redkov</b> Nonrelativistic approximation in 39-component theory for a spin 2 particle .....	46
<b>A. M. Kuzmich, A. V. Bury, E. M. Ovsiyuk</b> Maxwell equations in Lobachevsky space and modeling the medium with reflecting properties .....	58
<b>D. V. Kazakov, A. V. Karpov, S. I. Kolosov, D. M. Malkov, V. I. Punegov</b> On the theory of X-ray Laue diffraction in a thermomigration crystalline channel with a doping impurity .....	64
<b>S. I. Kolosov, D. M. Malkov, V. I. Punegov</b> Asymmetric X-ray diffraction of confined beams in crystals .....	68
<b>P. A. Makarov, R. N. Skandakov, V. A. Ustyugov, V. I. Shcheglov</b> Impact of Courant number on the results of numerical simulating of signal propagation in non-dispersive homogeneous media .....	73
<b>I. V. Kostyakov, V. V. Kuratov</b> On one connection of the exchange and Leontief models .....	84
<b>Anniversaries</b> Vasily I. Punegov .....	90

# Lax equations on Lie superalgebras

A. Karabanov

Cryogenic Ltd,  
London, W3 7QE, UK  
karabanov@hotmail.co.uk

## Abstract

It is demonstrated that the standard construction of Lax equations on Lie algebras can be extended to Lie superalgebras, with the even subspace carrying the usual Lax equations. The extended equations inherit the existence of the canonical trace polynomial integrals of motion. An extra set of integrals exists in the odd subspace, with a nontrivial homological structure of the orbit space. This establishes a curious algebraic link between integrable evolution equations, supersymmetry and the deformation theory.

## Keywords:

Lie superalgebras, Lax equations, integrals of motion, homological algebra, deformation theory

## Introduction

The substantial interest to graded Lie algebras arose about 60 years ago, in the context of similarity between deformations of complex-analytic structures on compact manifolds and deformations of associative algebras and Lie algebras [1–4], in combination with the relevant cohomological theories [5, 6]. In these algebras, the interplay of “even” and “odd” subspaces carrying skew-symmetric and symmetric multiplication laws plays the crucial role. Later, the new interest to these structures arose in theoretical physics, in the context of supergauge symmetries relating particles of bosonic and fermionic statistics. Although supersymmetry has not been experimentally discovered, these studies stimulated an interesting new mathematics [7–10].

At the same time, the advent of the inverse scattering method gave a boost to the studies of Lie groups and Lie algebras in mathematical physics, in the context of integrability of nonlinear evolution equations. In such studies, the nonlinear dynamics is encoded in the evolution under the “semilinear” Lax equations possessing trace polynomial integrals of motion or revealing the isospectrality of the evolving operators [11–16].

In this work, the standard construction of the Lax equations on Lie algebras is extended to Lie superalgebras, the  $\mathbb{Z}_2$ -graded Lie algebras of supersymmetry. The extended equations possess the canonical trace polynomial integrals of

# Уравнения Лакса на супералгебрах Ли

A. Карабанов

ООО «Криогеника»,  
г. Лондон, W3 7QE, Великобритания  
karabanov@hotmail.co.uk

## Аннотация

Показано, что стандартная конструкция уравнений Лакса на алгебрах Ли может быть распространена на супералгебры Ли, в которых четное подпространство несет в себе обычные уравнения Лакса. Расширенные уравнения наследуют существование канонических следовых полиномиальных интегралов движения. В нечетном подпространстве существует дополнительный набор интегралов с нетривиальной гомологической структурой пространства орбит. Это устанавливает любопытную алгебраическую связь между интегрируемыми эволюционными уравнениями, суперсимметрией и теорией деформаций.

## Ключевые слова:

супералгебры Ли, уравнения Лакса, интегралы движения, гомологическая алгебра, теория деформаций

motion and so can be applied in a similar manner to nonlinear problems. It is shown that the odd subspace admits extra polynomial integrals of motion independent of the canonical integrals. The geometry of the relevant orbit spaces is studied revealing a nontrivial homological algebra. Thus, an algebraic link is established between integrable evolution equations, supersymmetry and the deformation theory. This work can be regarded as a continuation of the previous work by the author [17].

It is assumed that the reader is familiar with the basics of the theory of Lie groups and Lie algebras and their representations as well as the basics of algebraic geometry and homological algebra.

## 1. Lie superalgebras

The algebra of supersymmetry comes from theoretical physics as an attempt to combine into one unified theory two statistically different types of particles, bosons and fermions. According to the method of second quantization, the (complex finite-dimensional) vector state spaces of these two types are separated by parity, the one being represented in the even space  $l^0$ , the other in the odd space  $l^1$ . To relate these spaces, one assumes that the same symmetry (connected) Lie group  $G$  linearly acts on both spaces. The group actions are repre-

sented by the group homomorphisms

$$T^k : G \rightarrow GL(\mathfrak{l}^k), \quad k = 0, 1.$$

The even action is assumed to be simply the adjoint action of  $G$ ,  $T^0 = Ad$ , i.e.  $\mathfrak{l}^0$  is the Lie algebra of the Lie group  $G$ . The bilinear skew-symmetric bracket in  $\mathfrak{l}^0$

$$[, ]^0 : \mathfrak{l}^0 \times \mathfrak{l}^0 \rightarrow \mathfrak{l}^0, \quad [x, y]^0 = -[y, x]^0$$

is the standard Lie bracket. The differential  $ad$  of  $T^0$

$$ad : \mathfrak{l}^0 \rightarrow End(\mathfrak{l}^0), \quad ad(x)y = [x, y]^0, \quad x, y \in \mathfrak{l}^0 \quad (1)$$

represents the adjoint linear action of  $\mathfrak{l}^0$  on itself. It is further assumed that the odd action  $T^1$  is tensorially intertwined with  $T^0$ . This means that a symmetric bilinear bracket

$$[, ]^1 : \mathfrak{l}^1 \times \mathfrak{l}^1 \rightarrow \mathfrak{l}^0, \quad [x, y]^1 = [y, x]^1$$

is defined on  $\mathfrak{l}^1$  with values in  $\mathfrak{l}^0$  such that

$$\begin{aligned} [T^1(g)x, T^1(g)y]^1 &= T^0(g)[x, y]^1, \\ x, y &\in \mathfrak{l}^1, \quad g \in G. \end{aligned} \quad (2)$$

Using the brackets  $[, ]^k$ ,  $k = 0, 1$ , and the differential of the action  $T^1$

$$\rho : \mathfrak{l}^0 \rightarrow End(\mathfrak{l}^1), \quad (3)$$

a bilinear bracket  $[, ]$  on the direct sum

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^0 \oplus \mathfrak{l}^1$$

can be defined as

$$[x, y] = \begin{cases} [x, y]^0, & x, y \in \mathfrak{l}^0, \\ [x, y]^1, & x, y \in \mathfrak{l}^1, \\ \rho(x)y, & x \in \mathfrak{l}^0, y \in \mathfrak{l}^1. \end{cases}$$

With this bracket, the graded vector space  $\mathfrak{l}$  becomes a (complex) *Lie superalgebra*, i.e., a  $\mathbb{Z}_2$ -graded algebra whose bracket satisfies the conditions

$$\begin{aligned} [x, y] &\subseteq \mathfrak{l}^{\xi+\eta}, \quad [x, y] = -(-1)^{\xi\eta}[y, x], \\ (-1)^{\xi\nu}[x, [y, z]] + (-1)^{\xi\eta}[y, [z, x]] + \\ &+ (-1)^{\eta\nu}[z, [x, y]] = 0 \\ \forall x \in \mathfrak{l}^\xi, y \in \mathfrak{l}^\eta, z \in \mathfrak{l}^\nu, \xi, \eta, \nu = 0, 1. \end{aligned} \quad (4)$$

The skew-symmetry between  $\mathfrak{l}^0$  and  $\mathfrak{l}^1$  and the graded Jacobi identity are externally imposed on  $x, y, z \in \mathfrak{l}^1$  (to naturally extend the representation theory) while the rest of the conditions follow the intrinsic properties of the construction above.

The combined action  $T = (T^0, T^1)$  of the Lie group  $G$  on the Lie superalgebra  $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}^0, \mathfrak{l}^1)$  generates the *structural group* of automorphisms of  $\mathfrak{l}$ ,

$$[T(g)x, T(g)y] = T(g)[x, y], \quad x, y \in \mathfrak{l}, \quad g \in G. \quad (5)$$

The differential  $(ad, \rho)$  of this action generates a representation of the Lie algebra  $\mathfrak{l}^0$  on  $\mathfrak{l}$ .

## 2. Representations

Representations of Lie superalgebras are Lie superalgebra homomorphisms

$$\phi : \mathfrak{l} \rightarrow L, \quad \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]_L \quad (6)$$

into operator Lie superalgebras  $L$ . The latter are constructed as follows. For a  $\mathbb{Z}_2$ -graded (complex finite-dimensional) vector space

$$V = V^0 \oplus V^1,$$

let  $L^0, L^1$  be the spaces of linear operators  $V \rightarrow V$  of homogeneous degrees 0,1. This means that operators from  $L^0$  act on the grades while those from  $L^1$  permute the grades,

$$L^0 V^k \subseteq V^k, \quad k = 0, 1, \quad L^1 V^{0,1} \subseteq V^{1,0}.$$

On the  $\mathbb{Z}_2$ -graded vector space

$$L = L^0 \oplus L^1$$

define a bracket  $[, ]_L$  by the rule

$$\begin{aligned} [X, Y]_L &= XY - (-1)^{\xi\eta} YX, \\ X &\in L^\xi, Y \in L^\eta, \xi, \eta = 0, 1. \end{aligned} \quad (7)$$

With this bracket,  $L$  is a Lie superalgebra (the graded Jacobi identity follows from Eq. (7)). Representations of  $\mathfrak{l}$  are homomorphisms of Eqs. (6), (7) such that

$$\phi(\mathfrak{l}^k) \subseteq L^k, \quad k = 0, 1. \quad (8)$$

In particular, the restrictions

$$\phi^0 = \phi|_{\mathfrak{l}^0} \quad (9)$$

to the even subspace are representations of the Lie algebra  $\mathfrak{l}^0$ .

Nontrivial representations of Lie superalgebras always exist. For example, the homomorphism

$$\mathfrak{l} \rightarrow Ider(\mathfrak{l}), \quad x \rightarrow \partial_x \equiv [x, \cdot] \quad (10)$$

to the space of inner derivations of  $\mathfrak{l}$  satisfies the requirement. This representation generalizes the adjoint representation of a Lie algebra. The existence of faithful representations (in a more general context of graded Lie algebras over commutative rings) has been proved in Ref. [3]. Each faithful representation of  $\mathfrak{l}^0$  (guaranteed by Ado's theorem) can be extended to a faithful representation of  $\mathfrak{l}$ .

## 3. Invariants and Lax equations

The group action  $T$  on  $\mathfrak{l}$  admits a set of *canonical invariants*, the (complex) trace polynomial functions on  $\mathfrak{l}$

$$I_s[\phi](x) = \text{Tr}([\phi(x)]^s), \quad x \in \mathfrak{l} \quad (11)$$

taken for any power  $s \geq 0$  and any representation  $\phi$  of  $\mathfrak{l}$ . In fact, according to Eq. (7), for  $X \in L^0$  and  $Y \in L$ , the bracket  $[X, Y]_L$  is the commutator of operators. Hence  $T$  acts on operators of algebra representations by conjugation and so preserves the traces of their powers. The restrictions

of Eq. (9) generate the set of canonical invariants in the even subspace,

$$I_s^0[\phi^0](x) = I_s[\phi^0](x), \quad x \in \mathfrak{l}^0. \quad (12)$$

These are the standard trace polynomial invariants generated by the Lie bracket in  $\mathfrak{l}^0$ .

The intertwining of Eq. (2) enables extra invariants to be built for the group action  $T^1$  on  $\mathfrak{l}^1$ . Precisely, for any invariant  $f$  of the action  $T^0$ , the function

$$I^1[f](x) = f([x, x]), \quad x \in \mathfrak{l}^1, \quad (13)$$

is an invariant of the action  $T^1$ . In fact, the map

$$w : \mathfrak{l}^1 \rightarrow \mathfrak{l}^0, \quad w(x) = [x, x] \quad (14)$$

gives a (nonlinear) intertwining of  $T^1$  with  $T^0$ . Its composition  $fw$  with any invariant  $f$  of  $T^0$  is an invariant of  $T^1$ . The invariants given by Eq. (13) are called *derived invariants*.

For each  $k = 0, 1$ , the canonical invariants  $I_s[\phi]$  of Eq. (11) are integrals of motion (conservation laws) of evolution equations of the form

$$dl/dt = [m, l], \quad m \in \mathfrak{l}^0, \quad l \in \mathfrak{l}^k \quad (15)$$

where  $m = m(t)$  is any time-independent or (continuously) time-dependent magnitude. In fact, for any  $m$ , including the case where  $m$  depends on  $l$ , the trajectories of the solutions to Eq. (15) in the subspaces  $\mathfrak{l}^k$  belong to orbits of the group actions  $T^k$  determined by the initial values. Eqs. (15) are called *Lax equations on the Lie superalgebra*  $\mathfrak{l}$ .

In the subspace  $\mathfrak{l}^1$ , Eq. (15) is rewritten as

$$dl/dt = \rho(m)l, \quad l \in \mathfrak{l}^1 \quad (16)$$

where  $\rho$  is the representation of  $\mathfrak{l}^0$  on  $\mathfrak{l}^1$  given by the differential of the group action  $T^1$  (see Eq. (3)). This is a generalization of the standard Lax equation on the Lie algebra  $\mathfrak{l}^0$  to another representation subspace  $\mathfrak{l}^1$ . Similar generalizations (outside the Lie superalgebras theory) have been considered, for example, in Ref. [16]. The derived invariants  $I^1[f]$  given by Eq. (13) are integrals of motion of Eq. (16) additional to the canonical invariants.

The property of the Lax equations to have the “ $m$ -universal” conservation laws is very useful. It enables one to integrate nonlinear evolution equations (15) generated by any (continuous) dependences of  $m$  on  $l$  and  $t$ .

#### 4. Geometry of orbits

Since the invariants are integrals of motion, the trajectories of evolution under Eq. (15) belong to the intersections of integral surfaces, on which the invariants take constant values determined by the initial states. Each such intersection is filled with orbits of the group action  $T$  on  $\mathfrak{l}$ . The form of the canonical invariants  $I_s[\phi]$  suggests their strong dependence on the representations  $\phi$ . The representations (on the same vector space) are subdivided into equivalence classes with respect to the canonical invariants,

$$\exists g \in G : \phi' = \phi T(g) \quad \longrightarrow \quad I_s[\phi'] = I_s[\phi].$$

Besides this, it is hard to formulate anything general about the integral surfaces created by the invariants  $I_s[\phi]$ .

The derived invariants  $I^1[f]$  on the odd subspace  $\mathfrak{l}^1$  are different. They are written as compositions of any  $T^0$ -invariant with the map  $w$  of Eq. (14) that is independent of representations of  $\mathfrak{l}$ . By Eq. (5), we have

$$[T^1(g)x, T^1(g)x] = T^0(g)[x, x], \quad \forall g \in G, \quad x \in \mathfrak{l}^1. \quad (17)$$

Hence, if the vector  $v = [x_0, x_0] \in \mathfrak{l}^0$  is fixed under the group action  $T^0$ ,

$$T^0(g)v = v \quad \forall g \in G, \quad (18)$$

then the trajectory of the solution  $l(t)$  to Eq. (16) starting from  $x_0$  is completely contained in the set

$$S_v = \{x \in \mathfrak{l}^1 : [x, x] = v\}. \quad (19)$$

In fact, in this case, any constant function  $f$  is suitable for the derived invariant  $I^1[f]$ . The space of the vectors  $v$  defined by Eq. (18) is the zeroth cohomology group  $h^0(G, \mathfrak{l}^0)$  of the group  $G$  with coefficients in  $\mathfrak{l}^0$ . This space also forms the centre of the Lie algebra  $\mathfrak{l}^0$ .

For any  $v$ , the relation that defines the set  $S_v$  is quadratically polynomial with respect to the coordinates in  $\mathfrak{l}^1$ , so the set  $S_v$  is an (affine) algebraic variety. By Hilbert’s Nullstellensatz, it is defined by the zero locus of a proper ideal in the polynomial ring  $\mathbb{C}[\mathfrak{l}^1]$  containing these quadratic polynomials. There is an obvious link of Eq. (19) to the classical problem of intersections of quadrics. The variety  $S_v$  is symmetric under the reflection with respect to the origin  $x \rightarrow -x$ . It is non-compact in general: the homotheties  $v \rightarrow \lambda v$ ,  $x \rightarrow \sqrt{\lambda}x$  ( $\lambda \neq 0$ ) make the varieties  $S_v$  and  $S_{\lambda v}$  isomorphic. In the case  $v = 0$ , removing the trivial orbit  $x = 0$ ,  $S_v$  becomes compact as a projective variety.

The special property of the variety  $S_v$  of Eq. (19) is that it lies in the intersection of integral surfaces of *all* canonical polynomial invariants passing through the point  $x_0$ . In fact, for any representation  $\phi$  of  $\mathfrak{l}$  and any  $x \in \mathfrak{l}^1$ , in accordance with Eqs. (6), (7), (8),

$$\phi([x, x]) = 2[\phi(x)]^2$$

and any odd power of the operator  $\phi(x)$  permutes the even and odd subspaces and so has a zero trace. Hence, we obtain for any integer  $s > 0$  and any representation  $\phi$

$$I_{2s}[\phi](x) = 2^{-s} \text{Tr}([\phi([x, x]))^s), \quad (20)$$

$$I_{2s-1}[\phi](x) = 0, \quad x \in \mathfrak{l}^1.$$

According to Eqs. (17), (18), the set  $S_v$  is filled with orbits of the group action  $T^1$  on  $\mathfrak{l}^1$ . This generates the orbit space  $S_v/G$  that classifies points of  $S_v$ . Two points belong to the same equivalence class if they belong to the same orbit. In the case  $v \neq 0$ , we will assume that the group action  $T^1$  is irreducible on  $\mathfrak{l}^1$ .

The classification problem  $S_v/G$  can be approached as follows. For any  $x \in S_v$ , let  $\partial_x$  be the inner derivation defined by the homomorphism of Eq. (10). In other words,

$$\partial_x y = [x, y], \quad x \in S_v, \quad y \in \mathfrak{l}.$$

It follows from the Jacobi identity (see Eq. (4)) that

$$2\partial_x\partial_x y = [v, y]. \quad (21)$$

Eq. (18) is equivalent to the condition

$$[m, v] = 0 \quad \forall m \in \mathfrak{l}^0.$$

By Eq. (21), this implies

$$\partial_x\partial_x \mathfrak{l}^0 = 0. \quad (22)$$

Also, we have

$$[v, y] = [[y, y], y] = 0 \quad \forall y \in S_v$$

where we again used the Jacobi identity. Hence,  $S_v$  is a subset of the centralizer of  $v$  in  $\mathfrak{l}^1$ . This centralizer is  $G$ -invariant because  $v$  is  $G$ -fixed. For  $v \neq 0$ , we assumed that the  $T^1$ -action is irreducible, so the whole  $\mathfrak{l}^1$  centralizes  $v$  (otherwise, there would exist a smaller invariant subspace of  $T^1$ ),

$$[\mathfrak{l}^1, v] = 0. \quad (23)$$

By Eqs. (21), (23), we conclude then that

$$\partial_x\partial_x \mathfrak{l}^1 = 0. \quad (24)$$

Combination of Eqs. (22), (24) gives

$$\partial_x\partial_x \mathfrak{l} = 0.$$

Considering the restrictions on the even and odd subspaces

$$\partial_x^k = \partial_x|_{\mathfrak{l}^k}, \quad k = 0, 1,$$

we have on  $\mathfrak{l}$

$$\partial_x^1\partial_x^0 = \partial_x^0\partial_x^1 = 0.$$

This enables the Lie superalgebra  $\mathfrak{l}$  to be represented as the "loop" chain complex

$$\mathfrak{l}^0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_x^0} \\ \xleftarrow{\partial_x^1} \end{array} \mathfrak{l}^1$$

with respect to the differential  $\partial_x$ . Introducing the kernels and images (the cycles and boundaries)

$$Z_x^k = \ker \partial_x^k, \quad B_x^{0,1} = \operatorname{im} \partial_x^{1,0},$$

we assign to each point  $x \in S_v$  the even and odd homology groups as the quotients

$$H_x^k = Z_x^k / B_x^k, \quad k = 0, 1. \quad (25)$$

The groups  $H_x^k, H_{x'}^k$  are isomorphic if  $x, x'$  belong to the same  $G$ -orbit.

Introducing the vector spaces

$$Z_x = Z_x^0 \oplus Z_x^1, \quad B_x = B_x^0 \oplus B_x^1, \quad H_x = H_x^0 \oplus H_x^1,$$

we see that  $Z_x$  is a Lie superalgebra that is a subalgebra of  $\mathfrak{l}$ ,  $B_x$  is an ideal in  $Z_x$  and so  $H_x = Z_x/B_x$  also becomes a Lie superalgebra.

The subspaces  $Z_x^1, B_x^1$  are respectively the tangent space to  $S_v$  and the tangent space to the orbit of  $x$  at the point  $x$ . If the odd homology group is trivial,  $H_x^1 = 0$ , then the orbit of  $x$  covers a whole neighbourhood of the point  $x$  in  $S_v$ . All small deformations of  $x$  within  $S_v$  are  $G$ -orbit equivalent.

Such points  $x$  are called *rigid*. For  $Z_x^1 = 0$  (for  $v \neq 0$ ), the set  $S_v$  consists of one point  $x$  (which in this case is fixed under the group action,  $B_x^1 = 0$ ). If  $H_x^1 \neq 0$  then the orbit of  $x$  tends to lie strictly inside  $S_v$ .

The subspace  $Z_x^0$  is the Lie subalgebra of  $\mathfrak{l}^0$  that centralizes  $x$ :  $[Z_x^0, x] = 0$ . The subspace  $B_x^0$  is the image of  $x$  under the odd inner derivations:  $B_x^0 = [\mathfrak{l}^1, x]$ . By the Jacobi identity and Eqs. (19), (23), it is a Lie subalgebra (actually an ideal) of  $Z_x^0$ . If the even homology group is trivial,  $H_x^0 = 0$ , then  $x$  is a *simple point* of  $S_v$ . In fact, let  $H_x^0 = 0$  and let  $x + u \in S_v$  be a deformation of the point  $x$  in  $S_v$ . Then  $u$  satisfies the *deformation equation*

$$2\partial_x^1 u + [u, u] = 0. \quad (26)$$

We can write the solution to Eq. (26) as a formal power series

$$u = zu_1 + z^2 u_2 + \dots \quad (27)$$

in some (complex) scalar parameter  $z$ . The first term

$$2\partial_x^1 u_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad u_1 \in Z_x^1$$

can be chosen arbitrarily. To find the higher terms, the following induction can be applied. Let the first  $q$  terms be known. Then they satisfy the equations

$$2\partial_x^1 u_r + J_r = 0,$$

$$J_r = \sum_{p=1}^{r-1} [u_p, u_{r-p}], \quad r = 1, \dots, q. \quad (28)$$

To find the  $(q+1)$ th term, the following equation should be solved

$$2\partial_x^1 u_{q+1} + J_{q+1} = 0. \quad (29)$$

Let

$$u^{(q)} = \sum_{r=1}^q z^r u_r$$

be the  $q$ th partial sum. Using the Jacobi identity, we have

$$[x + u^{(q)}, [x + u^{(q)}, x + u^{(q)}]] = 0.$$

Taking the  $(q+1)$ th power of  $z$ , with the use of Eqs. (23), (24), we obtain

$$[x, J_{q+1}] + \sum_{r=1}^q [u_{q+1-r}, 2[x, u_r] + J_r] = 0.$$

By Eqs. (28), this gives

$$\partial_x^0 J_{q+1} = 0.$$

This means that  $J_{q+1} \in Z_x^0$  and so  $J_{q+1} \in B_x^0$  because we assumed  $H_x^0 = 0$ . Then Eq. (29) can be resolved for  $u_{q+1}$ , uniquely if we take the zero projection to  $Z_x^1$ . Hence, all the terms of the power series of Eq. (27) can be uniquely found. This series converges for any  $u_1$  as long as  $|z|$  is sufficiently small. We obtain that the point  $x \in S_v$  can be analytically deformed within  $S_v$  in any direction given by the space  $Z_x^1$  of tangent vectors to  $S_v$ . Thus, for  $H_x^0 = 0$ , the point  $x$  is simple. A structure of a complex manifold on  $S_v$  can be defined in a neighbourhood of  $x$ . The situation is very similar to that described in Ref. [1].



The consideration of dimensions gives the following relations

$$\begin{aligned} \dim H_x^k &= \dim \mathfrak{l}^k - \sum_{p=0,1} \dim B_x^p, \\ \dim Z_x^k &= \dim \mathfrak{l}^k - \dim B_x^{(k+1)}, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Here in addition to Eq. (25) we used the isomorphisms

$$B_x^{0,1} \simeq \mathfrak{l}^{1,0} / Z_x^{1,0}.$$

Also, since  $v \in B_x^0 \subseteq Z_x^0$ , we obtain

$$v \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \dim Z_x^0 \geq \dim B_x^0 \geq 1 \quad (31)$$

(in particular, if  $S_v \neq \emptyset$  for  $v \neq 0$  then the group action  $T^1$  on  $\mathfrak{l}^1$  cannot be free). It immediately follows from Eq. (30) that if the subspaces  $\mathfrak{l}^{0,1}$  are not isomorphic,  $\dim \mathfrak{l}^1 \neq \dim \mathfrak{l}^0$  (i.e., the representation spaces of  $ad$  and  $\rho$  are not isomorphic as vector spaces), then the groups  $H_x^{0,1}$  are not simultaneously trivial and are not isomorphic,  $\dim H_x^1 \neq \dim H_x^0$ . This is valid for each point  $x \in S_v$ . This means, for instance, that neither point  $x \in S_v$  can be simultaneously a simple point of the variety  $S_v$  and have its orbit covering the whole neighbourhood of  $x$  in  $M_v$ . In particular, for  $\dim \mathfrak{l}^1 \neq \dim \mathfrak{l}^0$ , the variety  $S_v$  cannot be a (nontrivial smooth) homogeneous space of the  $G$ -action.

Eqs. (30), (31) enable an estimation of possible orbit classes in the space  $S_v/G$  to be made. The existence of functions on  $\mathfrak{l}^1$  that separate orbits in  $S_v$  and their links to the homology on  $S_v$  are interesting open questions. In addition to Eq. (20), note that, for the "adjoint representation" of Eq. (10), the canonical integrals take the zero values on  $S_v$ ,

$$\phi(x) = \partial_x \quad \longrightarrow \quad I_s[\phi](x) = 0, \quad x \in S_v, \quad s > 0.$$

In fact, for  $x \in S_v$ , we have  $\partial_x^2 = 0$ , so the operator  $\partial_x$  is nilpotent and its all positive powers have a zero trace.

## 5. Conclusion

We have shown that the well-known construction of the Lax equations on Lie algebras can be extended to Lie superalgebras, important in mathematics and theoretical physics in their relation to the deformation theory and supersymmetry. Like the usual Lax equations, the extended ones admit the canonical trace polynomial integrals of motion which can be used in the integrability theory for nonlinear evolution equations. Besides the canonical integrals, the extra set of derived integrals occurs in the odd subspace, as a result of tensorial intertwining with the even subspace. This new feature is due to the symmetric character of multiplication within the odd subspace. The orbit spaces generated by constant values of the derived integrals  $[x, x] = v$ , where  $v$  belongs to the 0th cohomology group of the underlying Lie group action, possess the natural (co)homological structure with respect to the inner derivations  $\partial_x$ . This structure is generically nontrivial, giving obstacles for the integral surfaces to be locally homogeneous spaces. These results algebraically relate the integrability theory of evolution equations with supersymmetry and the deformation theory.

The future work can be focused on possible connections of the orbit space  $S_v/G$  with the "intrinsic properties" of the algebraic variety  $S_v$  independent of its embedding into the odd subspace  $\mathfrak{l}^1$  (say, in the spirit of the Zariski and Mumford theories). An extension of the described algebraic structures to the general graded Lie algebras should be possible in terms of their natural grading into the even and odd subspaces. From the point of view of physical applications, it can be interesting to relate the above constructions to integrable nonlinear dynamics and supersymmetry (for instance, to connect Eqs. (19), (26) to symplectic geometry and Hamiltonian dynamics as well as to the extended supersymmetry theory, say, for the Poincaré algebra). Possible relations of the deformation Eq. (26) to the Maurer-Cartan formalism and the gauge theories can also be interesting.

The author declares no conflict of interest.

## References

1. Kodaira, K. On the existence of deformations of complex analytic structures / K. Kodaira, L. Nirenberg, D. C. Spencer // *Ann. of Math.* – 1958. – Vol. 68. – P. 450.
2. Gerstenhaber, M. The cohomology structure of an associative ring / M. Gerstenhaber // *Annals of Mathematics, Second Series.* – 1963. – Vol. 78. – P. 267.
3. Ross, L. E. Representations of graded Lie algebras / L. E. Ross // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1965. – Vol. 120. – P. 17.
4. Nijenhuis, A. Cohomology and deformations in graded Lie algebras / A. Nijenhuis, R. W. Richardson // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1966. – Vol. 72. – P. 1.
5. Hochschild, G. On the cohomology groups of an associative algebra / G. Hochschild // *Annals of Mathematics, Second Series.* – 1945. – Vol. 46(1). – P. 58.
6. Chevalley, C. Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras / C. Chevalley, S. Eilenberg // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1948. – Vol. 63. – P. 85.
7. Berezin, F. A. The method of second quantization / F. A. Berezin. – New York : Academic Press, 1966.
8. Kac, V. G. Lie superalgebras / V. G. Kac // *Advances in Mathematics.* – 1977. – Vol. 26. – P. 8.
9. Witten, E. Supersymmetry and Morse theory / E. Witten // *J. Diff. Geom.* – 1982. – Vol. 17. – P. 661.
10. Sergeev, A. N. Lie superalgebras and Calogero-Moser-Sutherland systems / A. N. Sergeev // *J. Math. Sci.* – 2018. – Vol. 235. – P. 756.
11. Gardner, C. S. Method for solving the Korteweg-deVries equation / C. S. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura // *Phys. Rev. Lett.* – 1967. – Vol. 19. – P. 1095.
12. Lax, P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P. D. Lax // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1968. – Vol. 21. – P. 467.
13. Zakharov, V. E. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media / V. E. Zakharov, A. B. Shabat // *Sov. Phys. JETP.* – 1972. – Vol. 34. – P. 62.
14. Ablowitz, M. J. Solitons and inverse scattering transform / M. J. Ablowitz, H. Segur. – Philadelphia : SIAM, 1981. – P. 435.

15. Toda, M. Theory of nonlinear lattices / M. Toda. – Berlin : Springer, 1989.
16. Bordemann, M. Generalized Lax pairs, the modified classical Yang–Baxter equation, and affine geometry of Lie groups / M Bordemann // Commun. Math. Phys. – 1990. – Vol. 135. – P. 201–216.
17. Karabanov, A. Tensor extensions of Lax equations / A. Karabanov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2023. – № 4 (62). – P. 5–9.

#### **Acknowledgments**

The author is sincerely grateful to V. V. Kuratov and A. V. Zhubr for valuable discussions.

#### **Для цитирования:**

Карабанов, А. Уравнения Лакса на супералгебрах Ли / А. Карабанов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 5–10.

#### **For citation:**

Karabanov, A. Lax equations on Lie superalgebras / A. Karabanov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2024. – № 5 (71). – P. 5–10.

Дата поступления рукописи: 08.04.2024

Received: 08.04.2024

## О перманенте многомерных матриц

Д. Б. Ефимов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар  
defimov@ipm.komisc.ru

### Аннотация

Перманент многомерных матриц выражен в терминах операций над элементами коммутативной алгебры с нильпотентными индекса 2 образующими. С помощью техники, основанной на данной взаимосвязи, доказано несколько свойств перманента. Изучены различные виды многомерных перестановок. Перманент многомерных матриц рассмотрен с точки зрения перечисляющей функции многомерных перестановок.

### Ключевые слова:

многомерная матрица, перманент, многомерная перестановка

### Введение

Перманент матрицы  $A = (a_{ij})$   $n$ -го порядка определяется следующим образом:

$$\text{Per } A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

(суммирование ведется по всем перестановкам  $n$ -го порядка). Перманент нашел широкое применение в комбинаторике, так как его можно рассматривать в качестве перечисляющей функции различных объектов дискретной математики: совершенных паросочетаний двудольных графов, перестановок с ограниченными позициями и т. д. Обширный материал, касающийся перманента можно найти в ставшей уже классической монографии [1].

Понятие перманента можно обобщить и на случай многомерных матриц. Эта тематика стала разрабатываться сравнительно недавно. Подробный обзор, посвященный данной теме, можно найти в статье [2]. В нашей работе мы затрагиваем некоторые дополнительные вопросы, связанные с перманентом многомерных матриц, не отраженные, насколько нам известно, в литературе.

Рассмотрим ассоциативную алгебру над полем  $F$ , порожденную элементами  $\iota_k$ , связанными следующими определяющими соотношениями:  $\iota_k^2 = 0$ ,  $\iota_k \iota_l = \iota_l \iota_k$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n$ . Хорошо известно [1, с. 110], что перманент матрицы можно выразить через произведение однородных элементов первой степени данной алгебры. Точнее, пусть дана матрица  $A = (a_{ij})$   $n$ -го порядка с элементами из  $F$ .

## On the permanent of multidimensional matrices

D. B. Efimov

Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,  
Syktyvkar  
defimov@ipm.komisc.ru

### Abstract

The permanent of multidimensional matrices is expressed in terms of operations on elements of commutative algebra with nilpotent index 2 generators. Using a technique based on this relationship, several properties of the permanent have been proved. Various types of multidimensional permutations are considered. The permanent of multidimensional matrices is considered from the point of view of the enumeration function of multidimensional permutations.

### Keywords:

multidimensional matrix, permanent, multidimensional permutation

Тогда, как нетрудно заметить,

$$\text{Per } A_{\iota_1 \iota_2 \dots \iota_n} = \prod_{i=1}^n (a_{i_1 \iota_1} + a_{i_2 \iota_2} + \dots + a_{i_n \iota_n}).$$

В первом разделе мы распространяем данную конструкцию на многомерный случай. С помощью техники, основанной на данной взаимосвязи, мы доказываем некоторые простейшие свойства перманента многомерных матриц.

Хорошо известно, что перманент можно использовать для перечисления перестановок с ограниченными позициями [3]. Во втором разделе мы рассматриваем многомерный аналог данной взаимосвязи на примере многомерных беспорядков.

### 1. Перманент многомерных матриц и некоторые его свойства

$d$ -Мерной матрицей  $A$  порядка  $n$  над полем  $F$  называется  $d$ -мерный массив элементов из  $F$ , каждый индекс которого пробегает значения от 1 до  $n$ :

$$A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d}), \quad i_k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad a_{i_1 i_2 \dots i_d} \in F.$$

Множество элементов матрицы  $A$  с фиксированными значениями  $d - k$  индексов называется  $k$ -мерной гранью,  $(d - 1)$ -мерную грань называют гипергранью [2]. Диагональю матрицы  $A$  называется любой набор из  $n$  ее эле-

ментов, отличающихся друг от друга в каждом индексе:

$$(a_{1\sigma_2(1)\dots\sigma_d(1)}, \dots, a_{n\sigma_2(n)\dots\sigma_d(n)}), \sigma_i \in S_n.$$

Обозначим через  $L(A)$  множество всех диагоналей матрицы  $A$ . Перманент матрицы  $A$  определяется следующим образом:

$$\text{Per } A = \sum_{l \in L(A)} \prod_{a \in l} a.$$

Очевидно, что если  $A$  — двумерная матрица, то мы получим обычное определение перманента.

**Пример.** Рассмотрим трехмерную матрицу 2-го порядка:  $A = (a_{ijk}), i, j, k = 1, 2$ . Графически ее можно изобразить в виде  $2 \times 2 \times 2$  куба или двух обычных  $2 \times 2$  матриц:

$$A = \left\{ \left( \begin{array}{cc} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{array} \right) \right\}.$$

Здесь первый индекс отвечает за номер матрицы, второй — за номер строки в матрице, третий — за номер столбца. Перманент данной матрицы имеет следующий вид:

$$\text{Per } A = a_{111}a_{222} + a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212} + a_{122}a_{211}.$$

Рассмотрим ассоциативную алгебру над полем  $F$ , порожденную образующими  $l_{jk}, j, k = 1, 2$ , удовлетворяющими следующим определяющим соотношениям:

$$l_{jk}l_{st} = \begin{cases} 0 & , \text{ если } j = s \text{ или } k = t, \\ l_{st}l_{jk} & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Данная алгебра, как нетрудно видеть, является шестимерной. Каждый ее элемент однозначно разлагается по базисным элементам  $l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}, l_{11}l_{22}, l_{12}l_{21}$ , составленным из образующих и их всевозможных ненулевых произведений с точностью до порядка сомножителей. Назовем такой базис *основным*. Пусть дана трехмерная матрица 2-го порядка  $A = (a_{ijk}), i, j, k = 1, 2$ . Рассмотрим следующие два элемента указанной выше алгебры:

$$a_i = a_{i11}l_{11} + a_{i12}l_{12} + a_{i21}l_{21} + a_{i22}l_{22}, \quad i = 1, 2.$$

Коэффициенты элемента  $a_1$  соответствуют гиперграням матрицы  $A$ , образованной элементами с первым индексом, равным 1, а коэффициенты элемента  $a_2$  — гиперграням, образованной элементами с первым индексом, равным 2. Рассмотрим произведение этих элементов:

$$a_1a_2 = (a_{111}a_{222} + a_{122}a_{211})l_{11}l_{22} + (a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212})l_{12}l_{21}.$$

Нетрудно видеть, что сумма коэффициентов элемента  $a_1a_2$  в разложении по основному базису равна перманенту матрицы  $A$ . Таким образом, если через  $sc(a)$  обозначить сумму коэффициентов элемента  $a$  в разложении по основному базису, то  $sc(a_1a_2) = \text{Per } A$ .

Можно рассмотреть элементы алгебры, соответствующие другим гиперграням, например, следующие:

$$b_i = a_{i11}l_{11} + a_{i12}l_{12} + a_{2i1}l_{21} + a_{2i2}l_{22}, \quad i = 1, 2.$$

Их произведение

$$b_1b_2 = (a_{111}a_{222} + a_{121}a_{212})l_{11}l_{22} + (a_{112}a_{221} + a_{211}a_{122})l_{12}l_{21}$$

в общем случае будет отличаться от  $a_1a_2$ , но сумма коэффициентов произведения также будет равна перманенту матрицы  $A$ :  $sc(b_1b_2) = \text{Per } A$ .

Пусть теперь в общем случае дана  $(d+1)$ -мерная матрица  $n$ -го порядка  $A = (a_{i_1i_2\dots i_{d+1}})$  над полем  $F$ . Рассмотрим алгебру  $P_{d,n}(l)$  над  $F$  с образующими  $l_{j_1j_2\dots j_d}, j_1, j_2, \dots, j_d = 1, \dots, n$ , удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$\begin{cases} l_{j_1\dots j_d} \cdot l_{j'_1\dots j'_d} = 0 & , \exists s : j_s = j'_s, \\ l_{j_1\dots j_d} \cdot l_{j'_1\dots j'_d} = l_{j'_1\dots j'_d} \cdot l_{j_1\dots j_d} & , \text{ иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Как и в трехмерном случае, ее основным базисом назовем базис, составленный из образующих и их всевозможных ненулевых произведений с точностью до порядка сомножителей. Рассмотрим в этой алгебре следующие элементы:

$$a_i = \sum_{i_1, \dots, i_d} a_{ii_1\dots i_d} l_{i_1\dots i_d}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$sc(a_1a_2\dots a_n) = \text{Per } A. \quad (2)$$

Аналогично трехмерному случаю, в общем случае в качестве сомножителей можно брать элементы алгебры, соответствующие и другим гиперграням матрицы.

Соотношение (2) позволяет, например, доказывать свойства перманента многомерных матриц в терминах преобразования элементов алгебры  $P_{d,n}(l)$ . Прежде чем привести пример, рассмотрим два простейших свойства функции  $sc$ .

**1. Линейность.** Если  $\alpha, \beta \in F, a, b \in P_{d,n}(F)$ , то

$$sc(\alpha a + \beta b) = \alpha sc(a) + \beta sc(b). \quad (3)$$

**2. Мультипликативность.** Предположим, что элементы  $a, b, ab \in P_{d,n}(l)$ , рассматриваемые как элементы векторного пространства, имеют  $m, n$  и  $mn$  ненулевых координат в основном базисе соответственно. Это возможно тогда и только тогда, когда произведение любого базисного элемента, входящего в разложение  $a$  с ненулевым коэффициентом, на любой базисный элемент, входящий в разложение  $b$  с ненулевым коэффициентом, не равно нулю. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$sc(ab) = sc(a)sc(b). \quad (4)$$

Например, пусть  $a = 2l_{11} + 3l_{12}, b = 3l_{23} - 4l_{33}$  — два элемента алгебры  $P_{2,3}(l)$  над  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$ab = 6l_{11}l_{23} + 9l_{12}l_{23} - 8l_{11}l_{33} - 12l_{12}l_{33}.$$

При этом  $sc(a) = 5, sc(b) = -1, sc(ab) = -5$ , и свойство (4) выполняется.

В качестве примера использования соотношения (2) докажем формально аналог свойства разложения перманента по строке (столбцу) для многомерных матриц. Пусть

дана  $d$ -мерная матрица  $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})$   $n$ -го порядка. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Per} A &= sc \left( \prod_{i_1=1}^n \sum_{i_2, \dots, i_d=1}^n a_{i_1 i_2 \dots i_d} l_{i_2 \dots i_d} \right) = \\ &= sc \left( \sum_{i_2, \dots, i_d=1}^n a_{1 i_2 \dots i_d} l_{i_2 \dots i_d} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \prod_{j_1=2}^n \sum_{j_2, \dots, j_d=1}^n a_{j_1 j_2 \dots j_d} l_{j_2 \dots j_d} \right) \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание первое из определяющих соотношений (1), а также свойства (3), (4), мы можем продолжить преобразования следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Per} A &= sc \left( \sum_{i_2, \dots, i_d=1}^n a_{1 i_2 \dots i_d} l_{i_2 \dots i_d} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \prod_{j_1=2}^n \sum_{\substack{j_k \neq i_k \\ k=2, \dots, n}} a_{j_1 j_2 \dots j_d} l_{j_2 \dots j_d} \right) \right) = \\ &= \sum_{i_2, \dots, i_d=1}^n a_{1 i_2 \dots i_d} sc \left( \prod_{j_1=2}^n \sum_{\substack{j_k \neq i_k \\ k=2, \dots, n}} a_{j_1 j_2 \dots j_d} l_{j_2 \dots j_d} \right) = \\ &= \sum_{i_2, \dots, i_d=1}^n a_{1 i_2 \dots i_d} \text{Per} (A\{1, i_2, \dots, i_d\}). \end{aligned}$$

Здесь через  $A\{1, i_2, \dots, i_d\}$  мы обозначили *дополнительную матрицу* элемента  $a_{1 i_2 \dots i_d}$ , т. е. матрицу, получаемую из матрицы  $A$  вычеркиванием всех элементов, лежащих с  $a_{1 i_2 \dots i_d}$  в одной гиперплоскости. Очевидно, что в доказательстве можно проводить суммирование и относительно элементов других гиперплоскостей. Таким образом, перманент  $n$ -мерной матрицы равен сумме произведений элементов некоторой гиперплоскости на перманенты дополнительных матриц этих элементов.

Прежде чем перейти к доказательству следующего свойства, введем дополнительные обозначения. Обозначим через  $Q_{k,n}$  — множество всех  $k$ -элементных неупорядоченных подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Пусть  $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})$  —  $d$ -мерная матрица  $n$ -го порядка и  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d \in Q_{k,n}$ . Через  $A[\alpha_{l=1, \dots, d}]$  обозначим  $d$ -мерную матрицу  $k$ -го порядка, которая состоит из элементов  $a_{i_1 i_2 \dots i_d}$  матрицы  $A$  таких, что  $i_1 \in \alpha_1, i_2 \in \alpha_2, \dots, i_d \in \alpha_d$ , а через  $A\{\alpha_{l=1, \dots, d}\}$  —  $d$ -мерную матрицу  $(n-k)$ -го порядка, получаемую из  $A$  удалением элементов  $a_{i_1 i_2 \dots i_d}$  таких, что  $i_1 \in \alpha_1, i_2 \in \alpha_2, \dots, i_d \in \alpha_d$ . Матрицы  $A[\alpha_{l=1, \dots, d}]$  и  $A\{\alpha_{l=1, \dots, d}\}$  будем называть *дополнительными* друг другу.

Рассмотрим перманент суммы двух матриц. Пусть  $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_d})$  и  $B = (b_{i_1 i_2 \dots i_d})$  — две  $d$ -мерные матрицы по-

рядка  $n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Per}(A + B) &= \\ &= sc \left( \prod_{i_1=1}^n \sum_{i_2, \dots, i_d=1}^n (a_{i_1 i_2 \dots i_d} + b_{i_1 i_2 \dots i_d}) l_{i_2 \dots i_d} \right) = \\ &= sc \left( \prod_{i_1=1}^n \left( \sum_{i_2, \dots, i_d=1}^n a_{i_1 i_2 \dots i_d} l_{i_2 \dots i_d} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i_2, \dots, i_d=1}^n b_{i_1 i_2 \dots i_d} l_{i_2 \dots i_d} \right) \right) = \\ &= sc \left( \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{\alpha_l \in Q_{k,n} \\ l=1, \dots, d}} \left( \sum_{d \in D(A[\alpha_{l=1, \dots, d}])} \prod_{a \in d} a l_a \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \sum_{d \in D(B\{\alpha_{l=1, \dots, d}\})} \prod_{b \in d} b l_b \right) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{\alpha_l \in Q_{k,n} \\ l=1, \dots, d}} \left[ sc \left( \sum_{d \in D(A[\alpha_{l=1, \dots, d}])} \prod_{a \in d} a l_a \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times sc \left( \sum_{d \in D(B\{\alpha_{l=1, \dots, d}\})} \prod_{b \in d} b l_b \right) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{\alpha_l \in Q_{k,n} \\ l=1, \dots, d}} \text{Per}(A[\alpha_{l=1, \dots, d}]) \text{Per}(B\{\alpha_{l=1, \dots, d}\}). \end{aligned}$$

Таким образом, перманент суммы двух матриц равен сумме по всем подматрицам первой матрицы (включая пустую) произведений перманента подматрицы на перманент дополнительной матрицы аналогичной подматрицы во второй матрице.

## 2. Перечисление многомерных перестановок

Обычное понятие перестановки легко обобщается на многомерный случай. Пусть, например, числа  $1, 2, \dots, n$  расположены в матрице  $n \times n$  так, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно по одному числу. Назовем такое расположение *двумерной (квадратичной) перестановкой*  $n$ -го порядка. За *тождественную* можно принять перестановку, при которой каждое число  $i$  расположено на пересечении  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца.

**Пример.** Квадратичные перестановки 2-го порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 2 & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & 2 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Квадратичные перестановки 3-го порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}, \dots$$

Аналогично можно рассмотреть трехмерные (кубические) (т. е. расположение чисел от 1 до  $n$  в кубе  $n \times n \times n$ ), четырехмерные, пятимерные и т. д. перестановки. Вообще,  $d$ -мерную перестановку можно определить как набор  $d$

обычных перестановок  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_d)$  [4]. Первая отвечает за перестановку чисел  $1, 2, \dots, n$  в одном «направлении», вторая — в другом и т. д. Как и в обычном (одномерном) случае, каждой такой перестановке можно поставить в соответствие  $(d + 1)$ -мерную  $(0, 1)$ -матрицу (матрицу перестановки). В этой матрице элементы на позициях  $(i, \pi_1(i), \pi_2(i), \dots, \pi_d(i))$  будут равны единице, а все остальные элементы равны нулю. В такой матрице каждая гипергрань будет содержать ровно одну единицу.

Отметим, что существуют и другие подходы к понятию многомерной перестановки. Так, в работах [5, 6] рассматриваются многомерные перестановки, которые задаются многомерными  $(0, 1)$ -матрицами, содержащими ровно по одной единице в каждой одномерной грани. В работе [6] такие перестановки называют *плотными* (англ. dense) в отличие от рассмотренных выше *разреженных* (англ. sparse). Плотные перестановки однозначно ассоциируются с латинскими квадратами размерности  $n$ . В дальнейшем под многомерной перестановкой мы будем понимать разреженную перестановку.

В качестве примера рассмотрим многомерное обобщение перестановок без неподвижных точек (беспорядков). Напомним, что беспорядком (англ. derangement) называется перестановка  $\pi \in S_n$  такая, что  $\pi(i) \neq i$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ . При обобщении таких перестановок на многомерный случай возникают сразу несколько вариантов. Частичным  $d$ -мерным беспорядком  $n$ -го порядка назовем такую  $d$ -мерную перестановку  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_d)$ , что для любого  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  найдется  $k$  такое, что  $\pi_k(i) \neq i$ . Применяя метод включений-исключений нетрудно показать, что общее число таких перестановок равно

$$p_d(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k [(n-k)!]^d.$$

Пусть  $m \leq d$ .  $d$ -Мерным беспорядком  $n$ -го порядка по  $m$  индексам назовем  $d$ -мерную перестановку  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_d)$ , в которой найдутся индексы  $k_1, k_2, \dots, k_m$  такие, что для любого  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$   $\pi_{k_1}(i) \neq i, \pi_{k_2}(i) \neq i, \dots, \pi_{k_m}(i) \neq i$ . Опять же, используя принцип включения-исключения, можно показать, что общее число таких беспорядков равно

$$l_d(n) = (n!)^d \left( \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \right)^m.$$

Как и в классическом случае, любая  $(d + 1)$ -мерная  $(0, 1)$ -матрица  $A$  задает целый класс  $d$ -мерных перестановок. А именно, в этот класс попадают те перестановки, для матриц инцидентности  $P$  которых выполняется неравенство  $P \leq A$ , т. е. каждый элемент матрицы  $P$  не больше соответствующего элемента матрицы  $A$ . Тогда перманент матрицы  $A$ , как и в классическом случае, будет равен числу перестановок в этом классе. Например, если рассмотреть  $(d + 1)$ -мерную матрицу  $n$ -го порядка  $A_n^{d+1}$ , у которой диагональные элементы  $a_{ii\dots i}, i = 1, 2, \dots, n$  равны нулю, а все остальные элементы — единице, то перманент такой матрицы будет равен числу частичных  $d$ -мер-

ных беспорядков  $n$ -го порядка (ср. [2]):

$$\text{Per } A_n^{d+1} = p_d(n).$$

Рассмотрим  $(d + 1)$ -мерную  $(0, 1)$ -матрицу  $n$ -го порядка  $B_n^{d+1}$ , в которой элемент равен нулю тогда и только тогда, когда его первый индекс совпадает с одним из  $m$  других индексов под номерами  $k_1, k_2, \dots, k_m$ . Тогда перманент этой матрицы равен числу беспорядков по  $m$  индексам:

$$\text{Per } B_n^{d+1} = l_d(n).$$

В данных примерах, зная количество перестановок в классе, мы говорили о значении перманента. Но это соотношение можно использовать и в обратную сторону: вычисляя (оценивая) перманент многомерной  $(0, 1)$ -матрицы, получать характеристику количества соответствующих многомерных перестановок.

### 3. Заключение

В работе рассмотрено выражение перманента многомерных матриц через произведение однородных элементов коммутативной ассоциативной алгебры с нильпотентными индексами 2 образующими. На основе этой взаимосвязи доказаны некоторые простейшие свойства перманента. Рассмотрена его связь с перечислением многомерных перестановок. В частности, более подробно разобран случай многомерных беспорядков.

Отметим, что перманент обычных (двумерных) матриц задается сходным образом с определителем, но, по сравнению с последним, является менее «удобной» для изучения функцией, так как обладает значительно меньшей симметрией с точки зрения преобразований матриц. Многие задачи, связанные с перманентом, не имеют «хорошего» решения в общем виде и сводятся к рассмотрению частных случаев. В многомерном варианте сложность, естественно, еще более возрастает. Тем не менее переход в высшие размерности полезен с той точки зрения, что помимо самостоятельного интереса позволяет с другого ракурса взглянуть и на «базовый» двумерный случай.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

### Литература

1. Минк, Х. Перманенты / Х. Минк. – Москва : Мир, 1982. – 210 с.
2. Тараненко, А. А. Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения / А. А. Тараненко // Дискретный анализ и исследование операций. – 2016. – Т. 23, № 4. – С. 35–101.
3. Шевелев, В. С. Некоторые вопросы теории перечисления перестановок с ограниченными позициями / В. С. Шевелёв // Итоги науки и техники. Серия Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. – 1992. – Т. 30. – С. 113–177.
4. Zhang, H. Enumeration of factorizable multi-dimensional permutations / H. Zhang, D. Gildea // Journal of Integer Sequences. – 2007. – Vol. 10.

5. Linial, N. An upper bound on the number of high-dimensional permutations / N. Linial, Z. Luria // *Combinatorica*. – 2014. – V. 25, № 4. – P. 471–486.
6. Eriksson, K. A Combinatorial Theory of Higher-Dimensional Permutation Arrays / K. Eriksson, S. Linusson // *Advances in Applied Mathematics*. – 2000. – V. 25. – P. 194–211.
3. Shevelev, V. S. Some problems of the theory of enumerating the permutations with restricted positions / V. S. Shevelev // *Journal of Soviet Mathematics*. – 1992. – Vol. 61, № 4. – P. 2272–2317.
4. Zhang, H. Enumeration of factorizable multi-dimensional permutations / H. Zhang, D. Gildea // *Journal of Integer Sequences*. – 2007. – Vol. 10.
5. Linial, N. An upper bound on the number of high-dimensional permutations / N. Linial, Z. Luria // *Combinatorica*. – 2014. – Vol. 25, № 4. – P. 471–486.
6. Eriksson, K. A combinatorial theory of higher-dimensional permutation arrays / K. Eriksson, S. Linusson // *Advances in Applied Mathematics*. – 2000. – Vol. 25. – P. 194–211.

## References

1. Minc, H. *Permanents* / H. Minc. – Cambridge University Press, 1984. – 205 p.
2. Taranenko, A. A. *Permanentny mnogomernyh matrits: svoystva i prilozhenija* [Permanents of multidimensional matrices: properties and applications] / A. A. Taranenko // *Diskretnyj analiz i issledovanie operacij* [Discrete Analysis and Operations Research]. – 2016. – Vol. 23., № 4. – P. 35–101.

## Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

## Acknowledgement (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

## Для цитирования:

Ефимов, Д. Б. О перманенте многомерных матриц / Д. Б. Ефимов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки»*. – 2024. – № 5 (71). – С. 11–15.

## For citation:

Efimov, D. B. On the permanent of multidimensional matrices / D. B. Efimov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”*. – 2024. – № 5 (71). – P. 11–15.

Дата поступления статьи: 10.06.2024

Received: 10.06.2024

## Устойчивость треугольника Рёло под действием нормальной нагрузки

В. Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар  
vntarasov@ipm.komisc.ru

### Аннотация

Фигурой постоянной ширины называется такая фигура, у которой расстояние между любыми параллельными опорными прямыми одно и то же. Ясно, что таким свойством обладает круг, но не только. Простейшей фигурой постоянной ширины (кроме круга) является треугольник Рёло. В настоящей работе решается задача устойчивости треугольника Рёло, находящегося под действием нормальной нагрузки. Получено значение критического давления.

### Ключевые слова:

критическая сила, радиус кривизны, треугольник Рёло, упругая энергия, работа внешних сил, уравнение Эйлера

### Введение

Исследование задач устойчивости гибких элементов конструкций и упругих систем в настоящее время занимает одно из центральных мест в механике деформируемого твердого тела и представляет значительный интерес. Теория устойчивости упругих систем берет свое начало с работ Эйлера по теории продольного изгиба (см. обзор Е. И. Николаи «О работах Л. Эйлера по теории продольного изгиба» в [1]). Проблемы упругой устойчивости исследовались многими авторами [2–5]. На основе вариационного подхода можно доказать теорему существования решения уравнений равновесия. Также можно убедиться, что в устойчивом положении равновесия функционал полной энергии достигает локального минимума. Общая концепция упругой бифуркационной устойчивости предложена в монографии В. В. Новожилова [6]. В связи со стремительным развитием вычислительной техники и появлением универсальных численных алгоритмов для решения краевых задач (методы граничных и конечных элементов) к настоящему времени имеются комплексы программ, позволяющие рассчитывать упругие конструкции на устойчивость, например [4]. Некоторые новые задачи устойчивости упругих систем при наличии ограничений в форме неравенств рассмотрены в [7–9].

В общем случае проблемы упругой устойчивости сводятся к нахождению точек бифуркации нелинейных уравнений или нахождению параметров, при которых некоторая вариационная задача имеет несколько решений.

## Stability of the Reuleaux triangle under normal load

V. N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,  
Syktyvkar  
vntarasov@ipm.komisc.ru

### Abstract

A figure of constant width is such a figure that the distance between any parallel reference lines is the same. It is clear that a circle has this property, but not only it. The simplest figure of constant width (except for a circle) is the Reuleaux triangle. This work solves the problem of stability of the Reuleaux triangle under normal load. The critical pressure value has been obtained.

### Keywords:

critical force, radius of curvature, Reuleaux triangle, elastic energy, work of external force, Euler's equation

### 1. Постановка задачи

Представим себе круговое кольцо радиуса  $\tilde{R}$ , сжатое нормальным давлением  $P$ , равномерно распределенным по длине кольца. Круговая форма кольца будет устойчивой, если сила давления  $P$  не превосходит некоторого предела, который называется критическим давлением. Обозначим через  $\mu$  — жесткость на изгиб кольца. Тогда критическое давление в случае нормальной нагрузки (сила давления направлена все время по нормали к деформированной оси кольца) вычисляется по формуле

$$P = \frac{3\mu}{\tilde{R}^3}. \quad (1)$$

Прямая называется опорой к выпуклой плоской фигуре, если она имеет общие точки с этой фигурой, и вся фигура лежит по одну сторону от прямой. Фигурой постоянной ширины называется такая любая выпуклая фигура, у которой расстояние между двумя любыми параллельными опорными прямыми одно и то же. Очевидно таким свойством обладает круг. Но кроме круга существует еще много фигур постоянной ширины. Простейшей из них является треугольник Рёло. Треугольник Рёло — пересечение трех равных кругов радиуса  $R$  с центрами в вершинах правильного треугольника. Таким образом, треугольник Рёло состоит из трех дуг окружностей радиуса  $R$  с центральным углом  $\frac{\pi}{3}$  (рис. 1).



Представим, что тонкий упругий стержень, ось которого в недеформированном состоянии представляет собой дугу окружности радиуса  $R$ , находится под действием сил и нагрузки, распределенной по ее оси. Введем в точке  $M$  на оси стержня систему координат  $(x, y, z)$ , ось  $z$  направлена по касательной к оси стержня, оси  $x$  и  $y$  — по главным осям инерции поперечного сечения (ось  $x$  направлена к центру кривизны дуги, т. е. к соответствующей вершине треугольника).  $ds$  — элемент длины стержня,  $s$  — длина, отсчитываемая от некоторой точки  $M_0$ . Пусть точка  $M$  движется с единичной скоростью ( $\frac{ds}{dt} = 1$ ), тогда система координат  $(x, y, z)$  будет вращаться с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ , проекции которой на оси  $(x, y, z)$  обозначим через  $(p, q, r)$ .

В точке  $M$  приложены силы  $(V_x, V_y, V_z)$  и моменты  $(L_x, L_y, L_z)$ , а также вектор внешней нагрузки  $(F_x, F_y, F_z)$ . Тогда уравнения равновесия Кирхгофа [1] имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{ds} - rV_y + qV_z + F_x = 0, \\ \frac{dV_y}{ds} - pV_z + rV_x + F_y = 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x + pV_y + F_z = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{ds} - rL_y + qL_z - V_y = 0, \\ \frac{dL_y}{ds} - pL_z + rL_x + V_x = 0, \\ \frac{dL_z}{ds} - qL_x + pL_y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В недеформированном (первоначальном) состоянии оси  $x, y, z$  обозначим через  $x_0, y_0, z_0$ . Соответствующую угловую скорость обозначим через  $\Omega_0$  с проекциями  $(p_0, q_0, r_0)$  на оси  $(x_0, y_0, z_0)$  соответственно.

В результате деформации стержня точка  $M$  получает перемещение, проекции которого на оси  $(x_0, y_0, z_0)$  обозначим через  $(u, v, w)$ . Векторы  $(p, q, r)$  и  $(p_0, q_0, r_0)$  характеризуют изменения кривизны стержня в результате деформации. Считая деформации малыми, можно записать уравнение Клебша [1]:

$$p = p_0 + \delta p, \quad q = q_0 + \delta q, \quad r = r_0 + \delta r,$$

$$\begin{cases} \delta p = \frac{d\alpha}{ds} - r_0\beta + q_0\gamma, \\ \delta q = \frac{d\beta}{ds} - p_0\gamma + r_0\alpha, \\ \delta r = \frac{d\gamma}{ds} - q_0\alpha + p_0\beta, \end{cases} \quad (4)$$

где  $(\alpha, \beta, \gamma)$  — косинусы углов между осями  $(x, y, z)$  и  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Таблица 1  
Косинусы углов, заключенных между осями  $(x, y, z)$  и  $(x_0, y_0, z_0)$   
Table 1  
Cosines of angles between the axes  $(x, y, z)$  and  $(x_0, y_0, z_0)$

	$x$	$y$	$z$
$x_0$	1	$-\alpha$	$\beta$
$y_0$	$\alpha$	1	$-\alpha$
$z_0$	$-\beta$	$\alpha$	1

Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  связаны с перемещением уравнениями:

$$\begin{cases} \beta = \frac{du}{ds} + q_0w - r_0v, \\ -\alpha = \frac{dv}{ds} + r_0u - p_0w, \\ 0 = \frac{dw}{ds} + p_0v - q_0u. \end{cases} \quad (5)$$

В табл. 1 приведены косинусы углов между осями  $x, y, z$  и  $x_0, y_0, z_0$ . Так как ось стержня в недеформированном состоянии представляет собой дугу окружности, то  $p_0 = 0$ ,  $q_0 = \frac{1}{R}$ ,  $r_0 = 0$  и, поскольку дуги нагружены нормальным давлением, то  $F_y = 0$ . Пусть  $ds = R d\vartheta$ , где  $\vartheta$  — центральный угол дуги окружности. В нашем случае деформация кольца плоская, т. е.  $p = 0$ ,  $q = q_0$ ,  $r = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $F_z = 0$ ,  $V_y = 0$ ,  $L_x = 0$ ,  $L_z = 0$ . Таким образом, уравнения Кирхгофа-Клебша упрощаются:

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{ds} + qV_z + F_x = 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - qV_x = 0, \\ \frac{dL_y}{ds} + V_x = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку деформации предполагаются малыми, то можно написать [1]

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \delta q, \quad \delta q = \frac{d\beta}{ds}, \quad L_y = \mu \delta q, \\ \beta &= \frac{du}{ds} + q_0w, \quad \delta q = \frac{1}{R^2} \left( \frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u \right), \quad u = \frac{dw}{d\vartheta}. \end{aligned}$$

При всякой величине давления на дуги возможна первоначальная, недеформированная форма равновесия. Для этой формы имеем

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = -RP.$$

Полагая в уравнениях (6)

$$V_z = -RP + \delta V_z$$

и отбрасывая в этих уравнениях нелинейные слагаемые, получим

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{d\vartheta} + \delta V_z - RP\delta q = 0, \\ \frac{d\delta V_z}{d\vartheta} - V_x + RPz = 0, \\ \frac{dL_y}{d\vartheta} + RV_x = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Из уравнений (7) легко имеем

$$\frac{d^2V_x}{d\vartheta^2} + \left( 1 + \frac{R^3P}{\mu} \right) V_x - RPz = 0.$$

Если давление остается нормальным к оси дуги, то  $P_z = 0$ . Из третьего уравнения (7) получаем

$$V_x = -\frac{1}{R} \frac{dL_y}{d\vartheta} = -\frac{\mu}{R^3} \left( \frac{d^3u}{d\vartheta^3} + \frac{du}{d\vartheta} \right).$$

С учетом условия несжимаемости  $u = w'$  окончательно находим уравнение равновесия:

$$\frac{d^6w}{d\vartheta^6} + 2\frac{d^4w}{d\vartheta^4} + \frac{d^2w}{d\vartheta^2} + \rho \left( \frac{d^4w}{d\vartheta^4} + \frac{d^2w}{d\vartheta^2} \right) = 0, \quad (8)$$

где введено обозначение  $\rho = \frac{PR^3}{\mu}$ . Для функции  $u$  уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^4u}{d\vartheta^4} + 2\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u + \rho \left( \frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u \right) + \frac{1}{2 + \rho} (c_5\vartheta + c_6) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (8) является уравнением Эйлера для функционала

$$J = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left[ \frac{1}{2} (w''' + w')^2 - \frac{\rho}{2} (w''^2 - w'^2) \right] d\vartheta. \quad (10)$$

Заметим, что первое слагаемое пропорционально потенциальной (упругой) энергии деформированной дуги

$$U = \frac{\mu}{2R^3} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (w''' + w')^2 d\vartheta$$

а второе — пропорционально работе внешних сил

$$W = \frac{P}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (w''^2 - w'^2) d\vartheta.$$

Общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$w = c_1 \sin \vartheta + c_2 \cos \vartheta + c_3 \sin(\sqrt{\rho+1}\vartheta) + c_4 \cos(\sqrt{\rho+1}\vartheta) + \frac{1}{2+\rho} (c_5 \vartheta + c_6). \quad (11)$$

## 2. Решение задачи

Треугольник Рёло состоит из трех дуг окружности радиуса  $R$ , точки пересечения этих дуг являются вершинами правильного треугольника, центры кривизны дуг находятся в вершинах, поэтому центральный угол дуг равен  $\frac{\pi}{3}$  (рис. 1).

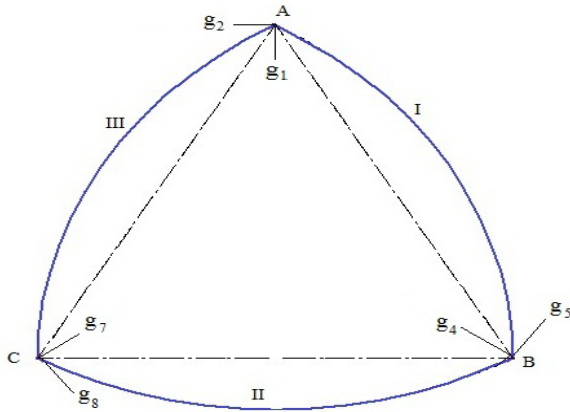


Рисунок 1. Треугольник Рёло. Направления перемещений вершин треугольника Рёло в результате деформации.

Figure 1. Reuleaux triangle. Directions of movement of the vertices of the Reuleaux triangle as a result of deformation.

Пусть каждая дуга нагружена нормальным давлением  $P$ , тогда касательное и нормальное перемещения точек каждой дуги определяются формулами:

$$\begin{aligned} u = w' &= c_1 \cos \vartheta - c_2 \sin \vartheta + \\ &+ c_3 \sqrt{\rho+1} \cos(\sqrt{\rho+1}\vartheta) - \\ &- c_4 \sin(\sqrt{\rho+1}\vartheta) \sqrt{\rho+1} + c_5 \frac{1}{2+\rho}, \quad (12) \\ u' = w'' &= -c_1 \sin \vartheta - c_2 \cos \vartheta - \\ &- c_3 (\rho+1) \sin(\sqrt{\rho+1}\vartheta) - \end{aligned}$$

$$-c_4 \cos(\sqrt{\rho+1}\vartheta) (\rho+1), \quad (13)$$

$$\beta = \frac{1}{R} \left( -c_3 \rho \sin(\sqrt{\rho+1}\vartheta) - c_4 \rho \cos(\sqrt{\rho+1}\vartheta) + \frac{c_5 \vartheta + c_6}{(2+\rho)} \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u'' &= -c_1 \cos \vartheta + c_2 \sin \vartheta - \\ &- c_3 \cos(\sqrt{\rho+1}\vartheta) (\rho+1)^{3/2} + \\ &+ c_4 \sin(\sqrt{\rho+1}\vartheta) (\rho+1)^{3/2}. \quad (15) \end{aligned}$$

Подставляя (12)–(15) в (10), получим выражение полной энергии для деформированных дуг.

Постоянные интегрирования не могут быть совершенно произвольными: проекции перемещений дуг треугольника Рёло на направления  $g_1, g_2, g_4, g_5, g_7, g_8$  на концах дуг должны совпадать. Также должны совпадать углы поворота:

$$\beta(0) = g_3 \text{ для дуги I, } \beta\left(\frac{\pi}{3}\right) = g_3 \text{ для дуги III,}$$

$$\beta\left(\frac{\pi}{3}\right) = g_6 \text{ для дуги I, } \beta(0) = g_6 \text{ для дуги II,}$$

$$\beta\left(\frac{\pi}{3}\right) = g_9 \text{ для дуги II, } \beta(0) = g_9 \text{ для дуги III.}$$

Таким образом, для дуги III  $w(\frac{\pi}{3})$  и  $u(\frac{\pi}{3})$  должны определяться через перемещения  $g_1, g_2$  вершины  $A$ . Для дуги I через эти же перемещения определяются  $w(0), u(0)$ . Аналогично, для дуги I величины  $w(\frac{\pi}{3}), u(\frac{\pi}{3})$  должны определяться через перемещения  $g_4, g_5$  вершины  $B$ . Через эти же перемещения определяются  $w(0), u(0)$  для дуги II. Значения  $w(\frac{\pi}{3}), u(\frac{\pi}{3})$  для дуги II определяются через перемещения  $g_7, g_8$  вершины  $C$ . Через эти же перемещения определяются величины  $w(0), u(0)$  для дуги III.

Для дуги I постоянные интегрирования обозначим через  $c_1, c_2, \dots, c_6$ , для дуги II — через  $c_7, c_8, \dots, c_{12}$ , а для дуги III — через  $c_{13}, c_{14}, \dots, c_{18}$ . В результате имеем три вектора  $C_i \in R^6, i = 1, 2, 3$ .

Введем в рассмотрение матрицу  $H$  с элементами  $h_{ij}, i, j \in 1, \dots, 6$  вида

$$h_{11} = 0, \quad h_{12} = 1, \quad h_{13} = 0,$$

$$h_{14} = 1, \quad h_{15} = 0, \quad h_{16} = \frac{1}{2+\rho},$$

$$h_{21} = 1, \quad h_{22} = 0, \quad h_{23} = \sqrt{\rho+1},$$

$$h_{24} = 0, \quad h_{25} = \frac{1}{2+\rho}, \quad h_{26} = 0,$$

$$h_{31} = 0, \quad h_{32} = 0, \quad h_{33} = 0,$$

$$h_{34} = -\frac{\rho^2 + 2\rho}{2+\rho}, \quad h_{35} = 0, \quad h_{36} = \frac{1}{2+\rho},$$

$$h_{41} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad h_{42} = \frac{1}{2}, \quad h_{43} = \sin\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right),$$

$$h_{44} = \cos\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right), \quad h_{45} = \frac{\pi}{3(2+\rho)},$$

$$h_{46} = \frac{1}{2+\rho}, \quad h_{51} = \frac{1}{2}, \quad h_{52} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$h_{53} = \cos\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\sqrt{\rho+1},$$

$$h_{5,4} = -\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\sqrt{\rho+1},$$

$$h_{55} = \frac{1}{(2+\rho)}, \quad h_{56} = 0,$$

$$h_{61} = 0, \quad h_{62} = 0,$$

$$h_{63} = \frac{-3\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\rho^2 - 6\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\rho}{3(2+\rho)},$$

$$h_{64} = \frac{-3\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\rho^2 - 6\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\rho+1}}{3}\right)\rho}{3(2+\rho)},$$

$$h_{65} = \frac{\pi}{3(2+\rho)}, \quad h_{66} = \frac{1}{2+\rho}.$$

Введем матрицу поворота  $M_p$

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и обозначим через  $M_b$  матрицу

$$M_b = H^{-1}M_p.$$

Пусть  $g_1, g_2$  перемещения вершины треугольника  $A$ , причем  $g_1$  направлено к центру треугольника, а  $g_2$  — перпендикулярно к  $g_1$  так, что поворот от  $g_2$  к  $g_1$  происходит против часовой стрелки;  $g_3$  есть угол поворота вершины  $A$ . Аналогично  $g_4, g_5$  перемещения вершины  $B$ , а  $g_6$  угол поворота вершины  $B$ . Величины  $g_7, g_8$ , соответствующие перемещения вершины  $C$ , а  $g_9$  угол поворота этой вершины (см. рис. 1).

Деформация дуги  $l$  определяется уравнениями (12)–(15), произвольные постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_6$  могут быть однозначно выражены через  $g_1, g_2, \dots, g_6$ . Для того, чтобы исключить перемещения треугольника Рёло как жесткого целого, следует положить  $g_5 = 0, g_7 = 0, g_8 = 0$ .

Введем новые переменные

$$d_1 = g_1, d_2 = g_2, d_3 = g_3, d_4 = g_4, d_5 = g_6, d_6 = g_9.$$

Рассмотрим три вектора

$$l_1 = (d_1, d_2, d_3, d_4, 0, d_6), \quad l_2 = (d_4, 0, d_6, 0, 0, d_6), \\ l_3 = (0, 0, d_6, d_1, d_2, d_3).$$

Векторы  $C_1, C_2, C_3$  выражаются через переменные  $d_1, d_2, \dots, d_6$  по формулам

$$C_i = M_b l_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (12)–(15) для дуг I, II, III, находим выражения для полной энергии деформированных дуг

$$J_i = \int_0^{\pi/3} \left[ \frac{1}{2} (w_i'' + w_i')^2 - \frac{\rho}{2} (w_i''^2 - w_i'^2) \right] d\vartheta. \quad (17)$$

Полная энергия деформированного треугольника равна

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Заметим, что  $J$  представляет собой квадратичную форму от переменных  $d = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$ . Матрицу этой квадратичной формы обозначим через  $D$ . Таким образом, получаем функцию

$$f(d) = \frac{1}{2}(Dd, d).$$

Матрица  $D$  зависит от безразмерного параметра  $\rho = \frac{PR^3}{\mu}$ , который в свою очередь определяется давлением  $P$ , радиусом  $R$  и жесткостью дуги на изгиб  $\mu = EJ_y$  вокруг оси перпендикулярной плоскости дуги. Здесь  $E$  — модуль Юнга,  $J_y$  — момент инерции поперечного сечения.

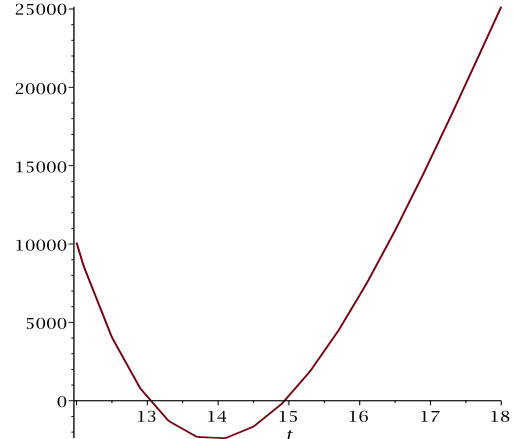


Рисунок 2. График функции  $\delta(\rho)10^{-6}$ .  
Figure 2. Graph of function  $\delta(\rho)10^{-6}$ .

В положении равновесия функция  $f(d)$  принимает минимальное значение, следовательно,

$$\frac{\partial f(d)}{\partial d} = Dd = 0. \quad (18)$$

В уравнении (18)  $\frac{\partial f(d)}{\partial d}$  есть градиент функции  $f(d)$ . Для того, чтобы система уравнений (18) имела нетривиальное

решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta(\rho) = \det(D) = 0. \quad (19)$$

На рис. 2 представлен график определителя матрицы  $D$  в зависимости от безразмерного параметра  $\rho = \frac{PR^3}{\mu}$ . Функция  $\delta$  обращается в 0 при  $\rho = 13.05$  и  $14.945$ . Ясно, что минимальная критическая нагрузка будет равна

$$P_* = \frac{13.05\mu}{R^3}.$$

Радиус дуг, составляющих треугольник Рёло, равен  $R$  и равен диаметру треугольника. Если рассмотреть круг диаметра  $R = 2\bar{R}$ , то, согласно (1), критическая сила для него будет равна  $\frac{24\mu}{R^3}$ . Таким образом, круг выдерживает большую нагрузку по сравнению с треугольником Рёло. Если рассматривать замкнутое кольцо, радиус которого равен радиусу кривизны дуг, составляющих треугольник Рёло, то треугольник Рёло будет выдерживать в  $\frac{13.05}{3} = 4.35$  большую нормальную нагрузку. Наконец, рассмотрим кольцо, описанное вокруг треугольника  $ABC$  (см. рис. 1). Радиус его равен  $R_0 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ , следовательно, критическая сила для него равна  $\frac{3\mu}{R_0^3} = \frac{\sqrt{3}\mu}{R^3}$ , т. е. в  $\sqrt{3}$  раз меньше.

### 3. Заключение

Получено значение критического нормального давления  $P_*$  для фигуры постоянной ширины — треугольника Рёло. Задача решалась аналитическим методом. Для уравнений равновесия дуг, из которых состоит треугольник Рёло, выписывалось общее решение. Произвольные постоянные определялись из условий непрерывности перемещений и углов поворота концов дуг.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

### Литература

1. Николаи, Е. Л. Труды по механике / Е. Л. Николаи. – Москва : Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 583 с.
2. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – Москва : Наука, 1967. – 984 с.
3. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения // под ред: Дж. Б. Келлера и С. Антмана. – Москва : Мир, 1974. – 254 с.
4. Перельмутер, А. В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Москва : Издательство СКАД СОФТ, 2010. – 686 с.
5. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Наука, 1967. – 376 с.
6. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – Москва : Гостехиздат, 1948. – 211 с.
7. Тарасов, В. Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих

систем / В. Н. Тарасов. – Сыктывкар : Коми научный центр УрО РАН, 2013. – 238 с.

8. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
9. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

### References

1. Nikolai, E. L. Trudy po mekhanike [Writings on mechanics] / E. L. Nikolai. – Moscow : Izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury [Publishing house of technical and theoretical literature], 1955. – 583 p.
2. Vol'mir, A. S. Ustojchivost' deformiruemykh sistem [Stability of deformable systems] / A. S. Vol'mir. – Moscow : Nauka, 1967. – 984 p.
3. Teoriya vetvleniya i nelineynye zadachi na sobstvennye znacheniya [Branching theory and nonlinear eigenvalue problems] // Pod red: Dzh. B. Kellera i S. Antmana. Moscow : Mir, 1974. – 254 p.
4. Perel'muter, A. V. Ustojchivost' ravnovesiya konstrukcij i rodstvennye problemy [Stability of the equilibrium of structures and related problems] / A. V. Perel'muter, V. I. Slivker. – Moscow : Izdatel'stvo SKAD SOFT, 2010. – 686 p.
5. Feodos'ev, V. I. Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected tasks and questions on the resistance of materials] / V.I. Feodos'ev. – Moscow : Nauka, 1967. – 376 p.
6. Novozhilov, V. V. Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti [Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity] / V. V. Novozhilov. – Moscow : Gostekhizdat, 1948. – 211 p.
7. Tarasov, V. N. Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem [Optimization methods in the study of constructive-nonlinear problems of mechanics of elastic systems]. – Syktyvkar : Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2013. – 238 p.
8. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
9. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

**Благодарность (госзадание)**

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

**Acknowledgement (state task)**

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

**Для цитирования:**

Тарасов, В. Н. Устойчивость треугольника Рёло под действием нормальной нагрузки / В. Н. Тарасов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 16–21.

**For citation:**

Tarasov, V. N. Stability of the Reuleaux triangle under normal load / V. N. Tarasov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2024. – № 5 (71). – P. 16–21.

Дата поступления рукописи: 24.06.2024

Received: 24.06.2024

# Об устойчивости круговых подкрепленных арок в случае пространственной деформации

В. Ю. Андриюкова, В. Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар  
veran@list.ru  
vntarasov@dm.komisc.ru

## Аннотация

В работе рассматривается круговая арка, нагруженная равномерно распределенным нормальным давлением, направленным к центру. Концы арки прикреплены тросами, один конец которых прикреплен к дуге арки под соответствующим углом, и расстояние между точками прикрепления тросов не может увеличиваться. Определены значения давления, при которых возможны искривленные формы равновесия арки, и найдено наименьшее из этих значений, являющееся критической силой.

## Ключевые слова:

устойчивость, круговая арка, вариационная задача, точки бифуркации, односторонние ограничения, критическая сила

## Введение

Расчет на устойчивость сложных тонкостенных конструкций связан с исследованием вариационных неравенств или решением вариационных задач с ограничениями на искомые функции в форме неравенств. Проблема устойчивости круговых арок ранее рассматривалась Е. Л. Николаи [1]. При аппроксимации перемещений использовали сплайн-функции [2], для решения подобных задач применяли метод глобальной оптимизации [3]. Экспериментальное и численное изучение влияния односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек, сжимаемых продольной силой, осуществлял Н. А. Алфутов в труде [4]. Некоторые задачи устойчивости и закритического поведения при наличии односторонних ограничений на перемещения рассмотрены в работах [5–7]. В предлагаемой статье рассматривается проблема круговых арок, нагруженных равномерно распределенным нормальным давлением, направленным к центру. Концы арки закреплены откосами так, что расстояние между точками прикрепления откосов не может изменяться.

## 1. Устойчивость арок с односторонним подкреплением

Пусть криволинейный стержень представляет собой дугу окружности радиуса  $R$ . Стержень нагружен давлени-

# On the stability of circular reinforced arches in the case of spatial deformation

V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,  
Syktyvkar  
veran@list.ru  
vntarasov@dm.komisc.ru

## Abstract

The work considers a circular arch loaded with uniformly distributed normal pressure directed towards the centre. The ends of the arch are attached with cables, one end of which is attached to the arc of the arch at an appropriate angle, and the distance between the points of attachment of the cables cannot be increased. We estimated pressure values, at which curved equilibrium forms of the arch are possible, and the smallest of these values is found, which is the critical force.

## Keywords:

stability, circular arch, variational problem, bifurcation points, one-sided constraints, critical force

ем  $P$ , равномерно распределенным вдоль дуги и направленным к центру ее кривизны. Уравнения недеформированной оси арки имеют вид:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in (-\tau, \tau) \quad (1)$$

Обозначим единичные векторы нормали, касательной и бинормали к кривой (1) через

$$\begin{cases} \eta = (-\sin \varphi, \cos \varphi), \\ \xi = (-\cos \varphi, -\sin \varphi), \\ \zeta = \eta \times \xi. \end{cases}$$

Перемещение точек арки описывается вектором

$$g = u(\varphi)\xi + w(\varphi)\eta + v(\varphi)\zeta. \quad (2)$$

Здесь  $w(\varphi)$  — радиальное перемещение (прогиб),  $v(\varphi)$  — касательное перемещение.

Пусть  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  — нормаль, касательная и бинормаль к деформированной кривой. Векторы  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  переходят в  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  путем поворота на малые углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , которые связаны с перемещениями формулами [2]:

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{R}(u' + w), \\ \alpha = -\frac{1}{R}v', \\ w' = u. \end{cases} \quad (3)$$

Деформация стержня характеризуется величинами

$$\begin{cases} \delta p = \frac{1}{R}(\alpha' + \gamma), \\ \delta q = \frac{1}{R^2}\beta', \\ \delta r = \frac{1}{R}(\gamma' + \frac{1}{R}v'). \end{cases}$$

С учетом (3) формулы примут вид:

$$\begin{cases} \delta p = -\frac{1}{R^2}v'' + \frac{1}{R}\gamma, \\ \delta q = \frac{1}{R^2}(u'' + u), \\ \delta r = \frac{1}{R}(\gamma' + \frac{1}{R}v'). \end{cases} \quad (4)$$

Упругая энергия стержня в квадратичном приближении определяется функционалом

$$U = \int_{-\tau}^{\tau} \left( \frac{B}{2R^3}(u'' + u)^2 + \frac{A}{2R^2}(\gamma - \frac{1}{R}v'')^2 + \frac{C}{2R^2}(\gamma' + \frac{1}{R}v'')^2 \right) d\varphi,$$

а работа внешних сил может быть вычислена по формуле  $PW$ , где

$$W = \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} (u'^2 - 2u^2 + v'^2 - v^2) d\varphi.$$

В выражении для упругой энергии введены обозначения  $A, B$  — жесткости стержня на изгиб,  $C$  — жесткость стержня на кручение.

В положении равновесия полная энергия

$$J = U - PW$$

принимает минимальное (стационарное) значение. Нетрудно увидеть, что поиск критической нагрузки сводится к решению задачи изопериметрического типа

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \min_{u,v,w}, \\ W &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

**1.1. Аналитическое решение.** Ясно, что множитель Лагранжа в задаче (5) определяет критическую нагрузку. Уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\varphi^2} F_{u''} - \frac{d}{d\varphi} F_{u'} + F_u = 0, \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} F_{v''} - \frac{d}{d\varphi} F_{v'} + F_v = 0, \\ -\frac{d}{d\varphi} F_{\gamma'} + F_{\gamma} = 0 \end{cases}$$

для функционала  $J$  имеют вид:

$$\frac{B}{R^3}(u^{IV} + 2u'' + u) + P(u'' + 2u) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{R^3}v^{IV} - \frac{A}{R^2}\gamma'' - \frac{C}{R^3}v'' - \frac{C}{R^2}\gamma'' + P(v'' - v) &= 0, \\ \frac{A}{R^3}v'' - \frac{A}{R^2}\gamma + \frac{C}{R^3}v'' + \frac{C}{R^2}\gamma'' &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений Эйлера разделяется на две независимые подсистемы: уравнение (6) описывает деформацию арки в ее первоначальной плоскости, уравнения (7) описывают пространственную деформацию. Уравнения (6) и (7) совпадают с уравнениями, приведенными в [2].

Предположим, что арка подкреплена тросами, один конец которых прикреплен к дуге арки под соответствующим углом

$$\varphi_j = -\tau + \frac{2\tau}{M+1}j, \quad j = 1, \dots, M,$$

а другой — к точкам с координатами

$$\begin{cases} x_j = -\tau + \frac{2\tau}{M+1}j, \quad j = 1, \dots, M, \\ y = 0, \\ z = \pm z_0 \end{cases}$$

так, что расстояние между точками прикрепления тросов не может увеличиваться. Для увеличения критической силы в случае пространственной деформации получаем при  $\varphi = \varphi_j, j = 1, \dots, M$  равенства

$$v_j = 0. \quad (8)$$

На плоскую форму потери устойчивости ограничения (8) никак не влияют. Если одновременно учитывать как плоскую, так и пространственную деформацию, то вместо (8) приходим к неравенствам

$$-Ru \pm 2vz_0 \leq 0 \quad (9)$$

при  $\varphi = \varphi_j, j = 1, \dots, M$ . Можно показать, что задача определения критической силы может быть сведена к вариационной проблеме изопериметрического типа (5) и выполнению неравенств (9). Решение задачи (5)–(9) существенно зависит от постоянных  $A, B, C$  ( $A, B$  — жесткости при изгибе,  $C$  — жесткость на кручение), которые определяются формой поперечного сечения стержня. В случае, когда сечение стержня есть эллипс с полуосями  $a, b$ , то

$$A = \frac{\pi}{4}Ea^3b, \quad B = \frac{\pi}{4}Eab^3, \quad C = \frac{\pi Ea^3b^3}{(1+\nu)(a^2+b^2)},$$

$E$  — модуль Юнга материала. Не умаляя общности, можно считать, что  $E = 1$ .

**1.2. Численный метод.** Будем аппроксимировать функции  $u, v, w, \gamma$  интерполяционными кубическими сплайнами вида [3]:

$$\begin{aligned} S(z, \varphi) &= z_i(1-t)^2(1+2t) + \\ &+ z_{i+1}t^2(3-2t) + \\ &+ m_i ht(1-t)^2 - m_{i+1} ht^2(1-t), \end{aligned} \quad (10)$$

где вектор  $z$  имеет размерность  $4n$ , а

$$m_i = S'(z, \varphi_i), \quad i = 0, \dots, n+1,$$

$$h = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad t = (\varphi - \varphi_i)/h, \quad t \in [0, 1].$$

При аппроксимации прогиба  $u$

$$z_i = u_i = u(\varphi_i), \quad \varphi_i = i \cdot h, \quad i = 1, \dots, n$$

аналогично приближаются остальные функции  $v, w, \gamma$ :

$$z_{i+n} = u_i = u(\varphi_i), \quad \varphi_i = i \cdot h, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$z_{i+2n} = v_i = v(\varphi_i), \quad \varphi_i = i \cdot h, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$z_{i+3n} = w_i = w(\varphi_i), \quad \varphi_i = i \cdot h, \quad i = 1, \dots, n.$$

В случае граничных условий шарнирного опирания условие непрерывности второй производной записывается в виде [2]:

$$2m_0 + \mu_0^* m_1 = c_0^*,$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (11)$$

$$\lambda_N^* m_{N-1} + 2m_N = c_N^*,$$

причем

$$c_i = 3 \left( \mu_i \frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \lambda_i \frac{z_i - z_{i-1}}{h} \right),$$

$$\mu_i = \lambda_i = 0, 5.$$

Здесь для граничных условий шарнирного опирания

$$\mu_0^* = \lambda_N^* = 1, \quad c_0^* = 3 \frac{z_1}{h}, \quad c_N^* = -3 \frac{z_{N-1}}{h}.$$

Окончательно получаем, если интерполируется функция  $u(\varphi)$  и выполнены граничные условия шарнирного опирания, то интерполяционный сплайн  $S(z, \varphi)$  удовлетворяет условиям

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = 0,$$

$$m_0 = \frac{3}{h} z_1 - \frac{1}{2} m_1, \quad m_{n+1} = \frac{3}{h} z_n - \frac{1}{2} m_n. \quad (12)$$

Аналогично, если интерполируется функция  $v(\varphi)$  и выполнены условия жесткой заделки, то сплайн удовлетворяет

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = 0,$$

$$m_0 = 0, \quad m_{n+1} = 0. \quad (13)$$

Определим вектор  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^t$ . Тогда  $m$  может быть вычислен по формуле:

$$m = C^{-1} M u,$$

где матрицы  $C$  и  $M$  имеют вид:

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{3}{2h} \begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -d & c \end{pmatrix},$$

где  $a = 4$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = -1$ , если сплайн  $S(z, \varphi)$  удовлетворяет на концах интервала  $[0, \alpha]$  условиям (13), и при  $a = 3.5$ ,  $b = 1$ ,  $c = -0.5$ ,  $d = 1$ , если выполняются условия (12).

Для того, чтобы учесть условие несжимаемости, введем штрафную функцию:

$$F = \frac{D}{2} \int_0^\alpha (u - w')^2 d\varphi,$$

где  $D$  — достаточно большое число, которое определяется опытным путем в численных экспериментах.

С учетом штрафной функции задачу об устойчивости арки можно сформулировать следующим образом: требуется найти минимальное значение нагрузки  $P$ , при которой вариационная задача

$$U = \int_{-\tau}^\tau \left( \frac{B}{2R^3} (u'' + u)^2 + \frac{A}{2R^2} \left( \gamma - \frac{1}{R} v'' \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{C}{2R^2} \left( \gamma' + \frac{1}{R} v'' \right)^2 \right) d\varphi - \\ - \frac{P}{2} \int_{-\tau}^\tau (u'^2 - 2u^2 + v'^2 - v^2) d\varphi + \\ + \frac{D}{2} \int_{-\tau}^\tau (u - w')^2 d\varphi \rightarrow \min_{u, v, w}$$

при выполнении ограничений (5) имеет нетривиальное решение.

Рассмотрим вариационную задачу:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left( \frac{1}{2} (u'' + u)^2 + \frac{AR}{B} \left( \gamma - \frac{1}{R} v'' \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{CR}{B} \left( \gamma' + \frac{1}{R} v'' \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{R^3 D}{2B} (u - w')^2 \right) d\varphi \rightarrow \min_{u, v, w \in \Gamma_1} \quad (14)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (u'^2 - k u^2) d\varphi = 1 \quad (15)$$

при граничных условиях (12) или (13) и выполнении неравенств (9).

Пусть  $u_*, v_*, w_*$  — решение задачи (14), (15), (9) и  $\lambda_* = J_1(u_*, v_*, w_*)$ . Тогда для любого  $\lambda \leq \lambda_*$   $J_1(u, v, w) - \lambda J_2(u, v, w) \geq 0$  для всех  $(u, v, w) \in \Gamma_1$  и, наоборот, если  $\lambda > \lambda_*$ , то найдутся функции  $(u, v, w) \in \Gamma_1$  такие, что  $J_1(u, v, w) - \lambda J_2(u, v, w) < 0$ , т. е.  $P^* = \frac{B}{R^3} \lambda_*$  имеет смысл критической нагрузки: при  $P \leq P^*$  задача (9), (14) имеет только тривиальное решение, при  $P > P^*$  выполняется неравенство  $\tilde{J}((u^*, v^*, w^*)) < 0$ .

После подстановки сплайнов  $S(v, \varphi)$  и  $\tilde{S}(\tilde{v}, \varphi)$  в (14), (15) получаем две квадратичные формы:

$$g = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left( \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + S \right)^2 d\varphi + \frac{D}{2} \int_0^\alpha \left( S - \tilde{S}' \right)^2 d\varphi = \\ = \frac{1}{2} (Gz, z),$$

$$q = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left( S'^2 - k S^2 \right) d\varphi = \frac{1}{2} (Qz, z).$$

Для вычисления коэффициентов квадратичных форм необходимо вычислить следующие интегралы:

1. Интеграл от квадрата сплайна

$$\int_0^\alpha S^2(t) dt = h \sum_{i=0}^n \left( \frac{11}{105} z_i m_i h - \frac{13}{210} z_i m_{i+1} h + \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{13}{210} m_i h z_{i+1} - \frac{1}{70} m_i h^2 m_{i+1} - \frac{11}{105} z_{i+1} m_{i+1} h + \\
& + \frac{13}{35} z_i^2 + \frac{1}{105} m_i^2 h^2 + \frac{9}{35} z_i z_{i+1} + \\
& + \frac{13}{35} z_{i+1}^2 + \frac{1}{105} m_{i+1}^2 h^2 \Big).
\end{aligned}$$

## 2. Интеграл от квадрата первой производной

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha S'^2(t) dt &= \frac{1}{5h} \sum_{i=0}^n (z_i m_i h + z_i m_{i+1} h - m_i h z_{i+1} - \\
& - \frac{1}{3} m_i h^2 m_{i+1} - z_{i+1} m_{i+1} h + 6z_i^2 + \\
& + \frac{2}{3} m_i^2 h^2 - 12z_i z_{i+1} + 6 \cdot z_{i+1}^2 + \frac{2}{3} m_{i+1}^2 h^2) \Big).
\end{aligned}$$

## 3. Интеграл от квадрата второй производной

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha S''^2(t) dt &= \frac{1}{h^3} \sum_{i=0}^n (12z_i^2 + 12z_i m_{i+1} h - \\
& - 24z_i z_{i+1} + 12z_i m_i h - 12z_{i+1} m_{i+1} h + \\
& + 4m_i h^2 m_{i+1} + 4m_{i+1}^2 h^2 + 12z_{i+1}^2 - \\
& - 12m_i h z_{i+1} + 4m_i^2 h^2) \Big).
\end{aligned}$$

## 4. Интеграл от произведения второй производной и сплайна

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha S''(t) \cdot \tilde{S}(t) dt &= \frac{1}{10} \sum_{i=0}^n (z_{n+i+1} m_i h - \tilde{m}_i h z_{i+1} - \\
& - z_{i+n} m_i h + \tilde{m}_i h z_i - \tilde{m}_{i+1} h z_i - z_{n+i+1} m_{i+1} h + \\
& + z_{i+n} m_{i+1} h + \frac{1}{6} \tilde{m}_i h^2 m_{i+1} + \tilde{m}_{i+1} h z_{i+1} - \\
& - \frac{1}{6} \tilde{m}_{i+1} h^2 m_i + 5z_{n+i+1} z_i + 5z_{n+i+1} z_{i+1} - \\
& - 5z_{n+i} z_i - 5z_{n+i} z_{i+1}) \Big).
\end{aligned}$$

Здесь числа  $z_0, z_{n+1}, m_0, m_{n+1}$  (в зависимости от граничных условий) определяются формулами (13) или (12). Для сплайна  $\tilde{S}(\tilde{z}, \varphi)$   $\tilde{z}_0 = 0, \tilde{z}_{n+1} = 0, \tilde{m}_0 = 0, \tilde{m}_{n+1} = 0$ .

Приходим к конечномерной задаче оптимизации:

$$g(z) = \frac{1}{2} (Gz, z) \rightarrow \min_{z \in R^{2n}} \quad (16)$$

$$q(z) = \frac{1}{2} (Qz, z) = 1, \quad (17)$$

$$(a_j, z) \leq 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (18)$$

В (18) векторы  $a_j \in R^{2n}$  получаются в результате подстановки сплайнов  $S(z, \varphi)$  и  $\tilde{S}(\tilde{z}, \varphi)$  в (9). Квадратичные формы  $g(z)$  и  $q(z)$  положительно определены, если  $\alpha < \pi$ .

Обозначим через  $\Gamma$  конус, определяемый неравенствами (18). Пусть  $z_*$  — решение задачи (16)–(18). Тогда по теореме Куна-Таккера найдутся множители Лагранжа  $\lambda_*$  и  $\tau_j, \tau_j \geq 0, j = 1, \dots, M$ , такие, что

$$\begin{cases} Gz_* - \lambda_* Qz_* + \sum_{j=1}^M \tau_j a_j = 0, \\ \tau_j (a_j, z) = 0, \quad j = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (19)$$

У системы уравнений (19) есть необходимые условия экстремума, но, так как задача (16)–(18) не является задачей выпуклого программирования, то эти условия не достаточны. Точки  $z_*$ , удовлетворяющие (19), будем называть стационарными.

Для решения задачи (19) необходимо применять методы глобальной оптимизации (например, метод ветвей и границ [3]), число переменных может быть велико, а в данном случае трудоемкость метода ветвей и границ определяется размерностью задачи. Для решения задачи (16)–(18) применялся метод поиска стационарных точек [6, 7].

Поскольку метод ветвей и границ является довольно трудоемким, в данном случае можно предложить метод перебора вариантов, который в сочетании с локальным алгоритмом может оказаться более предпочтительным.

## 2. Результаты и их обсуждение

При  $M = 3, \tau = \frac{\pi}{2}$  арка представляет собой половину дуги окружности. При расчетах использовались граничные условия жесткой заделки:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad u' + w = 0, \quad v = 0, \quad v' = 0, \quad \gamma = 0$$

при  $\varphi = \pm\tau$ ; и шарнирного опирания:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad u'' + w' = 0, \quad v = 0, \quad v'' + \gamma' = 0,$$

при  $\varphi = \pm\tau$ .

Круговая форма равновесия арки устойчива, если давление  $P$  не превосходит некоторого предельного значения  $P_{kp}$ . Предположим, что сечение арки — круг, т. е. полуоси  $a = b = 1$ . Без ограничений (9) решение задачи (5) дает критическую силу  $P_{kp} = 5.2892$ . Если же рассматривать задачу (5)–(9), то  $P_{kp} = 5.3570$ . В данном случае получается, что  $u \equiv 0$  и  $w \equiv 0, a v = 0$  в точках прикрепления тросов. В табл. 1, 2 приведены результаты вычислений при разных граничных условиях и значений полуосей эллипса, в последнем столбце — значения при выполнении неравенства

$$-Ru_i \pm 2v_i z_0 \leq 0,$$

характеризующего одновременно плоскую и пространственную деформации.

Таблица 1  
Результаты вычислений при граничных условиях жесткой заделки

Table 1  
Calculation results for rigid embedment boundary conditions

	без огр.	$v_i = 0$	удовл. (9)
a=0.5, b=1	0.0570	0.3764	0.0755
a=0.75, b=1	1.3758	4.9026	1.4793
a=1.0, b=1	5.2892	11.4203	5.3570
a=2.0, b=1	22.7900	22.7900	24.1390

Таблица 2  
Результаты вычислений при граничных условиях шарнирного опирания

Table 2  
Calculation results for hinged support boundary conditions

	без огр.	$v_i = 0$	удовл. (9)
a=0.5, b=1	0	0.1492	0.0384
a=0.75, b=1	0	2.7697	0.8352
a=1.0, b=1	0	8.5631	2.4033
a=2.0, b=1	0	23.2861	13.2698

Результаты вычислений показали, что одновременный учет плоской и пространственной деформации приводит к снижению критической нагрузки.

## Заключение

Учитывая проведенный численный анализ, можно сделать вывод, что устойчивость арки, подкрепленной откосами (тросами), расстояние между концами которых не может изменяться, существенно увеличивает значение критической нагрузки. При этом для правильной оценки критической силы необходимо учитывать как пространственную, так и плоскую деформацию ( $u \neq 0$  и  $v \neq 0$ ), в отличие от случая без подкрепления. Тогда при потере устойчивости происходит либо деформация арки в ее первоначальной плоскости ( $v = 0$  и  $\gamma = 0$ ), либо пространственная деформация ( $u = 0$  и  $w = 0$ ). Величина критической силы существенно зависит от констант жесткости  $A$  и  $B$ , от радиуса  $R$  и граничных условий.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Литература

1. Николаи, Е. Л. Труды по механике / Е. Л. Николаи. – Москва : Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 583 с.
2. Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – Москва : Наука, 1980. – 352 с.
3. Сухарев, А. Г. Глобальный экстремум и методы его отыскания // Математические методы и исследования операций. – Москва : Изд-во МГУ, 1981. – С. 4–37.
4. Алфутов, Н. А. Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии / Н. А. Алфутов, А. Н. Еремичев // Рас-

четы на прочность. – Москва : Машиностроение, 1989. – С. 179–180.

5. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Наука, 1967. – 376 с.
6. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
7. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

## References

1. Nikolai, E. L. Trudy po mekhanike [Writings on Mechanics] / E. L. Nikolai. – Moskva : Izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. – 584 p.
2. Zav'yalov, Yu. S. Metody splayn-funktsiy [Methods of spline functions] / Yu. S. Zav'yalov, B. I. Kvasov, V. L. Miroshnichenko. – Moskva : Nauka, 1980. – 352 ps.
3. Sukharev, A. G. Global'nyy ekstremum i metody yego otyskaniya [Global extremum and methods for finding it] // A. G. Sukharev. – Mathematical Methods and Operations Research. – Moscow : Publishing House of Moscow State University, 1983. – P. 4–37.
4. Alfutov, N. A. Vliyaniye odnostoronnikh svyazey na ustoychivost' tsilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii [Influence of unilateral bonds on the stability of cylindrical shells under axial compression] // N. A. Alfutov, A. N. Eremichev. – Strength Calculations. – Moscow : Engineering, 1989. – P. 179–180.
5. Feodosiev, V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials] / V.I. Feodosiev. – Moscow : Nauka, 1967. – 376 p.
6. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
7. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Int. Conf. "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

## Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

**Acknowledgement (state task)**

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

**Для цитирования:**

Андрюкова, В. Ю. Об устойчивости круговых подкрепленных арок в случае пространственной деформации / В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 22–27.

**For citation:**

Andryukova, V. Yu. On the stability of circular reinforced arches in the case of spatial deformation / V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2024. – № 5 (71). – P. 22–27.

Дата поступления статьи: 18.06.2024

Received: 18.06.2024

## Контракции калибровочных групп и спонтанное нарушение симметрии

Н. А. Громов, В. В. Куратов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар

gromov@ipm.komisc.ru

kuratov@ipm.komisc.ru

### Аннотация

Изучены контракции калибровочных моделей с ортогональными группами Кэли-Клейна  $SO(2; \epsilon)$ ,  $SO(3; \epsilon)$  и унитарными группами  $SU(2; \epsilon)$  в качестве калибровочных групп. В пределе нулевых контрационных параметров ортогональные группы изоморфны неполупростым группам Евклида и Ньютона соответствующей размерности, а пространства полей материи становятся расслоенными пространствами с вырожденной метрикой. Особое внимание уделено согласованию спонтанного нарушения симметрии с процедурой контракции групп. Показано, что контрактированные калибровочные теории описывают тот же набор полей с теми же массами, что и теории с исходными простыми группами, если выбранный вакуум в соответствующем пределе принадлежал базе расслоенного пространства полей материи. Получены зависящие от контрационных параметров лагранжианы моделей, что позволяет проследить порядок обнуления слагаемых в лагранжианах при стремлении параметров контракции к нулю.

### Ключевые слова:

ортогональные группы Кэли-Клейна, унитарная группа Кэли-Клейна, контракция калибровочной группы, спонтанное нарушение симметрии

### Введение

Калибровочные теории были предложены Янгом и Миллсом в 1954 г. [1] и в настоящее время рассматриваются как наиболее успешный метод описания фундаментальных взаимодействий в физике частиц, где в основном используются компактные полупростые группы. Например, единое описание электромагнитных и слабых взаимодействий в рамках стандартной модели Вайнберга-Салама [2, 3] основано на калибровочной группе  $SU(2) \times U(1)$ .

Наппи и Виттеном было замечено [4], что можно рассматривать калибровочные теории и для неполупростых групп, обладающих невырожденной инвариантной билинейной формой. Такие теории имеют более простую структуру по сравнению со стандартными моделями с полупростыми калибровочными группами. Позже появились работы [5, 6], в которых рассматривались калибровочные те-

## Contractions of gauge groups and spontaneous symmetry breaking

N. A. Gromov, V. V. Kuratov

Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,  
Syktyvkar

gromov@ipm.komisc.ru

kuratov@ipm.komisc.ru

### Abstract

Contractions of gauge models with orthogonal Cayley-Klein groups  $SO(2; \epsilon)$ ,  $SO(3; \epsilon)$ , unitary groups  $SU(2; \epsilon)$  as gauge groups are studied. In the limit of zero contraction parameters, orthogonal groups are isomorphic to the non-semisimple Euclidean and Newton groups of the corresponding dimension, and the spaces of matter fields become fibered spaces with a degenerate metric. Particular attention is paid to the coordination of spontaneous symmetry breaking with the group contraction procedure. It is shown that contracted gauge theories describe the same set of fields with the same masses as theories with the original simple groups, if the chosen vacuum in the corresponding limit belonged to the base of the fibered space of matter fields. Lagrangians of the models depending on the contraction parameters are obtained, which makes it possible to trace the order of zeroing of terms in the Lagrangians as the contraction parameters tend to zero.

### Keywords:

orthogonal Cayley-Klein groups, unitary Cayley-Klein group, contraction of the gauge group, spontaneous symmetry breaking

риями, отвечающие различным неполупростым группам. Контракции стандартной электрослабой модели Вайнберга-Салама к калибровочной группе  $SU(2; \epsilon) \times U(1)$  описаны в [7].

В данной работе рассматривается механизм спонтанного нарушения симметрии (механизм Хиггса) для калибровочных моделей, основанных на неполупростых группах. Такие группы в фундаментальном представлении являются группами преобразований расслоенных пространств с вырожденной метрикой и могут быть получены из классических простых групп контракциями (предельными переходами). Последовательность обнуления слагаемых лагранжиана в процессе предельного перехода задается явной зависимостью лагранжиана от параметра контракции.

## 1. Калибровочная теория для группы $SO(2; \epsilon)$ .

1.1. Единое описание модели. Рассмотрим преобразование  $SO(2)$  калибровочной модели в галилееву калибровочную теорию с помощью контракции группы вращений в группу Галилея. Пространство  $\Phi_2(\epsilon)$  и группа  $G_2 = SO(2; \epsilon)$  Галилея могут быть получены из евклидовой плоскости  $\Phi_2$  и группы  $SO(2)$  введением параметра контракции  $\epsilon$  и заменами  $\phi_2 \rightarrow \epsilon\phi_2$ ,  $\alpha \rightarrow \epsilon\alpha$ , при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Калибровочные преобразования

$$\begin{pmatrix} \phi'_1(x) \\ \epsilon\phi'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon\alpha(x) & \sin \epsilon\alpha(x) \\ -\sin \epsilon\alpha(x) & \cos \epsilon\alpha(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \epsilon\phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

оставляют инвариантной форму  $\phi^t(\epsilon)\phi(\epsilon) = \phi_1^2 + \epsilon^2\phi_2^2$ , которая при  $\epsilon = 1$  определяет евклидову метрику в пространстве  $\Phi_2$ .

Чтобы проследить поведение слагаемых при переходе к пределу, введем параметр  $\epsilon$  в стандартный лагранжиан [8]

$$L(\epsilon) = -\epsilon^2 \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} [(D_\mu \phi_1)^2 + \epsilon^2 (D_\mu \phi_2)^2] - \frac{\lambda}{4} [(\phi_1^2 + \epsilon^2 \phi_2^2)^2 - v^2]^2, \quad (2)$$

где ковариантные производные даны соотношением

$$D_\mu \phi(\epsilon) = \partial_\mu \phi(\epsilon) + \epsilon e A_\mu T \phi(\epsilon),$$

$$\begin{pmatrix} D_\mu \phi'_1 \\ \epsilon D_\mu \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\mu & \epsilon e A_\mu \\ -\epsilon e A_\mu & \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \epsilon\phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

т. е.

$$\begin{aligned} D_\mu \phi_1 &= \partial_\mu \phi_1 + \epsilon^2 e A_\mu \phi_2, \\ D_\mu \phi_2 &= \partial_\mu \phi_2 - e A_\mu \phi_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Механизм спонтанного нарушения симметрии (механизм Хиггса [9]) – это способ наделить массой калибровочные поля. Лагранжиан (2) имеет набор основных состояний, которые достигаются при нулевых векторных полях  $A_\mu = 0$  и ковариантно постоянных полях материи  $D_\mu \phi = 0$ , обеспечивающих минимум потенциала  $V(\phi(\epsilon)) = [\phi_1^2 + \epsilon^2 \phi_2^2 - v^2]^2$ , т. е.

$$\phi_1^2 + \epsilon^2 \phi_2^2 = v^2, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (5)$$

Все основные состояния (рис. 1) (при  $\epsilon \neq 0$ ) можно получить с помощью калибровочных преобразований из одного из них, например,

$$\phi^{\text{vac}} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (6)$$

отвечающего точке  $A(v, 0)$  на рис. 1.

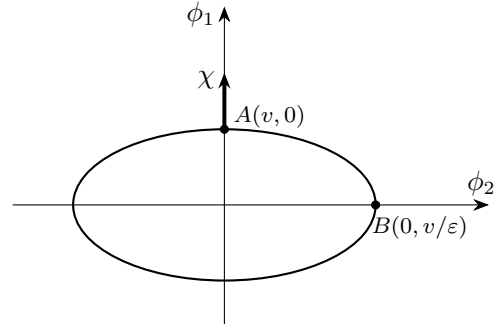


Рисунок 1. Эллипс вакуумов лагранжиана  $L(\epsilon)$ .  
Figure 1. Ellipse of vacua of the Lagrangian  $L(\epsilon)$ .

Рассмотрим малые возбуждения  $\chi(x)$  компоненты поля  $\phi_1(x)$  относительно выбранного вакуума  $\phi_1(x) = v + \chi(x)$  (рис. 1). За счет калибровочных преобразований (1) компонента  $\phi_2(x)$  становится отличной от нуля. Подстановка поля материи  $\phi = \begin{pmatrix} v + \chi \\ \epsilon\phi_2 \end{pmatrix}$  приводит лагранжиан к виду

$$L(\epsilon) = L_b + \epsilon^2 L_s,$$

$$\begin{aligned} L_b &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda} \mu \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4, \\ L_s &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2 v^2}{2} B_\mu^2 + e A_\mu (\phi_2 \partial_\mu \chi - \chi \partial_\mu \phi_2) + \\ &+ v \chi (e^2 A_\mu^2 - \lambda \phi_2^2) + \frac{1}{2} \chi^2 (e^2 A_\mu^2 - \frac{\lambda}{2} \phi_2^2), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e v} \partial_\mu \phi_2$  – калибровочное векторное поле с массой  $m_B = e v = \frac{e \mu}{\sqrt{\lambda}}$ ,  $\chi$  – скалярное поле (хиггсовский бозон) с массой  $m_\chi = \mu^2$ , а также включены слагаемые, описывающие взаимодействия полей. При малых  $\epsilon$  поле  $\phi_2$  за счет калибровочных преобразований связано с вакуумом соотношением  $\phi_2(x) = \alpha(x)(v + \chi(x))$ . Вводя векторное поле  $\hat{B}_\mu = A_\mu - \frac{1}{e v} \partial_\mu \alpha$ , преобразуем лагранжиан  $L_s$  к виду, содержащему только поле  $\hat{B}_\mu$  и его взаимодействия с полем  $\chi$

$$L_s = -\frac{1}{4} \hat{B}_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2 v^2}{2} \hat{B}_\mu^2 + v e^2 \chi \hat{B}_\mu^2 + \frac{e^2}{2} \chi^2 \hat{B}_\mu^2. \quad (8)$$

Теория с калибровочной группой  $SO(2; \epsilon)$  может быть получена из теории с группой  $SO(2)$  подстановкой

$$\begin{aligned} v &\rightarrow v, \quad \phi_1 \rightarrow \phi_1, \quad \phi_2 \rightarrow \epsilon\phi_2, \\ A_\mu &\rightarrow \epsilon A_\mu, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow \epsilon F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9)$$

### 1.2. Калибровочная модель для группы Галилея $G_2$ .

Теория с калибровочной группой Галилея  $G_2$  получается из теории с группой  $SO(2)$  переходом к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ . В этом пределе пространство полей материи  $\Phi_2$  превращается в двумерное тривиально расслоенное пространство  $\Phi_2(\epsilon)$ , в котором ось  $\{\phi_1\}$  есть одномерная база, а ось  $\{\phi_2\}$  представляет одномерный слой. Инвариант  $\phi^t(\epsilon)\phi(\epsilon) = \phi_1^2 + \epsilon^2 \phi_2^2$  распадается на два инварианта:  $\text{inv}_1 = \phi_1^2$  относительно общих преобразований (1)  $\phi'_1 = \phi_1$ ,  $\phi'_2 = \phi_2 - \alpha\phi_1$  и  $\text{inv}_2 = \phi_2^2$  относительно только дискретных преобразований  $\phi'_2 = \pm\phi_2$  в слое

( $\phi_1 = 0$ ). Поэтому в пространстве Галилея есть две метрики: одна в базе, а другая в слое. Учтем в дальнейшем эту особенность.

Пучок прямых, проведенных через точку, на этих двух плоскостях имеет разные свойства относительно автоморфизмов плоскости [10]. На евклидовой плоскости любые две прямые пучка совмещаются друг с другом вращениями вокруг точки (рис. 2). На плоскости Галилея (рис. 3) в пучке есть одна изолированная прямая, которая не совмещается с любой другой прямой пучка вращениями вокруг точки, т. е. преобразованиями Галилея.

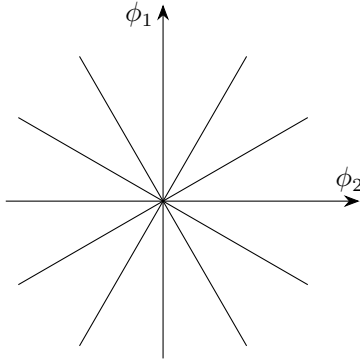


Рисунок 2. Пучок прямых на плоскости Евклида  $E_2$ .  
Figure 2. Bundle of lines on the Euclidean plane  $E_2$ .

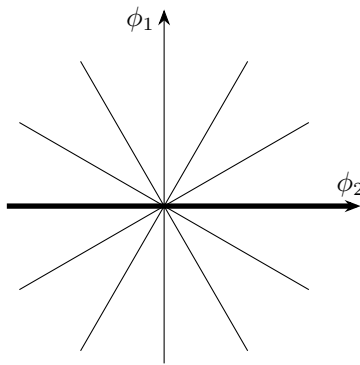


Рисунок 3. Пучок прямых на плоскости Галилея  $G_2$ .  
Figure 3. Bundle of lines on the Galilean plane  $G_2$ .

Если интерпретировать эти плоскости в некотором физическом контексте, тогда на евклидовой плоскости все прямые должны иметь одну и ту же физическую размерность  $[\phi_1] = [\phi_2]$ . На плоскости Галилея имеется бесконечно много прямых с той же физической размерностью, что и размерность базы  $[\phi_1]$  и одна изолированная прямая, имеющая некоторую другую размерность  $[\phi_2] \neq [\phi_1]$  [11]. Например, при интерпретации пространства Галилея как пространства-времени классической физики база рассматривается как ось времени и имеет размерность [сек], а слой моделирует собственно пространство и имеет размерность [см].

Представления (7), (8) указывают порядок стремления к нулю слагаемых в лагранжиане при переходе к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ . Вначале считаем малым лагранжиан  $L_s$ , пропорциональный  $\epsilon^2$ , затем в остатке получаем поле  $\chi$  в базе (рис. 4) с лагранжианом  $L_b = L_\chi$ . Можно рассматривать и обратный процесс восстановления полей и взаимодействий при изменении параметра контракции  $\epsilon$  от нуля до единицы.

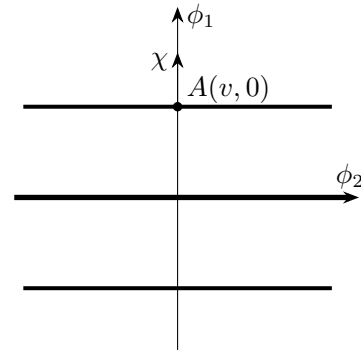


Рисунок 4. Основные состояния модели с калибровочной группой Галилея  $G_2$ .

Figure 4. Ground states of the model with the Galileo gauge group  $G_2$ .

Другой выбор основного состояния отвечает точке  $B(0, \frac{v}{\epsilon})$  на рис. 1. В пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  она попадает в слой  $\phi_1 = 0, \phi_2$  и описывается вектором  $\phi_{vac} = (0, \epsilon \frac{v}{\epsilon})^t = (0, v)^t$ . Лагранжиан (2) в слое инвариантен только относительно дискретной калибровочной симметрии  $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$ . Малые возмущения  $\xi$  поля  $\phi_2$  в окрестности этого вакуума описываются полем материи вида (рис. 5)

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \epsilon \xi(x) \end{pmatrix}, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (10)$$

Подставив его в общий лагранжиан (2), получим лагранжиан в слое

$$L(\epsilon) = \epsilon^2 L_f = \epsilon^2 \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 - \mu^2 \xi^2 - \epsilon \sqrt{\lambda} \mu \xi^3 - \epsilon^2 \frac{\lambda}{4} \xi^4 \right]. \quad (11)$$

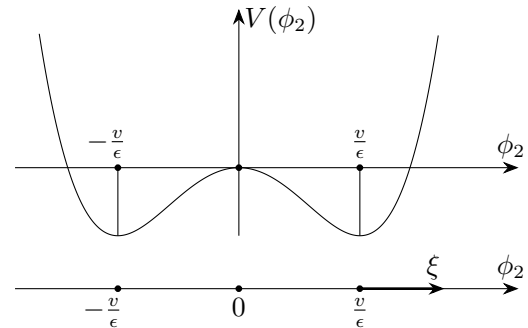


Рисунок 5. Потенциал  $V(\phi_2)$  и основные состояния лагранжиана в слое ( $\phi_1 = 0, \phi_2$ ).

Figure 5. Potential  $V(\phi_2)$  and ground states of the Lagrangian in fiber ( $\phi_1 = 0, \phi_2$ ).

Лагранжианы в базе  $L_\chi$  (7) и слое  $L_f$  (11) имеют одинаковый вид, совпадающий с формулой (5.8) в монографии [8] для лагранжиана возмущений скалярного поля  $\varphi$  с дискретной симметрией  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Лагранжиан  $L_\chi$  (7) не инвариантен относительно замены  $\chi \rightarrow -\chi$ , так же как  $L_f$  (11) не инвариантен относительно замены  $\xi \rightarrow -\xi$ , поскольку основные состояния не инвариантны. След симметрии  $\varphi \rightarrow -\varphi$  в лагранжианах  $L_\chi, L_f$  остался в виде соотношения между массой поля  $\mu^2$  и константами кубического и четверного взаимодействий. Таким образом, в калибровочной теории с группой Галилея  $G_2$  поле материи (хиггсовский бозон)  $\chi$  в базе и калибровочное поле  $B_\mu$  в слое представляют физически разные поля с разными

физическими размерностями, подобно тому, как время (база) и пространство (слой) в пространстве-времени Галилея являются разными физическими сущностями. Тем не менее размерности масс хиггсовского бозона  $m_\chi = \sqrt{2}\mu$  и векторного бозона  $m_B = ev = \frac{e\mu}{\sqrt{\lambda}}$  одинаковы и в точности таковы же, как и в неконтрактированной  $SO(2)$  калибровочной теории.

В калибровочной теории с группой  $SO(2; \epsilon)$  при  $\epsilon \neq 0$  в качестве вакуума можно выбрать любое основное состояние на эллипсе рис. 1. Однако для того, чтобы получить теорию с полной, зависящей от одного вещественного параметра группой Галилея  $G_2$  при переходе к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ , необходимо, чтобы выбранный вакуум принадлежал базе в этом пределе (см. рис. 4). Если же вакуум модели отвечает, например, точке  $B$  на рис. 1, то в пределе получаем модель с дискретной симметрией, являющейся дискретной подгруппой исходной калибровочной группы.

## 2. Калибровочные теории с группами $SO(3; \epsilon)$

**2.1. Единая калибровочная модель.** Ортогональная группа Кэли-Клейна  $SO(3; \epsilon)$ ,  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$  определяется [11] как группа преобразований вещественного пространства  $\Phi_3(\epsilon)$ , оставляющая инвариантной квадратичную форму

$$\phi^t(\epsilon)\phi(\epsilon) = \phi_1^2 + \epsilon_1^2\phi_2^2 + \epsilon_1^2\epsilon_2^2\phi_3^2. \quad (12)$$

Калибровочные преобразования полей материи  $\phi(\epsilon)$  осуществляются элементами  $\omega(x; \epsilon) \in SO(3; \epsilon)$  в виде

$$\phi'(x) = \omega(x; \epsilon)\phi(x),$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \epsilon_1\phi_2' \\ \epsilon_1\epsilon_2\phi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \epsilon_1\omega_{12} & \epsilon_1\epsilon_2\omega_{13} \\ \epsilon_1\omega_{21} & \omega_{22} & \epsilon_2\omega_{23} \\ \epsilon_1\epsilon_2\omega_{31} & \epsilon_2\omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \epsilon_1\phi_2 \\ \epsilon_1\epsilon_2\phi_3 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Здесь контрационные параметры независимо стремятся к нулю  $\epsilon_k \rightarrow 0$ ,  $k = 1, 2$ . Генераторы алгебры Ли  $so(3; \epsilon)$  имеют вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\epsilon_1\epsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_1\epsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[T_1, T_2] = \epsilon_1^2 T_3, \quad [T_2, T_3] = \epsilon_2^2 T_1, \quad [T_3, T_1] = T_2. \quad (15)$$

Калибровочные поля принимают значения в алгебре  $so(3; \epsilon)$

$$A_\mu(x) = gT^a A_\mu^a(x) = g \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_1 A_\mu^1 & -\epsilon_1\epsilon_2 A_\mu^2 \\ \epsilon_1 A_\mu^1 & 0 & -\epsilon_2 A_\mu^3 \\ \epsilon_1\epsilon_2 A_\mu^2 & \epsilon_2 A_\mu^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Тензор напряженности

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] = gT^a F_{\mu\nu}^a(x) \quad (17)$$

в компонентах имеет вид

$$F_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1 + \epsilon_2^2 g(A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2),$$

$$F_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2 + g(A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3),$$

$$F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + \epsilon_1^2 g(A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1). \quad (18)$$

Ковариантная производная задается соотношением  $D_\mu \phi(\epsilon) = [\partial_\mu + gT(A_\mu)]\phi(\epsilon)$  или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D_\mu \phi_1 \\ \epsilon_1 D_\mu \phi_2 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 D_\mu \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\mu & -\epsilon_1 g A_\mu^1 & -\epsilon_1 \epsilon_2 g A_\mu^2 \\ \epsilon_1 g A_\mu^1 & \partial_\mu & -\epsilon_2 g A_\mu^3 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 g A_\mu^2 & \epsilon_2 g A_\mu^3 & \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \epsilon_1 \phi_2 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 \phi_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

и действует на компоненты поля  $\phi(\epsilon)$  по формулам

$$D_\mu \phi_1 = \partial_\mu \phi_1 - g\epsilon_1^2 (A_\mu^1 \phi_2 + \epsilon_2^2 A_\mu^2 \phi_3),$$

$$D_\mu \phi_2 = \partial_\mu \phi_2 + g(A_\mu^1 \phi_1 - \epsilon_2^2 A_\mu^3 \phi_3),$$

$$D_\mu \phi_3 = \partial_\mu \phi_3 + g(A_\mu^2 \phi_1 + A_\mu^3 \phi_2). \quad (20)$$

Полный лагранжиан модели  $\mathcal{L}(\epsilon) = L_A(\epsilon) + L_\phi(\epsilon)$  определяется как сумма лагранжиана калибровочных полей

$$L_A(\epsilon) = \frac{1}{8g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}(\epsilon))^2 = -\frac{1}{4} [\epsilon_1^2 (F_{\mu\nu}^1)^2 + \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 (F_{\mu\nu}^2)^2 + \epsilon_2^2 (F_{\mu\nu}^3)^2] \quad (21)$$

и лагранжиана полей материи

$$L_\phi(\epsilon) = \frac{1}{2} (D_\mu \phi(\epsilon))^t (D_\mu \phi(\epsilon)) - V(\phi; \epsilon), \quad (22)$$

где потенциал выбирается в виде

$$V(\phi; \epsilon) = \frac{\lambda}{4} \left( \phi^t(\epsilon)\phi(\epsilon) - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2. \quad (23)$$

В явном виде с учетом (18) калибровочный лагранжиан запишется

$$L_A(\epsilon) = -[\epsilon_1^2 (\mathcal{F}_{\mu\nu}^1)^2 + \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 (\mathcal{F}_{\mu\nu}^2)^2 + \epsilon_2^2 (\mathcal{F}_{\mu\nu}^3)^2] - \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 [L_A^{(3)}(\epsilon) + L_A^{(4)}(\epsilon)]. \quad (24)$$

Слагаемые третьего и четвертого порядков по полям равны

$$L_A^{(3)}(\epsilon) = 2g [\mathcal{F}_{\mu\nu}^1 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) + \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3) + \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)],$$

$$L_A^{(4)}(\epsilon) = g^2 [\epsilon_2^2 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2)^2 + (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3)^2 + \epsilon_1^2 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2], \quad (25)$$

а  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$  есть тензор напряженности в плоском пространстве.

Основные состояния лагранжиана  $L(\epsilon) = L_A(\epsilon) + L_\phi(\epsilon)$  представляют собой конфигурацию полей, обнуляющих калибровочный лагранжиан  $L_A(\epsilon) = 0$  и доставляющих минимум потенциалу (23). Основные состояния реализуются на полях

$$A_\mu(x; \epsilon) = \omega(x; \epsilon) \partial_\mu \omega^{-1}(x; \epsilon), \quad \omega(x; \epsilon) \in SO(3; \epsilon),$$

$$\phi^t(\epsilon) \phi(\epsilon) = \phi_1^2 + \epsilon_1^2 \phi_2^2 + \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \phi_3^2 = v^2, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (26)$$

которые при  $A_\mu(x; \epsilon) = 0$  лежат на эллипсоиде («сфере» радиуса  $v$ ) (рис. 6) в пространстве полей материи, задаваемом уравнением (26), и могут быть получены калибровочными преобразованиями

$$\phi(x; \epsilon) = \omega(x; \epsilon) \phi^{vac},$$

$$A'_\mu(x; \epsilon) = \omega(x; \epsilon) A_\mu(x; \epsilon) \omega^{-1}(x; \epsilon) + \omega(x; \epsilon) \partial_\mu \omega^{-1}(x; \epsilon) \quad (27)$$

из одного основного состояния, выбираемого из соображений простоты в виде

$$A_\mu(x; \epsilon) = 0, \quad (\phi^{vac})^t = (v, 0, 0)^t \quad (28)$$

(точка  $A$  на рис. 6).

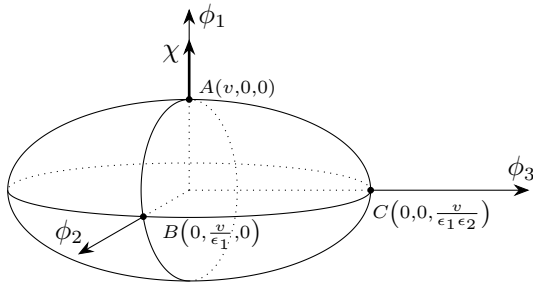


Рисунок 6. Эллипсоид основных состояний лагранжиана  $L(\epsilon)$ .  
Figure 6. The ellipsoid of the ground states of the Lagrangian  $L(\epsilon)$ .

Далее в механизме Хиггса рассматриваются малые (линейные) возбуждения поля  $\phi_1$  в окрестности вакуума

$$\phi_1(x) = v + \chi(x), \quad \phi_2(x), \quad \phi_3(x). \quad (29)$$

Для нового поля  $\phi(x)$  полный лагранжиан модели принимает вид

$$\mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{L}^{(2)}(\epsilon) + \mathcal{L}^{(3)}(\epsilon) + \mathcal{L}^{(4)}(\epsilon). \quad (30)$$

Квадратичный по полям лагранжиан

$$\mathcal{L}^{(2)}(\epsilon) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 +$$

$$+ \epsilon_1^2 \left[ -\frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^1)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^1)^2 \right] + \epsilon_2^2 \left[ -\frac{1}{4}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^3)^2 \right] +$$

$$+ \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \left[ -\frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^2)^2 \right], \quad (31)$$

где введены новые поля

$$B_\mu^1 = A_\mu^1 + \frac{1}{gv} \partial_\mu \phi_2, \quad B_\mu^2 = A_\mu^2 + \frac{1}{gv} \partial_\mu \phi_3, \quad (32)$$

описывает массивное скалярное поле материи  $\chi$ ,  $m_\chi = \sqrt{2}\mu$  – хиггсовский бозон, два массивных векторных поля ( $k = 1, 2$ ) с одинаковыми массами  $B_\mu^k$ ,  $m_B = gv = \frac{g\mu}{\sqrt{\lambda}}$  и безмассовое поле  $A_\mu^3$ . Взаимодействия полей описываются слагаемыми третьего  $\mathcal{L}^{(3)}(\epsilon)$  и четвертого  $\mathcal{L}^{(4)}(\epsilon)$  порядков по полям

$$\mathcal{L}^{(3)}(\epsilon) = -\lambda v \chi^3 + \epsilon_1^2 \left\{ -\lambda v \chi (\phi_2^2 + \epsilon_2^2 \phi_3^2) + \right.$$

$$+ g [A_\mu^1 (\chi \partial_\mu \phi_2 - \phi_2 \partial_\mu \chi) +$$

$$+ \epsilon_2^2 A_\mu^2 (\chi \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \chi) +$$

$$+ \epsilon_2^2 A_\mu^3 (\phi_2 \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \phi_2)] +$$

$$+ g^2 v [A_\mu^1 (A_\mu^1 \chi - \epsilon_2^2 A_\mu^3 \phi_3) +$$

$$+ \epsilon_2^2 A_\mu^2 (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2)] \left. \right\} -$$

$$- \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \frac{g}{2} [\mathcal{F}_{\mu\nu}^1 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) +$$

$$+ \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3) +$$

$$+ \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)], \quad (33)$$

$$\mathcal{L}^{(4)}(\epsilon) = -\frac{\lambda}{4} \chi^4 + \epsilon_1^2 \frac{1}{2} \left\{ -\lambda \chi^2 (\phi_2^2 + \epsilon_2^2 \phi_3^2) - \right.$$

$$- \epsilon_1^2 \frac{\lambda}{2} (\phi_2^2 + \epsilon_2^2 \phi_3^2)^2 +$$

$$+ g^2 [\epsilon_1^2 (A_\mu^1 \phi_2 + \epsilon_2^2 A_\mu^2 \phi_3)^2 +$$

$$+ (A_\mu^1 \chi - \epsilon_2^2 A_\mu^3 \phi_3)^2 +$$

$$+ \epsilon_2^2 (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2)^2] -$$

$$- \epsilon_2^2 g^2 [\epsilon_2^2 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2)^2 +$$

$$+ (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3)^2 +$$

$$+ \epsilon_1^2 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2] \left. \right\}. \quad (34)$$

Полезно отметить, что теории с калибровочной группой Кэли-Клейна  $SO(3; \epsilon)$  могут быть получены из  $SO(3)$  калибровочной теории (формулы (30)–(34) при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ) заменой

$$v \rightarrow v, \quad \chi \rightarrow \chi, \quad \phi_2 \rightarrow \epsilon_1 \phi_2, \quad \phi_3 \rightarrow \epsilon_1 \epsilon_2 \phi_3,$$

$$A_\mu^1 \rightarrow \epsilon_1 A_\mu^1, \quad A_\mu^2 \rightarrow \epsilon_1 \epsilon_2 A_\mu^2, \quad A_\mu^3 \rightarrow \epsilon_2 A_\mu^3, \quad (35)$$

или

$$B_\mu^1 \rightarrow \epsilon_1 B_\mu^1, \quad B_\mu^2 \rightarrow \epsilon_1 \epsilon_2 B_\mu^2, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 \rightarrow \epsilon_2 \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 \quad (36)$$

для новых полей.



## 2.2. Калибровочная модель для группы Евклида $E_3$

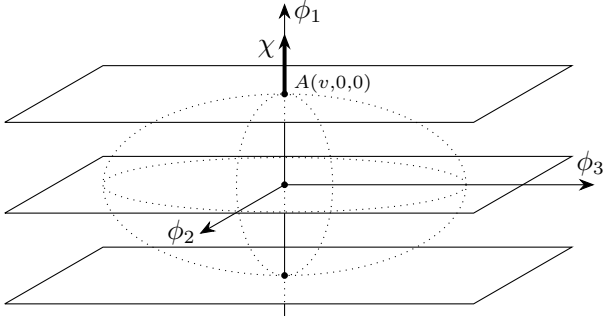


Рисунок 7. Плоскости основных состояний лагранжиана  $\mathcal{L}(\epsilon_1)$ .  
Figure 7. Ground state planes of the Lagrangian  $\mathcal{L}(\epsilon_1)$ .

При  $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 = 1$  группа  $SO(3)$  контрактурируется в неполупростую группу Евклида  $E_3$ . Метрика в пространстве полей материи вырождается  $\phi^t(\epsilon_1)\phi(\epsilon_1) = \phi_1^2 + \epsilon_1^2(\phi_2^2 + \phi_3^2)$ , и  $\Phi_3(\epsilon_1)$  становится расслоенным пространством с одномерной базой  $\{\phi_1\}$  и двумерным слоем  $\{\phi_2, \phi_3\}$  (рис. 7). Лагранжиан (30)–(34) преобразуется к виду

$$\mathcal{L}(\epsilon_1) = \mathcal{L}_b(\epsilon_1) + \epsilon_1^2 \mathcal{L}_f(\epsilon_1) + \epsilon_1^4 \mathcal{L}_{int}(\epsilon_1),$$

где

$$\mathcal{L}_b(\epsilon_1) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \lambda \phi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 - \frac{1}{4}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^3)^2,$$

$$\mathcal{L}_f(\epsilon_1) =$$

$$= -\frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^1)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^1)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^2)^2 +$$

$$+ \mathcal{L}_f^{(3)}(\epsilon_1) + \mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_1),$$

$$\mathcal{L}_{int}(\epsilon_1) - \frac{\lambda}{2}(\phi_2^2 + \phi_3^2)^2 +$$

$$+ g^2 \left[ (A_\mu^1 \phi_2 + A_\mu^2 \phi_3)^2 - (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2 \right]. \quad (37)$$

Здесь  $\mathcal{L}_f^{(3)}(\epsilon_1)$  дается выражением (33) при  $\epsilon_2 = 1$  без слагаемого  $-\lambda \phi_0 \chi^3$ , а  $\mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_1)$  имеет вид

$$\mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\lambda \chi^2 (\phi_2^2 + \phi_3^2) + g^2 \left[ (A_\mu^1 \chi - A_\mu^3 \phi_3)^2 + \right. \right.$$

$$\left. + (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2)^2 \right] -$$

$$\left. - g^2 \left[ (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2)^2 + (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3)^2 \right] \right\}. \quad (38)$$

Лагранжиан в базе  $\mathcal{L}_b(\epsilon_1)$  описывает хиггсовский бозон  $\chi$  со стандартной массой  $m_\chi = \sqrt{2}\mu$ , его самодействие и безмассовое векторное поле  $A_\mu^3$ . Лагранжиан в слое  $\mathcal{L}_f(\epsilon_1)$  описывает два массивных векторных поля  $B_\mu^1, B_\mu^2$  (32) с одинаковыми массами  $m_B = gv$  и различные взаимодействия полей. Помимо этого, контрактурированный

лагранжиан  $\mathcal{L}(\epsilon_1)$  содержит слагаемые, пропорциональные  $\epsilon_1^4$ , которые отвечают взаимодействию полей четвертого порядка.

Как и в случае калибровочной группы  $SO(2; \epsilon)$ , за счет калибровочных преобразований, связывающих вакуум в точке  $A(v, 0, 0)$  с полями  $\phi_2, \phi_3$ , можно преобразовать лагранжиан  $\mathcal{L}(\epsilon_1)$  к виду, содержащему только калибровочные поля  $\hat{B}_\mu^1, \hat{B}_\mu^2, A_\mu^3$ , поле хиггсовского бозона  $\chi$  и взаимодействия между ними.

Представления (37), (38) описывают порядок стремления к нулю слагаемых в лагранжиане при переходе к пределу  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ . Вначале считаем малым и пренебрегаем лагранжианом  $\mathcal{L}_{int}(\epsilon_1)$ , далее малым будет лагранжиан  $\mathcal{L}_f(\epsilon_1)$ , окончательно получаем лагранжиан в базе  $\mathcal{L}_b(\epsilon_1)$ . Можно рассматривать и обратный процесс восстановления полей и взаимодействий при изменении параметра контракции  $\epsilon_1$  от нуля до единицы.

Теория с калибровочной группой Евклида  $E_2$  может быть получена из  $SO(3)$  калибровочной теории (формулы (30)–(34) раздела 2.1 при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ) заменой

$$v \rightarrow v, \chi \rightarrow \chi, \phi_2 \rightarrow \epsilon_1 \phi_2, \phi_3 \rightarrow \epsilon_1 \phi_3,$$

$$B_\mu^1 \rightarrow \epsilon_1 A_\mu^1, B_\mu^2 \rightarrow \epsilon_1 A_\mu^2, A_\mu^3 \rightarrow A_\mu^3 \quad (39)$$

с последующим переходом к пределу  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ .

Если выбрать основное состояние, отвечающее точке  $B(0, \frac{v}{\epsilon_1}, 0)$  на рис. 6, где  $\phi_1 = 0$ , то в пределе  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  его группой инвариантности окажется подгруппа  $SO(2)$ , рассмотренная в разделе 1.

## 2.3. Калибровочная модель для группы Ньютона $N_3$

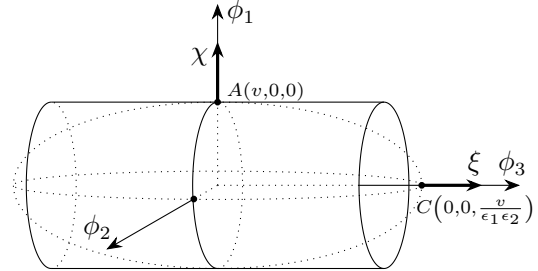


Рисунок 8. Цилиндр основных состояний лагранжиана  $\mathcal{L}(\epsilon_2)$ .  
Figure 8. Cylinder of ground states of the Lagrangian  $\mathcal{L}(\epsilon_2)$ .

При  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 \rightarrow 0$  группа вращений  $SO(3)$  контрактурируется в неполупростую группу Ньютона  $N_3$ . Метрика в пространстве полей материи вырождается  $\phi^t(\epsilon_2)\phi(\epsilon_2) = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \epsilon_2^2 \phi_3^2$ , и  $\Phi_3(\epsilon_2)$  становится расслоенным пространством с двумерной базой  $\{\phi_1, \phi_2\}$  и одномерным слоем  $\{\phi_3\}$ . Лагранжиан модели

$$\mathcal{L}(\epsilon_2) = \mathcal{L}_b(\epsilon_2) + \epsilon_2^2 \mathcal{L}_f(\epsilon_2) \quad (40)$$

состоит из лагранжиана в базе

$$\mathcal{L}_b(\epsilon_2) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^1)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^1)^2 +$$

$$+ \mathcal{L}_b^{(3)}(\epsilon_2) + \mathcal{L}_b^{(4)}(\epsilon_2), \quad (41)$$

который описывает хиггсовский бозон  $\chi$ , массивный бозон  $B_\mu^1$  и взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_b^{(3)}(\epsilon_2) = -\lambda v \chi^3 - \lambda v \chi \phi_2^2 + g A_\mu^1 (\chi \partial_\mu \phi_2 - \phi_2 \partial_\mu \chi),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b^{(4)}(\epsilon_2) = & -\frac{\lambda}{4}\chi^4 + \frac{g^2}{2}\chi^2(A_\mu^1)^2 - \frac{\lambda}{2}\chi^2\phi_2^2 + \\ & + \frac{g^2}{2}\phi_2^2(A_\mu^1)^2 - \frac{\lambda}{2}\phi_2^4 \end{aligned} \quad (42)$$

и лагранжиана в слое

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(\epsilon_2) = & -\frac{1}{4}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^3)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{g^2v^2}{2}(B_\mu^2)^2 + \\ & + \mathcal{L}_f^{(3)}(\epsilon_2) + \mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_2), \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{(3)}(\epsilon_2) = & \left\{ -\lambda v \chi \phi_3^2 + \right. \\ & + g \left[ A_\mu^2 (\chi \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \chi) + A_\mu^3 (\phi_2 \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \phi_2) \right] + \\ & + g^2 \phi_0 A_\mu^2 (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2) - \\ & - \frac{g}{2} \left[ \mathcal{F}_{\mu\nu}^1 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) + \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3) + \right. \\ & \left. + \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1) \right] \left. \right\}, \\ \mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_2) = & \frac{1}{2} \left\{ -\lambda \phi_3^2 (\chi^2 + \phi_2^2) + \right. \\ & + g^2 \left[ (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2)^2 + 2A_\mu^1 A_\mu^2 \phi_2 \phi_3 - 2A_\mu^1 A_\mu^3 \chi \phi_3 \right] - \\ & \left. - g^2 \left[ (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3)^2 + (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, лагранжиан в слое содержит безмассовое поле  $A_\mu^3$ , массивное поле  $B_\mu^2$  и взаимодействия полей.

Отметим, что лагранжиан  $\mathcal{L}_b(\epsilon_2)$  в базе (41), (42) описывает те же поля, что и лагранжиан  $L(\epsilon = 1)$  (7) модели с калибровочной группой  $SO(2)$ . Отличия в слагаемых, отвечающим взаимодействиям третьего и четвертого порядков, исчезают при избавлении от  $\phi_2$  путем перехода к полю  $\hat{B}_\mu^1$  аналогичного переходу от  $B_\mu$  к  $\hat{B}_\mu$ .

Теория с калибровочной группой Евклида  $N_2$  может быть получена из  $SO(3)$  калибровочной теории (формулы (30)–(34) раздела 2.1) при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ) заменой

$$\begin{aligned} v \rightarrow v, \quad \chi \rightarrow \chi, \quad \phi_2 \rightarrow \phi_2, \quad \phi_3 \rightarrow \epsilon_2 \phi_3, \\ A_\mu^1 \rightarrow A_\mu^1, \quad A_\mu^2 \rightarrow \epsilon_2 A_\mu^2, \quad A_\mu^3 \rightarrow \epsilon_2 A_\mu^3 \end{aligned} \quad (45)$$

с последующим пределом  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ .

Аналогично разделу 1, в калибровочной теории с группой  $SO(3; \epsilon)$  при  $\epsilon_k \neq 0, k = 1, 2$  в качестве вакуума можно выбрать любое основное состояние на эллипсоиде рис. 6. Однако, для того, чтобы получить теорию с полной трехпараметрической контрактивной группой Евклида  $E_3$  или Ньютона  $N_3$  при переходе к пределу  $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 = 1$  или  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ , необходимо, чтобы выбранный вакуум (скажем, точка  $A$  на рис. 6) в соответствующем пределе принадлежал базе расслоенного пространства (рис. 7 или 8). Если же вакуум модели выбран, например, в точках

$B$  или  $C$  на рис. 6, попадающих в пределе в слой, то получаем калибровочные модели, отвечающие соответствующим двухпараметрическим подгруппам исходной калибровочной группы.

### 3. Калибровочные теории с группами $SU(2; \epsilon)$

Унитарная контрактивная группа  $SU(2; \epsilon)$  определяется как группа преобразований комплексного пространства  $\mathbf{C}_2(\epsilon)$ , оставляющая инвариантной квадратичную форму

$$\phi(\epsilon)^\dagger \phi(\epsilon) = |\phi_1(\epsilon)|^2 + \epsilon^2 |\phi_2(\epsilon)|^2. \quad (46)$$

Преобразования комплексных полей имеют вид

$$\begin{aligned} \phi'(\epsilon) &= u(\epsilon) \phi(\epsilon), \\ \begin{pmatrix} \phi'_1(\epsilon) \\ \epsilon \phi'_2(\epsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha(\epsilon) & \epsilon \beta(\epsilon) \\ -\epsilon \bar{\beta}(\epsilon) & \bar{\alpha}(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(\epsilon) \\ \epsilon \phi_2(\epsilon) \end{pmatrix}, \\ \det u(\epsilon) &= |\alpha(\epsilon)|^2 + \epsilon^2 |\beta(\epsilon)|^2 = 1, \\ u(\epsilon) u^\dagger(\epsilon) &= 1. \end{aligned} \quad (47)$$

Генераторы группы  $SU(2; \epsilon)$  даны матрицами

$$\begin{aligned} T_1 &= \epsilon \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \epsilon \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ T_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (48)$$

подчиняются коммутационным соотношениям

$$[T_1, T_2] = i\epsilon^2 T_3, \quad [T_3, T_1] = iT_2, \quad [T_2, T_3] = iT_1 \quad (49)$$

и образуют алгебру  $su(2; \epsilon)$ .

В калибровочной теории с группой  $SU(2; \epsilon)$  калибровочные поля

$$\begin{aligned} A_\mu(x; \epsilon) &= g \sum_{k=1}^3 T_k A_\mu^k(x) = \\ &= g \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & \epsilon(A_\mu^1 + iA_\mu^2) \\ \epsilon(A_\mu^1 - iA_\mu^2) & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (50)$$

принимают значения в алгебре Ли  $su(2; \epsilon)$ . Ковариантные производные равны

$$D_\mu \phi(\epsilon) = \partial_\mu \phi(\epsilon) - ig \left( \sum_{k=1}^3 T_k A_\mu^k \right) \phi(\epsilon), \quad (51)$$

где константа  $g$  является зарядом. Тензоры напряженности калибровочных полей определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}(x; \epsilon) &= \mathcal{A}_{\mu\nu}(x; \epsilon) + g[A_\mu(x; \epsilon), A_\nu(x; \epsilon)], \\ \mathcal{A}_{\mu\nu}^k(x; \epsilon) &= \partial_\mu A_\nu^k(x; \epsilon) - \partial_\nu A_\mu^k(x; \epsilon). \end{aligned} \quad (52)$$

Вместо полей (50) вводятся новые калибровочные поля

$$\begin{aligned} Z_\mu(x) &= A_\mu^3(x), \\ W_\mu^\pm(x) &= \epsilon \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1(x) \mp iA_\mu^2(x)), \end{aligned} \quad (53)$$

которые в случае электрослабой модели имеют непосредственный физический смысл.

Лагранжиан модели  $L(\epsilon) = L_A(\epsilon) + L_\phi(\epsilon)$  представляет собой сумму лагранжиана калибровочных полей

$$L_A(\epsilon) = -\frac{1}{4} \{ [\epsilon^2 (A_{\mu\nu}^1)^2 + (A_{\mu\nu}^2)^2] + (A_{\mu\nu}^3)^2 \} \quad (54)$$

и лагранжиана полей материи

$$L_\phi(\epsilon) = \frac{1}{2} (D_\mu \phi(\epsilon))^\dagger D_\mu \phi(\epsilon) - V(\phi; \epsilon). \quad (55)$$

Основные состояния лагранжиана  $L(\epsilon)$  обнуляют калибровочный лагранжиан  $L_A(\epsilon) = 0$  и доставляют минимум потенциалу

$$V(\phi; \epsilon) = \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger(\epsilon)\phi(\epsilon) - v^2)^2. \quad (56)$$

Эти состояния задаются уравнением

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \epsilon^2(\varphi_3^2 + \varphi_4^2) = v^2, \quad (57)$$

которое описывает трехмерный эллипсоид (сферу при  $\epsilon = 1$ ) в четырехмерном пространстве  $\Phi_4(\epsilon)$  вещественных полей  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , где  $\phi_1 = \varphi_1 + i\varphi_2$ ,  $\phi_2 = \varphi_3 + i\varphi_4$ . Данный трехмерный эллипсоид можно мыслить себе как поверхность, изображенную на рис. 6, если подразумевать под  $\phi_3$  двумерную плоскость, натянутую на  $\varphi_3, \varphi_4$ , и положить  $\phi_1 = \varphi_1$ ,  $\phi_2 = \varphi_2$ .

При  $\epsilon \neq 0$  все основные состояния могут быть получены калибровочными преобразованиями из одного из них. Как и в случаях калибровочных моделей с ортогональными группами, рассмотренных в разделах 1 и 2, для получения калибровочной теории с трехмерной контрактивной унитарной группой, нужно вакуум модели выбрать в точке, попадающей в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  в слой пространства  $\Phi_4(\epsilon)$ .

Из соображений простоты вакуумный вектор можно взять в виде  $(\phi^{vac})^t = (v, 0)$ , т. е.  $\varphi_1 = v, \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$  (точка  $A(v, 0, 0, 0)$  на эллипсоиде (57), рис. 6). После этого рассматриваются малые (линейные) возбуждения поля  $\varphi_1$  в окрестности вакуума

$$\varphi_1(x) = v + \chi(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \quad \varphi_4(x). \quad (58)$$

Для нового поля  $\phi(x)$  полный лагранжиан модели принимает вид

$$\mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{L}^{(2)}(\epsilon) + \mathcal{L}^{int}(\epsilon), \quad (59)$$

где, как обычно, квадратичные по полям слагаемые лагранжиана  $\mathcal{L}^{(2)}(\epsilon)$  описывают свободные частицы модели, а слагаемые более высокого порядка  $\mathcal{L}^{int}(\epsilon)$  рассматриваются как их взаимодействия. Квадратичный лагранжиан

$$\mathcal{L}^{(2)}(\epsilon) = \mathcal{L}_0^{(2)}(\epsilon) + \epsilon^2 \mathcal{L}_2^{(2)}(\epsilon),$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)}(\epsilon) =$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \frac{1}{4} \mathcal{Z}_{\mu\nu} \mathcal{Z}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z_\mu,$$

$$\mathcal{L}_2^{(2)}(\epsilon) = -\frac{1}{2} \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ \mathcal{W}_{\mu\nu}^- + m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- \quad (60)$$

включает скалярное поле Хиггса  $\chi$  с массой  $m_\chi = \sqrt{2\lambda}v$ , нейтральную  $Z$  и заряженные векторные частицы  $W^\pm$  с одинаковыми массами  $m_Z = m_W = \frac{1}{2}gv$ . Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}^{int}(\epsilon) = \mathcal{L}_0^{int} + \epsilon^2 \mathcal{L}_2^{int} + \epsilon^4 \mathcal{L}_4^{int},$$

$$\mathcal{L}_0^{int} = -\frac{\lambda}{4} \chi^4 - \lambda v \chi^3 + \frac{gm_z}{2 \cos \theta_W} \chi (Z_\mu)^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} \chi^2 (Z_\mu)^2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{int} = & g\chi W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{g^2}{4} \chi^2 W_\mu^+ W_\nu^- - \\ & - 2ig (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+) \mathcal{Z}_{\mu\nu} \cos \theta_W - \\ & - \frac{i}{2} g \cos \theta_W [Z_\mu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - \\ & - Z_\nu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\mu^+)] - \\ & - \frac{g^2}{4} \cos \theta_W \left\{ [(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2] (Z_\nu)^2 - \right. \\ & \left. - 2 (W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-) Z_\mu Z_\nu + \right. \\ & \left. + [(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2] (Z_\mu)^2 \right\}, \\ \mathcal{L}_4^{int} = & \frac{g^2}{4} (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+)^2. \quad (61) \end{aligned}$$

Как и в случае ортогональных групп Кэли-Клейна, теорию с унитарной калибровочной группой  $SU(2; \epsilon)$  можно получить из  $SU(2)$  калибровочной теории (формулы этого раздела при  $\epsilon = 1$ ) заменой

$$v \rightarrow v, \quad \chi \rightarrow \chi, \quad \phi_1 \rightarrow \phi_1, \quad \phi_2 \rightarrow \epsilon \phi_2,$$

$$Z_\mu \rightarrow Z_\mu, \quad W^\pm \rightarrow \epsilon W^\pm. \quad (62)$$

*Замечание.* В стандартной электрослабой модели [8] с калибровочной группой  $SU(2) \times U(1)$  в качестве вакуума выбирают поле  $\phi_{vac}^t = (0, v)$ , т. е.  $\varphi_3 = v, \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = 0$  (точка  $C(0, 0, v, 0)$  на эллипсоиде (57), рис. 6). При  $\epsilon = 1$  такой выбор приводит к тем же массам калибровочных полей, что и выбор поля  $(\phi^{vac})^t = (v, 0)$ , отвечающего точке  $A(v, 0, 0, 0)$ . Однако он не согласован с контракцией  $\epsilon \rightarrow 0$ . Правильные преобразования полей электрослабой модели при контракции даются формулами (62), как это сделано в работе [12].

## 4. Заключение

Контракции ортогональных и унитарных групп Кэли-Клейна и расслоения соответствующих пространств фундаментального представления тесно связаны между собой. Расслоенные пространства имеют вырожденную метрику и целый набор инвариантов относительно контрактивной группы [11]. Это означает, что в калибровочных теориях с контрактивными группами Кэли-Клейна пространства полей материи являются расслоенными пространствами. Для полного описания поведения физических систем в процессе предельного перехода необходимо рассматривать полное выражение для лагранжиана, в том числе и его зависимость от параметра контракции, а не только предельные лагранжианы в базе и слое. Это позволяет проследить порядок обнуления слагаемых в лагранжианах при стремлении параметров контракции к нулю, а также восстановление лагранжиана при обратном процессе – деформации.

Важное значение имеет выбор вакуума в механизме спонтанного нарушения симметрии. Чтобы получить теорию с полной контрактивной группой, имеющей ту же размерность, что и исходная калибровочная группа, необходимо, чтобы выбранный вакуум в соответствующем пределе принадлежал базе расслоенного пространства полей материи. Только в таком случае в контрактивной калибровочной теории получается тот же самый набор полей и частиц с теми же самыми массами, что и в исходной теории. Выбор вакуума, попадающего в пределе в слой, приводит к калибровочной модели, отвечающей подгруппе исходной калибровочной группы.

Поскольку именно структурные константы ответственны за взаимодействие полей и поскольку при контракциях групп Ли часть структурных постоянных их алгебр обращается в ноль, калибровочные теории, основанные на контрактивных неполупростых группах, описывают более простые взаимодействия полей, чем исходные теории, отвечающие простым или полупростым калибровочным группам.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Литература

1. Yang, C. N. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance / C. N. Yang, R. L. Mills // *Phys. Rev.* – 1954. – Vol. 96. – P. 191–195.
2. Weinberg, S. A model of leptons / S. Weinberg // *Phys. Rev. Lett.* – 1967. – Vol. 19. – P. 1264–1266.
3. Salam, A. In: *Elementary Particle Theory* (ed. by N. Svartholm) / A. Salam. – Almqvist Forlag AB, 1968.
4. Nappi, C. R. A WZW model based on non-semi-simple group / C. R. Nappi, E. Witten // *hep-th/9310112*.
5. Tseytlin, A. A. On gauge theories for non-semisimple groups / A. A. Tseytlin // *hep-th/9505129*.
6. Nuyts, J. Yang-Mills theory for non-semisimple groups / J. Nuyts, T. T. Wu // *hep-th/0210214*.

7. Gromov, N. A. Gauge theories for target spaces with degenerate metrics / N. A. Gromov // In “Non-Euclidean Geometry in Modern Physics” (Proc. 5th Int. Conf. Bolyai-Gauss-Lobachevsky, ed. Yu. Kurochkin and V. Red'kov). – Minsk, 2006. – P. 258–265. *hep-th/0611079*.
8. Рубаков, В. А. Классические калибровочные поля / В. А. Рубаков. – Москва : Эдиториал УРСС, Москва, 1999. – 336 с.
9. Higgs, P. W. / P. W. Higgs // *Phys. Lett.* – 1964. – Vol. 12. – P. 321.
10. Пименов, Р. И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений / Р. И. Пименов // *Литовский матем. сб.* – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 457–486.
11. Громов, Н. А. Контракции классических и квантовых групп / Н. А. Громов. – Москва : Физматлит, 2012. – 318 с.
12. Громов, Н. А. Стандартная модель в ранней Вселенной / Н. А. Громов // *Известия Коми НЦ УрО РАН. Серия «Физико-математические науки».* – 2023. – № 4 (62). – С. 36–48.

## References

1. Yang, C. N. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance / C. N. Yang, R. L. Mills // *Phys. Rev.* – 1954. – Vol. 96. – P. 191–195.
2. Weinberg, S. A model of leptons / S. Weinberg // *Phys. Rev. Lett.* – 1967. – Vol. 19. – P. 1264–1266.
3. Salam, A. In: *Elementary Particle Theory* (ed. by N. Svartholm) / A. Salam. – Almqvist Forlag AB, 1968.
4. Nappi, C. R. A WZW model based on non-semi-simple group / C. R. Nappi, E. Witten // *hep-th/9310112*.
5. Tseytlin, A. A. On gauge theories for non-semisimple groups / A. A. Tseytlin // *hep-th/9505129*.
6. Nuyts, J. Yang-Mills theory for non-semisimple groups / J. Nuyts, T. T. Wu // *hep-th/0210214*.
7. Gromov, N. A. Gauge theories for target spaces with degenerate metrics / N. A. Gromov // In “Non-Euclidean Geometry in Modern Physics” (Proc. 5th Int. Conf. Bolyai-Gauss-Lobachevsky, ed. Yu. Kurochkin and V. Red'kov). – Minsk, 2006. – P. 258–265. *hep-th/0611079*.
8. Rubakov, V. A. *Klassicheskiye kalibrovocnyye polya [Classical Gauge Fields]* / V. A. Rubakov. – Moscow : Editorial URSS, 1999. – 336 p.
9. Higgs, P. W. / P. W. Higgs // *Phys. Lett.* – 1964. – Vol. 12. – P. 321.
10. Pimenov, R. I. *Edinaya aksiomatika prostranstv s maksimal'noj gruppoj dvizhenij [Unified Axiomatics of spaces with maximal Movement Group]* / R. I. Pimenov // *Lithuanian Math. J.* – 1965. – Vol. 5, № 3. – P. 457–486.
11. Gromov, N. A. *Kontraktzii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups]* / N. A. Gromov. – Moscow : Fizmatlit, 2012. – 318 p.
12. Gromov, N. A. *Standartnaya model' v ranney Vselennoy [Standard Model in the Early Universe]* / N. A. Gromov // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* – 2023. – № 4(62). – P. 36–48.

**Благодарность (госзадание)**

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

**Acknowledgement (state task)**

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

**Для цитирования:**

Громов, Н. А. Контракции калибровочных групп и спонтанное нарушение симметрии / Н. А. Громов, В. В. Куратов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 28–37.

**For citation:**

Gromov, N. A. Contractions of gauge groups and spontaneous symmetry breaking / N. A. Gromov, V. V. Kuratov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2024. – № 5 (71). – P. 28–37.

Дата поступления статьи: 21.03.2024

Received: 21.03.2024

# Stueckelberg particle in the uniform electric field, solutions with cylindrical symmetry

A. V. Ivashkevich<sup>1</sup>, P. O. Sachenok<sup>2</sup>, V. M. Red'kov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics  
of the National Academy of Sciences of Belarus,  
Minsk, Belarus

<sup>2</sup>Mozyr State Pedagogical University  
named after I. P. Shamyakin,  
Mozyr, Belarus

ivashkevich.alina@yandex.by  
polinasachenok@gmail.com  
v.redkov@ifanbet.bas-net.by

## Abstract

In the present paper, the system of 11 equations for massive Stueckelberg particle is studied in presence of the external uniform electric field. We apply covariant formalism according to the general tetrad approach by Tetrode-Weyl-Fock-Ivanenko specified for cylindrical coordinates. After separating the variables, we derive the system of the first-order differential equations in partial derivatives with respect to coordinates  $(r, z)$ . To resolve this system, we apply the Fedorov-Gronskiy method, thereby we consider the 11-dimensional spin operator and find on this base three projective operators, which permit us to expand the complete wave function in the sum of three parts. Besides, according to the general method, dependence of each projective constituent on the variable  $r$  should be determined by only one function. Also, in accordance with the general method we impose the first-order constraints which permit us to transform all differential equations in partial derivatives with respect to coordinates  $(r, z)$  into the system of 11 first-order ordinary differential equations in the variable  $z$ . The last system is solved in terms of confluent hypergeometric functions. In total, four independent types of solutions have been constructed, in contrast to the case of the ordinary spin 1 particle described by Daffin-Kemmer equation when only three types of solutions are possible.

## Keywords:

Stueckelberg particle, tetrad formalism, cylindrical symmetry, external electric field, separation of the variables, differential equations in partial derivatives, exact solutions

# Частица Штюкельберга в электрическом поле, решения с цилиндрической симметрией

А. В. Ивашкевич<sup>1</sup>, П. О. Саченок<sup>2</sup>, В. М. Редьков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физики имени Б. И. Степанова  
Национальной академии наук Беларуси,  
г. Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Мозырский государственный педагогический университет  
имени И. П. Шамякина,  
г. Мозырь, Беларусь

ivashkevich.alina@yandex.by  
polinasachenok@gmail.com  
v.redkov@ifanbet.bas-net.by

## Аннотация

В настоящей работе система 11 уравнений для массивной частицы Штюкельберга исследуется в присутствии внешнего однородного электрического поля. Применяется тетрадный формализм, согласно методу Тетрода-Вейля-Фока-Иваненко. Используются цилиндрические координаты и соответствующая диагональная тетрада. Разделив переменные, получили систему дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных по координатам  $(r, z)$ . Для решения этой системы применяется метод Федорова-Гронского, согласно которому на основе 11-мерного оператора спина введены три проективных оператора, позволяющие разложить полную волновую функцию в сумму трех частей. Согласно общему методу, зависимость каждой проективной составляющей от переменной  $r$  должна определяться только одной функцией. Также используются дифференциальные ограничения первого порядка, совместимые с системой уравнений и позволяющие преобразовать все уравнения в частных производных по координатам  $(r, z)$  в обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной  $z$ . Последняя система решена в терминах вырожденных гипергеометрических функций. Построены четыре независимые решения, в отличие от случая обычной частицы со спином 1, описываемой уравнением Даффина-Кемера, когда возможны только три решения.

## Ключевые слова:

частица Штюкельберга, тетрадный формализм, цилиндрическая симметрия, внешнее электрическое поле, разделение переменных, уравнения в частных производных, точные решения

## 1. The basic equation

The initial Stueckelberg system [1-5] of equations for a massive particle in presence of external electromagnetic fields is

$$\begin{aligned} -D^a \Psi_a - \mu \Psi &= 0, \\ D_a \Psi + D^b \Psi_{ab} - \mu \Psi_a &= 0, \\ D_a \Psi_b - D_b \Psi_a - \mu \Psi_{ab} &= 0, \end{aligned}$$

where  $D_a = \partial_a + ieA_a$ . As the wave function, we will use the 11-dimensional column

$$\Phi(x) = (\Psi; \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3;$$

$$\Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{03}, \Psi_{23}, \Psi_{31}, \Psi_{12})^t = (H, H_1, H_2)^t,$$

where  $^t$  denotes transposition. The above system can be presented in the block form

$$\begin{aligned} D_a G^a H_1 + \mu H &= 0, \\ \Delta^a D_a H + K^a D_a H_2 - \mu H_1 &= 0, \\ D_a L^a H_1 - \mu H_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

or differently

$$\begin{aligned} (-D_a \Gamma^a - \mu) \Phi &= 0, \\ \Gamma^a &= \begin{pmatrix} 0 & -G^a & 0 \\ \Delta^a & 0 & K^a \\ 0 & L^a & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} H \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

All blocks were defined in [3-5]. This matrix equation for Stueckelberg particle can be extended to the Riemannian space-time in accordance with the known tetrad procedure

$$\left[ \Gamma^\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sum_\alpha(x) - ieA_\alpha \right) - \mu \right] \Psi(x) = 0. \quad (3)$$

Local matrices  $\Gamma^\alpha(x)$  are determined through the tetrads

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha(x) &= e_{(a)}^\alpha(x) \Gamma^a = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -G^a e_{(a)}^\alpha & 0 \\ \Delta^a e_{(a)}^\alpha & 0 & K^a e_{(a)}^\alpha \\ 0 & L^a e_{(a)}^\alpha & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

The connection  $\Sigma_\alpha(x)$  is defined by the formulas

$$\begin{aligned} j^{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_1^{ab} & 0 \\ 0 & 0 & j_2^{ab} \end{pmatrix}, \\ \Sigma_\alpha(x) &= \frac{1}{2} j^{ab} e_{(a)}^\beta(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x), \\ \Sigma_1(x) &= \frac{1}{2} j_{(1)}^{ab} e_a^\beta(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x), \\ \Sigma_2(x) &= \frac{1}{2} j_{(2)}^{ab} e_a^\beta(x) e_{(b)\beta;\alpha}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

where  $j_{(1)}^{ab}$  and  $j_{(2)}^{ab}$  designate generators for vector  $\Psi_k(x)$  and antisymmetric tensor  $\Psi_{[mn]}(x)$ , respectively. Equation (3) may be presented with the use of the Ricci rotation coefficients

$$\left[ \Gamma^c \left( e_{(c)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc} - ieA_c \right) - \mu \right] \Psi(x) = 0. \quad (6)$$

In more detailed form, Eq. (6) reads

$$\begin{aligned} -G^c \left( e_{(c)}^\alpha \partial_\alpha + j_{(1)}^{ab} \frac{1}{2} \gamma_{abc} - ieA_c \right) H_1 - \mu H &= 0, \\ \Delta^c \left( e_{(c)}^\alpha \partial_\alpha - ieA_c \right) H &+ \\ + K^c \left( e_{(c)}^\alpha \partial_\alpha + j_{(2)}^{ab} \frac{1}{2} \gamma_{abc} - ieA_c \right) H_2 - \mu H_1 &= 0, \\ L^c \left( e_{(c)}^\alpha \partial_\alpha + j_{(1)}^{ab} \frac{1}{2} \gamma_{abc} - ieA_c \right) H_1 - \mu H_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Let us consider the Stueckelberg equation in presence of the uniform electric field. In cylindrical coordinates and corresponding diagonal tetrad

$$x^\alpha = (t, r, \phi, z),$$

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad A_0 = -Ez,$$

the above equation takes the form (let  $eE \Rightarrow E$ ):

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + iEz \right) + \Gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \right. \\ \left. + \Gamma^2 \frac{\partial_\phi + j^{12}}{r} + \Gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - \mu \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

In block form, it reads

$$\begin{aligned} \left[ -G^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + iEz \right) - G^1 \frac{\partial}{\partial r} - \right. \\ \left. - G^2 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + j_1^{12} \right) - G^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] H_1 - \mu H = 0, \\ \left[ \Delta^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + iEz \right) + \Delta^1 \frac{\partial}{\partial r} + \Delta^2 \frac{1}{r} \partial_\phi + \Delta^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] H + \\ + \left[ K^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + iEz \right) + K^1 \frac{\partial}{\partial r} + \right. \\ \left. + K^2 \frac{\partial_\phi + j_2^{12}}{r} + K^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] H_2 = \mu H_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left[ L^0 \frac{\partial}{\partial t} + L^1 \frac{\partial}{\partial r} + L^2 \frac{\partial_\phi + j_1^{12}}{r} + L^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] H_1 = \mu H_2.$$

In the following, it will be convenient to apply the cyclic basis, in which the third projection of the spin is diagonal (see details in [3-5]).

## 2. Separation of the variables

We apply the following substitution for the wave function in cyclic basis

$$\bar{\Psi} = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} \begin{pmatrix} \bar{H}(r, z) \\ \bar{H}_1(r, z) \\ \bar{H}_2(r, z) \end{pmatrix}, \quad \bar{H} = h(r, z),$$

$$\bar{H}_1 = \begin{pmatrix} h_0(r, z) \\ h_1(r, z) \\ h_2(r, z) \\ h_3(r, z) \end{pmatrix}, \quad \bar{H}_2 = \begin{pmatrix} E_i(r, z) \\ B_i(r, z) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Then Eqs. (9) read

$$\left[ +i(\epsilon - Ez)G^0 - G^1 \frac{d}{dr} - G^2 \frac{1}{r} (im + j_1^{12}) - \frac{d}{dz} G^3 \right] H_1 = \mu H,$$

$$\left[ -i(\epsilon - Ez)m\Delta^0 + \Delta^1 \frac{d}{dr} + \frac{im}{r} \Delta^2 + \frac{d}{dz} \Delta^3 \right] H +$$

$$+ \left[ -i(\epsilon - Ez)\bar{K}^0 + K^1 \frac{d}{dr} + K^2 \frac{im + j_2^{12}}{r} + \frac{d}{dz} K^3 \right] H_2 = \mu H_1,$$

$$\left[ -i(\epsilon - Ez)L^0 + L^1 \frac{d}{dr} + L^2 \frac{im + j_1^{12}}{r} + \frac{d}{dz} L^3 \right] H_1 = \mu H_2.$$

After simple calculation, we obtain the system of 11 equations. With the use of the shortening notations

$$a_m = \frac{d}{dr} + \frac{m}{r}, \quad a_{m+1} = \frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r}, \quad (11)$$

$$b_m = \frac{d}{dr} - \frac{m}{r}, \quad b_{m-1} = \frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r},$$

it reads

$$i(\epsilon - Ez)h_0 + \frac{d}{dz}h_2 - b_{m-1}h_1 + a_{m+1}h_3 = \mu h,$$

$$-i(\epsilon - Ez)h - \frac{d}{dz}E_2 + b_{m-1}E_1 - a_{m+1}E_3 = \mu h_0,$$

$$-a_m h + a_{m+1}B_2 - \frac{d}{dz}B_3 + i(\epsilon - Ez)E_1 = \mu h_1,$$

$$\frac{d}{dz}h + i(\epsilon - Ez)E_2 - a_{m+1}B_1 - b_{m-1}B_3 = \mu h_2,$$

$$b_m h + b_m B_2 + \frac{d}{dz}B_1 + i(\epsilon - Ez)E_3 = \mu h_3,$$

$$a_m h_0 - i(\epsilon - Ez)h_1 = \mu E_1,$$

$$-\frac{d}{dz}h_0 - i(\epsilon - Ez)h_2 = \mu E_2,$$

$$-b_m h_0 - i(\epsilon - Ez)h_3 = \mu E_3,$$

$$-b_m h_2 + \frac{d}{dz}h_3 = \mu B_1,$$

$$b_{m-1}h_1 + a_{m+1}h_3 = \mu B_2, \quad -\frac{d}{dz}h_1 - a_m h_2 = \mu B_3.$$

## 3. The Fedorov-Gronskiy method

To resolve the last system, we will implement the Fedorov-Gronskiy method [6]. To this end, let us consider the 11-dimensional spin operator  $Y = -i\bar{J}^{12}$ . We readily verify that it satisfies the minimal equation  $Y(Y-1)(Y+1) = 0$ . This permits us to introduce three projective operators

$$P_1 = \frac{1}{2}Y(Y-1), \quad P_2 = \frac{1}{2}Y(Y+1), \quad (12)$$

$$P_3 = 1 - Y^2, \quad P_0 + P_{+1} + P_{-1} = 1.$$

Therefore, the complete wave function may be decomposed into the sum of three parts

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{+1} + \Psi_{-1}, \quad (13)$$

$$\Psi_\sigma = P_\sigma \Psi, \quad \sigma = 0, +1, -1.$$

We can readily find an explicit formula of them. Besides, according to the Fedorov-Gronskiy method, dependence of each projective constituent on the variable  $r$  should be determined by only one function

$$\Psi_1(r, z) = (0, 0, h_1(z), 0, 0, E_1(z),$$

$$0, 0, 0, 0, B_3(z))^t f_1(r),$$

$$\Psi_2(r, z) = (0, 0, 0, 0, h_3(z), 0, 0, E_3(z),$$

$$B_1(z), 0, 0)^t f_2(r),$$

$$\Psi_3(r, z) = (h_1(z), h_0(z), 0, h_2(z),$$

$$0, 0, E_2(z), 0, 0, B_2(z), 0)^t f_3(r). \quad (14)$$

Acting by projective operators on the above system of 11 equations  $P_i(A_{11 \times 11} \Psi) = 0$ , we get three subsystems. Besides, in accordance with the general method, we should impose the first-order constraints which permit us to transform all differential equations in partial derivatives with respect to coordinates  $(r, z)$  into the system of ordinary differential equations of the variable  $z$

$$P_1$$

$$-a_m f_3(r)h(z) + a_m f_3(r)B_2(z) - f_1(r) \frac{d}{dz}B_3(z) +$$

$$+ i(\epsilon - Ez)f_1(r)E_1(z) = \mu f_1(r)h_1(z) \Rightarrow$$

$$a_m f_3(r) = C_1 f_1(r),$$

$$a_m f_3(r)h_0(z) - i(\epsilon - Ez)f_1(r)h_1(z) =$$

$$= \mu f_1(r)E_1(z) \Rightarrow a_m f_3(r) = C_1 f_1(r),$$

$$-f_1(r) \frac{d}{dz}h_1(z) - a_m f_3(r)h_2(z) =$$

$$= \mu f_1(r)B_3(z) \Rightarrow a_m f_3(r) = C_1 f_1(r);$$

$$P_2$$



$$\begin{aligned}
& b_m f_3(r) h(z) + b_m f_3(r) B_2(z) + f_2(r) \frac{d}{dz} B_1(z) + \\
& + i(\epsilon - Ez) f_2(r) E_3(z) = \mu f_2(r) h_3(z) \Rightarrow \\
& \quad b_m f_3(r) = C_2 f_2(r), \\
& -b_m f_3(r) h_0(z) - i(\epsilon - Ez) f_2(r) h_3(z) = \\
& = \mu f_2(r) E_3(z) \Rightarrow b_m f_3(r) = C_2 f_2(r), \\
& -b_m f_3(r) h_2(z) + f_2(r) \frac{d}{dz} h_3(z) = \\
& = \mu f_2(r) B_1(z) \Rightarrow b_m f_3(r) = C_2 f_2(r);
\end{aligned}$$

$P_3$

$$\begin{aligned}
& -i(\epsilon - Ez) f_3(r) h_0(z) - f_3(r) \frac{d}{dz} h_2(z) + \\
& + b_{m-1} f_1(r) h_1(z) - b_{m-1} f_1(r) h_3(z) = \\
& = \mu f_3(r) h(z) \Rightarrow b_{m-1} f_1(r) = C_3 f_3(r), \\
& -i(\epsilon - Ez) f_3(r) h(z) - f_3(r) \frac{d}{dz} E_2(z) + \\
& b_{m-1} f_1(r) E_1(z) - a_{m+1} f_2(r) E_3(z) = \mu f_3(r) h_0(z) \\
& \Rightarrow b_{m-1} f_1(r) = C_3 f_3(r), \quad a_{m+1} f_2(r) = C_4 f_3(r), \\
& \quad f_3(r) \frac{d}{dz} h(z) + i(\epsilon - Ez) f_3(r) E_2(z) - \\
& -a_{m+1} f_2(r) B_1(z) - b_{m-1} f_1(r) B_3(z) = \mu f_3(r) h_2(z) \\
& \Rightarrow b_{m-1} f_1(r) = C_3 f_3(r), \quad a_{m+1} f_2(r) = C_4 f_3(r), \\
& -f_3(r) \frac{d}{dz} h_0(z) - i\epsilon f_3(r) h_2(z) = \mu f_3(r) E_2(z), \\
& b_{m-1} f_1(r) h_1(z) + a_{m+1} f_2(r) h_3(z) = \mu f_3(r) B_2(z) \\
& \Rightarrow b_{m-1} f_1(r) = C_3 f_3(r), \quad a_{m+1} f_2(r) = C_4 f_3(r).
\end{aligned}$$

Thus, we get the following system

$$\begin{aligned}
& -C_1 h + C_1 B_2 - \frac{d}{dz} B_3 + i(\epsilon - Ez) E_1 = \mu h_1, \\
& C_1 h_0 - i(\epsilon - Ez) h_1 = \mu E_1, \quad -\frac{d}{dz} h_1 - C_1 h_2 = \mu B_3, \\
& C_2 h + C_2 B_2 + \frac{d}{dz} B_1 + i(\epsilon - Ez) E_3 = \mu h_3, \\
& -C_2 h_0 - i(\epsilon - Ez) h_3 = \mu E_3, \\
& -C_2 h_2 + \frac{d}{dz} h_3 = \mu B_1, \\
& -i(\epsilon - Ez) h_0 - \frac{d}{dz} h_2 + C_3 h_1 - C_3 h_3 = \mu h, \\
& -i(\epsilon - Ez) h - \frac{d}{dz} E_2 + C_3 E_1 - C_4 E_3 = \mu h_0, \\
& \frac{d}{dz} h + i(\epsilon - Ez) E_2 - C_4 B_1 - C_3 B_3 = \mu h_2, \\
& -\frac{d}{dz} h_0 - i(\epsilon - Ez) h_2 = \mu E_2, \quad C_3 h_1 + C_4 h_3 = \mu B_2,
\end{aligned}$$

and the constraints

$$\begin{aligned}
& b_{m-1} f_1(r) = C_3 f_3(r), \quad a_m f_3(r) = C_1 f_1(r), \\
& a_{m+1} f_2(r) = C_4 f_3(r), \quad b_m f_3(r) = C_2 f_2(r).
\end{aligned} \quad (15)$$

Eqs. (15) transform into equations for separate functions

$$\begin{aligned}
& b_{m-1} a_m f_3(r) = C_1 C_3 f_3(r), \\
& a_m b_{m-1} f_1(r) = C_1 C_3 f_1(r), \\
& a_{m+1} b_m f_3(r) = C_2 C_4 f_3(r), \\
& b_m a_{m+1} f_2(r) = C_2 C_4 f_2(r).
\end{aligned} \quad (16)$$

Evidently, within each pair we can assume  $C_3 = C_1, C_4 = C_2$ .

Therefore, the above differential conditions and the second-order equations take on the form

$$\begin{aligned}
& b_{m-1} f_1(r) = C_1 f_3(r), \quad a_m f_3(r) = C_1 f_1(r), \\
& a_{m+1} f_2(r) = C_2 f_3(r), \quad b_m f_3(r) = C_2 f_2(r);
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& [b_{m-1} a_m - C_1^2] f_3(r) = 0, \\
& [a_m b_{m-1} - C_1^2] f_1(r) = 0, \\
& f_3(r) = 0, \quad [b_m a_{m+1} - C_2^2] f_2(r) = 0.
\end{aligned} \quad (18)$$

Explicitly, Eqs. (18) are red as

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - C_1^2 \right) f_3(r) = 0, \\
& \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-1)^2}{r^2} - C_1^2 \right) f_1(r) = 0, \\
& \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - C_2^2 \right) f_3(r) = 0, \\
& \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2} - C_2^2 \right) f_2(r) = 0.
\end{aligned}$$

So we get the following constraint  $C_3^2 = C_2^2 = C_1^2 = C^2$ , and only three different equations

$$\begin{aligned}
& 1 \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-1)^2}{r^2} - C^2 \right) f_1(r) = 0, \\
& 2 \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2} - C^2 \right) f_2(r) = 0, \\
& 3 \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - C^2 \right) f_3(r) = 0.
\end{aligned} \quad (19)$$

They are solved in Bessel functions. More details on the parameter  $C^2$  are given later. The meaning of parameter  $C^2$  may be understood if we turn to the Klein-Fock-Gordon equation in cylindrical coordinates in presence of the uniform electric field

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d^2}{dz^2} + (\epsilon - Ez)^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - \mu^2 \right] \times \\
& \times e^{i\epsilon t} e^{im\phi} R(r) Z(z) = 0.
\end{aligned}$$

The variables are separated as follows

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + (\epsilon - Ez)^2 - \mu^2 + \lambda \right] Z(z) = 0,$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dz} - \frac{m^2}{r^2} - \lambda \right] R(r) = 0,$$

so  $C^2 = \lambda$  is the separation constant associated with the cylindrical coordinate system (see (19)).

#### 4. Solving the equations in the variable $z$

Below we will take into account the identities  $C_1 = C_2 = C_3 = C$ . We should solve the system of equations in the variable  $z$ :

$$\begin{aligned} -Ch + CB_2 - \frac{d}{dz}B_3 + i(\epsilon - Ez)E_1 &= \mu h_1, \\ Ch_0 - i(\epsilon - Ez)h_1 &= \mu E_1, \quad -\frac{d}{dz}h_1 - Ch_2 = \mu B_3, \\ Ch + CB_2 + \frac{d}{dz}B_1 + i(\epsilon - Ez)E_3 &= \mu h_3, \\ -Ch_0 - i(\epsilon - Ez)h_3 &= \mu E_3, \quad -Ch_2 + \frac{d}{dz}h_3 = \mu B_1, \\ -i(\epsilon - Ez)h_0 - \frac{d}{dz}h_2 + Ch_1 - Ch_3 &= \mu h, \quad (20) \\ -i(\epsilon - Ez)h - \frac{d}{dz}E_2 + CE_1 - CE_3 &= \mu h_0, \\ \frac{d}{dz}h + i(\epsilon - Ez)E_2 - CB_1 - CB_3 &= \mu h_2, \\ -\frac{d}{dz}h_0 - i(\epsilon - Ez)h_2 &= \mu E_2, \quad Ch_1 + Ch_3 = \mu B_2. \end{aligned}$$

First, we resolve the subsystem of 6 equations

$$\begin{aligned} -i(\epsilon - Ez)h - \frac{d}{dz}E_2 + CE_1 - CE_3 &= \mu h_0, \\ \frac{d}{dz}h + i(\epsilon - Ez)E_2 - CB_1 - CB_3 &= \mu h_2, \\ Ch_0 - i(\epsilon - Ez)h_1 &= \mu E_1, \\ -Ch_0 - i(\epsilon - Ez)h_3 &= \mu E_3, \quad (21) \\ -Ch_2 + \frac{d}{dz}h_3 &= \mu B_1, \quad -\frac{d}{dz}h_1 - Ch_2 = \mu B_3; \end{aligned}$$

as algebraic one with respect to the variables  $h_0, h_2, E_1, E_3, B_1, B_3$ . This results in (let  $d_z = \frac{d}{dz}$ )

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{d_z E_2 \mu - i(Ch_1 - Ch_3 + h\mu)(Ez - \epsilon)}{2C^2 - \mu^2}, \\ h_2 &= \frac{-d_z(Ch_1 - Ch_3 + h\mu) + iE_2 \mu(Ez - \epsilon)}{2C^2 - \mu^2}, \\ E_1 &= \frac{1}{2C^2 \mu - \mu^3} \left( Cd_z E_2 \mu + i(h_1(C - \mu)(C + \mu) + \right. \\ &\quad \left. + C(Ch_3 - h\mu))(Ez - \epsilon) \right), \quad (22) \\ E_3 &= \frac{1}{\mu^3 - 2C^2 \mu} \left( Cd_z E_2 \mu - i \left( C^2 h_1 + Ch\mu + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. + h_3(C - \mu)(C + \mu) \right) (Ez - \epsilon),$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\mu^3 - 2C^2 \mu} \left( -d_z \left( C^2 h_1 + Ch\mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h_3(C - \mu)(C + \mu) \right) + iCE_2 \mu(Ez - \epsilon) \right), \\ B_3 &= \frac{1}{\mu^3 - 2C^2 \mu} \left( d_z (h_1(C - \mu)(C + \mu) + \right. \\ &\quad \left. + C(Ch_3 - h\mu)) + iCE_2 \mu(Ez - \epsilon) \right). \end{aligned}$$

Now substitute these expressions into remaining 5 equations

$$\begin{aligned} -i(\epsilon - Ez)h_0 - \frac{d}{dz}h_2 + Ch_1 - Ch_3 &= \mu h, \\ -\frac{d}{dz}h_0 - i(\epsilon - Ez)h_2 &= \mu E_2, \\ Ch_1 + Ch_3 &= \mu B_2, \quad (23) \\ -Ch + CB_2 - \frac{d}{dz}B_3 + i(\epsilon - Ez)E_1 &= \mu h_1, \\ Ch + CB_2 + \frac{d}{dz}B_1 + i(\epsilon - Ez)E_3 &= \mu h_3. \end{aligned}$$

As a result, we obtain

$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{d_z^2 h \mu}{2C^2 - \mu^2} + \frac{Cd_z^2 h_1}{2C^2 - \mu^2} - \frac{Cd_z^2 h_3}{2C^2 - \mu^2} + \\ & + \mu \left( \frac{(\epsilon - Ez)^2}{2C^2 - \mu^2} - 1 \right) h + \left( \frac{C(\epsilon - Ez)^2}{2C^2 - \mu^2} + C \right) h_1 + \\ & + Ch_3 \left( \frac{(\epsilon - Ez)^2}{\mu^2 - 2C^2} - 1 \right) = 0; \\ 2 \quad & \frac{C^2 d_z^2 h_3}{2C^2 \mu - \mu^2} + \frac{d_z^2 h_1 (\mu^2 - C^2)}{\mu^3 - 2C^2 \mu} + \\ & + \frac{Cd_z^2 h}{\mu^2 - 2C^2} + B_2 C - \frac{C^2 h_3 (\epsilon - Ez)^2}{\mu^3 - 2C^2 \mu} + \\ & + \left( -\frac{(\mu^2 - C^2)(\epsilon - Ez)^2}{2C^2 \mu - \mu^3} - \mu \right) h_1 + \\ & + C \left( \frac{(\epsilon - Ez)^2}{\mu^2 - 2C^2} - 1 \right) h = 0; \\ 3 \quad & \frac{C^2 d_z^2 h_1}{2C^2 \mu - \mu^3} + \frac{d_z^2 h_3 (\mu^2 - C^2)}{\mu^3 - 2C^2 \mu} + \\ & + \frac{Cd_z^2 h}{2C^2 - \mu^2} + B_2 C + \frac{C^2 h_1 (\epsilon - Ez)^2}{2C^2 \mu - \mu^3} + \\ & + h_3 \left( -\frac{(\mu^2 - C^2)(\epsilon - Ez)^2}{2C^2 \mu - \mu^3} - \mu \right) + \\ & + \left( \frac{C(\epsilon - Ez)^2}{2C^2 - \mu^2} + C \right) h = 0; \\ 4 \quad & \left[ \frac{d^2}{dz^2} + (\epsilon - Ez)^2 - \mu^2 - 2C^2 \right] E_2 = 0; \\ 5 \quad & -\mu B_2 + Ch_1 + Ch_3 = 0. \end{aligned}$$

With the use of equation 5, from equations 2 and 3 we can eliminate the variable  $B_2$ . In this way we obtain the system of 3 equations for variables  $h, h_1, h_3$

$$\begin{aligned} 1 \quad & \mu^2(d_z^2 - 2C^2 + \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h + \\ & + C\mu(d_z^2 + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h_1 - \\ & - C\mu(d_z^2 + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h_3 = 0, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & C\mu(d_z^2 + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h + \\ & + (\mu^2 - C^2)(d_z^2 + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h_1 - \\ & - C^2(d_z^2 + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h_3 = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad & C\mu(d_z^2 + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h + \\ & + C^2(d_z^2 + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h_1 - \\ & - (\mu^2 - C^2)(d_z^2 + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h_3 = 0. \quad (26) \end{aligned}$$

The structure of these equations may be presented shortly as follows

$$\begin{aligned} 1 \quad & A_1 h'' + B_1 h + C_1 h_1'' + \\ & + D_1 h_1 + M_1 h_3'' + N_1 h_3 = 0, \\ 2 \quad & A_2 h'' + B_2 h + C_2 h_1'' + \\ & + D_2 h_1 + M_2 h_3'' + N_2 h_3 = 0, \\ 3 \quad & A_3 h'' + B_3 h + C_3 h_1'' + \\ & + D_3 h_1 + M_3 h_3'' + N_3 h_3 = 0. \quad (27) \end{aligned}$$

We will combine these equations in three different ways.

The first variant is

$$\begin{aligned} & (aA_1 + bA_2 + cA_3)^{-1} h'' + (aB_1 + bB_2 + cB_3)h + \\ & + (aC_1 + bC_2 + cC_3)^{-1} h_1'' + \\ & + (aD_1 + bD_2 + cD_3)h_1 + \\ & + (aM_1 + bM_2 + cM_3)^{-1} h_3'' + \\ & + (aN_1 + bN_2 + cN_3)h_3 = 0. \end{aligned}$$

This results in

$$\begin{aligned} h'' + (aB_1 + bB_2 + cB_3)h + (aD_1 + bD_2 + cD_3)h_1 + \\ + (aN_1 + bN_2 + cN_3)h_3 = 0, \end{aligned}$$

where  $a, b, c$  obey the linear system

$$\begin{aligned} aA_1 + bA_2 + cA_3 &= 1, \\ aC_1 + bC_2 + cC_3 &= 0, \\ aM_1 + bM_2 + cM_3 &= 0; \end{aligned} \quad (28)$$

its solution is

$$a = \frac{1}{\mu^2 - 2C^2}, \quad b = \frac{C}{2C^2\mu - \mu^3}, \quad c = \frac{C}{2C^2\mu - \mu^3}.$$

The second variant is

$$\begin{aligned} & (aA_1 + bA_2 + cA_3)^{-1} h'' + (aB_1 + bB_2 + cB_3)h + \\ & + (aC_1 + bC_2 + cC_3)^{-1} h_1'' + \\ & + (aD_1 + bD_2 + cD_3)h_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (aM_1 + bM_2 + cM_3)^{-1} h_3'' + \\ & + (aN_1 + bN_2 + cN_3)h_3 = 0. \end{aligned}$$

This results in

$$\begin{aligned} h_1'' + (aB_1 + bB_2 + cB_3)h + (aD_1 + bD_2 + cD_3)h_1 + \\ + (aN_1 + bN_2 + cN_3)h_3 = 0, \end{aligned}$$

where  $a, b, c$  obey the linear system

$$\begin{aligned} aA_1 + bA_2 + cA_3 &= 0, \\ aC_1 + bC_2 + cC_3 &= 1, \\ aM_1 + bM_2 + cM_3 &= 0; \end{aligned} \quad (29)$$

its solution is

$$a = \frac{C}{2C^2\mu - \mu^3}, \quad b = \frac{1}{\mu^2 - 2C^2}, \quad c = 0.$$

The third variant is

$$\begin{aligned} & (aA_1 + bA_2 + cA_3)^{-1} h'' + (aB_1 + bB_2 + cB_3)h + \\ & + (aC_1 + bC_2 + cC_3)^{-1} h_1'' + \\ & + (aD_1 + bD_2 + cD_3)h_1 + \\ & + (aM_1 + bM_2 + cM_3)^{-1} h_3'' + \\ & + (aN_1 + bN_2 + cN_3)h_3 = 0. \end{aligned}$$

This results in

$$\begin{aligned} h_3'' + (aB_1 + bB_2 + cB_3)h + (aD_1 + bD_2 + cD_3)h_1 + \\ + (aN_1 + bN_2 + cN_3)h_3 = 0, \end{aligned}$$

where  $a, b, c$  obey the linear system

$$\begin{aligned} aA_1 + bA_2 + cA_3 &= 0, \\ aC_1 + bC_2 + cC_3 &= 0, \\ aM_1 + bM_2 + cM_3 &= 1; \end{aligned} \quad (30)$$

its solution is

$$a = \frac{C}{\mu^3 - 2C^2\mu}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{2C^2 - \mu^2}.$$

So after this transformation we get three second-order separate equations

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} h + (2C^2 + \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} h_1 + (2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h_1 - 2Ch\mu &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} h_3 + (2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2)h_3 + 2Ch\mu &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Let us introduce new variables

$$H = h_1 + h_3, \quad G = h_1 - h_3. \quad (32)$$

Then instead of (31) we can obtain one separate equation

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2 \right] H = 0 \quad (33)$$

and one subsystem

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + 2C^2 + \mu^+ + (\epsilon - Ez)^2 \right] h = 0,$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + 2C^2 + \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2 \right] G -$$

$$-2\mu^2 G - 4\mu C h = 0.$$

The last subsystem can be presented in the matrix form

$$D \begin{pmatrix} h \\ G \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2C & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ G \end{pmatrix},$$

$$D\Psi = 2\mu A\Psi. \quad (34)$$

Let us find transformation which diagonalizes the mixing matrix  $A$

$$\bar{\Psi} = S\Psi, \quad D\bar{\Psi} = 2\mu(SAS^{-1})\bar{\Psi}, \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{h} \\ \bar{G} \end{pmatrix}.$$

For transformation matrix  $S$  we derive the following equations

$$SA = \bar{A}S, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2C & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix},$$

whence it follows

$$s_{12}2C = \lambda_1 s_{11}, \quad s_{12}\mu = \lambda_1 s_{12},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -2C \\ 0 & (\lambda_1 - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

$$s_{22}2C = \lambda_2 s_{21}, \quad s_{22}\mu = \lambda_2 s_{22},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & -2C \\ 0 & (\lambda_2 - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

The first row is specified by relations  $\lambda_1 = 0, s_{12} = 0, s_{11} = 1$ ; the second row is specified as  $\lambda_2 = \mu, s_{22} = 1, s_{21} = 2C/\mu$ . Thus, the needed transformation matrix  $S$  is

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2C}{\mu} & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2C}{\mu} & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Therefore, we derive three separate equations:

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + 2C^2 + \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2 \right] \bar{h} = 0, \quad (36)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2 \right] \bar{G} = 0, \quad (37)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2 \right] \bar{H} = 0, \quad (38)$$

where

$$\bar{h} = h, \quad \bar{H} = H = h_1 + h_3,$$

$$G = h_1 - h_3, \quad \bar{G} = \frac{2C}{\mu}h + h_1 - h_3.$$

Besides we should remember the existence of the fourth independent equation for the variable  $E_2$ :

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - 2C^2 - \mu^2 + (\epsilon - Ez)^2 \right] E_2 = 0. \quad (39)$$

So, in total, four independent types of solutions exist for Stueckelberg particle in the external uniform electric field, in contrast to the ordinary spin 1 particle described by the Daffin-Kemmer equation when only three independent solutions are possible. All four equations (36)–(39) have the same mathematical structure. In the papers [7, 8], solutions for equation of the form (39) were constructed in terms of the confluent hypergeometric functions.

The authors declare no conflict of interest.

## References

1. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E. C. G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312. – P. 312–328.
2. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
3. Ovsyuk, E. M. Chastisa Shtukelberga vo vneshnem magnitnom pole. Metod proektivnih operatorov [Stueckelberg particle in external magnetic field, and the method of projective operators] / E. M. Ovsyuk [et al.] // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. – 2022. – № 5 (57). – P. 69–78.
4. Ovsyuk, E. M. Stueckelberg particle in external magnetic field. Nonrelativistic approximation. Exact solutions / E. M. Ovsyuk, A. P. Safronov, A. V. Ivashkevich, O. A. Semenyuk // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. – 2022. – № 5 (57). – P. 79–88.
5. Ovsyuk, E. M. Stueckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E. M. Ovsyuk [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.
6. Gronskiy, V. K. Magnitnie svoystva chastisi so spinom 3/2 [Magnetic properties of a particle with spin 3/2] / V. K. Gronskiy, F. I. Fedorov // *Doklady Nacionalnoi akademii Belarusii [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus]*. – 1960. – Vol. 4, № 7. – P. 278–283.
7. Ivashkevich, A. V. Vector particle with anomalous magnetic moment in external uniform electric field / A. V. Ivashkevich, Ya. A. Voinova // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. – 2022. – № 5 (57). – P. 51–59.
8. Ivashkevich, A. V. Vector particle with anomalous magnetic and electric quadruple moments in presence of both uniform electric and magnetic fields / A. V. Ivashkevich // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2023. – Vol. 26, № 1. – P. 41–58.

## Литература

1. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E. C. G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312. – P. 312–328.
2. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
3. Овсиюк, Е. М. Частица Штюкельберга во внешнем магнитном поле. Метод проективных операторов / Е. М. Овсиюк, А. П. Сафронов, А. В. Ивашкевич, О. А. Семенюк // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 69–78.
4. Овсиюк, Е. М. Частица Штюкельберга во внешнем магнитном поле. Нерелятивистское приближение. Точные решения / Е. М. Овсиюк, А. П. Сафронов, А. В. Ивашкевич, О. А. Семенюк // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 79–88.
5. Ovsyuk, E. M. Stueckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E. M. Ovsyuk [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2022. – Vol. 25, № 4. – P. 387–404.
6. Гронский, В. К. Магнитные свойства частицы со спином  $3/2$ . / В. К. Гронский, Ф. И. Федоров // *Доклады Национальной Академии наук Беларуси.* – 1960. – Т. 4, № 7. – С. 278–283.
7. Ивашкевич, А. В. Векторная частица с аномальным магнитным моментом во внешнем однородном электрическом поле / А. В. Ивашкевич, Я. А. Воинова // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 51–59.
8. Ivashkevich, A. V. Vector particle with anomalous magnetic and electric quadruple moments in presence of both uniform electric and magnetic fields / A. V. Ivashkevich // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2023. – Vol. 26, № 1. – P. 41–58.

### Для цитирования:

Ивашкевич, А. В. Частица Штюкельберга в электрическом поле, решения с цилиндрической симметрией / А. В. Ивашкевич, П. О. Саченко, В. М. Редьков // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2024. – № 5 (71). – С. 38–45.

### For citation:

Ivashkevich, A. V. Stueckelberg particle in the uniform electric field, solutions with cylindrical symmetry / A. V. Ivashkevich, P. O. Sachenok, V. M. Red'kov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences".* – 2024. – № 5 (71). – P. 38–45.

Дата поступления рукописи: 08.04.2024

Received: 08.04.2024

## Нерелятивистское приближение в 39-компонентной теории для частицы со спином 2

А. В. Ивашкевич<sup>1</sup>, А. В. Бурый<sup>1</sup>, Е. М. Овсиюк<sup>2</sup>,  
В. В. Кисель<sup>3</sup>, В. М. Редков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физики имени Б. И. Степанова  
Национальной академии наук Беларуси,  
г. Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Мозырский государственный педагогический университет  
имени И. П. Шамякина,  
г. Мозырь, Беларусь

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет информатики и ра-  
диоэлектроники,  
г. Минск, Беларусь

ivashkevich.alina@yandex.by  
anton.buryy.97@mail.ru  
e.ovsiyuk@mail.ru  
vasiliy.bspu@mail.ru  
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

### Аннотация

Цель работы — исследование нерелятивистского приближения в 39-компонентной теории частицы со спином 2. Используется явный вид матриц  $\Gamma^a$  размерности  $39 \times 39$  основного уравнения, записанного в декартовых координатах и с учетом внешних электромагнитных полей. Для выделения в волновой функции больших и малых переменных с точки зрения нерелятивистского приближения используются проективные операторы, строящиеся на основе минимального полинома 7-й степени для матрицы  $\Gamma^0$ . Разбиение на большие и малые переменные проведено в явном виде, в каждой группе найдены независимые переменные, остальные выражены через них. В частности, среди больших переменных независимыми являются только 5. Выведено нерелятивистское уравнение для 5-компонентной волновой функции; в нем выделен член, описывающий взаимодействие магнитного момента частицы с внешним магнитным полем. Этот дополнительный член взаимодействия строится из проекций оператора спина и компонент внешнего магнитного поля.

### Ключевые слова:

спин 2, внешнее электромагнитное поле, нерелятивистское приближение, проективные операторы, уравнение Паули для частицы со спином 2, магнитный момент

### Введение

Известная теория Паули-Фирца [1, 2] для частицы со спином 2 основана на уравнениях второго порядка. Ф. И. Федоровым была развита эквивалентная теория на основе уравнений первого порядка. При этом использовалась 39-компонентная полевая функция [3], см. [4]. Позд-

## Nonrelativistic approximation in 39-component theory for a spin 2 particle

A. V. Ivashkevich<sup>1</sup>, A. V. Buryy<sup>1</sup>, E. M. Ovsiyuk<sup>2</sup>,  
V. V. Kisel<sup>3</sup>, V. M. Redkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics  
of the National Academy of Sciences of Belarus,  
Minsk, Belarus

<sup>2</sup>Mozyr State Pedagogical University  
named after I. P. Shamyakin,  
Mozyr, Belarus

<sup>3</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,  
Minsk, Belarus

ivashkevich.alina@yandex.by  
anton.buryy.97@mail.ru  
e.ovsiyuk@mail.ru  
vasiliy.bspu@mail.ru  
v.redkov@ifanbel.bas-net.by

### Abstract

The goal of the present paper is investigation of the nonrelativistic approximation in the 39-component theory for a spin 2 particle. We apply explicit expressions for four main matrices  $\Gamma^a$  with dimension  $39 \times 39$  in the relevant first-order system of equations, written in Cartesian coordinates and in presence of external electromagnetic fields. For distinguishing the large and small constituents in the complete wave function, we apply three projective operators constructed on the base of the minimal polynomial of the 7-th order for the matrix  $\Gamma^0$ . The relevant large and small components are found in explicit form. In each group, we have found independent variables; in particular, among the large components there exist only five independent ones. We have derived the nonrelativistic equation for 5-component wave function; it has the term describing interaction of the magnetic moment of the spin 2 particle with the external magnetic field we distinguished. This additional term is constructed by the projections of spin operator  $S_i$  and the components of the magnetic field  $B_i$ .

### Keywords:

spin 2, external electromagnetic field, nonrelativistic approximation, projective operators, Pauli like equation for the spin 2 particle, magnetic moment

нее им с соавторами была предложена более сложная 50-компонентная теория, которая описывает массивную частицу со спином 2, обладающую помимо электрического заряда аномальным магнитным моментом [5–14]. Цель настоящей работы — анализ нерелятивистского приближе-

ния в 39-компонентной теории частицы со спином 2. Следует отметить, что ранее этот вопрос уже исследовался [11]. Было выведено нерелятивистское уравнение для 6-компонентной волновой функции и показано, что связанные между собой шесть уравнений содержат только пять независимых. В работе [11] применялся метод обобщенных символов Кронекера и формализм элементов полной матричной алгебры, кроме того, использовалась *ict*-метрика Минковского. В настоящей работе этот вопрос исследован заново. При этом мы используем явный вид матриц  $\Gamma^a$  размерности  $39 \times 39$  основного уравнения, записанного в декартовых координатах. Для выделения в волновой функции больших и малых переменных используются проективные операторы, строящиеся на основе минимального полинома для матрицы  $\Gamma^0$ . Разбиение на большие и малые переменные проведено в явном виде, в каждой группе найдены независимые переменные, а остальные выражены через них. В частности, среди больших переменных независимыми являются только пять. После выполнения необходимых приближений получено нерелятивистское уравнение для 5-компонентной волновой функции; в нем выделен член, описывающий взаимодействие магнитного момента частицы с внешним магнитным полем. Этот дополнительный член взаимодействия строится из проекций оператора спина частицы со спином 2 и компонент внешнего магнитного поля.

## 1. Представление волновой функции

Уравнение Федорова [3] имеет в матричной форме следующий вид (используем обозначения из [12])

$$\left( \Gamma^a \frac{\partial}{\partial x^a} - m \right) \Psi(x) = 0.$$

Явные выражения для всех матриц см. в [13]. Компоненты полной волновой функции (скаляр; вектор; симметричный тензор; тензор 3-го ранга, антисимметричный по двум индексам), перечисляем так:

$$\begin{aligned} \Psi &= \{ \Phi; \Phi_l; f, c, d, f_0; \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \} = \\ &= \{ H; H_1; H_2; H_3 \}, \end{aligned}$$

$$H_3 = \Phi_{[mn]l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\Phi_{[01]l}, \Phi_{[02]l}, \Phi_{[03]l}, \Phi_{[23]l}, \Phi_{[31]l}, \Phi_{[12]l})^t \Rightarrow$$

$$(E_{1k}, E_{2k}, E_{3k}, B_{1k}, B_{2k}, B_{3k})^t = \varphi_k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

где  $^t$  обозначает транспонирование. Матрица  $\Gamma = \Gamma^0$  удовлетворяет минимальному уравнению  $\Gamma^7 - \Gamma^5 = 0$ . Это позволяет ввести три проективных оператора с необходимыми свойствами:

$$P_+ = \frac{1}{2} \Gamma^5 (\Gamma + I) = P_1, \quad P_- = \frac{1}{2} \Gamma^5 (\Gamma - I) = P_2,$$

$$P_0 = I - \Gamma^6 = P_3.$$

Находим явный вид этих трех операторов. Ввиду громоздкости эти выражения опускаем. Действуя проективными операторами на волновую функцию, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_+ &= \\ &= \left( 0, 0, 0, 0, 0, (2E_{11} - E_{22} - E_{33} + 2f_1 - f_2 - f_3)/6, \right. \\ &\quad (-E_{11} + 2E_{22} - E_{33} - f_1 + 2f_2 - f_3)/6, \\ &\quad (-E_{11} - E_{22} + 2E_{33} - f_1 - f_2 + 2f_3)/6, \\ &\quad (2c_1 + E_{23} + E_{32})/4, (2c_2 + E_{13} + E_{31})/4, \\ &\quad (2c_3 + E_{12} + E_{21})/4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ &\quad (2E_{11} - E_{22} - E_{33} + 2f_1 - f_2 - f_3)/6, \\ &\quad (2c_3 + E_{12} + E_{21})/4, (2c_2 + E_{13} + E_{31})/4, \\ &\quad 0, 0, 0, (2c_3 + E_{12} + E_{21})/4, \\ &\quad \left. (-E_{11} + 2E_{22} - E_{33} - f_1 + 2f_2 - f_3)/6, \right. \\ &\quad \left. (2c_1 + E_{23} + E_{12})/4, 0 \right)^t = \\ &= \left( 0, 0, 0, 0, 0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, 0, 0, 0, 0, 0, \right. \\ &\quad \left. 0, 0, 0, 0, 0, L_7, L_8, L_9, 0, 0, 0, L_{10}, L_{11}, L_{12}, 0 \right)^t, \\ \Psi_- &= \\ &= \left( 0, 0, 0, 0, 0, (-2E_{11} + E_{22} + E_{33} + 2f_1 - f_2 - f_3)/6, \right. \\ &\quad (E_{11} - 2E_{22} + E_{33} - f_1 + 2f_2 - f_3)/6, \\ &\quad (E_{11} + E_{22} - 2E_{33} - f_1 - f_2 + 2f_3)/6, \\ &\quad (2c_1 - E_{23} - E_{32})/4, (2c_2 - E_{13} - E_{31})/4, \\ &\quad (2c_3 - E_{12} - E_{21})/4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ &\quad (2E_{11} - E_{22} - E_{33} - 2f_1 + f_2 + f_3)/6, \\ &\quad (-2c_3 + E_{12} + E_{21})/4, (-2c_2 + E_{13} + E_{31})/4, \\ &\quad 0, 0, 0, (-2c_3 + E_{12} + E_{21})/4, \\ &\quad \left. (-E_{11} + 2E_{22} - E_{33} + f_1 - 2f_2 + f_3)/6, \right. \\ &\quad \left. (-2c_1 + E_{23} + E_{32})/4, 0 \right)^t = \\ &= \left( 0, 0, 0, 0, 0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, 0, 0, 0, 0, 0, \right. \\ &\quad \left. 0, 0, 0, 0, 0, S_7, S_8, S_9, 0, 0, 0, S_{10}, S_{11}, S_{12}, 0 \right)^t, \\ \Psi_0 &= \\ &= \left( \Phi, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, (f_1 + f_2 + f_3)/3, \right. \\ &\quad (f_1 + f_2 + f_3)/3, (f_1 + f_2 + f_3)/3, 0, 0, 0, \\ &\quad d_1, d_2, d_3, f_0, E_{10}, E_{20}, E_{30}, B_{10}, B_{20}, B_{30}, \\ &\quad (E_{11} + E_{22} + E_{33})/3, (E_{21} - E_{12})/2, \\ &\quad (E_{31} - E_{13})/2, B_{11}, B_{21}, B_{31}, \\ &\quad (E_{12} - E_{21})/2, (E_{11} + E_{22} + E_{33})/3, \\ &\quad \left. (E_{32} - E_{23})/2, B_{12} \right)^t = \end{aligned}$$

$$= \left( s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, 0, 0, 0, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, \right. \\ \left. s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, \right. \\ \left. s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}, s_{28} \right)^t.$$

Ищем независимые компоненты в каждой из трех групп переменных:

$$\Psi_+, \quad L_{10}, L_{11}, L_{13}, L_{14}, L_{15},$$

$$L_1 = -L_{11} - L_{15}, \quad L_2 = L_{11}, \quad L_3 = L_{15},$$

$$L_4 = L_{14}, \quad L_5 = L_{13}, \quad L_6 = L_{10}, \quad L_7 = -L_{11} - L_{15},$$

$$L_8 = L_{10}, \quad L_9 = L_{13}, \quad L_{12} = L_{14};$$

$$\Psi_-, \quad S_{10}, S_{11}, S_{13}, S_{14}, S_{15},$$

$$S_6 = -S_{10}, \quad S_7 = -S_{11} - S_{15}, \quad S_8 = S_{10},$$

$$S_9 = S_{13}, \quad S_{12} = S_{14};$$

$$\Psi_0, \quad s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13},$$

$$s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21},$$

$$s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{27}, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{34}, s_{35}, s_{36},$$

$$s_7 = s_6, \quad s_8 = s_6, \quad s_{25} = -s_{20}, \quad s_{26} = s_{19},$$

$$s_{31} = -s_{21}, \quad s_{32} = -s_{27}, \quad s_{33} = s_{19}.$$

## 2. Получение системы из 39 уравнений

Подставляем волновую функцию, выраженную через независимые большие и малые переменные, в исходное уравнение

$$(\Gamma^0 D_0 + \Gamma^1 D_1 + \Gamma^2 D_2 + \Gamma^3 D_3 - M) \Psi = 0,$$

$$D_a = (\partial_a + ieA_a). \quad (1)$$

В результате получаем систему из 39 уравнений в явном виде. Сразу же учитываем необходимость для получения нерелятивистских уравнений выделять энергию покоя. Это достигается формальной заменой (здесь  $M$  вещественный и положительный массовый параметр)

$$D_0 \Rightarrow (D_0 - iM), \quad M^* = M, \quad M > 0.$$

Важно, что при осуществлении этой формальной замены предполагается вещественность и положительность параметра массы. Ниже мы убедимся, что фактически входящий в уравнение (1) параметр  $M$  связан с физической массой  $\mu > 0$  соотношением  $M = -i\mu$ . Следовательно, в конце нужно будет сделать замену

$$-iM = -i(-i\mu) = -\mu, \quad \mu > 0. \quad (2)$$

Кроме того, при получении нерелятивистского приближения следует предполагать, что порядок малости величин следующий:

$$L : 1, \quad S : x, \quad s : x, \quad \frac{D_0}{M} D_i : x, \quad \frac{D_0}{M} D_i : x^2. \quad (3)$$

Это позволит в каждом уравнении различать большие и малые величины.

В явном виде находим 39 уравнений. Заменяем параметр  $M$  в крайних членах в каждом уравнении на  $\delta iM$ . Как становится ясным ниже из требования, чтобы не возникали условия связи на пять независимых больших переменных (см., например, анализ случаев 6–8), следует полагать  $\delta = -1$ . Пренебрегаем малыми компонентами  $S_i, s_i$  на фоне больших  $L_i$  и учитываем соотношения (3). Затем собираем в отдельные группы большие величины одного порядка:

$$1. \quad (D_0 - iM)s_2 - D_1 s_3 - D_2 s_4 - D_3 s_5 - \delta iM s_1 = 0,$$

$$x^1 : \quad i(s_1 - s_2) = 0, \quad \delta = -1, \quad s_2 - s_1 = 0;$$

$$2. \quad \frac{D_1 s_9}{3M} + \frac{D_2 s_{10}}{3M} + \frac{D_3 s_{11}}{3M} +$$

$$+ \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \left( \frac{s_1}{2} - \frac{s_{12}}{3} \right) - \delta i s_2 = 0,$$

$$x^1 : \quad -\frac{1}{6} i (6\delta s_2 + 3s_1 - 2s_{12}) = 0, \quad \delta = -1,$$

$$\frac{1}{2} s_1 - s_2 - \frac{1}{3} s_{12} = 0;$$

$$3. \quad D_1 \left( \frac{1}{3} (-L_{11} - L_{15} + s_6 + S_{11} + S_{15}) + \frac{s_1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} D_2 (L_{10} - S_{10}) + \frac{1}{3} D_3 (L_{13} - S_{13}) -$$

$$-\frac{1}{3} (D_0 - iM) s_9 - \delta i M s_3 = 0,$$

$$x^1 : \quad \frac{D_2 L_{10}}{3M} + \frac{D_3 L_{13}}{3M} - \frac{D_1 (L_{11} + L_{15})}{3M} +$$

$$+ \frac{1}{3} i (3s_1 + s_9) = 0;$$

$$4. \quad D_2 \left( \frac{1}{3} (L_{11} + s_6 - S_{11}) + \frac{s_1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} D_1 (L_{10} - S_{10}) + \frac{1}{3} D_3 (L_{14} - S_{14}) -$$

$$-\frac{1}{3} (D_0 - iM) s_{10} - \delta i M s_4 = 0,$$

$$x^1 : \quad \frac{D_1 L_{10}}{3M} + \frac{D_2 L_{11}}{3M} + \frac{D_3 L_{14}}{3M} +$$

$$+ \frac{1}{3} i (3s_4 + s_{10}) = 0;$$

$$5. \quad D_3 \left( \frac{1}{3} (L_{15} + s_6 - S_{15}) + \frac{s_1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} D_1 (L_{13} - S_{13}) + \frac{1}{3} D_2 (L_{14} - S_{14}) -$$

$$-\frac{1}{3} (D_0 - iM) s_{11} - \delta i M s_5 = 0,$$

$$x^1 : \quad \frac{D_1 L_{13}}{3M} + \frac{D_2 L_{14}}{3M} + \frac{D_3 L_{15}}{3M} +$$

$$+ \frac{1}{3} i (3s_5 + s_{11}) = 0;$$



$$\begin{aligned}
6. \quad & \left(\frac{D_0}{M} - i\right) \left(\frac{1}{4}(-L_{11} - L_{15} - 2s_{19} - S_{11} - S_{15}) + \right. \\
& \left. + \frac{3}{4}(-L_{11} - L_{15} + s_{19} - S_{11} - S_{15}) + \frac{s_2}{2}\right) + \\
& + \frac{D_3}{M} \left(-\frac{s_5}{2} + \frac{s_{15}}{4} - \frac{3s_{23}}{4} - \frac{s_{28}}{4}\right) + \\
& + \frac{D_2}{M} \left(-\frac{s_4}{2} + \frac{s_{14}}{4} + \frac{3s_{24}}{4} + \frac{s_{34}}{4}\right) + \\
& + \frac{D_1}{M} \left(\frac{3s_3}{2} + \frac{s_{13}}{4} + \frac{s_{30}}{4} - \frac{s_{35}}{4}\right) - \\
& - \delta i(-L_{11} - L_{15} + s_6 + S_{11} + S_{15}) = 0, \\
& x^0 : 0 = 0,
\end{aligned}$$

$$x^1 : -\frac{1}{4}i(2s_2 - 4s_6 + s_{19} - 8(S_{11} + S_{15})) = 0,$$

$$\begin{aligned}
x^2 : & -\frac{D_0}{M}(L_{11} + L_{15}) - \frac{D_3}{4M}(2s_5 - s_{15} + 3s_{23} + s_{28}) + \\
& + \frac{D_2}{4M}(-2s_4 + s_{14} + 3s_{24} + s_{34}) + \\
& + \frac{D_1}{4M}(6s_3 + s_{13} + s_{30} - s_{35}) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & \left(\frac{D_0}{M} - i\right) \left(\frac{1}{4}(L_{11} - 2s_{19} + S_{11}) + \right. \\
& \left. + \frac{3}{4}(L_{11} + s_{19} + S_{11}) + \frac{s_2}{2}\right) + \\
& + \frac{D_3}{M} \left(-\frac{s_5}{2} + \frac{s_{15}}{4} + \frac{s_{23}}{4} + \frac{3s_{28}}{4}\right) + \\
& + \frac{D_2}{M} \left(\frac{3s_4}{2} + \frac{s_{14}}{4} - \frac{s_{24}}{4} + \frac{s_{34}}{4}\right) + \\
& + \frac{D_1}{M} \left(-\frac{s_3}{2} + \frac{s_{13}}{4} - \frac{3s_{30}}{4} - \frac{s_{35}}{4}\right) - \\
& - \delta i(L_{11} + s_6 - S_{11}) = 0,
\end{aligned}$$

$$x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : -\frac{1}{4}i(2s_2 - 4s_6 + s_{19} + 8S_{11}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
x^2 : & \frac{D_0 L_{11}}{M} + \frac{D_3}{4M}(-2s_5 + s_{15} + s_{23} + 3s_{28}) + \\
& + \frac{D_2}{4M}(6s_4 + s_{14} - s_{24} + s_{34}) - \\
& - \frac{D_1}{4M}(2s_3 - s_{13} + 3s_{30} + s_{35}) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & \left(\frac{D_0}{M} - i\right) \left(\frac{1}{4}(L_{15} - 2s_{19} + S_{15}) + \right. \\
& \left. + \frac{3}{4}(L_{15} + s_{19} + S_{15}) + \frac{s_2}{2}\right) + \\
& + \frac{D_3}{M} \left(\frac{3s_5}{2} + \frac{s_{15}}{4} + \frac{s_{23}}{4} - \frac{s_{28}}{4}\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_2}{M} \left(-\frac{s_4}{2} + \frac{s_{14}}{4} - \frac{s_{24}}{4} - \frac{3s_{34}}{4}\right) + \\
& + \frac{D_1}{M} \left(-\frac{s_3}{2} + \frac{s_{13}}{4} + \frac{s_{30}}{4} + \frac{3s_{35}}{4}\right) - \\
& - \delta i(L_{15} + s_6 - S_{15}) = 0,
\end{aligned}$$

$$x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : -\frac{1}{4}i(2s_2 - 4s_6 + s_{19} + 8S_{15}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
x^2 : & \frac{D_0 L_{15}}{M} + \frac{D_3}{4M}(6s_5 + s_{15} + s_{23} - s_{28}) - \\
& - \frac{D_2}{4M}(2s_4 - s_{14} + s_{24} + 3s_{34}) + \\
& + \frac{D_1}{4M}(-2s_3 + s_{13} + s_{30} + 3s_{35}) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & \left(\frac{D_0}{M} - i\right) \left(\frac{1}{2}(L_{14} - s_{27} + S_{14}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(L_{14} + s_{27} + S_{14})\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_2}{M} \left(s_5 - \frac{s_{28}}{2}\right) + \frac{D_3}{M} \left(s_4 + \frac{s_{34}}{2}\right) + \\
& \frac{D_1}{M} \left(\frac{s_{29}}{2} - \frac{s_{36}}{2}\right) - \delta i(L_{14} - S_{14}) = 0,
\end{aligned}$$

$$x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : -2iS_{14} = 0,$$

$$\begin{aligned}
x^2 : & \frac{D_0 L_{14}}{M} - \frac{D_2}{2M}(s_{28} - 2s_5) + \\
& + \frac{D_3}{2M}(2s_4 + s_{34}) + \frac{D_1}{2M}(s_{29} - s_{36}) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & \left(\frac{D_0}{M} - i\right) \left(\frac{1}{2}(L_{13} - s_{21} + S_{13}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(L_{13} + s_{21} + S_{13})\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_1}{M} \left(s_5 + \frac{s_{23}}{2}\right) + \frac{D_3}{M} \left(s_3 - \frac{s_{35}}{2}\right) + \\
& + \frac{D_2}{M} \left(\frac{s_{36}}{2} - \frac{s_{22}}{2}\right) - \delta i(L_{13} - S_{34}) = 0,
\end{aligned}$$

$$x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : -2iS_{13} = 0,$$

$$\begin{aligned}
x^2 : & \frac{D_0 L_{13}}{M} + \frac{D_1}{2M}(2s_5 + s_{23}) - \\
& - \frac{D_3}{2M}(s_{35} - 2s_3) + \frac{D_2}{2M}(s_{36} - s_{22}) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad & \left(\frac{D_0}{M} - i\right) \left(\frac{1}{2}(L_{10} - s_{20} + S_{10}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(L_{10} + s_{20} + S_{10})\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_1}{M} \left(s_4 - \frac{s_{24}}{2}\right) + \frac{D_3}{M} \left(\frac{s_{22}}{2} - \frac{s_{29}}{2}\right) + \\
& + \frac{D_2}{M} \left(s_3 + \frac{s_{30}}{2}\right) - \delta i(L_{10} - S_{10}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : -2iS_{10} = 0, \\
& x^2 : \frac{D_0 L_{10}}{M} - \frac{D_1}{2M}(s_{24} - 2s_4) + \\
& + \frac{D_3}{2M}(s_{22} - s_{29}) + \frac{D_2}{2M}(2s_3 + s_{30}) = 0; \\
12. & \frac{D_2}{M} \left( \frac{1}{2}(L_{10} + s_{20} + S_{10}) + \frac{s_{18}}{2} \right) + \\
& + \frac{D_3}{M} \left( \frac{1}{2}(L_{13} + s_{21} + S_{13}) - \frac{s_{17}}{2} \right) + \\
& + \frac{D_1}{M} \left( \frac{1}{2}(-L_{11} - L_{15} + s_{19} - S_{11} - S_{15}) + s_2 \right) + \\
& + \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \left( s_3 + \frac{s_{13}}{2} \right) - \delta i s_9 = 0, \\
x^1 : & \frac{D_2 L_{10}}{2M} + \frac{D_3 L_{13}}{2M} - \frac{D_1(L_{11} + L_{15})}{2M} - \\
& - \frac{1}{2}i(2s_3 - 2s_9 + s_{13}) = 0; \\
13. & \frac{D_1}{M} \left( \frac{1}{2}(L_{10} - s_{20} + S_{10}) - \frac{s_{18}}{2} \right) + \\
& + \frac{D_2}{M} \left( \frac{1}{2}(L_{11} + s_{19} + S_{11}) + s_2 \right) + \\
& + \frac{D_3}{M} \left( \frac{1}{2}(L_{14} + s_{27} + S_{14}) + \frac{s_{16}}{2} \right) + \\
& + \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \left( s_4 + \frac{s_{14}}{2} \right) - \delta i s_{10} = 0, \\
x^1 : & \frac{D_1 L_{10}}{2M} + \frac{D_2 L_{11}}{2M} + \frac{D_3 L_{14}}{2M} - \\
& - \frac{1}{2}i(2s_4 - 2s_{10} + s_{14}) = 0; \\
14. & \frac{D_1}{M} \left( \frac{1}{2}(L_{13} - s_{21} + S_{13}) + \frac{s_{17}}{2} \right) + \\
& + \frac{D_2}{M} \left( \frac{1}{2}(L_{14} - s_{27} + S_{14}) - \frac{s_{16}}{2} \right) + \\
& + \frac{D_3}{M} \left( \frac{1}{2}(L_{15} + s_{19} + S_{15}) + s_2 \right) + \\
& + \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \left( s_5 + \frac{s_{15}}{2} \right) - \delta i s_{11} = 0, \\
x^1 : & \frac{D_1 L_{13}}{2M} + \frac{D_2 L_{14}}{2M} + \frac{D_3 L_{15}}{2M} - \\
& - \frac{1}{2}i(2s_5 - 2s_{11} + s_{15}) = 0; \\
15. & \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \left( \frac{1}{4}(L_{11} + s_{19} + S_{11}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4}(-L_{11} - L_{15} + s_{19} - S_{11} - S_{15}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{1}{4}(L_{15} + s_{19} + S_{15}) + \frac{3s_2}{2} \right) + \\
& + \frac{D_3}{M} \left( \frac{s_5}{2} + \frac{3s_{15}}{4} - \frac{s_{23}}{4} + \frac{s_{28}}{4} \right) + \\
& + \frac{D_2}{M} \left( \frac{s_4}{2} + \frac{3s_{14}}{4} + \frac{s_{24}}{4} - \frac{s_{34}}{4} \right) + \\
& + \frac{D_1}{M} \left( \frac{s_3}{2} + \frac{3s_{13}}{4} - \frac{s_{30}}{4} + \frac{s_{35}}{4} \right) - \delta i s_{12} = 0, \\
x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : & -\frac{1}{4}i(6s_2 - 4s_{12} + 3s_{19}) = 0, \\
x^2 : & \frac{D_3}{4M}(2s_5 + 3s_{15} - s_{23} + s_{28}) + \\
& + \frac{D_2}{4M}(2s_4 + 3s_{14} + s_{24} - s_{34}) + \\
& + \frac{D_1}{4M}(2s_3 + 3s_{13} - s_{30} + s_{35}) = 0; \\
16. & \frac{D_1}{M} \left( \frac{1}{3}(-L_{11} - L_{15} + s_6 + S_{11} + S_{15}) - s_{12} \right) + \\
& + \frac{D_2}{3M}(L_{10} - S_{10}) + \frac{D_3}{3M}(L_{13} - S_{13}) + \\
& + \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \frac{2s_9}{3} - \delta i s_{13} = 0, \\
x^1 : & \frac{D_2 L_{10}}{3M} + \frac{D_3 L_{13}}{3M} - \frac{D_1 L_{11} + (L_{15})}{3M} - \\
& - \frac{2}{3}i s_9 + i s_{13} = 0; \\
17. & \frac{D_2}{M} \left( \frac{1}{3}(L_{11} + s_6 - S_{11}) - s_{12} \right) + \\
& + \frac{D_1}{3M}(L_{10} - S_{10}) + \frac{D_3}{3M}(L_{14} - S_{14}) + \\
& + \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \frac{2s_{11}}{3} - \delta i s_{14} = 0, \\
x^1 : & \frac{D_1 L_{10}}{3M} + \frac{D_2 L_{11}}{3M} + \frac{D_3 L_{14}}{3M} - \\
& - \frac{2}{3}i s_{10} + i s_{14} = 0; \\
18. & \frac{D_3}{M} \left( \frac{1}{3}(L_{15} + s_6 - S_{15}) - s_{12} \right) + \\
& + \frac{D_1}{3M}(L_{13} - S_{13}) + \frac{D_2}{3M}(L_{14} - S_{14}) + \\
& + \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \frac{2s_{11}}{3} - \delta i s_{15} = 0, \\
x^1 : & \frac{D_1 L_{13}}{3M} + \frac{D_2 L_{14}}{3M} + \frac{D_3 L_{15}}{3M} - \\
& - \frac{2}{3}i s_{11} + i s_{15} = 0; \\
19. & -D_3 s_{10} + D_2 s_{11} - \delta i M s_{16} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^1 : is_{16} = 0, \quad x^2 : \frac{D_2 s_{11}}{M} - \frac{D_3 s_{10}}{M} = 0; \\
\mathbf{20.} \quad & -D_3 s_9 - D_1 s_{11} - \delta i M s_{17} = 0, \quad x^1 : is_{17} = 0; \\
\mathbf{21.} \quad & -D_2 s_9 + D_1 s_{19} - \delta i M s_{18} = 0, \quad x^1 : is_{18} = 0; \\
\mathbf{22.} \quad & \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \left( -L_{11} - L_{15} + s_6 - \frac{s_{12}}{3} + S_{11} + S_{15} \right) - \\
& -\frac{2D_1 s_9}{3M} + \frac{D_2 s_{10}}{3M} + \frac{D_3 s_{11}}{3M} - \\
& -\delta i (-L_{11} - L_{15} + s_{19} - S_{11} - S_{15}) = 0, \\
& \quad x^0 : 0 = 0, \\
& x^1 : -\frac{1}{3} i (3s_6 - s_{12} - 3s_{19} + 6(S_{11} + S_{15})) = 0, \\
& x^2 : -\frac{D_0(L_{11} + L_{15})}{M} - \frac{2D_1 s_9}{3M} + \frac{D_2 s_{10}}{3M} + \frac{D_3 s_{11}}{3M} = 0; \\
\mathbf{23.} \quad & \left( \frac{D_0}{M} - i \right) (L_{10} - S_{10}) - \frac{D_2 s_9}{3M} - \\
& -\delta i (L_{10} + s_{20} + S_{10}) = 0, \\
& x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : i(s_{20} + 2S_{10}) = 0, \\
& x^2 : \frac{D_0 L_{10}}{M} - \frac{D_2 s_9}{M} = 0; \\
\mathbf{24.} \quad & \left( \frac{D_0}{M} - i \right) (L_{13} - S_{13}) - \frac{D_3 s_9}{M} - \\
& -\delta i (L_{13} + s_{21} + S_{13}) = 0, \\
& x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : i(s_{21} + 2S_{13}) = 0, \\
& x^2 : \frac{D_0 L_{13}}{M} - \frac{D_3 s_9}{M} = 0; \\
\mathbf{25.} \quad & \frac{D_3}{M} (L_{10} - S_{10}) + \frac{D_2}{M} (L_{13} - S_{13}) - \delta i s_{22} = 0, \\
& \delta = -1, \quad x^1 : -\frac{D_3 L_{10}}{M} + \frac{D_2 L_{13}}{M} + i s_{22} = 0; \\
\mathbf{26.} \quad & \frac{D_3}{M} \left( \frac{1}{3} (L_{15} + s_6 - S_{15}) - L_{11} - L_{15} + \right. \\
& \left. + s_6 + S_{11} + S_{15} \right) - \frac{2}{3M} D_1 (L_{13} - S_{13}) + \\
& + \frac{1}{3M} D_2 (L_{14} - S_{14}) - \frac{1}{3M} (D_0 - iM) s_{11} - \delta i s_{23} = 0, \\
& x^1 : -\frac{2D_1 L_{13}}{3M} + \frac{D_2 L_{14}}{3M} - \frac{D_3 (3L_{11} + 2L_{15})}{3M} + \\
& + \frac{1}{3} i (s_{11} + 3s_{23}) = 0; \\
\mathbf{27.} \quad & \frac{D_2}{3} M (2L_{11} + 3L_{15} - 4s_6 - 2S_{11} - 3S_{15}) + \\
& + \frac{2D_1}{3M} (L_{10} - S_{10}) + \frac{D_3}{3M} (S_{14} - L_{14}) + \\
& + \frac{(D_0 - iM) s_{10}}{3M} + i s_{24} = 0, \quad \delta = -1, \\
& x^1 : \frac{2D_1 L_{10}}{3M} - \frac{D_3 L_{14}}{3M} + \frac{D_2 (2L_{11} + 3L_{15})}{3M} - \\
& -\frac{1}{3} i (s_{10} - 3s_{24}) = 0; \\
\mathbf{28.} \quad & \left( \frac{D_0}{M} - i \right) (L_{10} - S_{10}) - \frac{D_1 s_{10}}{3M} - \\
& -\delta i (L_{10} - s_{20} + S_{10}) = 0, \\
& x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : -i(s_{20} - 2S_{10}) = 0, \\
& x^2 : \frac{D_0 L_{10}}{M} - \frac{D_1 s_{10}}{M} = 0; \\
\mathbf{29.} \quad & \left( \frac{D_0}{M} - i \right) \left( L_{11} + s_6 - \frac{s_{12}}{3} - S_{11} \right) + \\
& + \frac{D_1 s_9}{3M} - \frac{2D_2 s_{10}}{3M} + \frac{D_3 s_{11}}{3M} - \\
& -\delta i (L_{11} + s_{19} + S_{11}) = 0, \\
& \quad x^0 : 0 = 0, \\
& x^1 : -\frac{1}{3} i (-3(s_{19} + 2S_{11}) + 3s_6 - s_{12}) = 0, \\
& x^2 : \frac{D_0 L_{11}}{M} + \frac{D_1 s_9}{3M} - \frac{2D_2 s_{10}}{3M} + \frac{D_3 s_{11}}{3M} = 0; \\
\mathbf{30.} \quad & \left( \frac{D_0}{M} - i \right) (L_{14} - S_{14}) - \frac{D_3 s_{10}}{M} - \\
& -\delta i (L_{14} + s_{27} + S_{14}) = 0, \quad x^0 : 0 = 0, \\
& x^1 : i(s_{27} + 2S_{14}) = 0, \quad x^2 : \frac{D_0 L_{14}}{M} - \frac{D_3 s_{10}}{M} = 0; \\
\mathbf{31.} \quad & \frac{D_3}{3M} (-3L_{11} - L_{15} - 4s_6 + 3S_{11} + S_{15}) + \\
& + \frac{D_1}{3M} (S_{13} - L_{13}) + \frac{2D_2}{3M} (L_{14} - S_{14}) + \\
& + \frac{(D_0 - iM) s_{11}}{3M} - \delta i s_{28} = 0, \\
& x^1 : -\frac{D_1 L_{13}}{3M} + \frac{2D_2 L_{14}}{3M} - \frac{D_3 (3L_{11} + L_{15})}{3M} - \\
& -\frac{1}{3} i (s_{11} - 3s_{28}) = 0; \\
\mathbf{32.} \quad & \frac{D_3}{M} (L_{10} - S_{10}) + \frac{D_1}{M} (S_{14} - L_{14}) - \delta i s_{29} = 0, \\
& \delta = -1, \quad x^1 : \frac{D_3 L_{10}}{M} - \frac{D_1 L_{14}}{3M} + i s_{29} = 0; \\
\mathbf{33.} \quad & \frac{D_1}{M} \left( \frac{1}{3} (-L_{11} - L_{15} + s_6 + S_{11} + S_{15}) + \right. \\
& \left. + L_{11} + s_6 - S_{11} \right) - \frac{2D_2}{3M} (L_{10} - S_{10}) + \frac{D_3}{3M} (L_{13} - S_{13}) - \\
& - \frac{(D_0 - iM) s_9}{3M} - \delta i s_{30} = 0, \\
& x^1 : -\frac{2D_2 L_{10}}{3M} + \frac{D_3 L_{13}}{3M} - \frac{D_1 (L_{15} - 2L_{11})}{3M} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}i(s_9 + 3s_{30}) = 0;$$

$$34. \left(\frac{D_0}{M} - i\right)(L_{13} - S_{13}) - \frac{D_1 s_{11}}{M} -$$

$$-\delta i(L_{13} - s_{21} + S_{13}) = 0, \quad x^0 : 0 = 0,$$

$$x^1 : -i(s_{21} - 2S_{13}) = 0, \quad x^2 : \frac{D_0 L_{13}}{M} - \frac{D_1 s_{11}}{M} = 0;$$

$$35. \left(\frac{D_0}{M} - i\right)(L_{14} - S_{14}) - \frac{D_2 s_{11}}{M} -$$

$$-\delta i(L_{14} - s_{27} + S_{14}) = 0, \quad x^0 : 0 = 0,$$

$$x^1 : -i(s_{27} - 2S_{14}) = 0, \quad x^2 : \frac{D_0 L_{14}}{M} - \frac{D_2 s_{11}}{M} = 0;$$

$$36. \left(\frac{D_0}{M} - i\right)(L_{15} + s_6 - \frac{s_{12}}{3} - S_{15}) + \frac{D_1 s_9}{3M} +$$

$$+\frac{D_2 s_{10}}{3M} - \frac{2D_3 s_{11}}{3M} - \delta i(L_{15} + s_{19} + S_{15}) = 0,$$

$$x^0 : 0 = 0, \quad x^1 : -\frac{1}{3}i(-3(s_{19} + 2S_{15}) + 3s_6 - s_{12}) = 0,$$

$$x^2 : \frac{D_0 L_{15}}{M} + \frac{D_1 s_9}{3M} + \frac{D_2 s_{10}}{3M} - \frac{2D_3 s_{11}}{3M} = 0;$$

$$37. \frac{D_2}{M} \left(\frac{1}{3}(L_{11} + s_6 - S_{11}) + L_{15} + s_6 - S_{15}\right) +$$

$$+\frac{D_1}{3M}(L_{10} - S_{10}) - \frac{2D_3}{3M}(L_{14} - S_{14}) -$$

$$-\frac{(D_0 - iM)s_{10}}{3M} - \delta i s_{34} = 0,$$

$$x^1 : \frac{D_1 L_{10}}{3M} - \frac{2D_3 L_{14}}{3M} + \frac{D_2(L_{11} + 3L_{15})}{3M} +$$

$$+\frac{1}{3}i(s_{10} + 3s_{34}) = 0;$$

$$38. \frac{D_1}{M}(L_{11} - 2L_{15} - 4s_6 - S_{11} + 2S_{15}) +$$

$$+\frac{D_2}{3M}(L_{10} - S_{10}) + \frac{2D_3}{3M}(L_{13} - S_{13}) +$$

$$+\frac{(D_0 - iM)s_9}{3M} - \delta i s_{35} = 0,$$

$$x^1 : -\frac{D_2 L_{10}}{3M} + \frac{2D_3 L_{13}}{3M} + \frac{D_1(L_{11} - 2L_{15})}{3M} -$$

$$-\frac{1}{3}i(s_9 - 3s_{35}) = 0;$$

$$39. \frac{D_2}{M}(S_{13} - L_{13}) + \frac{D_1}{3M}(L_{14} - S_{14}) - \delta i s_{36} = 0,$$

$$x^1 : -\frac{D_2 L_{13}}{M} + \frac{D_1 L_{14}}{M} + i s_{36} = 0.$$

### 3. Исключение малых компонент

Эти уравнения можно распределить в три группы: в группу *I* собираем линейные связи между малыми переменными, в группу *II* – уравнения, позволяющие выразить малые переменные через большие с использованием операторов  $D_1, D_2, D_3$ , в группу *III* – уравнения, содержащие оператор  $D_0$ . Для получения уравнений с нерелятивистской структурой достаточно воспользоваться только уравнениями из групп *II* и *III*. Решаем систему уравнений из группы *II* относительно малых переменных, в результате получаем

$$s_3 = 0, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 0,$$

$$s_9 = \frac{i}{M}(D_2 L_{10} + D_3 L_{13} - D_1(L_{11} + L_{15})) = s_{13},$$

$$s_{10} = \frac{i}{M}(D_1 L_{10} + D_2 L_{11} + D_3 L_{14}) = s_{14},$$

$$s_{11} = \frac{i}{M}(D_1 L_{13} + D_2 L_{14} + D_3 L_{15}) = s_{15},$$

$$s_{22} = \frac{i}{M}(D_2 L_{13} - D_3 L_{10}),$$

$$s_{23} = -\frac{i}{M}(D_1 L_{13} + D_3(L_{11} + L_{15})),$$

$$s_{24} = \frac{i}{M}(D_1 L_{10} + D_2(L_{11} + L_{15})),$$

$$s_{28} = \frac{i}{M}(D_2 L_{14} - D_3 L_{11}),$$

$$s_{29} = \frac{i}{M}(D_3 L_{10} - D_1 L_{14}),$$

$$s_{30} = \frac{i}{M}(D_1 L_{11} - D_2 L_{10}),$$

$$s_{34} = \frac{i}{M}(D_2 L_{15} - D_3 L_{14}),$$

$$s_{35} = \frac{i}{M}(D_3 L_{13} - D_1 L_{15}),$$

$$s_{36} = \frac{i}{M}(D_1 L_{14} - D_2 L_{13}).$$

Подставляем эти выражения для малых переменных в уравнения из группы *III*. В получающихся уравнениях группируем слагаемые по большим переменным. В результате получаем 15 уравнений с необходимой нерелятивистской структурой. Для дальнейшего их удобно пронумеровать, также вводим более короткие обозначения

$$L_{10} = L_1, \quad L_{11} = L_2, \quad L_{13} = L_3, \quad L_{14} = L_4, \quad L_{15} = L_5$$

и выделяем в уравнениях члены с производной  $D_0$ :

$$1. \quad iD_2 D_1 L_1 + iD_2 D_2 L_2 + iD_3 D_3 L_2 + iD_3 D_1 L_3 + \\ + iD_2 D_2 L_5 + iD_3 D_3 L_5 - D_0 L_2 M - D_0 L_5 M = 0,$$

$$2. \quad iD_1 D_2 L_1 - iD_1 D_1 L_2 - iD_3 D_3 L_2 + \\ + iD_3 D_2 L_4 + D_0 L_2 M = 0,$$

$$3. \quad iD_1D_3L_3 + iD_2D_3L_4 - iD_1D_1L_3 - \\ - iD_2D_2L_3 + D_0L_5M = 0,$$

$$4. \quad \frac{1}{2}iD_1D_3L_4 + \frac{1}{2}iD_2D_3L_2 + \frac{1}{2}iD_1D_2L_3 - iD_1D_1L_4 - \\ - \frac{1}{2}iD_2D_2L_4 - \frac{1}{2}iD_3D_3L_4 + \frac{1}{2}iD_3D_2L_5 + D_0L_4M = 0,$$

$$5. \quad \frac{1}{2}iD_2D_3L_1 - \frac{1}{2}iD_1D_3L_2 - \frac{1}{2}iD_1D_1L_3 - iD_2D_2L_3 - \\ - \frac{1}{2}iD_3D_3L_3 + \frac{1}{2}iD_2D_1L_4 + \frac{1}{2}iD_3D_1L_5 - \\ - \frac{1}{2}iD_1D_3L_5 + D_0L_3M = 0,$$

$$6. \quad -\frac{1}{2}iD_1D_1L_1 - \frac{1}{2}iD_2D_2L_1 - iD_3D_3L_1 + \frac{1}{2}iD_2D_1L_2 - \\ - \frac{1}{2}iD_1D_2L_2 + \frac{1}{2}iD_3D_2L_3 + \frac{1}{2}iD_3D_1L_4 - \\ - \frac{1}{2}iD_1D_2L_5 + D_0L_1M = 0,$$

$$7. \quad \frac{1}{3}iD_2D_1L_1 - \frac{2}{3}iD_1D_2L_1 + \frac{2}{3}iD_1D_1L_2 + \frac{1}{3}iD_2D_2L_2 + \\ + \frac{1}{3}iD_3D_1L_3 - \frac{2}{3}iD_1D_3L_3 + \frac{1}{3}iD_3D_2L_4 + \frac{1}{3}iD_2D_3L_4 + \\ + \frac{2}{3}iD_1D_1L_5 + \frac{1}{3}iD_3D_3L_5 - D_0L_2M - D_0L_5M = 0,$$

$$8. \quad -iD_2D_2L_1 + iD_2D_1L_2 - iD_2D_3L_3 + \\ + iD_2D_1L_5 + D_0L_1M = 0,$$

$$9. \quad -iD_3D_2L_1 + iD_3D_1L_2 - iD_3D_3L_3 + \\ + iD_3D_1L_5 + D_0L_3M = 0,$$

$$10. \quad -iD_1D_1L_1 - iD_1D_2L_2 - iD_1D_3L_4 + D_0L_1M = 0,$$

$$11. \quad -\frac{2}{3}iD_2D_1L_1 + \frac{1}{3}iD_1D_2L_1 - \frac{1}{3}iD_1D_1L_2 - \\ - \frac{2}{3}iD_2D_2L_2 + \frac{1}{3}iD_3D_1L_3 + \frac{1}{3}iD_1D_3L_3 + \frac{1}{3}iD_3D_2L_4 - \\ - \frac{2}{3}iD_2D_3L_4 - \frac{1}{3}iD_1D_1L_5 + \frac{1}{3}iD_3D_3L_5 + D_0L_2M = 0,$$

$$12. \quad -iD_3D_1L_1 - iD_3D_2L_2 - iD_3D_3L_4 + D_0L_4M = 0,$$

$$13. \quad -iD_1D_1L_3 - iD_1D_2L_4 - iD_1D_3L_5 + D_0L_3M = 0,$$

$$14. \quad -iD_2D_1L_3 - iD_2D_2L_4 - iD_2D_3L_5 + D_0L_4M = 0,$$

$$15. \quad \frac{1}{3}iD_2D_1L_1 + \frac{1}{3}iD_1D_2L_1 - \frac{1}{3}iD_1D_1L_2 + \\ + \frac{1}{3}iD_2D_2L_2 - \frac{2}{3}iD_3D_1L_3 + \frac{1}{3}iD_1D_3L_3 - \frac{2}{3}iD_3D_2L_4 + \\ + \frac{1}{3}iD_2D_3L_4 - \frac{1}{3}iD_1D_1L_5 - \frac{2}{3}iD_3D_3L_5 + D_0L_5M = 0.$$

Далее преобразуем все уравнения с учетом тождеств

$$D_iD_j = \frac{1}{2}(D_iD_j + D_jD_i) + \frac{1}{2}(D_iD_j - D_jD_i) =$$

$$= \frac{1}{2}(D_iD_j + D_jD_i) + ieF_{ij} = D_{ij} + ieF_{ij}.$$

Тогда возникнут уравнения, составленные из величин

$$2iMD_0L_k, \quad D_{(11)} = D_1^2L_k, \quad D_{(22)} = D_2^2L_k,$$

$$D_{(33)} = D_3^2L_k, \quad D_{(23)}L_k, \quad D_{(32)}L_k, \quad D_{(12)}L_k,$$

$$F_{(23)}L_k, \quad F_{(31)}L_k, \quad F_{(12)}L_k.$$

Будем комбинировать эти уравнения, как указано ниже.

Сначала получаем пять уравнений с нужной структурой

$$10, \quad 2iD_0L_1M + 2D_{11}L_1 + 2D_{12}L_2 + 2D_{31}L_4 +$$

$$+ 2ieF_{12}L_2 - 2ieF_{31}L_4 = 0,$$

$$2 + 10, \quad 2iD_0L_2M - \frac{2D_{12}L_1}{3} + \frac{4D_{11}L_2}{3} + \frac{2D_{22}L_2}{3} +$$

$$+ D_{33}L_2 - \frac{2D_{31}L_3}{3} - \frac{2D_{23}L_4}{3} + \frac{D_{11}L_5}{3} - \frac{D_{33}L_5}{3} -$$

$$- 2ieF_{12}L_1 + 2ieF_{23}L_4 = 0,$$

$$13, \quad 2iD_0L_3M + 2D_{11}L_3 + 2D_{12}L_4 + 2D_{31}L_5 +$$

$$+ 2ieF_{12}L_4 - 2ieF_{31}L_5 = 0,$$

$$14, \quad 2iD_0L_4M + 2D_{12}L_3 + 2D_{22}L_4 + 2D_{23}L_5 -$$

$$- 2ieF_{12}L_3 + 2ieF_{23}L_5 = 0,$$

$$3, \quad 2iD_0L_5M - 2D_{31}L_3 - 2D_{23}L_4 + 2D_{11}L_5 +$$

$$+ 2D_{22}L_5 + 2ieF_{31}L_3 - 2ieF_{23}L_4 = 0. \quad (4)$$

#### 4. Уравнения связи

Потом получаем уравнения связи (около каждого уравнения указан способ его получения)  $(1 + 7) + (2 + 11) + 2 \cdot (3)$

$$-\frac{8D_{12}L_2}{3} + \frac{4D_{11}L_2}{3} - \frac{4D_{22}L_2}{3} - \frac{20D_{23}L_4}{3} + \frac{10D_{11}L_5}{3} + 2D_{22}L_5 - \frac{10D_{33}L_5}{3} = 0,$$

1 – 7

$$-\frac{8D_{12}L_2}{3} + \frac{4D_{11}L_2}{3} - \frac{4D_{22}L_2}{3} - 2D_{33}L_2 - \frac{8D_{31}L_3}{3} + \frac{4D_{23}L_4}{3} + \frac{4D_{11}L_3}{3} - 2D_{22}L_5 - \frac{4D_{33}L_5}{3} = 0,$$

6 – 10

$$-D_{11}L_1 + D_{22}L_1 + 2D_{33}L_1 - 2D_{12}L_2 - D_{23}L_3 - D_{31}L_4 + D_{12}L_5 + ieF_{23}L_3 + ieF_{31}L_4 + ieF_{12}L_5 = 0,$$

8 – 10

$$-D_{11}L_1 + 2D_{22}L_1 - 4D_{12}L_2 + 2D_{23}L_3 - 2D_{31}L_4 - 2D_{12}L_5 + 2ieF_{23}L_3 + 2ieF_{31}L_4 + 2ieF_{12}L_5 = 0,$$

2 – 11

$$-\frac{8D_{12}L_1}{3} + \frac{4D_{11}L_2}{3} - \frac{4D_{22}L_2}{3} + 2D_{33}L_2 + \frac{4D_{31}L_3}{3} - \frac{8D_{23}L_4}{3} - \frac{2D_{11}L_5}{3} + 2D_{33}L_5 = 0,$$

5 – 13

$$-D_{23}L_1 + D_{31}L_2 - D_{11}L_3 + 2D_{22}L_3 + D_{33}L_3 - 3D_{12}L_4 - 2D_{31}L_5 - ieF_{23}L_1 - ieF_{31}L_2 - ieF_{12}L_4 = 0,$$

9 – 13

$$2D_{23}L_1 - 2D_{31}L_2 - 2D_{11}L_3 + 2D_{33}L_3 - 2D_{12}L_4 - 4D_{31}L_5 - 2ieF_{23}L_1 - 2ieF_{31}L_2 - 2ieF_{12}L_4 = 0,$$

4 – 14

$$-D_{31}L_1 - D_{23}L_2 - 3D_{12}L_3 + 2D_{11}L_4 - D_{22}L_4 + D_{33}L_4 - 3D_{23}L_5 + ieF_{31}L_1 - ieF_{23}L_2 + ieF_{12}L_3 - ieF_{23}L_5 = 0,$$

12 – 14

$$2D_{31}L_1 + 2D_{23}L_2 - 2D_{12}L_3 - 2D_{22}L_4 + 2D_{33}L_4 - 2D_{23}L_5 + 2ieF_{31}L_1 - 2ieF_{23}L_2 + 2ieF_{12}L_3 - 2ieF_{23}L_5 = 0,$$

15 – 3

$$-\frac{4D_{12}L_1}{3} + \frac{2D_{11}L_2}{3} - \frac{2D_{22}L_2}{3} + \frac{8D_{31}L_3}{3} + \frac{8D_{23}L_4}{3} - \frac{4D_{11}L_5}{3} - 2D_{22}L_5 + \frac{4D_{33}L_5}{3} = 0,$$

Запишем последнюю систему из 10 уравнений в матричной форме

$$A_{(10 \times 15)}(D_{12}L_1, D_{12}L_2, D_{12}L_3, D_{12}L_4, D_{12}L_5, D_{31}L_1, D_{31}L_2, D_{31}L_3, D_{31}L_4, D_{31}L_5, D_{23}L_1, D_{23}L_2, D_{23}L_3, D_{23}L_4, D_{23}L_5)^t = Y_{(10 \times 1)}. \quad (5)$$

Столбец  $Y_{(10 \times 1)}$  имеет следующие строки

$$Y_1 = -\frac{4D_{11}L_2}{3} + \frac{4D_{22}L_2}{3} - \frac{10D_{11}L_5}{3} - 2D_{22}L_5 + \frac{10D_{33}L_5}{3},$$

$$Y_2 = -\frac{4D_{11}L_2}{3} + \frac{4D_{22}L_2}{3} + 2D_{33}L_2 - \frac{4D_{11}L_5}{3} + 2D_{22}L_5 + \frac{4D_{33}L_5}{3},$$

$$Y_3 = D_{11}L_1 - D_{22}L_1 - 2D_{33}L_1 - ieF_{23}L_3 - ieF_{31}L_4 - ieF_{12}L_5,$$

$$Y_4 = 2D_{11}L_1 - 2D_{22}L_1 -$$

$$-2ieF_{23}L_3 - 2ieF_{31}L_4 - 2ieF_{12}L_5,$$

$$Y_5 = -\frac{4D_{11}L_2}{3} + \frac{4D_{22}L_2}{3} - 2D_{33}L_2 + \frac{2D_{11}L_5}{3} - \frac{2D_{33}L_5}{3},$$

$$Y_6 = D_{11}L_3 - 2D_{22}L_3 - D_{33}L_3 + ieF_{23}L_1 + ieF_{31}L_2 + ieF_{12}L_4,$$

$$Y_7 = 2D_{11}L_3 - 2D_{33}L_3 + 2ieF_{23}L_1 +$$

$$+2ieF_{31}L_2 + 2ieF_{12}L_4,$$

$$Y_8 = -2D_{11}L_4 + D_{22}L_4 - D_{33}L_4 - ieF_{31}L_1 + ieF_{23}L_2 - ieF_{12}L_3 + ieF_{23}L_5,$$

$$Y_9 = 2D_{22}L_4 - 2D_{33}L_4 - 2ieF_{31}L_1 + 2ieF_{23}L_2 - 2ieF_{12}L_3 + 2ieF_{23}L_5,$$

$$Y_{10} = -\frac{2D_{11}L_2}{3} + \frac{2D_{22}L_2}{3} + \frac{4D_{11}L_5}{3} + 2D_{22}L_5 - \frac{4D_{33}L_5}{3}. \quad (6)$$

Матрица  $A_{(10 \times 15)}$  в левой части уравнения (5) имеет следующие ненулевые элементы

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{21} = A_{51} = A_{28} = A_{5,14} = -A_{10,8} = \\ = -A_{10,14} = -\frac{8}{3}, \quad A_{58} = A_{2,14} = -A_{10,1} = \frac{4}{3}, \\ A_{32} = A_{93} = A_{74} = A_{45} = A_{96} = A_{77} = A_{49} = \\ = A_{6,10} = A_{9,15} = -A_{96} = -A_{7,11} = -A_{9,12} = \\ = -A_{4,13} = -2, \quad A_{83} = A_{64} = A_{39} = A_{8,15} = -3, \\ A_{42} = A_{7,10} = -4, \quad A_{86} = A_{6,11} = A_{8,12} = A_{3,13} = \end{aligned}$$

$$= -A_{35} = -A_{67} = -1, \quad A_{18} = A_{1,14} = -\frac{20}{3}.$$

Остальные элементы матрицы равны нулю.

Убеждаемся, что ранг матрицы  $A_{(10 \times 15)}$  равен 9, поскольку при отбрасывании первой строки ранг не меняется. Следовательно, первая строка должна раскладываться по девяти остальным  $x_1 = b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_{10}x_{10}$ . Легко находим необходимые коэффициенты:  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $b_5 = 1$ ,  $b_6 = 0$ ,  $b_7 = 0$ ,  $b_8 = 0$ ,  $b_9 = 0$ ,  $b_{10} = -2$ . Убеждаемся, что такое же разложение верно и для строк в правой части уравнения  $y_1 = b_2y_2 + b_3y_3 + \dots + b_{10}y_{10}$ . Следовательно, в системе 10 уравнений первое можно отбросить, поскольку оно — это следствие остальных. Таким образом, получаем более простую неоднородную систему из девяти уравнений

$$A_{(9 \times 15)}(D_{12}L_1, D_{12}L_2, D_{12}L_3, D_{12}L_4, D_{12}L_5, \\ D_{31}L_1, D_{31}L_2, D_{31}L_3, D_{31}L_4, D_{31}L_5, D_{23}L_1, \\ D_{23}L_2, D_{23}L_3, D_{23}L_4, D_{23}L_5)^t = \hat{Y}_{(9 \times 1)}.$$

Строки столбца  $\hat{Y}_{(9 \times 1)}$  совпадают со строками столбца  $Y_{(10 \times 1)}$  (6) начиная со второй  $\hat{Y}_k = Y_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$ .

В матрице  $9 \times 15$  ищем подматрицу  $9 \times 9$  с ненулевым определителем. Убеждаемся, что можно оставить столбцы 1, 2, ..., 8, 14. В результате получаем эквивалентное неоднородное уравнение. Его решение находим стандартным методом

$$D_{12}L_1 = \frac{1}{2}(D_{11}L_2 - D_{22}L_2 - D_{22}L_5), \\ D_{12}L_2 = \frac{1}{2}(-D_{11}L_1 + D_{22}L_1 + D_{33}L_1 - 2D_{31}L_4 + \\ + ieF_{23}L_3 + ieF_{31}L_4 + ieF_{12}L_5), \\ D_{12}L_3 = \frac{1}{2}(D_{11}L_4 - D_{22}L_4 + D_{33}L_4 - 2D_{23}L_5 + \\ + ieF_{31}L_1 - ieF_{23}L_2 + ieF_{12}L_3 - ieF_{23}L_5), \\ D_{12}L_4 = \frac{1}{2}(-D_{11}L_3 + D_{22}L_3 + D_{33}L_3 - 2D_{31}L_5 - \\ - ieF_{23}L_1 - ieF_{31}L_2 - ieF_{12}L_4), \\ D_{12}L_5 = -D_{33}L_1 + D_{23}L_3 + D_{31}L_4, \\ D_{31}L_1 = \frac{1}{2}(-2D_{23}L_2 + D_{11}L_4 + D_{22}L_4 - D_{33}L_4 - \\ - ieF_{31}L_1 + ieF_{23}L_2 - ieF_{12}L_3 + ieF_{23}L_5), \\ D_{31}L_2 = \frac{1}{2}(2D_{23}L_2 - D_{11}L_3 - D_{22}L_3 + D_{33}L_3 - \\ 2D_{31}L_5 - ieF_{23}L_1 - ieF_{31}L_2 - ieF_{12}L_4), \\ D_{31}L_3 = \frac{1}{2}(-D_{33}L_2 + D_{11}L_5 - D_{33}L_5), \\ D_{23}L_4 = \frac{1}{2}(D_{33}L_2 + D_{22}L_5).$$

## 5. Система нерелятивистских уравнений

Учтем эти равенства в уравнениях (4). В результате получаем

$$2iMD_0L_1 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_1 + \\ + ie\{-F_{23}L_3 + F_{31}L_4 + F_{12}(-2L_3 - L_5)\}, \\ 2iMD_0L_2 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_2 + \\ + ie\{-2F_{23}L_4 + 2F_{12}L_1\}, \\ 2iMD_0L_3 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_3 + \\ + ie\{F_{23}L_1 + F_{31}(L_2 + 2L_5) - F_{12}L_4\}, \\ 2iMD_0L_4 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_4 + \\ + ie\{F_{23}(L_2 - L_5) - F_{31}L_1 + F_{12}L_3\}, \\ 2iMD_0L_5 = -(D_{11} + D_{22} + D_{33})L_5 + \\ + ie\{2F_{23}L_4 - 2F_{31}L_3\}.$$

С учетом замены (2), запишем эту систему в виде искомого нерелятивистского матричного уравнения для частицы со спином 2

$$iD_0\Psi = -\frac{1}{2\mu}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)\Psi - \\ - \frac{ie}{2\mu}(F_{23}S_1 + F_{31}S_2 + F_{12}S_3)\Psi, \quad (7)$$

где

$$\Psi = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)^t, \\ S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что имеют место правильные коммутационные соотношения для компонент оператора спина

$$[S_1, S_2] = S_3, \quad [S_2, S_3] = S_1, \quad [S_3, S_1] = S_2.$$

## 6. Заключение

В заключение отметим следующее. Ввиду того, что система пяти нерелятивистских уравнений значительно проще 39 релятивистских, выведенное нерелятивистское уравнение позволяет решить квантовомеханические задачи с участием частиц со спином 2. Это становится актуальной задачей в свете того, что экспериментально обнаружены короткоживущие массивные частицы со спином 2. В частности, это задачи о частице в магнитном и кулоновском полях. Также возникает задача об обобщении развитого подхода на общековариантный случай для того, чтобы иметь возможность учитывать влияние гравитационных эффектов на массивные частицы со спином 2.

Кроме того, полученный результат следует обобщить на теорию частицы со спином 2, имеющей ненулевой аномальный магнитный момент. Соответствующая релятивистская теория развита на основе использования 5-компонентной системы уравнений первого порядка. Понятно, что анализ нерелятивистского предела здесь будет представлять существенно более сложную задачу.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Литература

1. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // *Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат.* – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.
4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // *Nuovo Cimento.* – 1957. – Vol. 5. – № 2. – P. 325–326.
5. Богущ, А. А. О матрицах уравнений для частиц со спином 2 / А. А. Богущ, Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1968. – Т. 1. – С. 74–81.
6. Кисель, В. В. К релятивистским волновым уравнениям для частицы со спином 2 / В. В. Кисель // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1986. – Т. 5. – С. 94–99.
7. Богущ, А. А. Об описании аномального магнитного момента массивной частицы со спином 2 в теории релятивистских волновых уравнений / А. А. Богущ, В. В. Кисель // *Известия вузов. Физика.* – 1988. – Т. 31, № 3. – С. 11–16.
8. Богущ, А. А. Об уравнениях для частицы со спином 2 во внешних электромагнитных и гравитационных полях / А. А. Богущ, В. В. Кисель, Н. Г. Токаревская, В. М. Редьков // *Весті НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2003. – № 1. – С. 62–67.
9. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya,

- V. V. Kisel // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 772–778.
10. Кисель, В. В. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 / В. В. Кисель, Е. М. Овсюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2015. – № 2. – С. 58–63.
11. Кисель, В. В. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / В. В. Кисель, Е. М. Овсюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // *Доклады НАН Беларусі.* – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.
12. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 486 с.
13. Ivashkevich, A. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich, A. Buryy, E. Ovsyuk, V. Balan, V. Kisel, V. Red'kov / *Proceedings of Balkan Society of Geometers.* – 2021. – Vol. 28. – P. 45–66.
14. Ivashkevich, A. V. On new form of the 50-component theory for spin 2 particle with anomalous magnetic moment in the basis of tensors of 2-nd and 3-rd ranks / A. V. Ivashkevich, A. V. Buryy, V. M. Red'kov, V. V. Kisel // *Nonlinear Dynamics and Applications.* – 2023. – Vol. 29. – P. 289–330.

## References

1. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Fedorov, F. I. K teorii chasticity so spinom 2 [On the theory of the spin 2 particle] / F. I. Fedorov // *Uch. zap. BGU. Ser. fiz.-mat. [Proceedings of Belorussian State University. Ser. phys.-math.].* – 1951. – Iss. 12. – P. 156–173.
4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // *Nuovo Cimento.* – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325 – 326.
5. Bogush, A. A. O matricah uravnenij dlya chastic so spinom 2 [On matrices of the equations for spin 2 particles] / A. A. Bogush, B. V. Krylov, F. I. Fedorov // *Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.].* – 1968. – № 1. – P. 74–81.
6. Kisel, V. V. K relyativistskim volnovym uravneniyam dlya chasticity so spinom 2 [On relativistic wave equations for a spin 2 particle] / V. V. Kisel // *Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.].* – 1986. – № 5. – P. 94–99.
7. Bogush, A. A. Ob opisani anomalnogo magnitnogo momenta massivnoj chasticity so spinom 2 v teorii relyativistskih volnovyh uravnenij [On describing the anomalous magnetic moment of the massive spin 2 particle in the theory of relativistic wave equations] / A. A. Bogush,



- V. V. Kisel // *Izvestiya vuzov. Fizika* [News of universities. Physics]. – 1988. – Vol. 31, № 3. – P. 11–16.
8. Bogush, A. A. Ob uravneniyah dlja chasticy so spinom 2 vo vneshnih jelektromagnitnyh i gravitacionnyh poljah [On equations for spin 2 particle in external electromagnetic and gravitational fields] / A. A. Bogush, V. V. Kisel, N. G. Tokarevskaya, V. M. Red'kov // *Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk* [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 2003. – № 1. – P. 62–67.
  9. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N G. Tokarevskaya, V. V. Kisel // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 772–778.
  10. Kisel, V. V. Analiz vkladu kalibrovochnykh stepenej svobody v strukturu tenzora jenergii-impul'sa bezmassovogo polja so spinom 2 [Contribution of the gauge degrees of freedom in energy-momentum tensor of the massless spin 2 field] / V. V. Kisel, E. M. Ovsyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // *Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk* [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 2015. – № 2. – P. 58–63.
  11. Kisel, V. V. Nerelativistskij predel v teorii chasticy so spinom 2 [Nonrelativistic approximation in the theory of spin 2 particle] / V. V. Kisel, E. M. Ovsyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // *Doklady NAN Belarusi* [Doklady NAS of Belarus]. – 2015. – Vol. 59, № 3. – P. 21–27.
  12. Red'kov, V. M. Polja chastic v rimanovom prostranstve i gruppy Lorentsa [Fields of particles in the Riemannian space and the Lorentz group] / V. M. Red'kov. – Minsk : Belorusskaja nauka [Belarusian Science], 2009. – 486 p.
  13. Ivashkevich, A. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich, A. Buryy, E. Ovsyuk, V. Balan, V. Kisel, V. Red'kov / *Proceedings of Balkan Society of Geometers*. – 2021. – Vol. 28. – P. 45–66.
  14. Ivashkevich, A. V. On new form of the 50-component theory for spin 2 particle with anomalous magnetic moment in the basis of tensors of 2-nd and 3-rd ranks / A. V. Ivashkevich, A. V. Bury, V. M. Red'kov, V. V. Kisel // *Nonlinear Dynamics and Applications*. – 2023. – Vol. 29. – P. 289–330.

**Для цитирования:**

Ивашкевич, А. В. Нерелятивистское приближение в 39-компонентной теории для частицы со спином 2 / А. В. Ивашкевич, А. В. Бурый, Е. М. Овсюк, В. В. Кисель, В. М. Редьков // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки»*. – 2024. – № 5 (71). – С. 46–57.

**For citation:**

Ivashkevich, A. V. Nonrelativistic approximation in 39-component theory for a spin 2 particle / A. V. Ivashkevich, A. V. Bury, E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Redkov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. – 2024. – № 5 (71). – P. 46–57.

Дата поступления рукописи: 08.04.2024

Received: 08.04.2024

## Maxwell equations in Lobachevsky space and modeling the medium with reflecting properties

A. M. Kuzmich<sup>1</sup>, A. V. Bury<sup>2</sup>, E. M. Ovsiyuk<sup>3</sup>

<sup>1</sup>A. S. Pushkin Brest State University, Brest, Belarus

<sup>2</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

<sup>3</sup>Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus

miss.nastya.01@list.ru

anton.buryy.97@mail.ru

e.ovsiyuk@mail.ru

### Abstract

Lobachevsky geometry simulates a medium with special constitutive relations  $D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ik} E^k$ ,  $B^i = \mu_0 \mu^{ik} H^k$ , where two matrices coincide:  $\epsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x)$ . The situation is specified in quasi-Cartesian coordinates  $(x, y, z)$  in Lobachevsky space, they are appropriate for modeling a medium nonuniform along the axis  $z$ . Exact solutions of the Maxwell equations in complex form of Majorana-Oppenheimer have been constructed. The problem reduces to a second-order differential equation for a certain primary function which can be associated with the one-dimensional Schrödinger problem for a particle in external potential field  $U(z) = U_0 e^{2z}$ . In the frames of the quantum mechanics, Lobachevsky geometry acts as an effective potential barrier with reflection coefficient  $R = 1$ ; in electrodynamic context, this geometry simulates a medium that effectively acts as an ideal mirror distributed in space. Penetration of the electromagnetic field into the effective medium along the axis  $z$  depends on the parameters of an electromagnetic waves  $\omega, k_1^2 + k_2^2$  and the curvature radius  $\rho$  of the used Lobachevsky model. The generalized quasi-plane wave solutions  $f(t, x, y, z) = E + iB$  and the relevant system of equations are transformed into the real form, which permit us to relate geometry characteristics with expressions for effective tensors of electric and magnetic permittivities.

### Keywords:

Maxwell equations, Majorana-Oppenheimer formalism, Lobachevsky geometry, exact solutions, effective constitutive relations

## Уравнения Максвелла в пространстве Лобачевского и моделирование среды со специальными свойствами

А. М. Кузьмич<sup>1</sup>, А. В. Бурый<sup>2</sup>, Е. М. Овсюк<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, г. Брест, Беларусь

<sup>2</sup>Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, г. Минск, Беларусь

<sup>3</sup>Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина, г. Мозырь, Беларусь

miss.nastya.01@list.ru

anton.buryy.97@mail.ru

e.ovsiyuk@mail.ru

### Аннотация

Геометрия Лобачевского моделирует среду с материальными уравнениями специального вида:  $D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ik} E^k$ ,  $B^i = \mu_0 \mu^{ik} H^k$ , где два тензора совпадают:  $\epsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x)$ . В пространстве Лобачевского используются квазидекартовы координаты  $(x, y, z)$ , они моделируют среду, неоднородную вдоль оси  $z$ . В этих координатах построены точные решения уравнений Максвелла в комплексной форме Майораны-Оппенгеймера. Задача сводится к дифференциальному уравнению второго порядка для некоторой основной функции, это уравнение может быть связано с одномерной задачей Шредингера для частицы во внешнем потенциальном поле  $U(z) = U_0 e^{2z}$ . В квантовой механике геометрия Лобачевского действует как эффективный потенциальный барьер с коэффициентом отражения  $R = 1$ ; в электродинамическом контексте эта геометрия действует как распределенное в пространстве идеальное зеркало. Проникновение электромагнитного поля в эффективную среду вдоль оси  $z$  зависит от характеристик электромагнитной волны  $\omega, k_1^2 + k_2^2$  и радиуса кривизны  $\rho$  пространства Лобачевского. Построенные обобщенные волновые решения  $f(t, x, y, z) = E + iB$  и соответствующая система уравнений преобразуются в действительную форму, что позволяет связать геометрические характеристики с выражениями для эффективных тензоров электрической и магнитной проницаемостей.

### Ключевые слова:

уравнения Максвелла, формализм Майораны-Оппенгеймера, геометрия Лобачевского, точные решения, моделирование материальных сред

## Introduction

To treat Maxwell equations we make use of complex representation of them according to the known approach by Majorana-Oppenheimer [1–11], also see [12, 13] and references therein for extending this approach to curved space-time models.

The situation is specified in quasi-Cartesian coordinates in Lobachevsky space, they are appropriate for modeling a medium nonuniform along the axis  $z$ . Exact solutions of the covariant Maxwell equations in complex  $E + iB$  form of Majorana-Oppenheimer have been constructed. The problem reduces to a second order differential equation for a certain primary function which can be associated with the one-dimensional Schrödinger problem for a particle in external potential field  $U(z) = U_0 e^{2z}$ . In quantum mechanics, curved geometry acts as an effective potential barrier with reflection coefficient  $R = 1$ ; in electrodynamic context results are similar. Lobachevsky geometry simulates a medium that effectively acts as an ideal mirror. Penetration of the electromagnetic field into the effective medium along the axis  $z$  depends on the parameters of the electromagnetic waves  $\omega$ ,  $k_1^2 + k_2^2$  and the curvature radius  $\rho$  of the used Lobachevsky space. These generalized quasi-plane solutions  $f(t, x, y, z) = E + iB$  and the relevant system of equations are transformed into the real form, which permit us to relate geometry characteristics with expressions for effective tensors of electric and magnetic permittivities.

### 1. Cartesian coordinates in Lobachevsky space

We will apply the coordinate system in Lobachevsky space

$$\begin{aligned} dS^2 &= dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2, \\ dV &= e^{-2z} dx dy dz. \end{aligned} \quad (1)$$

It is helpful to have at hand some details of the parametrization of the model  $H_3$  by coordinates  $(x, y, z)$ . It is known that this model can be identified with a branch of hyperboloid in 4-dimension flat space

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \rho^2, \quad u_0 = +\sqrt{\rho^2 + u^2}.$$

Coordinates  $(x, y, z)$  are referred to  $u_a$  by relations

$$u_0 = \frac{1}{2} [(e^z + e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}], \quad u_1 = xe^{-z},$$

$$u_2 = ye^{-z}, \quad u_3 = \frac{1}{2} [(e^z - e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}].$$

We will employ the Poincare realization for Lobachevsky space as the inside part of the 3-sphere

$$q_i = \frac{u_i}{u_0} = \frac{u_i}{\sqrt{\rho^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \quad q_i q_i < 1.$$

Quasi-Cartesian coordinates  $(x, y, z)$  are referred to  $q_i$  as follows

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + e^{2z} + 1}, \\ q_2 &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + e^{2z} + 1}, \end{aligned}$$

$$q_3 = \frac{x^2 + y^2 + e^{2z} - 1}{x^2 + y^2 + e^{2z} + 1}. \quad (2)$$

Inverses to (2) relations are

$$x = \frac{q_1}{1 - q_3}, \quad y = \frac{q_2}{1 - q_3}, \quad e^z = \frac{\sqrt{1 - q_3^2}}{1 - q_3}. \quad (3)$$

In particular, note that on the axis  $q_1 = 0, q_2 = 0, q \in (-1, +1)$  relations (3) assume the following parametrization of the axis  $z$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad e^z = \sqrt{\frac{1 + q_3}{1 - q_3}},$$

so that

$$q_3 \rightarrow +1, \quad e^z \rightarrow +\infty, \quad z \rightarrow +\infty;$$

$$q_3 \rightarrow -1, \quad e^z \rightarrow +0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Solutions of the Maxwell equations, constructed in the following way, can be of interest for description of electromagnetic waves in special media because Lobachevsky geometry simulates effectively a special medium [12, 13], inhomogeneous along the axis  $z$ . Effective electric permittivity tensor  $\epsilon^{ik}(x)$  is given by

$$\epsilon^{ik}(x) = -\sqrt{-g}g^{00}(x)g^{ik}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2z} \end{pmatrix},$$

whereas the effective magnetic permittivity tensor is

$$\begin{aligned} (\mu^{-1})^{ik}(x) &= \sqrt{-g} \begin{pmatrix} g^{22}g^{33} & 0 & 0 \\ 0 & g^{33}g^{11} & 0 \\ 0 & 0 & g^{11}g^{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

The constitutive relations read

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ik} E_k, \quad B_i = \mu_0 \mu^{ik} H^k;$$

two tensors coincide  $\epsilon^{ik}(x) = (\mu^{-1})^{ik}(x)$ .

### 2. Maxwell equations in complex form, separation of the variables

In the coordinates (1), we will use the tetrad

$$e_{(\alpha)}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e_{(\alpha)\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In this tetrad, the matrix equation (see notations in [12, 13]) has the form

$$\begin{pmatrix} -i\partial_t + \alpha^1 e^z \partial_x + \alpha^2 e^z \partial_y + \alpha^3 \partial_z - \\ -\alpha^1 s_2 + \alpha^2 s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E + iB \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Let us apply the substitution

$$\begin{pmatrix} 0 \\ E + iB \end{pmatrix} = e^{-i\omega t} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{pmatrix} 0 \\ f(z) \end{pmatrix},$$

$$e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} = e^{i\varphi}.$$

Eq. (4) gives

$$\begin{pmatrix} -\omega + \alpha^1 e^z ik_1 + \alpha^2 e^z ik_2 + \alpha^3 \frac{d}{dz} - \\ -\alpha^1 s_2 + \alpha^2 s_1 \end{pmatrix} (0, f_1(z), f_2(z), f_3(z))^t = 0.$$

Here  $()^t$  stands for transposition. After calculation with the use of explicit expressions for all involved matrices (see [12, 13]), we derive the first-order system for functions  $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$

$$\begin{aligned} ik_1 e^z f_1 + ik_2 e^z f_2 + \left( \frac{d}{dz} - 2 \right) f_3 &= 0, \\ -\omega f_1 - \left( \frac{d}{dz} - 1 \right) f_2 + ik_2 e^z f_3 &= 0, \\ -\omega f_2 + \left( \frac{d}{dz} - 1 \right) f_1 - ik_1 e^z f_3 &= 0, \\ -\omega f_3 - ik_2 e^z f_1 + ik_1 e^z f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Allowing for three last equations in the first one, we get the identity  $0 = 0$ . So, there exist only three independent equations (we will simplify notations:  $k_1 = a, k_2 = b$ )

$$\begin{aligned} \omega f_3 &= -ibe^z f_1 + iae^z f_2, \\ \omega f_1 &= -\left( \frac{d}{dz} - 1 \right) f_2 + ibe^z f_3, \\ \omega f_2 &= \left( \frac{d}{dz} - 1 \right) f_1 - iae^z f_3. \end{aligned} \quad (5)$$

With substitutions  $f_1 = e^z F_1(z), f_2 = e^z F_2(z)$  from Eqs. (5) we get

$$\begin{aligned} \omega f_3 &= -ibe^{2z} F_1 + iae^{2z} F_2, \quad \omega F_1 = -\frac{d}{dz} F_2 + ibf_3, \\ \omega F_2 &= \frac{d}{dz} F_1 - ia f_3. \end{aligned} \quad (6)$$

There exists a particular case readily treatable, when  $a = 0, b = 0, f_3 = 0$ :

$$\omega F_1 = -\frac{d}{dz} F_2, \quad \omega F_2 = \frac{d}{dz} F_1,$$

that is

$$F_1(z) = e^{\pm i\omega z}, \quad F_2(z) = \pm i e^{\pm i\omega z},$$

which leads to the following plane wave solutions

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ E + iB \end{pmatrix} = e^{-i\omega t} e^z (0, e^{\pm i\omega z}, \pm i e^{\pm i\omega z}, 0)^t,$$

whence we get

$$\begin{aligned} E_1^+ + iB_1^+ &= \cos(\omega t - \omega z) - i \sin(\omega t - \omega z), \\ E_2^+ + iB_2^+ &= \sin(\omega t - \omega z) + i \cos(\omega t - \omega z), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} E_1^- + iB_1^- &= \cos(\omega t + \omega z) - i \sin(\omega t + \omega z), \\ E_2^- + iB_2^- &= -\sin(\omega t + \omega z) - i \cos(\omega t + \omega z). \end{aligned}$$

Let us present this solution in the real form

$$\begin{aligned} E_1^+ &= \cos(\omega t - \omega z), \quad E_2^+ = \sin(\omega t - \omega z), \quad E_3^+ = 0, \\ B_1^+ &= -\sin(\omega t - \omega z), \quad B_2^+ = \cos(\omega t - \omega z), \quad B_3^+ = 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} E_1^- &= \cos(\omega t + \omega z), \quad E_2^- = -\sin(\omega t + \omega z), \quad E_3^- = 0, \\ B_1^- &= -\sin(\omega t + \omega z), \quad B_2^- = -\cos(\omega t + \omega z), \quad B_3^- = 0. \end{aligned}$$

In turn, from complex-valued identities (in this case, we have  $\varphi = -\omega t$ )

$$\begin{aligned} E + iB &= e^{i\varphi} f(z) = e^{i\varphi} (F(z) + iG(z)) = \\ &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) (F(z) + iG(z)), \\ F^* &= F, \quad G^* = G, \quad \varphi = k_1 x + k_2 y - \omega t \end{aligned}$$

we derive expressions for real vectors  $E$  and  $B$ :

$$\begin{aligned} E &= \cos \varphi F(z) - \sin \varphi G(z), \\ B &= \sin \varphi F(z) + \cos \varphi G(z), \quad \varphi = -\omega t. \end{aligned}$$

Let us turn back to the general system (6); with the help of the first equation we eliminate the variable  $f_3$ , so producing the system of linked equations for  $F_1$  and  $F_2$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dz} + \frac{abe^{2z}}{\omega} \right) F_2 &= \frac{b^2 e^{2z} - \omega^2}{\omega} F_1, \\ \left( \frac{d}{dz} - \frac{abe^{2z}}{\omega} \right) F_1 &= \frac{\omega^2 - a^2 e^{2z}}{\omega} F_2. \end{aligned} \quad (7)$$

In the new variable  $Z, e^z = \sqrt{\omega} Z$  two last equations are written as

$$\begin{aligned} Z \left( \frac{d}{dZ} + abZ \right) F_2 &= (b^2 Z^2 - \omega) F_1, \\ Z \left( \frac{d}{dZ} - abZ \right) F_1 &= -(a^2 Z^2 - \omega) F_2. \end{aligned} \quad (8)$$

This system can be solved straightforwardly in terms of the Heun confluent functions. Indeed, from (8) it follows a second order differential equation for  $F_1$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{dZ^2} - \frac{a^2 Z^2 + \omega}{Z(a^2 Z^2 - \omega)} \frac{dF_1}{dZ} + \\ + \left( \frac{\omega^2}{Z^2} + \frac{2ab\omega}{a^2 Z^2 - \omega} - (a^2 + b^2)\omega \right) F_1 = 0, \end{aligned}$$

where we note the presence of an additional singular point  $Z = \pm\sqrt{\omega}a^{-1}$ . In the new variable  $y = a^2Z^2\omega^{-1}$ , we arrive at the equation

$$\frac{d^2F_1}{dy^2} + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right) \frac{dF_1}{dy} + \left(\frac{\omega^2}{4y^2} - \frac{2ab\omega + (a^2 + b^2)\omega^2}{4a^2y} + \frac{b\omega}{2a(y-1)}\right) F_1 = 0.$$

With the use of the substitution  $F_1 = y^c g_1(y)$ ,  $c = \pm i\omega/2$ , further we derive

$$\frac{d^2g_1}{dy^2} + \left(\frac{2c+1}{y} - \frac{1}{y-1}\right) \frac{dg_1}{dy} + \left(\frac{2c - \omega^2/2 - b\omega/a - b^2\omega^2/(2a^2)}{2y} + \frac{-2c + b\omega/a}{2(y-1)}\right) g_1 = 0,$$

which can be identified with the confluent Heun equation. Below we will develop a method that makes possible to construct solutions of the system (7) in terms of more simple Bessel functions.

### 3. Solutions in terms of the Bessel functions

Let us perform a linear transformation over the system (7):

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha G_1 + \beta G_2, & F_2 &= mG_1 + nG_2; \\ G_1 &= nF_1 - \beta F_2, & G_2 &= -mF_1 + \alpha F_2; \end{aligned} \quad (9)$$

suppose the constraint  $\alpha n - \beta m = 1$ . Combining equations from (7), we get

$$\begin{aligned} nZ \left(\frac{d}{dZ} - abZ\right) F_1 - \beta Z \left(\frac{d}{dZ} + abZ\right) F_2 &= \\ &= -n(a^2Z^2 - \omega)F_2 - \beta(b^2Z^2 - \omega)F_1, \\ -mZ \left(\frac{d}{dZ} - abZ\right) F_1 + \alpha Z \left(\frac{d}{dZ} + abZ\right) F_2 &= \\ &= m(a^2Z^2 - \omega)F_2 + \alpha(b^2Z^2 - \omega)F_1, \end{aligned}$$

whence it follows

$$\begin{aligned} Z \frac{d}{dZ} G_1 - Z^2 ab(nF_1 + \beta F_2) &= \\ &= -Z^2(na^2F_2 + \beta b^2F_1) + \omega(nF_2 + \beta F_1), \\ Z \frac{d}{dZ} G_2 + Z^2 ab(mF_1 + \alpha F_2) &= \\ &= Z^2(ma^2F_2 + \alpha b^2F_1) - \omega(mF_2 + \alpha F_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Taking into account (9), we reduce Eqs. (10) to other form

$$\begin{aligned} \left[ Z \frac{d}{dZ} - Z^2 ab(n\alpha + m\beta) + Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) - \right. \\ \left. -\omega(nm + \alpha\beta) \right] G_1 = \left[ -Z^2(an - b\beta)^2 + \omega(n^2 + \beta^2) \right] G_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ Z \frac{d}{dZ} + Z^2 ab(n\alpha + m\beta) - Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) + \right. \\ \left. +\omega(nm + \alpha\beta) \right] G_2 = \left[ Z^2(am - b\alpha)^2 - \omega(m^2 + \alpha^2) \right] G_1. \end{aligned}$$

Let us impose additional restrictions: the first one is

$$an - b\beta = 0, \quad \text{that is} \quad \frac{\beta}{n} = \frac{a}{b},$$

$$\begin{aligned} \left[ Z \frac{d}{dZ} - Z^2 ab(n\alpha + m\beta) + Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) - \right. \\ \left. -\omega(nm + \alpha\beta) \right] G_1 = \omega(n^2 + \beta^2) G_2, \\ \left[ Z \frac{d}{dZ} + Z^2 ab(n\alpha + m\beta) - Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) + \right. \\ \left. +\omega(nm + \alpha\beta) \right] G_2 = \left[ Z^2(am - b\alpha)^2 - \omega(m^2 + \alpha^2) \right] G_1; \end{aligned} \quad (11)$$

the second one is

$$am - b\alpha = 0, \quad \text{that is} \quad \frac{\alpha}{m} = \frac{a}{b},$$

$$\begin{aligned} \left[ Z \frac{d}{dZ} - Z^2 ab(n\alpha + m\beta) + Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) - \right. \\ \left. -\omega(nm + \alpha\beta) \right] G_1 = \left[ -Z^2(an - b\beta)^2 + \omega(n^2 + \beta^2) \right] G_2, \\ \left[ Z \frac{d}{dZ} + Z^2 ab(n\alpha + m\beta) - Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) + \right. \\ \left. +\omega(nm + \alpha\beta) \right] G_2 = -\omega(m^2 + \alpha^2) G_1. \end{aligned}$$

These two possibilities are equivalent to each other, for definiteness we will use the variant (11). It can be presented in more symmetrical form

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha G_1 + \beta G_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_2, \\ F_2 &= mG_1 + nG_2 = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_2; \end{aligned} \quad (12)$$

at this Eqs. (6) lead to

$$\begin{aligned} Z \frac{d}{dZ} G_1 &= \omega G_2, \\ Z \frac{d}{dZ} G_2 &= [Z^2(a^2 + b^2) - \omega] G_1. \end{aligned} \quad (13)$$

From (13) we derive a second order equation for  $G_1$ :

$$\left( Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} + Z \frac{d}{dZ} + \omega^2 - \omega(a^2 + b^2)Z^2 \right) G_1 = 0. \quad (14)$$

It is convenient to transform this equation into the initial variable  $z$ , then it reads

$$e^z = \sqrt{\omega}Z,$$

$$\left( Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} + \omega^2 - (a^2 + b^2)e^{2z} \right) G_1 = 0. \quad (15)$$

It can be associated with the Schrödinger equation

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + m - U(z) \right) \varphi(z) = 0 \quad (16)$$

with the potential function  $U(z) = (a^2 + b^2)e^{2z}$ , the corresponding effective force acts on the left  $F_z = -2(a^2 + b^2)e^{2z}$ . The situation described by Eq. (15) can be illustrated in Fig. 1.

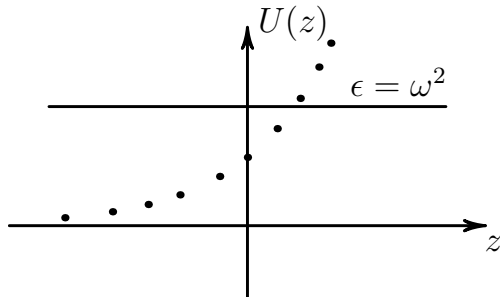


Figure 1. Effective potential curve.  
Рисунок 1. Эффективная потенциальная кривая.

Therefore, we should expect the properties of the electromagnetic solutions similar to those existing in the relevant quantum-mechanical problem. Note that when  $a = k_1 = 0$ ,  $b = k_2 = 0$ , this force vanishes. In accordance with (16), an equation below  $\omega^2 = U(z) = (a^2 + b^2)e^{2z}$  determines a critical point  $z_0$  in which behavior of the function  $G_1(x)$  must change dramatically. To such a point  $z_0$ ,  $x_0 = i\sqrt{a^2 + b^2}e^{z_0} = i\omega$ . Expression for the turning point  $z_0$  is given by the formula

$$z_0 = \rho \ln \frac{\omega}{\rho \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}.$$

The last relation is written in the usual units. The  $\rho$  is a curvature radius of Lobachevsky space, it is a free parameter of the model description.

The primary variable  $G_1(x)$  determine all remaining ones. Let us turn back to Eq. (14). In the variable  $x = i\sqrt{\omega(a^2 + b^2)}Z = i\sqrt{a^2 + b^2}e^z$  it takes the Bessel form

$$\left( \frac{d^2}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 + \frac{\omega^2}{x^2} \right) G_1 = 0. \quad (17)$$

The first-order system (13), being transformed to the variable  $x$ , reads

$$x \frac{d}{dx} G_1 = \omega G_2, \quad x \frac{d}{dx} G_2 = -\frac{\omega^2 + x^2}{\omega} G_1.$$

The second function is determined by relation

$$G_2 = \frac{1}{\omega} x \frac{d}{dx} G_1 = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dz} G_1.$$

In turn, taking into account the transformation (12), we get (see (6))

$$f_3 = \frac{e^{2z}}{\omega} (-ibF_1 + iaF_2) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{i\omega} e^{2z} G_1(z).$$

Let us write down the final expressions for obtained solutions

$$E(z) + iB(z) = (\cos \varphi + i \sin \varphi) f(z),$$

$$\varphi = ax + by - i\omega t,$$

where

$$\begin{aligned} f_1(z) &= e^z F_1(z) = \\ &= e^z \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_2 \right), \\ f_2(z) &= e^z F_2(z) = \\ &= e^z \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_2 \right), \\ f_3(z) &= -i \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\omega} e^{2z} G_1(z), \end{aligned}$$

where  $G_1(z)$  is the solution to equation (17),

$$G_2(z) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dz} G_1(z), \quad x = i\sqrt{a^2 + b^2}e^z.$$

## Conclusion

In the frames of the quantum mechanics, Lobachevsky geometry acts as an effective potential barrier with reflection coefficient  $R = 1$ . In electrodynamic context, results are similar: this geometry simulates a medium that effectively acts as an ideal mirror distributed in space. Penetration of the electromagnetic field into the effective medium along the axis  $z$  depends on the parameters of an electromagnetic waves  $\omega$ ,  $k_1^2 + k_2^2$  and the curvature radius  $\rho$  of the used Lobachevsky model. The generalized quasi-plane wave solutions  $f(t, x, y, z) = E + iB$  and the relevant system of equations are transformed into the real form, which permit us to relate geometry characteristics with expressions for effective tensors of electric and magnetic permittivities.

The authors declare no conflict of interest.

## References

1. Gordon, W. Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie / W. Gordon // Annalen der Physik. - 1923. - Vol. 72. - P. 421-456.
2. Tamm, I. E. Electrodynamics of an anisotropic medium and the special theory of relativity / I. E. Tamm // Zh. R. F.-Kh. O., Fiz. dep. - 1924. - Vol. 56, № 2-3. - P. 248-262.
3. Tamm, I. E. Crystal optics in the theory of relativity and its relationship to the geometry of a biquadratic form / I. E. Tamm // Zh. R. F.-Kh. O., Fiz. dep. - 1925. - Vol. 57, № 3-4. - P. 209-240.
4. Mandelstam, L. I. Elektrodynamik der anisotropen Medien und der speziellen Relativitätstheorie / L. I. Mandelstam, I. E. Tamm // Mathematische Annalen. - 1925. - Vol. 95. - P. 154-160.
5. Majorana, E. Scientific Papers. (Unpublished). Deposited at the «Domus Galileana» / E. Majorana. - Pisa, quaderno 2. - P. 101/1; 3, P. 11, 160; 15, P. 16; 17, P. 83, 159.

6. Oppenheimer, J. Note on light quanta and the electromagnetic field / J. Oppenheimer // *Physical Review*. – 1931. – Vol. 38. – P. 725–746.
7. Silberstein, L. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // *Annalen der Physik*. – 1907. – Vol. 22, № 3. – P. 579–586.
8. Silberstein, L. Nachtrag zur Abhandlung über elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // *Annalen der Physik*. – 1907. – Vol. 24, № 14. – P. 783–784.
9. Weber, H. Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen / H. Weber. – Braunschweig, 1901.
10. Bialynicki-Birula, I. On the wave function of the photon / I. Bialynicki-Birula // *Acta Phys. Polon.* – 1994. – Vol. 86. – P. 97–116.
11. Bialynicki-Birula, I. Photon wave function / I. Bialynicki-Birula // *Progress in Optics*. – 1996. – Vol. 36. – P. 248–294.
12. Red'kov, V. M. Polay chastis v rimanovskom prostranstve i gruppy Lorentsa [Fields in Riemannian space and the Lorentz group] / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarusskaya nauka [Minsk : Belarussian Science], 2009. – 486 p.
13. Ovsyuk, E. M. Elektrodinamika Maksvelly v prostranstve s neyevklidovoy geometriyey [Maxwell's electrodynamics in space with non-Euclidean geometry] / E. M. Ovsyuk. – Mazyr : OU MSPU im. I. P. Shamyakina, 2011. – 228 p.
4. Mandelstam, L. I. Elektrodinamika der anisotropen Medien und der speziellen Relativitätstheorie / L. I. Mandelstam, I. E. Tamm // *Mathematische Annalen*. – 1925. – Vol. 95. – P. 154–160.
5. Majorana, E. Scientific Papers. (Unpublished). Deposited at the «Domus Galileana» / E. Majorana. – Pisa, quaderno 2. – P. 101/1; 3, P. 11, 160; 15, P. 16; 17, P. 83, 159.
6. Oppenheimer, J. Note on light quanta and the electromagnetic field / J. Oppenheimer // *Physical Review*. – 1931. – Vol. 38. – P. 725–746.
7. Silberstein, L. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // *Annalen der Physik*. – 1907. – Vol. 22. – № 3. – P. 579–586.
8. Silberstein, L. Nachtrag zur Abhandlung über elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // *Annalen der Physik*. – 1907. – Vol. 24. – № 14. – P. 783–784.
9. Weber, H. Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen / H. Weber. – Braunschweig, 1901.
10. Bialynicki-Birula, I. On the wave function of the photon / I. Bialynicki-Birula // *Acta Phys. Polon.* – 1994. – Vol. 86. – P. 97–116.
11. Bialynicki-Birula, I. Photon wave function / I. Bialynicki-Birula // *Progress in Optics*. – 1996. – Vol. 36. – P. 248–294.
12. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 486 с.
13. Овсюк, Е. М. Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией / Е. М. Овсюк, В. М. Редьков. – Мозырь : УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2011. – 228 с.

## Литература

1. Gordon, W. Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie / W. Gordon // *Annalen der Physik*. – 1923. – Vol. 72. – P. 421–456.
2. Tamm, I. E. Electrodynamics of an anisotropic medium and the special theory of relativity / I. E. Tamm // *Zh. R, F, Kh. O, Fiz. dep.* – 1924. – Vol. 56, № 2–3. – P. 248–262.
3. Tamm, I. E. Crystal optics in the theory of relativity and

## Acknowledgment

The present work was financially supported by the Ministry of Education of the Republik of Belarus under contract No. 1410/2021 dated 03/22/2021.

## Для цитирования:

Кузьмич, А. М. Уравнения Максвелла в пространстве Лобачевского и моделирование среды со специальными свойствами / А. М. Кузьмич, А. В. Бурый, Е. М. Овсюк // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки»*. – 2024. – № 5 (71). – С. 58–63.

## For citation:

Kuzmich, A. M. Maxwell equations in Lobachevsky space and modeling the medium with reflecting properties / A. M. Kuzmich, A. V. Bury, E. M. Ovsyuk // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. – 2024. – № 5 (71). – P. 58–63.

Дата поступления рукописи: 08.04.2024

Received: 08.04.2024

## К теории рентгеновской Лауэ дифракции в термомиграционном кристаллическом канале с легирующей примесью

Д. В. Казаков, А. В. Карпов, С. И. Колосов,  
Д. М. Мальков, В. И. Пунегов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар

kazakov@ipm.komisc.ru,  
karpov@ipm.komisc.ru,  
kolos@ipm.komisc.ru,  
dimamalkov93@mail.ru,  
vpunegov@ipm.komisc.ru

### Аннотация

Теоретически рассмотрена рентгеновская Лауэ дифракция в кристалле кремния с термомиграционными каналами  $Si(Al)$ . На основе модели упругих полей атомных смещений в канале получены выражения распределения деформаций для описания дифракции в геометрии Лауэ. Выполнен численный расчет распределения интенсивности рентгеновского рассеяния вблизи узла обратной решетки. Показано отличие дифракции в совершенном и деформированном кристалле.

### Ключевые слова:

рентгеновская дифракция в геометрии Лауэ, термомиграционный канал, двумерные рекуррентные соотношения, уравнения Такаги-Топена, поле упругих деформаций

### Введение

Высокоразрешающая рентгеновская дифракция широко используется для диагностики различных функциональных материалов [1]. Трехосевая рентгеновская дифрактометрия [2] является чувствительным методом, позволяющим измерять рентгеновские карты интенсивности рассеяния вблизи узла обратной решетки различных кристаллических систем.

Вместо плоских эпитаксиальных слоев при создании солнечных батарей, биосенсоров, микроэлектромеханических систем и приборов силовой электроники, можно использовать полупроводниковые кристаллы с вертикальными термомиграционными каналами [3]. Неразрушающие исследования структуры кремния с термомиграционными каналами  $Si(Al)$  возможны с применением высокоразрешающей рентгеновской дифрактометрии. Измерения кривых качения и сопутствующее численное моделирование рентгеновской дифракции в геометрии Лауэ позволили получить только качественные оценки деформаций на границе термомиграционного канала и кремниевой матрицы

## On the theory of X-ray Laue diffraction in a thermomigration crystalline channel with a doping impurity

D. V. Kazakov, A. V. Karpov, S. I. Kolosov,  
D. M. Malkov, V. I. Punegov

Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,  
Syktvykar

kazakov@ipm.komisc.ru,  
karpov@ipm.komisc.ru,  
kolos@ipm.komisc.ru,  
dimamalkov93@mail.ru,  
vpunegov@ipm.komisc.ru

### Abstract

X-ray Laue diffraction in a silicon crystal with  $Si(Al)$  thermomigration channels has been theoretically considered. Based on the model of elastic fields of atomic displacements in the channel, expressions for the distribution of strains have been obtained to describe diffraction in the Laue geometry. A numerical calculation of the X-ray scattering intensity distribution near a reciprocal lattice point has been performed. The difference between diffraction in a perfect and strained crystal has been shown.

### Keywords:

X-ray diffraction in Laue geometry, thermomigration channel, two-dimensional recurrence relations, Takagi-Taupin equations, elastic strain field

[3]. Более информативной является трехосевая дифрактометрия в режиме измерений распределения интенсивности рентгеновского рассеяния вблизи узла обратной решетки. Для этой цели в геометрии Брэгга была предложена модель распределения деформаций внутри канала и на его границе [4]. Моделирование рентгеновской дифракции проводилось с помощью уравнений Такаги-Топена (Т-Т) [5, 6] в координатной системе координат и алгоритма «полушаговой производной» [7].

В Лауэ геометрии такие вычисления интенсивности рентгеновского рассеяния вблизи узла обратной решетки не проводились. В этом случае рентгеновский пучок проходит и дифрагирует на большом расстоянии внутри канала, поэтому следует использовать более жесткое рентгеновское излучение, чтобы уменьшить поглощение рентгеновских лучей. Недавно была показана аналогия двумерных рекуррентных соотношений и уравнений Такаги-Топена в случае дифракции в совершенном кристалле [8]. Цель этой работы — разработка вычислений интенсивности ко-



герентного рентгеновского рассеяния вблизи узла обратной решетки в структурах со сложным распределением деформаций в геометрии Лауэ.

## 1. Двумерные рекуррентные соотношения и уравнения Такаги-Топена для деформированных кристаллов

На рис. 1 показана схема рентгеновской Лауэ дифракции в кристалле с термомиграционными каналами.

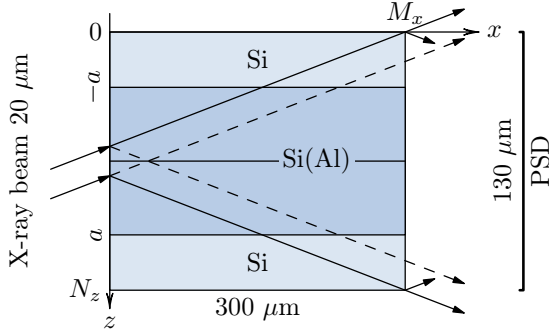


Рисунок 1. Схема Лауэ дифракции в кристалле с термомиграционными каналами. Ширина падающего в центр канала рентгеновского пучка 20 мкм. PSD — позиционно чувствительный детектор.

Figure 1. Scheme of Laue diffraction in a crystal with thermomigration channels. The width of the incident X-ray beam at the centre of the channel is 20 mkm. PSD stands for position-sensitive detector.

Одним из методов вычисления углового распределения дифракционной интенсивности в симметричной геометрии Лауэ является численное решение уравнений Такаги-Топена [5, 6] в косоугольной системе координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_0(\eta; s_0, s_h)}{\partial s_0} = ia_{-h} E_h(\eta; s_0, s_h), \\ \frac{\partial E_h(\eta; s_0, s_h)}{\partial s_h} = i(\eta + \frac{\partial(\mathbf{h}\mathbf{u}(s_0, s_h))}{\partial s_h}) E_h(\eta; s_0, s_h) + \\ + ia_h E_0(\eta; s_0, s_h), \end{cases} \quad (1)$$

где  $E_{0,h}(\eta; s_0, s_h)$  — амплитуды проходящей  $E_0$  и дифракционной  $E_h$  рентгеновских волн,  $a_0 = \chi_0/\lambda$ ,  $a_h = C\chi_h/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны рентгеновского излучения в вакууме,  $C$  — поляризационный фактор,  $\chi_g = -r_0\lambda^2 F_g/(\pi V_c)$  — Фурье-компоненты рентгеновской поляризуемости,  $g = 0, h, \bar{h}$ . Здесь  $V_c$  — объем элементарной ячейки,  $r_0 = e^2/(mc^2)$  — классический радиус электрона,  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона,  $F_g$  — структурный фактор,  $h = 2\pi/d$  — величина вектора обратной решетки,  $d$  — межплоскостное расстояние основной кристаллической матрицы. В уравнениях (1)  $\eta = 2\pi \sin(2\theta_B) \omega/\lambda$  — угловой параметр,  $\omega$  — отклонение рентгеновского пучка от угла Брэгга  $\theta_B$ ,  $\mathbf{u}(s_0, s_h)$  — поле атомных смещений, вызванное наличием примеси в кристаллической решетке.

Угловой параметр  $\eta$  в случае трехкристальной дифрактометрии может быть записан через проекции  $q_x, q_z$  вектора смещения  $\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \mathbf{h}$  как  $\eta = q_x \cos \theta_B - q_z \sin \theta_B$ , где  $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_h - \mathbf{k}_0$  — вектор дифракции,  $\mathbf{h}$  — вектор обратной решетки,  $\mathbf{k}_h$  и  $\mathbf{k}_0$  — волновые векторы дифракционной и падающей рентгеновской волны соответственно.

Вторым методом расчетов углового распределения интенсивности рентгеновского рассеяния в обратном пространстве является использование двумерных рекуррентных соотношений (ДРС) [8]. В случае дифракции в деформированном кристалле ДРС запишутся как

$$\begin{cases} T_{n+1}^m = (a T_n^m + b_1 S_n^m) \exp(i\varphi_0), \\ S_{n-1}^m = (a S_n^m + b_2 T_n^m) \exp(i\varphi_h), \end{cases} \quad (2)$$

где  $T$  и  $S$  — амплитуды проходящей и дифрагированной волн,  $a = (1 - iq_0)$ ,  $b_1 = -i\bar{q}$ ,  $b_2 = -iq$ ,  $q_0 = -\pi\chi_0 d/(\lambda\gamma_0)$ ,  $q = C\pi\chi_h d/(\lambda\gamma_0)$ ,  $\bar{q} = C\pi\chi_{\bar{h}} d/(\lambda\gamma_0)$ ,  $d$  — период отражающих атомных плоскостей.  $\phi_0 = \phi + \mathbf{k}_0(\mathbf{u}_{m+1,n+1} - \mathbf{u}_{m,n})$ ,  $\phi_h = \phi + \mathbf{k}_h(\mathbf{u}_{m+1,n-1} - \mathbf{u}_{m,n})$ ,  $\mathbf{k}_{0,h}$  — волновые векторы падающей и отраженной рентгеновской волн,  $\mathbf{u}_{m,n}$  — вектор смещения узлов в модели двумерной решетки Дарвина. Коэффициент  $\phi = 2\pi d/(\lambda \sin \theta_B)$  в соотношениях (2) учитывает разность фаз, возникающую при распространении рентгеновской волны в совершенном кристалле от одного узла до другого на сетке для численных расчетов.

## 2. Поле упругих деформаций в кристалле с термомиграционными каналами

Для рентгеновской дифракции в геометрии Лауэ поле атомных смещений  $u_x(x, z)$  параллельно вектору обратной решетки  $\mathbf{h}_{220}$ , выражение для которого получено в статье [4]. Используя это выражение, для случая Лауэ распределение упругих деформаций  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x(x, z)}{\partial x}$  в кристалле с термомиграционными каналами запишется в виде:

$$\varepsilon_{xx}(x, z) = K_\nu \left( \Omega(x, z) + \frac{(x-a)z}{r_1^2} - \frac{(x+a)z}{r_2^2} \right), \quad (3)$$

где  $\Omega(x, z) = \pi + (2\nu - 1)(\alpha_1 - \alpha_2)$  при  $|x| \leq a$  и  $\Omega(x, z) = (2\nu - 1)(\alpha_1 - \alpha_2)$ , если  $|x| > a$ . В решении (3)  $K_\nu = \frac{e^0}{\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu}$ ,  $e^0$  — собственная деформация,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $2a$  — ширина термомиграционного канала,  $r_1^2 = (x-a)^2 + z^2$ ,  $r_2^2 = (x+a)^2 + z^2$ ,  $\alpha_{1,2} = \arctan(z/(x \pm a))$ .

Для вычисления углового распределения интенсивности рентгеновского рассеяния вблизи узла обратной решетки необходимо использовать значения атомных смещений  $u_x(x, z)$  [4] и распределение упругих деформаций  $\varepsilon_{xx}(x, z)$  (3).

Деформации в косоугольной и прямоугольной системах координат в уравнениях (1) связаны между собой соотношением:

$$\frac{\partial u_z(s_0, s_h)}{\partial s_h} = \varepsilon_{zx}(x, z) \cos \theta_B + \varepsilon_{zz}(x, z) \sin \theta_B. \quad (4)$$

## 3. Моделирование рентгеновской Лауэ дифракции в термомиграционном канале кремния с легирующими атомами алюминия

Численные расчеты рентгеновской Лауэ дифракции в кристалле кремния с термомиграционными каналами

$Si(Al)$  выполнены для  $(2\bar{2}0)$  отражения  $MoK_{\alpha 1}$  излучения с использованием уравнений Т-Т и ДРС. Все расчеты интенсивности рентгеновского рассеяния вблизи узла обратной решетки представлены в логарифмическом масштабе с нормировкой на единицу.

На рис. 2 изображена расчетная карта дифракционной интенсивности в обратном пространстве и ее  $q_x$ - и  $q_z$ -сечения совершенного кристалла кремния толщиной  $L_x = 300$  мкм.

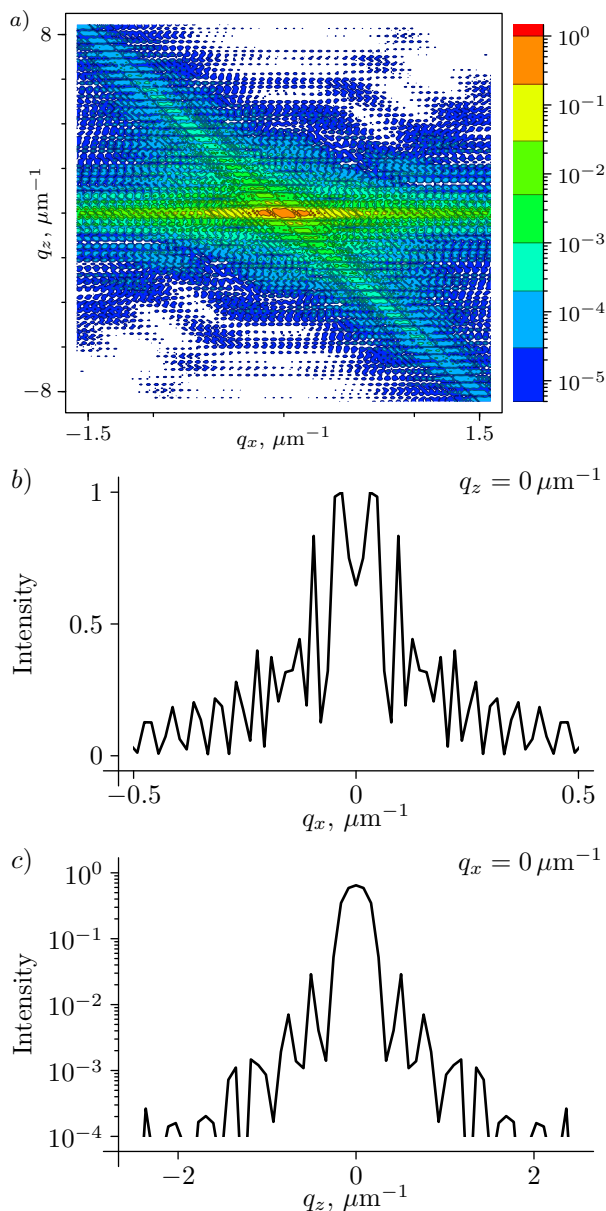


Рисунок 2. а) Расчетная карта распределения интенсивности Лауэ дифракции от совершенного кристалла кремния; б) и в)  $q_x$ - и  $q_z$ -сечения данной карты для кристалла толщиной 300 мкм.

Figure 2. a) Calculated reciprocal space map of the Laue diffraction from a perfect silicon crystal with a thickness of 300  $\mu m$ ; b) and c) are correspondent cross-sections of the reciprocal space map along  $q_x$  and  $q_z$ .

Результаты вычислений рентгеновской дифракции в термомиграционном канале показаны на рис. 3. Из-за упругих деформаций в канале на карте интенсивности рентгеновского рассеяния вблизи узла обратной решетки появляются два сильных дифракци-

онных максимума, сдвинутых в положительном направлении вдоль оси  $q_x$ . Для собственной деформации  $e^0 = 3.0 \cdot 10^{-5}$ , эти максимумы расположены на значения  $\Delta q_x = 1.18$  мкм $^{-1}$ ,  $\Delta q_z = -0.08$  мкм $^{-1}$  и  $\Delta q_x = 1.09$  мкм $^{-1}$ ,  $\Delta q_z = -1.60$  мкм $^{-1}$ . Это соответствует средней максимальной деформации в латеральном  $\varepsilon_{220}^{\Delta q_x} = 3.51 \cdot 10^{-5}$  и вертикальном  $\varepsilon_{220}^{\Delta q_z} = 2.63 \cdot 10^{-5}$  направлениях.

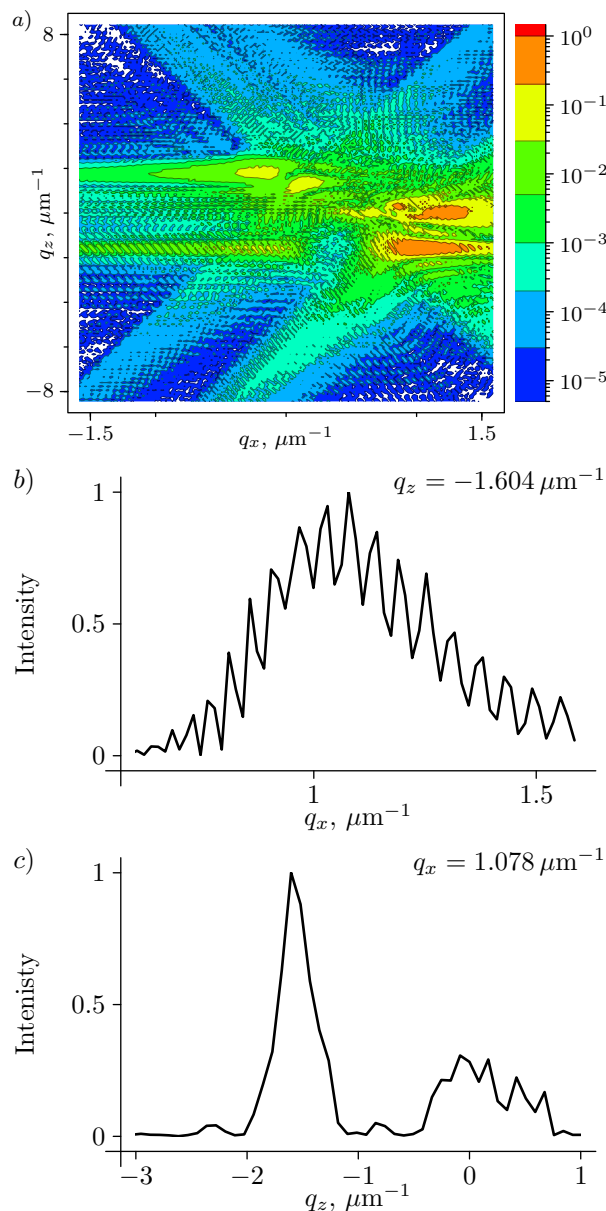


Рисунок 3. а) Расчетная карта распределения интенсивности Лауэ дифракции от термомиграционного канала  $Si(Al)$ ; б) и в)  $q_x$ - и  $q_z$ -сечения данной карты для канала  $Si(Al)$  толщиной 300 мкм. Собственная деформация  $e^0 = 3.0 \cdot 10^{-5}$ .

Figure 3. a) Calculated reciprocal space map of the Laue diffraction from a  $Si(Al)$  thermomigration channel with a thickness of 300  $\mu m$ ; b) and c) are correspondent cross-sections along  $q_x$  and  $q_z$ . The intrinsic strain is  $e^0 = 3.0 \cdot 10^{-5}$ .

Максимальная деформация возникает у входной и выходной поверхности канала, средняя деформация вдоль канала равна  $\varepsilon_{220}^{\Delta q_z} = 2.01 \cdot 10^{-5}$ .

## Заключение

Таким образом, численное моделирование и анализ карт интенсивности рентгеновского рассеяния вблизи узла обратной решетки позволяют определить деформации в кристалле с термомиграционными каналами.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## References

1. Holý, V. High-Resolution X-ray Scattering from Thin Films and Multilayers / V. Holý, U. Pietch, T. Baumbach // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 1999.
2. Iida, A. Separate measurements of dynamical and kinematical x-ray diffractions from silicon crystals with a triple crystal diffractometer / A. Iida, K. Kohra // Phys. Stat. Sol. (a) – 1979. – Vol. 51. – P. 533–542.
3. Lomov, A. Laue X-ray diffraction studies of the structural perfection of Al-doped thermomigration channels in silicon / A. A. Lomov, V. I. Punegov, B. M. Seredin // J. Appl. Cryst. – 2021. – Vol. 54. – P. 588–596.
4. Lomov, A. High-resolution X-ray Bragg diffraction in Al thermomigrated Si channels / A. A. Lomov, V. I. Punegov, A. Yu. Belov, B. M. Seredin // J. Appl. Cryst. – 2022. – Vol. 55. – P. 558–568.
5. Takagi, S. A Dynamical theory of diffraction applicable to crystals with any kind of small distortion / S. Takagi // Acta Cryst. – 1962. – Vol. 15, № 12. – P. 1311–1312.
6. Taupin, D. Theorie dynamique de la diffraction des rayons x par les cristaux deformes. / D. Taupin // Bull. Soc. Franc. Mineral. Crist. – 1964. – Vol. 87. – P. 469–511.
7. Epelboin, Y. Simulation of X-ray topographs. / Y. Epelboin // Mater. Sci. Eng. – 1985. – Vol. 73. – P. 1–43.
8. Punegov, V. Two-dimensional recurrence relations and Takagi-Taupin equations. I. Dynamical X-ray diffraction by a perfect crystal / V. I. Punegov, S. I. Kolosov // J. Appl. Cryst. – 2022. – Vol. 55. – P. 320–328.

## Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040400069-8.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, № 23-22-00062, <https://rscf.ru/project/23-22-00062/>.

## Acknowledgement (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040400069-8.

The research was financially supported by the grant of the Russian Science Foundation, № 23-22-00062, <https://rscf.ru/project/23-22-00062/>.

## Для цитирования:

Казаков, Д. В. К теории рентгеновской Лауэ дифракции в термомиграционном кристаллическом канале с легирующей примесью / Д. В. Казаков, А. В. Карпов, С. И. Колосов, Д. М. Мальков, В. И. Пунегов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 64–67.

## For citation:

Kazakov, D. V. On the theory of X-ray Laue diffraction in a thermomigration crystalline channel with a doping impurity / D. V. Kazakov, A. V. Karpov, S. I. Kolosov, D. M. Malkov, V. I. Punegov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2024. – № 5 (71). – P. 64–67.

Дата поступления рукописи: 17.05.2024

Received: 17.05.2024

## Асимметричная рентгеновская дифракция ограниченных пучков в кристаллах

С. И. Колосов, Д. М. Мальков, В. И. Пунегов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар

kolos@ipm.komisc.ru  
dimamalkov93@mail.ru  
vpunegov@ipm.komisc.ru

### Аннотация

Теоретически исследована асимметричная динамическая дифракция ограниченных рентгеновских пучков в кристаллах с применением уравнений Такаги-Топена, включая численное решение с использованием узловой сетки и вычисления рентгеновских полей в Фурье пространстве. Выполнено моделирование карт распределения интенсивности рассеяния от кристалла кремния вблизи узла обратной решетки в зависимости от размеров рентгеновских пучков.

### Ключевые слова:

асимметричная динамическая дифракция, ограниченные рентгеновские пучки, карты углового распределения интенсивности рассеяния в обратном пространстве

### Введение

Обычно при рассмотрении динамической теории дифракции в идеальном кристалле предполагается, что на поверхность образца падает неограниченная плоская рентгеновская волна [1]. Такая модель удобна, поскольку в уравнениях Такаги-Топена [2, 3], записанных в прямоугольной системе координат, сразу отбрасывается производная вдоль латерального направления, при этом дифракционная задача становится одномерной. С развитием метода высокоразрешающей трехосевой дифрактометрии [4] анализ углового распределения интенсивности рассеяния преимущественно выполняется с использованием карт в обратном пространстве (reciprocal space maps, RSM). Однако при условии бесконечно широкого фронта падающей рентгеновской волны угловое распределение интенсивности когерентного рассеяния в обратном пространстве вдоль горизонтальной оси сводится к  $\delta$ -функции, что делает невозможным визуализацию дифракционной картины на карте RSM. С другой стороны, в реальном эксперименте как падающий, так и дифракционно отраженный рентгеновский пучок латерально ограничен наличием имеющихся щелей и коллиматоров.

Ранее была разработана динамическая теория дифракции пространственно ограниченных рентгеновских

## Asymmetric X-ray diffraction of confined beams in crystals

S. I. Kolosov, D. M. Malkov, V. I. Punegov

Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,  
Syktyvkar

kolos@ipm.komisc.ru  
dimamalkov93@mail.ru  
vpunegov@ipm.komisc.ru

### Abstract

Asymmetric dynamic diffraction of confined X-ray beams in crystals has been theoretically studied using Takagi-Taupin equations, including numerical solution using nodal grid and calculations of X-ray fields in Fourier space. We have fulfilled simulation of scattering intensity distribution maps from silicon crystal near reciprocal lattice site depending on size of X-ray beams.

### Keywords:

asymmetric dynamic diffraction, limited X-ray beams, angular distribution maps of reciprocal space scattering intensity

пучков в совершенных кристаллах [5, 6]. Для простоты рассмотрение выполнено для симметричной брэгговской дифракции. Однако не менее важную роль играет изучение асимметричной рентгеновской дифракции [7]. Например, для получения почти параллельного синхротронного пучка от ондуляторного источника применялась дифракционная схема с последовательными ассиметричными отражениями [8]. Кроме того, ассиметричная дифракция широко используется для анализа процессов релаксации в эпитаксиальных слоях полупроводниковых материалов [9].

Цель настоящей работы состоит в анализе асимметричной динамической дифракции ограниченных рентгеновских пучков в кристалле в зависимости от размеров щелей в падающем и отраженном направлениях на основе уравнений Такаги-Топена [2, 3].

### 1. Решение для асимметричной дифракции в Фурье пространстве

Для описания асимметричной динамической дифракции рентгеновского пучка в кристалле введем прямоугольную систему координат (рис. 1), оси  $x$  и  $y$  которой параллельны входной поверхности, а ось  $z$  направлена вглубь

кристалла, при этом  $xOz$  – плоскость дифракции. Пусть рентгеновская волна падает на поверхность кристалла под углом  $\theta_1$ . Поперечный размер  $w_1$  рентгеновской волны ограничен щелью  $S_1$ , которая расположена на расстоянии  $L_{S1}$  до поверхности кристалла. Начало координат находится в центре падающего рентгеновского пучка.

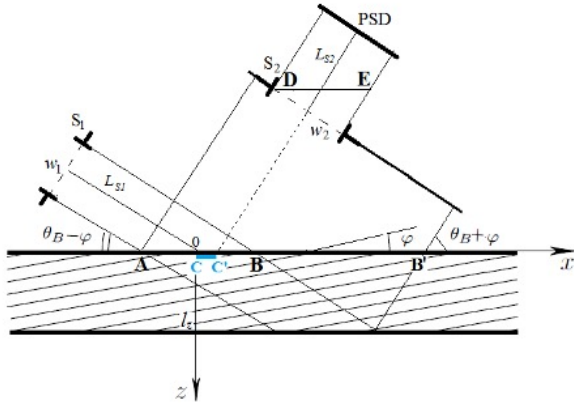


Рисунок 1. Схема асимметричной дифракции рентгеновского пучка, ограниченного щелью  $S_1$  шириной  $w_1$ , падающего на кристалл толщиной  $l_z$ . Дифракционная волна ограничена щелью  $S_2$ , ширина которой  $w_2$ . Дифракционная интенсивность регистрируется позиционно чувствительным детектором (PSD) или системой анализатор-детектор. Щель  $S_2$  может сдвигаться на расстояние  $l_x^{(sh)}$  (отрезок CC) вдоль оси  $x$ .  
Figure 1. Scheme of asymmetric X-ray beam diffraction, limited by a slit  $S_1$  of width  $w_1$ , incident on the crystal thickness  $l_z$ . The diffraction wave is limited by the gap  $S_2$ , whose width is  $w_2$ . Diffraction intensity is recorded with a position sensitive detector (PSD) or analyzer-detector system. The slit  $S_2$  can shift by a distance  $l_x^{(sh)}$  (segment CC) along the  $x$  axis.

Ширина освещения поверхности кристалла падающим рентгеновским пучком ограничена щелью  $S_1$  и равна  $l_x^{(in)} = w_1 / \sin \theta_1$ . Проекция поперечного размера выходящего из кристалла полного дифракционного излучения равна  $L_x^{(ex)}$ . Это излучение пространственно ограничивается щелью  $S_2$ , поперечный размер которой  $w_2$ . Расстояние от этой щели до позиционно чувствительного детектора или системы анализатор-детектор составляет  $L_{S2}$ . Проекция поперечного размера, проходящего через щель  $S_2$  рентгеновского пучка без учета дифракции на краях щели (приближение геометрической оптики), равна  $l_x^{(ex)} = w_2 / \sin \theta_B$  (рис. 1). Амплитуды рентгеновских волн зависят от координат  $(x, z)$ , при этом предполагается, что по координате  $y$ , перпендикулярной плоскости дифракции  $(x, z)$ , рентгеновское поле однородно и проинтегрировано по координате  $y$ . Уравнения Такаги-Топена [2, 3] в прямоугольной системе координат запишутся как

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{ctg} \theta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) E_0(\eta; x, z) &= \\ &= ia_0 E_0(\eta; x, z) + ia_{-h} E_h(\eta; x, z), \\ \left( \operatorname{ctg} \theta_2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \right) E_h(\eta; x, z) &= \\ &= i(ba_0 + \eta) E_h(\eta; x, z) + ia_h E_0(\eta; x, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\theta_{1,2} = \theta_B \mp \varphi$  – углы между нормалью к поверхности и падающим и отраженным пучком соответственно,  $\varphi$  – угол асимметрии. В системе уравнений (1) присутствуют следующие параметры:  $a_0 = \pi \chi_{00} / (\lambda \gamma_0)$ ,  $a_{h,\bar{h}} =$

$C \pi \chi_{h,\bar{h}} / (\lambda \gamma_{h,0})$ ,  $\gamma_{0,h} = \sin \theta_{1,2}$ ,  $b = \gamma_0 / \gamma_h$  – фактор асимметрии. Угловая переменная  $\eta = (k / \gamma_h) \sin(2\theta_B) \omega$  обычно используется в двухкристальной дифрактометрии в режиме  $\theta - 2\theta$  сканирования,  $\omega = \theta - \theta_B$  – отклонение падающей под углом  $\theta$  рентгеновской волны от угла Брэгга  $\theta_B$ ,  $k = 2\pi / \lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны рентгеновского излучения в вакууме,  $C$  – поляризационный фактор,  $\chi_g = -r_0 \lambda^2 F_g / (\pi V_c)$  ( $g = 0, h, \bar{h}$ ) – Фурье-компоненты рентгеновской поляризуемости,  $V_c$  – объем элементарной ячейки,  $r_0 = e^2 / (mc^2)$  – классический радиус электрона,  $e, m$  – заряд и масса электрона,  $F_g$  – структурный фактор.

Амплитуды рентгеновских волн  $E_{0,h}(\eta; x, z)$  зависят от координат  $(x, z)$ , при этом предполагается, что по координате  $y$ , перпендикулярной плоскости дифракции  $(x, z)$ , рентгеновское поле однородно и проинтегрировано по координате  $y$ .

Отметим, что в рассматриваемом случае в системе уравнений (1) нельзя пренебрегать производной по координате  $x$ , поскольку как падающая, так и отраженная волны пространственно ограничены в этом направлении.

После выполнения Фурье преобразования амплитуд рентгеновских полей в системе уравнений (1)

$$\begin{aligned} E_{0,h}(\eta; x, z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \hat{E}_{0,h}(k, \eta; z), \end{aligned} \quad (2)$$

где Фурье образы имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{E}_{0,h}(k, \eta; z) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ikx) E_{0,h}(\eta; x, z), \end{aligned} \quad (3)$$

получаем одномерные уравнения дифракции в Фурье пространстве [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}_0(k, \eta; z)}{\partial z} &= \\ &= i(a_0 - k \operatorname{ctg} \theta_1) \hat{E}_0(k, \eta; z) + ia_{-h} \hat{E}_h(k, \eta; z), \\ - \frac{\partial \hat{E}_h(k, \eta; z)}{\partial z} &= ia_h \hat{E}_0(k, \eta; z) + \\ &+ i(ba_0 + \eta - k \operatorname{ctg} \theta_2) \hat{E}_h(k, \eta; z). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя граничные условия [5] для амплитуды дифракционной рентгеновской волны, получаем

$$\begin{aligned} \hat{E}_h(q_x, q_z) &= \\ &= \frac{a_h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(i\xi l_z) - 1}{Q} Y_{in}(k) Y_{ex}(k - q_x), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $l_z$  – толщина кристалла,  $\xi = \sqrt{\psi^2 - 4a_h a_{\bar{h}}}$ ,  $\psi = (1+b)a_0 + \eta - k(\operatorname{ctg} \theta_1 + \operatorname{ctg} \theta_2)$ ,  $Q = \xi_1 \exp(i\xi l_z) - \xi_2$ ,  $\xi_{1,2} = (-\psi \pm \xi) / 2$ ,  $\eta = q_x \operatorname{ctg} \theta_B - q_z$ . Граничные коэффициенты имеют вид  $Y_{in}(k) = \frac{\sin(l_x^{(in)} k / 2)}{l_x^{(in)} k / 2}$ ,  $Y_{ex}(k - q_x) = \frac{\sin(l_x^{(ex)} [k - q_x] / 2)}{l_x^{(ex)} [k - q_x] / 2}$ . Проекция отклонения вектора дифракции от узла обратной решетки  $q_x$  и  $q_z$  связаны с углом

поворота образца  $\omega$  и анализатора  $\varepsilon$  следующими соотношениями:  $q_x = (2\pi/\lambda)[(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\omega - \sin\theta_2 \cdot \varepsilon]$ ,  $q_z = -(2\pi/\lambda)[\cos\theta_2 \cdot \varepsilon + (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\omega]$ .

## 2. Численное решение уравнений Такаги-Топена

Теперь применим численные методы для решения данной задачи, а именно используем метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для этого перепишем уравнения Такаги-Топена (1) в эквивалентном, но более удобном виде для численного интегрирования по оси  $x$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{tg}\theta_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) E_0(x, z) = \\ & = \frac{i\pi}{\lambda \cos\theta_1} \chi_0 E_0(x, z) + \frac{i\pi}{\lambda \cos\theta_1} \chi_{-g} E_h(x, z), \\ & \left( \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{tg}\theta_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) E_h(x, z) = \\ & = \frac{i\pi}{\lambda \cos\theta_2} (\chi_0 - \alpha) E_h(x, z) + \frac{i\pi}{\lambda \cos\theta_2} \chi_g E_0(x, z), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\theta_1 = \theta_B - \varphi$ ,  $\theta_2 = \theta_B + \varphi$ ,  $\alpha = -2 \sin 2\theta_B \Delta\theta$ .

Граничные условия для данной задачи:  $E_0(x, z = 0) = 1$  при  $0 \leq x \leq l$ , иначе  $E_0(x, z = 0) = 0$ ,  $E_h(x, z = L_z) = 0$ , где  $L_z$  – толщина кристалла,  $l$  – ширина засветки падающего пучка на поверхности кристалла.

Для численного интегрирования введем разностную сетку вдоль оси  $z$ :

$$\begin{aligned} z_n &= n \cdot \Delta z, \quad n = 0 \dots N_z, \quad z_0 = 0, \\ z_{N_z} &= L_z, \quad \Delta z = L_z / N_z, \end{aligned}$$

и аппроксимируем производные по  $z$  в каждом узле сетки  $z_n$  следующими выражениями

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E_0(x, z)}{\partial z} \right)_{z=z_n} &\approx \frac{E_0(x, z_{n+1}) - E_0(x, z_{n-1})}{2\Delta z}, \\ \left( \frac{\partial E_h(x, z)}{\partial z} \right)_{z=z_n} &\approx \frac{E_h(x, z_{n+1}) - E_h(x, z_{n-1})}{2\Delta z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти аппроксимации имеют второй порядок точности. На границах  $z = 0$  и  $z = L_z$  аппроксимации такого же порядка точности будут иметь вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E_h(x, z)}{\partial z} \right)_{z=0} &\approx \\ &\approx \frac{4E_h(x, z_1) - 3E_h(x, z_0) - E_h(x, z_2)}{2\Delta z}, \\ \left( \frac{\partial E_0(x, z)}{\partial z} \right)_{z=L_z} &\approx \\ &\approx \frac{E_0(x, z_{N_z-2}) - 4E_0(x, z_{N_z-1}) + 3E_0(x, z_{N_z})}{2\Delta z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Хотя разностные производные на сетке  $z_n$  были взяты второго порядка точности, так что полная численная схема не даст четвертый порядок точности, но схема Рунге-Кутты IV позволит выбирать более крупные шаги интегрирования

вдоль оси  $x$  в пределах интервала устойчивости, который для нашей схемы выглядит так:

$$\frac{\Delta x}{\Delta z} \leq \operatorname{ctg}\theta_B.$$

Подставив выражения (7) и (8) в систему уравнений Такаги (6), получим систему  $2N_z$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по переменной  $x$ , которую решаем численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Этот алгоритм численного решения является стандартным и описан в любом пособии по численным методам, а потому здесь не излагается.

Рассчитав значения амплитуды дифрагированной волны на верхней поверхности кристалла, найдем суммарную амплитуду отраженной волны

$$S(q_x, q_z) = \int_0^l E_h(x, z = 0; q_x \operatorname{ctg}\theta_B - q_z) e^{-iq_x x} dx$$

и соответствующую интенсивность, идущую в детектор

$$I(q_x, q_z) = |S(q_x, q_z)|^2.$$

## 3. Моделирование карт асимметричной дифракции в обратном пространстве

Численные расчеты распределения интенсивности рассеяния вблизи узла обратной решетки выполнены с использованием двух подходов интегрирования уравнений Такаги-Топена. Для расчетов применялись данные асимметричного Si(224) отражения  $\sigma$ -поляризованного рентгеновского  $\text{CuK}_{\alpha_1}$ -излучения. Длина первичной экстинкции составляла  $l_{ext} = 5,1 \mu\text{m}$ . Угол Брэгга для выбранного отражения равен  $44$  угл. град., межплоскостное расстояние  $d_{224} = 1,1 \text{ \AA}$ . В расчетах толщина кристалла  $l_z = 100 \mu\text{m}$ . Угол асимметрии  $\varphi = 35,3^\circ$ , угол падения рентгеновского пучка  $\theta_1 = 8,8^\circ$ , угол отражения  $-\theta_2 = 79,3^\circ$ .

На рис. 2 показаны расчетные карты RSM асимметричной дифракции Si(224) для разных размеров рентгеновских пучков. При падении рентгеновского пучка поперечного размера  $w_1 = 16 \mu\text{m}$  под углом  $\theta_1 = 8,8^\circ$  ширина засветки поверхности кристалла равна  $l_x^{(in)} = 105 \mu\text{m}$ . Проекция поперечного размера  $103 \mu\text{m}$ , проходящего через щель  $S_2$ , рентгеновского пучка на латеральное направление, также равна  $l_x^{(ex)} = 105 \mu\text{m}$ . Контуры равной интенсивности дифракционного рассеяния в обратном пространстве для этого случая демонстрирует рис. 2а. Дважды увеличивая размер падающего пучка ( $w_1 = 32 \mu\text{m}$ ), ширина засветки также увеличивается в два раза,  $l_x^{(ex)} = 210 \mu\text{m}$ . Увеличивая также дважды размер выходной щели  $S_2$ , получаем  $l_x^{(ex)} = 210 \mu\text{m}$ . Карта RSM для этого случая показана на рис. 2б, которая по контуру похожа на карту на рис. 1а, но с более сконцентрированным угловым распределением интенсивности рентгеновского рассеяния. Малые размеры щелей приводят к более широкому угловому распределению дифрагированной интенсивности вблизи узла обратной решетки (рис. 2с). С другой стороны, широкая выходная щель  $S_2$  сжимает дифракционную картину к интенсивности главного дифракционного максимума (рис. 2д).



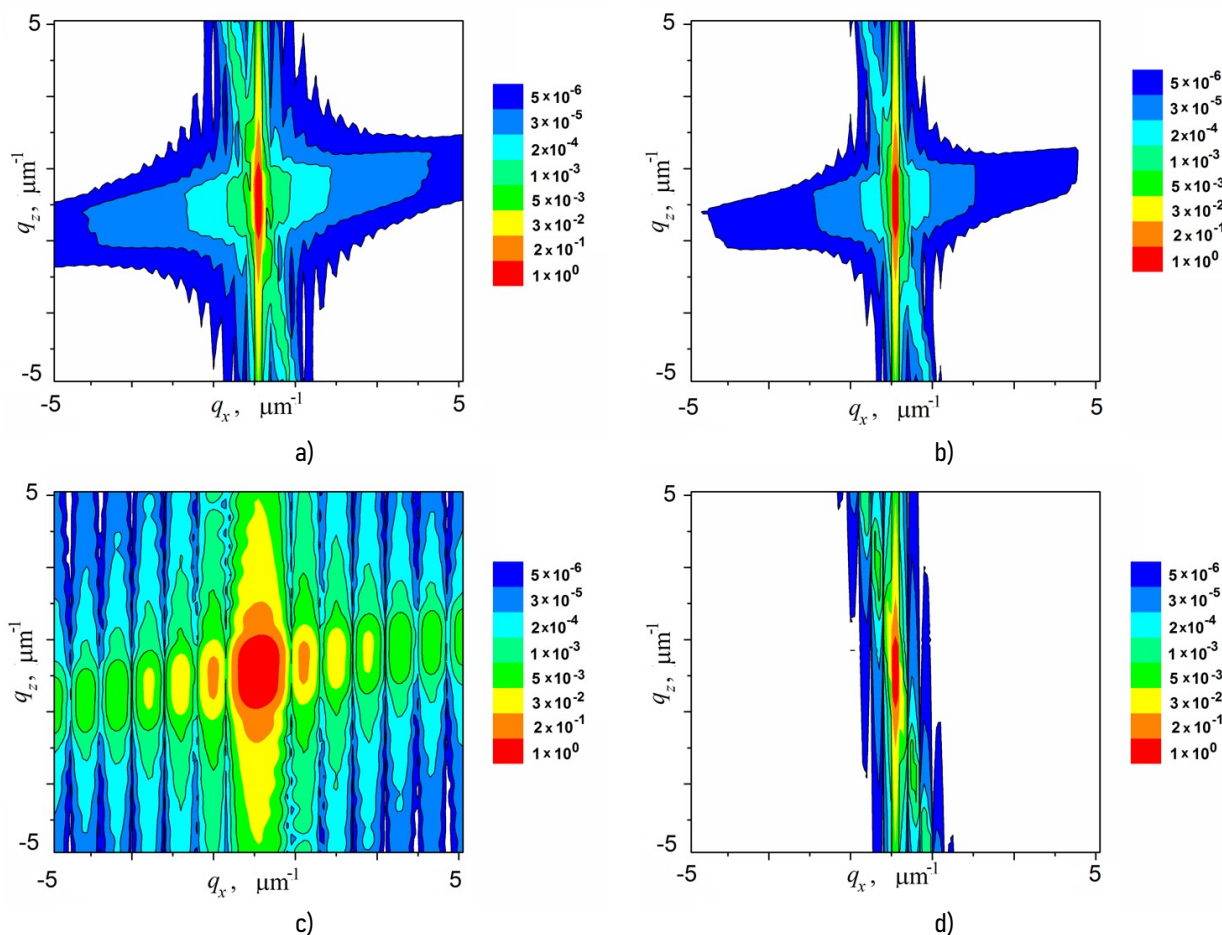


Рисунок 2. Расчетные карты RSM асимметричной дифракции Si(224) для разных размеров падающего и дифрагированного рентгеновского пучка: а)  $w_1 = 16 \mu\text{m}$ ,  $w_2 = 104 \mu\text{m}$ ; б)  $w_1 = 32 \mu\text{m}$ ,  $w_2 = 208 \mu\text{m}$ ; в)  $w_1 = 16 \mu\text{m}$ ,  $w_2 = 8 \mu\text{m}$ ; д)  $w_1 = 16 \mu\text{m}$ ,  $w_2 = 500 \mu\text{m}$ .  
 Figure 2. Calculated RSM maps of asymmetric Si(224) diffraction for different sizes of the incident and diffracted X-ray beam: а)  $w_1 = 16 \mu\text{m}$ ,  $w_2 = 104 \mu\text{m}$ ; б)  $w_1 = 32 \mu\text{m}$ ,  $w_2 = 208 \mu\text{m}$ ; в)  $w_1 = 16 \mu\text{m}$ ,  $w_2 = 8 \mu\text{m}$ ; д)  $w_1 = 16 \mu\text{m}$ ,  $w_2 = 500 \mu\text{m}$ .

## Заключение

На основе двумерных уравнений Такаги-Топена [2, 3] разработаны два алгоритма численных расчетов углового распределения интенсивности когерентного рассеяния в обратном пространстве в асимметричной брэгговской геометрии. Показано влияние размера падающего и отраженного рентгеновского пучка на угловое распределение интенсивности рассеяния. Предложенные методы расчетов карт RSM будут весьма полезны для анализа экспериментальных данных асимметричной рентгеновской дифракции от монокристаллов и эпитаксиальных пленок.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Литература (References)

1. Authier, A. Dynamical theory of X-ray diffraction / A. Authier. – New York: Oxford University Press, 2001.
2. Takagi, S. Dynamical theory of diffraction applicable to crystals with any kind of small distortion / S. Takagi // Acta Cryst. – 1962. – Vol. 15, № 12. – P. 1311–1312.
3. Taupin, D. Theorie dynamique de la diffraction des rayons x par les cristaux deformes / D. Taupin // Bull. Soc. Franc. Mineral. Crist. – 1964. – Vol. 87. – P. 469–511.
4. Iida, A. Separate measurements of dynamical and kinematical X-ray diffractions from silicon crystals with a triple crystal diffractometer / A. Iida, K. Kohra // Phys. Stat. Sol. (a) – 1979. – Vol. 51. – P. 533–542.
5. Punegov, V. I. Applications of dynamical theory of X-ray diffraction by perfect crystals to reciprocal space mapping / V. I. Punegov, K. M. Pavlov, A. V. Karpov, N. N. Faleev // J. Appl. Cryst. – 2017. – Vol. 50. – P. 1256–1266.
6. Punegov, V. I. X-ray microbeam diffraction in a crystal / V. I. Punegov, A. V. Karpov // Acta Cryst. – 2021. – Vol. A 77. – P. 117–125.
7. Afanasev, A. M., Asymmetric x-ray diffraction / A. M. Afanasev, R. M. Imamov, E. Kh. Mukhamedzhanov // Crystallogr. Rev. – 1992. – Vol. 3. – P. 157–230.
8. Tsusaka, Y. Formation of parallel X-ray microbeam and its application / Y. Tsusaka, K. Yokoyama, S. Takeda, M. Urakawa, Y. Kagoshima [et al.] // Jpn. J. Appl. Phys. – 2000. – Vol. 39. – P. 635–637.
9. Bremner, S. P. Impact of stress relaxation in GaAsSb cladding layers on quantum dot creation in InAs/GaAsSb structures grown on GaAs (001) / S. P. Bremner, K.-Y. Ban, N. N. Faleev, C. B. Honsberg, D. J. Smith // J. Appl. Phys. – 2013. – Vol. 114. – P. 103511 (1–9).

**Благодарность (госзадание)**

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040400069-8.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, № 23-22-00062, <https://rscf.ru/project/23-22-00062/>.

**Acknowledgement (state task)**

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040400069-8.

The research was financially supported by the grant of the Russian Science Foundation, № 23-22-00062, <https://rscf.ru/project/23-22-00062/>.

**Для цитирования:**

Колосов, С. И. Асимметричная рентгеновская дифракция ограниченных пучков в кристаллах / С. И. Колосов, Д. М. Мальков, В. И. Пунегов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 68–72.

**For citation:**

Kolosov, S. I. Asymmetric X-ray diffraction of confined beams in crystals / S. I. Kolosov, D. M. Malkov, V. I. Punegov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2024. – № 5 (71). – P. 68–72.

Дата поступления рукописи: 12.04.2024

Received: 12.04.2024



## Влияние числа Куранта на результаты численного моделирования распространения сигналов в недиспергирующих однородных средах

П. А. Макаров<sup>1</sup>, Р. Н. Скандаков<sup>1</sup>, В. А. Устюгов<sup>2</sup>,  
В. И. Щеглов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,

г. Сыктывкар

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»,

г. Сыктывкар

<sup>3</sup>ИРЭ им. Котельникова РАН,

г. Москва

makarovpa@ipm.komisc.ru

scanick@pmi.komisc.ru

ustyugov@syktsu.ru

vshcheg@cplire.ru

### Аннотация

Работа посвящена исследованию связи численной дисперсии, возникающей при FDTD-моделировании распространения электромагнитных сигналов в недиспергирующих однородных средах, оптически отличных от вакуума, с числом Куранта в 2D-случае. Основные результаты сформулированы в форме четырех утверждений, а также ряда следствий и замечаний, определяющих характер численной дисперсии, оптимальное значение числа Куранта и границы применимости метода. Доказано, что оптимальный выбор числа Куранта устраняет численную дисперсию и расширяет возможности разработанного численного алгоритма на среды, оптически менее плотные, чем вакуум, а также левые среды.

### Ключевые слова:

электродинамика, моделирование, метод FDTD, численный эксперимент

### Введение

Численные методы решения волновых уравнений играют важную роль не только в конкретных технических приложениях, но и в фундаментальной науке в целом. К таким методам относится и FDTD (Finite-Difference Time-Domain) [1], некоторые особенности которого и являются предметом данной работы.

Основное достоинство метода FDTD — простота реализации расчетного алгоритма. Именно это обуславливает широкое применение FDTD в самых разнообразных приложениях: биологии и медицине [2–5], экологии, геологии и минералогии [6, 7], оптике, фотонике, электронике, связи

## Impact of Courant number on the results of numerical simulating of signal propagation in non-dispersive homogeneous media

P. A. Makarov<sup>1</sup>, R. N. Skandakov<sup>1</sup>, V. A. Ustyugov<sup>2</sup>,  
V. I. Shcheglov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Physics and Mathematics,

Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,

Syktывkar

<sup>2</sup>Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Pitirim Sorokin Syktывkar State University", Syktывkar

<sup>3</sup>Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, RAS,

Moscow

makarovpa@ipm.komisc.ru

scanick@pmi.komisc.ru

ustyugov@syktsu.ru

vshcheg@cplire.ru

### Abstract

The paper is devoted to the study of the connection between the numerical dispersion arising in FDTD modeling of electromagnetic signal propagation in nondispersive homogeneous media optically different from vacuum and the Courant number in the 2D case. The main results are formulated in the form of four statements, as well as a number of corollaries and remarks that determine the nature of the numerical dispersion, the optimal value of the Courant number and the limitations of the method. It is proved that the optimal choice of the Courant number eliminates the numerical dispersion and extends the capabilities of the developed numerical algorithm to media, which refractive index is lesser than refractive index of vacuum, as well as media with negative refraction.

### Keywords:

electrodynamics, simulation, FDTD method, numerical experiment

и телекоммуникациях [8–13]. Кроме множества статей, так или иначе связанных с методом FDTD, на эту тему имеется и обширная учебная литература [14–17].

Несмотря на давнюю историю развития, внимание исследователя по-прежнему привлекают фундаментальные основы метода FDTD. К числу этих основ относится и вопрос оценки корректности решений, полученных методом FDTD в разнообразных постановках задачи для сигналов с различной формой спектра [14, 17, 18].

Хорошо известно (см., например, учебную литературу [14–17]), что основным параметром, регламентирующим

точность вычислений методом FDTD, является число Куранта, которое для 2D-случая (1 пространственное + 1 временное измерение) имеет вид

$$S_c = \frac{c\Delta_t}{\Delta_x} \quad (1)$$

и связывает вместе основной физический параметр  $c$  — скорость света в вакууме с численными параметрами задачи  $\Delta_x$  и  $\Delta_t$ , определяющими шаг дискретизации пространства-времени.

*Замечание 1.* Качество численного решения определяется не только выбором значения числа Куранта  $S_c$ , но и требованием к спектральному составу сигнала, а также уровнем начального тока его источника (см. Утверждение 2 в нашей предыдущей работе [18]). Именно влиянию последних двух факторов и была посвящена статья [18], в которой число Куранта было выбрано оптимальным образом для моделирования электромагнитных процессов в вакууме, а именно — было положено, что  $S_c = 1$ . Данное исследование является логическим продолжением работы [18].

## 1. Мотивация и цель работы

Выбор  $S_c = 1$  в общем случае не обеспечивает качество получаемого численного решения в однородных недиспергирующих средах, оптически отличных от вакуума. Это можно легко увидеть, изучая рис. 1 и 2.

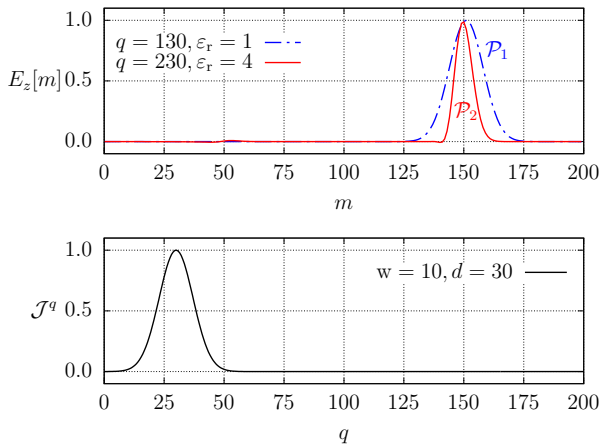


Рисунок 1. Моделирование распространения импульсов гауссова вида в вакууме  $\mathcal{P}_1$  и диэлектрике  $\mathcal{P}_2$  с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r = 4$ .

Figure 1. Simulating of the propagation of Gaussian form pulses in vacuum  $\mathcal{P}_1$  and dielectric  $\mathcal{P}_2$  with relative permittivity  $\epsilon_r = 4$ .

Рисунки 1 и 2 построены в соответствии с алгоритмом Йи, подробно обсуждавшимся нами в предыдущей работе [18] (см. там формулы (13), (19)–(21)), с той разницей, что теперь уравнения обновления (19)–(20) в явном виде учитывают материальные параметры среды (а именно — ее диэлектрическую  $\epsilon_r$  и магнитную  $\mu_r$  проницаемости), в которой распространяются сигналы

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] + \frac{S_c}{\eta\mu_r} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]), \quad (2)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] - \mathcal{J}^{q+\frac{1}{2}}[m] + \frac{S_c\eta}{\epsilon_r} \left( H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ m - \frac{1}{2} \right] \right), \quad (3)$$

а простейшие поглощающие граничные условия (21) из [18] заменены нами на более общие уравнения, построенные на основе дифференциальных уравнений адвекции электромагнитного поля второго порядка точности. Все детали реализации данной схемы подробно изложены в статье [18] и пособии [14].

*Замечание 2.* Моделирование работы направленного источника тока в формализме TF/SF в данной статье также претерпело некоторые изменения по сравнению с [18] и сводится к вычислению полей по схеме

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[ s - \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[ s - \frac{1}{2} \right] - \frac{S_c}{\eta\mu_r} E_z^{\text{inc}} [0, q], \quad (4)$$

$$E_z^{q+1}[s] = E_z^q[s] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} E_z^{\text{inc}} \left[ -\frac{1}{2}, q + \frac{1}{2} \right]. \quad (5)$$

Здесь (как и в работе [18])  $s = 50$  — это фиксированный во всех численных экспериментах номер узла сетки, задающий расположение в пространстве точечной антенны, формирующей падающее поле  $E_z^{\text{inc}}$ . Вычисление электрического  $E_z[s]$  и магнитного  $H_y[s - \frac{1}{2}]$  полей, согласно (4), (5) по заданному типу падающей волны  $E_z^{\text{inc}}$ , позволяет имитировать работу источника тока  $\mathcal{J}^q$ , формирующего волну, излучаемую в правую область сетки  $m \geq s$ . В дальнейшем везде под работой источника тока  $\mathcal{J}^q$  будем иметь в виду именно эту схему.

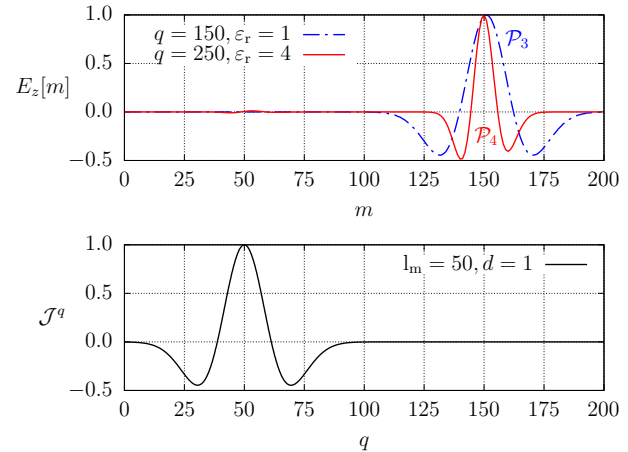


Рисунок 2. Моделирование распространения импульсов в форме вейвлета Рикера в вакууме  $\mathcal{P}_3$  и диэлектрике  $\mathcal{P}_4$  с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r = 4$ .

Figure 2. Simulating of pulse propagation in the form of a Ricker wavelet in vacuum  $\mathcal{P}_3$  and dielectric  $\mathcal{P}_4$  with relative permittivity  $\epsilon_r = 4$ .

Параметры источников тока  $\mathcal{J}^q$ , формирующих сигналы, представленные на рис. 1 и 2, также подробно описаны нами в работе [18] (см. там формулы (32)–(34) и соответствующий текст) и выбраны такими, чтобы импульсы  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_3$ , распространяющиеся в вакууме, можно было считать корректным численным решением задачи в смысле Определения 2, данного в [18]. Исходя из этого, импульсы  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_3$  можно считать «опорными», сравнивая с которыми

импульсы  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{P}_4$  соответственно, легко оценить влияние среды на корректность численного решения задачи.

Рисунки 1 и 2 построены при одном и том же значении числа Куранта  $S_c = 1$ , для которого в источнике [14] утверждается, что оно минимизирует численные ошибки FDTD-расчета, а в пособии [17] заявлено, что такой выбор позволяет получить точное решение задачи.

Вместе с тем, совершенно очевидно, что FDTD-решения, изображенные импульсами  $\mathcal{P}_2$  на рис. 1 и  $\mathcal{P}_4$  на рис. 2, не являются корректными в смысле Определения 2, данного нами в работе [18], что находится в явном противоречии с отмеченным в предыдущем абзаце. Эта некорректность есть результат явления, повсеместно возникающего при численных расчетах методом FDTD и известного в литературе [14, 17] под названием «численная дисперсия».

Действительно, сигналы  $\mathcal{P}_2$  на рис. 1 и  $\mathcal{P}_4$  на рис. 2 не представляют собой ни исходный гауссов импульс, ни вейвлет Рикера соответственно. При распространении данных волновых пакетов в диэлектрике с  $\epsilon_r = 4$  за достаточно длительное время ( $\Delta q = 230$  и  $250$  соответственно) их форма существенно искажилась (отметим, что этот эффект при использованных параметрах достаточно слаб и отчетливо начинает проявляться только к концу моделирования). Это противоречит изначальной математической модели симулируемого нами явления, так как среда полагалась нами недиспергирующей. Это явное противоречие порождает закономерный вопрос: может ли метод FDTD вообще использоваться для получения корректных результатов моделирования распространения сигналов в недиспергирующих материалах? И если это возможно, то как на корректность получаемых решений влияет выбор числа Куранта  $S_c$ ?

Несмотря на отмеченное выше противоречие, метод FDTD был использован нами ранее в ряде работ, в которых либо рассматривалось распространение волн в случайно-неоднородных средах [12, 13], либо исследовались особенности решения однородной и неоднородной задач Коши методом FDTD [18]. И в первом, и во втором случаях все проблемы, связанные с численной дисперсией, полностью игнорировались, что отчасти обусловлено тем, что во всех этих работах существенную часть трассы, вдоль которой рассматривалось распространение электромагнитных сигналов, представляло собой воздушное пространство (моделируемое нами неотличимым от вакуума). Вместе с тем, подобное игнорирование данной стороны дела не может быть полностью оправданным, что требует, если не полной корректировки численной дисперсии, то хотя бы уточнения эффектов, связанных с ней.

Далее отметим, что в книге [14] без каких-либо доказательств постулируется, что значение  $S_c = 1$  — максимально возможное, что, вообще говоря, абсолютно не соответствует смыслу определения (1), которое не накладывает никаких ограничений на произвольно выбираемые пространственно-временные шаги сетки  $\Delta_x$  и  $\Delta_t$  и их соотношение между собой. В источнике [17] более осторожно утверждается, что выбор  $S_c > 1$  приводит к экспоненциальному нарастанию шума, вызванному ошибками округления, всегда имеющими место при численном моделирова-

нии, что в конечном счете полностью разрушает полученное решение.

*Замечание 3.* Следует также отметить, что в работах [14] и [17] числами Куранта называются разные величины, что создает дополнительные трудности для понимания всех отмеченных вопросов. Это связано с тем, что в [14] в определении (1) величина  $c$  — это скорость света в вакууме (как принято и нами в данной работе), в то время как в [17] считается, что  $c$  — это скорость распространения волны в данной конкретной среде.

Кроме уже отмеченных проблем, также возникает вопрос о возможности применения метода FDTD для моделирования электродинамики в «не самых обыкновенных средах» (пусть и в пренебрежении явлением дисперсии). Здесь имеются в виду следующие примеры: распространение радиоволн в ионосфере Земли [19], электромагнитные волны терагерцового или рентгеновского диапазона в проводниках, полупроводниках или диэлектриках [20, 21], среды с отрицательными значениями относительных проницаемостей (в частности, «левые» среды [22–25]). Во всех этих случаях решающую роль играет дисперсия электромагнитных волн, аномальный характер которой с математической стороны дела состоит в том, что проницаемости  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$  могут принимать значения, меньшие единицы, и даже более того, — отрицательные.

При этом обычные алгоритмы, встречающиеся в литературе по методу FDTD [1, 12–18], не позволяют моделировать распространение электромагнитных волн в таких средах, просто задавая значения  $0 < \epsilon_r, \mu_r < 1$  и  $\epsilon_r, \mu_r < 0$ .

Решению отмеченных вопросов и посвящена настоящая статья, цель которой состоит, таким образом, в рассмотрении численной дисперсии метода FDTD и оценке влияния выбора значений числа Куранта на качество моделирования распространения сигналов в однородных недиспергирующих средах.

## 2. Численная дисперсия в методе FDTD

Для получения выражения, описывающего численную дисперсию в сетке  $\mathcal{Y}$ , вернемся к исходным дискретным аналогам уравнений Ампера (3) и Фарадея (2), которые в более компактной и удобной форме можно записать с помощью операторов сдвига в пространственно-временной сетке  $\hat{S}_x^\chi$  и  $\hat{S}_t^\tau$  (здесь  $\chi$  и  $\tau$  — параметры сдвига, имеющие форму  $\chi, \tau = p/2, \forall p \in \mathbb{Z}$ ). Действие этих операторов по определению имеет вид

$$\hat{S}_x^\chi : \hat{S}_x^\chi \psi^q[m] = \psi^q[m + \chi], \quad (6)$$

$$\hat{S}_t^\tau : \hat{S}_t^\tau \psi^q[m] = \psi^{q+\tau}[m], \quad (7)$$

где  $\psi$  обозначает произвольную компоненту электромагнитного поля (в рассматриваемом нами 2D-случае —  $E_z$  или  $H_y$ ).

Несложно проверить, что с помощью операторов (6) и (7) уравнение Ампера (3) в отсутствие сторонних источников ( $\mathcal{J} = 0$ ) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} \widehat{S}_t^{\frac{1}{2}} \varepsilon \left( \frac{\widehat{S}_t^{\frac{1}{2}} - \widehat{S}_t^{-\frac{1}{2}}}{\Delta_t} \right) E_z^q[m] &= \\ &= \widehat{S}_t^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\widehat{S}_x^{\frac{1}{2}} - \widehat{S}_x^{-\frac{1}{2}}}{\Delta_x} \right) H_y^q[m]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь учтено определение числа Куранта (1), связь скорости света в вакууме с его диэлектрической  $\varepsilon_0$  и магнитной  $\mu_0$  проницаемостями  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  и выражение для характеристического импеданса вакуума  $\eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 120\pi$  (для справки см., например, учебники [20, 21]). Кроме того, при записи (8) используется обозначение для абсолютной диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ .

Определим для удобства также конечно-разностные операторы  $\tilde{\partial}_i$  согласно

$$\tilde{\partial}_i = \frac{\widehat{S}_i^{\frac{1}{2}} - \widehat{S}_i^{-\frac{1}{2}}}{\Delta_i}, \quad (9)$$

где  $i$  — это  $x$  или  $t$ . С помощью (9) закон Ампера в стационарной среде без сторонних токов (8) окончательно может быть записан в форме Йи [14]

$$\varepsilon \widehat{S}_t^{\frac{1}{2}} \tilde{\partial}_t E_z^q[m] = \widehat{S}_t^{\frac{1}{2}} \tilde{\partial}_x H_y^q[m]. \quad (10)$$

Таким же образом, с помощью (6), (7) и (9), дискретный аналог закона Фарадея (2) приводится к форме Йи

$$\mu \widehat{S}_x^{\frac{1}{2}} \tilde{\partial}_t H_y^q[m] = \widehat{S}_x^{\frac{1}{2}} \tilde{\partial}_x E_z^q[m]. \quad (11)$$

Теперь рассмотрим плоскую монохроматическую волну частоты  $\omega$ , распространяющуюся в сетке Йи вправо ( $m \geq s$ )

$$E_z^q[m] = E_0 e^{i(\omega q \Delta_t - \tilde{\beta} m \Delta_x)}, \quad (12)$$

$$H_y^q[m] = H_0 e^{i(\omega q \Delta_t - \tilde{\beta} m \Delta_x)}, \quad (13)$$

где  $\tilde{\beta}$  — волновое число, т. е. постоянная распространения плоской монохроматической волны в FDTD-сетке (отличающаяся от соответствующей константы  $\beta$  в непрерывном пространстве), а  $E_0$  и  $H_0$  — комплексные амплитуды напряженности электрического и магнитного полей.

**Лемма 1.** Действие операторов (9) на произвольную компоненту  $\psi$  плоской монохроматической волны (12), (13) сводится к

$$\tilde{\partial}_t \psi = i \frac{2}{\Delta_t} \sin \left( \frac{\omega \Delta_t}{2} \right) \psi, \quad (14)$$

$$\tilde{\partial}_x \psi = -i \frac{2}{\Delta_x} \sin \left( \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2} \right) \psi. \quad (15)$$

*Доказательство.* Проверяется непосредственной подстановкой (12), (13) в (9) с учетом (6), (7). Выпишем здесь в явном виде только действие на  $\psi$  операторов сдвига (6), (7) при параметрах  $\chi, \tau = \pm \frac{1}{2}$

$$\widehat{S}_t^{\pm \frac{1}{2}} \psi = e^{\pm i \omega \Delta_t / 2} \psi, \quad \widehat{S}_x^{\pm \frac{1}{2}} \psi = e^{\mp i \tilde{\beta} \Delta_x / 2} \psi, \quad (16)$$

с помощью которых равенства (14) и (15) получаются элементарно.  $\square$

**Утверждение 1.** Дисперсионное соотношение для сетки Йи может быть представлено в форме

$$\sin \left( \frac{\omega \Delta_t}{2} \right) = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\varepsilon \mu \Delta_x}} \sin \left( \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2} \right). \quad (17)$$

*Доказательство.* Используя результаты (14) и (15) Леммы 1, а также (16) в законе Ампера (10) для плоской монохроматической волны, запишем

$$\begin{aligned} i \varepsilon \frac{2}{\Delta_t} \sin \left( \frac{\omega \Delta_t}{2} \right) e^{i \omega \Delta_t / 2} E_z^q[m] &= \\ &= -i \frac{2}{\Delta_x} \sin \left( \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2} \right) e^{i \omega \Delta_t / 2} H_y^q[m]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя в последнее равенство явные выражения полей (12), (13) для плоской монохроматической волны и сокращая общие множители, получаем

$$\varepsilon \frac{1}{\Delta_t} \sin \left( \frac{\omega \Delta_t}{2} \right) E_0 = -\frac{1}{\Delta_x} \sin \left( \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2} \right) H_0. \quad (19)$$

Отсюда приходим к выражению для численного импеданса в сетке Йи

$$\frac{E_0}{H_0} = -\frac{\Delta_t}{\varepsilon \Delta_x} \cdot \frac{\sin \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2}}{\sin \frac{\omega \Delta_t}{2}}. \quad (20)$$

Выполняя аналогичные действия применительно к закону Фарадея (11), последовательно получаем

$$\begin{aligned} i \mu \frac{2}{\Delta_t} \sin \left( \frac{\omega \Delta_t}{2} \right) e^{-i \tilde{\beta} \Delta_x / 2} H_y^q[m] &= \\ &= -i \frac{2}{\Delta_x} \sin \left( \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2} \right) e^{-i \tilde{\beta} \Delta_x / 2} E_z^q[m], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mu \frac{1}{\Delta_t} \sin \left( \frac{\omega \Delta_t}{2} \right) H_0 = -\frac{1}{\Delta_x} \sin \left( \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2} \right) E_0 \quad (22)$$

и соответствующий импеданс в форме

$$\frac{E_0}{H_0} = -\frac{\mu \Delta_x}{\Delta_t} \cdot \frac{\sin \frac{\omega \Delta_t}{2}}{\sin \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2}}. \quad (23)$$

Приравнявая правые части (20) и (23) и выполняя в полученном равенстве перекрестное произведение сомножителей, получаем

$$\sin^2 \left( \frac{\omega \Delta_t}{2} \right) = \frac{\Delta_t^2}{\varepsilon \mu \Delta_x^2} \sin^2 \left( \frac{\tilde{\beta} \Delta_x}{2} \right). \quad (24)$$

Извлекая квадратный корень в последнем равенстве, окончательно приходим к (17), что и завершает доказательство.  $\square$

*Замечание 4.* Дисперсионное соотношение (17) метода FDTD существенно отличается от своего непрерывного аналога, имеющего вид [20, 21]

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (25)$$

Вместе с тем отметим, что это отличие становится исчезающе малым при достаточно малой дискретизации пространства-времени. Действительно, сохраняя в рядах Тейлора разложения синуса при  $\Delta_t$  и  $\Delta_x \rightarrow 0$  только слагаемые первого порядка малости, из (17) легко получить

$$\tilde{\beta} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (26)$$

Подчеркнем, однако, что (26) справедливо только в пределе бесконечно малой дискретизации  $\Delta_t, \Delta_x \rightarrow 0$ . В общем же случае конечной дискретизации пространства-времени фазовые скорости волны в FDTD-сетке  $\tilde{c}_p$  и в непрерывном пространстве  $c_p$  будут отличны.

**Утверждение 2.** Отклонение фазовой скорости волны в сетке  $\tilde{c}_p$  от соответствующего значения в непрерывном случае может быть описано равенством

$$\frac{\tilde{c}_p}{c_p} = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{N_\lambda \arcsin\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right]}, \quad (27)$$

где параметр  $N_\lambda$  — есть число узлов пространственной сетки на длину волны в свободном пространстве

$$\lambda = N_\lambda \Delta_x. \quad (28)$$

*Доказательство.* Используем связь фазовой скорости с волновым числом в непрерывном пространстве [20, 21] и FDTD-сетке

$$c_p = \frac{\omega}{\beta}, \quad \tilde{c}_p = \frac{\omega}{\tilde{\beta}}, \quad (29)$$

что позволяет привести левую часть равенства (27) к виду

$$\frac{\tilde{c}_p}{c_p} = \frac{\beta}{\tilde{\beta}} = \frac{\frac{\beta\Delta_x}{2}}{\frac{\tilde{\beta}\Delta_x}{2}}. \quad (30)$$

Далее применим (25) к числителю последнего равенства

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi\frac{c}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}, \quad (31)$$

где длина волны в вакууме  $\lambda$  дискретизуется согласно (28), что дает

$$\frac{\beta\Delta_x}{2} = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{N_\lambda}. \quad (32)$$

Применяя теперь к знаменателю правой части (30) дисперсионное соотношение (17), в котором используются преобразования аналогичные (31), а также определение числа Куранта (1) совместно с (28), получаем

$$\frac{\tilde{\beta}\Delta_x}{2} = \arcsin\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right]. \quad (33)$$

Подстановка двух последних равенств в (30) приводит к результату (27), что завершает доказательство.  $\square$

Соотношение (27) в рамках ограничений, рассматриваемых в настоящей статье (согласно которым исследуются недиспергирующие однородные среды, для которых  $\varepsilon_r$  и  $\mu_r$  — есть некоторые действительные константы), имеет очевидный смысл на следующей области определения параметров:

$$N_\lambda \in \mathbb{N} \setminus 1, \quad \varepsilon_r, \mu_r, S_c \in (0, +\infty) \subset \mathbb{R}, \quad (34)$$

где ни множество натуральных чисел, больших единицы  $\mathbb{N} \setminus 1$ , ни множество положительных вещественных чисел считаются не содержащими непосредственно элемент  $+\infty$ . Выход за рамки области определения (34) требует отдельного подробного исследования, и мы вернемся к нему в последнем разделе данной статьи.

Прежде чем перейти к обсуждению особенностей выражения (27) отметим, что диэлектрическая и магнитная проницаемости среды входят в него только в комбинации

$$n_r = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}, \quad (35)$$

которая имеет физический смысл относительного показателя преломления среды.

**Пример 1.** Рассмотрим распространение плоской монохроматической волны с  $N_\lambda = 10$  в стекле с показателем преломления  $n_r = 1.5$  в случае числа Куранта  $S_c = 1$ . Отношение (27) при этом равно  $\tilde{c}_p/c_p \approx 0.9777$ , что в процентном отношении составляет численную ошибку примерно 2.23%. Таким образом, в данной ситуации на каждую единицу пути, равную длине волны, FDTD-расчет накапливает существенную фазовую ошибку порядка 8.03°. Заметим также, что улучшение дискретизации длины волны в два раза ( $N_\lambda = 20$ ) сокращает соответствующие ошибки до значений 0.48% и 1.89° (т. е. примерно четырехкратно), как это и должно происходить для вычислительного метода второго порядка точности.

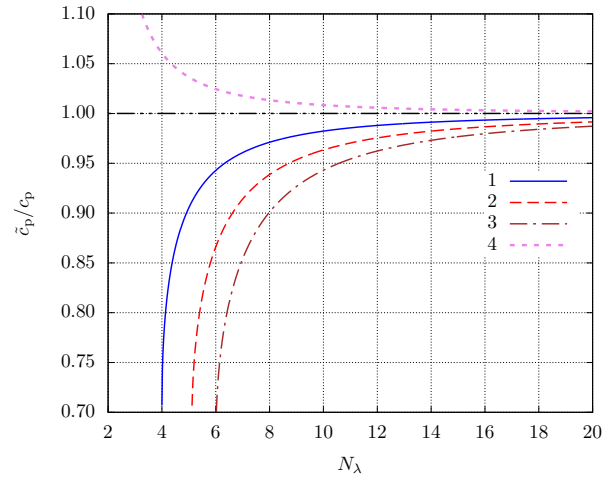


Рисунок 3. Зависимость фазовой скорости, определяемой согласно методу FDTD по отношению к ее точному значению (27), от параметра дискретизации длины волны  $N_\lambda$  для некоторых сред с относительными показателями преломления  $n_r$ . Число Куранта  $S_c = 1$ .

Figure 3. Dependence of the phase velocity ratio, determined according to the FDTD method with respect to its exact value (27), on the wavelength discretization parameter  $N_\lambda$  for some media with relative refractive indices  $n_r$ . The Courant number  $S_c = 1$ .

Особенности численной дисперсии метода FDTD, определяемые выражением (27), и дополняющие приведенный выше пример, представлены на рис. 3, где показано семейство кривых, для которых  $n_r > S_c$  (а именно,  $n_r = \sqrt{2}$  для кривой 1,  $n_r = \sqrt{3}$  — для линии 2 и  $n_r = 2$  — для 3 соответственно). Видно, что увеличение показателя преломления среды при плохой дискретизации длины волны приводит к существенному запаздыванию волны, моделируемой методом FDTD, что выражается в значительном отклонении отношения  $\tilde{c}_p/c_p$  от единицы.

Кроме того, на рис. 3 изображена кривая 4, отвечающая случаю  $n_r < S_c$  (в данном конкретном случае выбрано значение  $n_r = \sqrt{1/2}$ ). Этот пример демонстрирует, что в средах оптически менее плотных, чем вакуум, FDTD-расчет приводит к распространению моделируемых волн с опережением по сравнению с истинной скоростью.

**Следствие 1.** Из рис. 3 видно, что точность FDTD-расчета падает с уменьшением  $N_\lambda$ , а кроме того — по мере отклонения проницаемости среды от единицы (что имеет место и в диэлектриках, и в магнетиках, и в магнитных диэлектриках).

**Следствие 2.** Легко вычислить предел отношения (27), который независимо от величин  $n_r$  и  $S_c$  равен

$$\lim_{N_\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{c}_p}{c_p} = 1. \quad (36)$$

Это означает, что точность FDTD-расчета улучшается с ростом  $N_\lambda$ .

**Замечание 5.** Ухудшение точности FDTD-расчета в среде с  $n_r > 1$  связано с тем, что длина волны в такой среде короче, чем в вакууме, и малой дискретизации длины волны  $N_\lambda$  оказывается недостаточно для корректного расчета. Однако простой перенос этого утверждения на случай среды с  $\varepsilon_r < 1$  не так очевиден и требует уточнения.

**Следствие 3.** Кроме того, рис. 3 указывает на то, что высокочастотные компоненты волнового пакета в средах с  $\varepsilon_r > 1$  имеют тенденцию к запаздыванию, в то время как в средах с  $\varepsilon_r < 1$  эта особенность меняется на противоположную — высокочастотные компоненты волнового пакета в сетке Йи распространяются с большей фазовой скоростью, чем это имеет место в действительности. Другими словами, в средах оптически более плотных, по сравнению с вакуумом, FDTD-расчет приводит к возникновению численной дисперсии, имеющей характер аномальной дисперсии [26]. И наоборот, — при моделировании оптически менее плотных сред, влияние FDTD-дискретизации соответствует поведению нормальной дисперсии (при этом «красные» компоненты волнового пакета «обгоняют синие»).

**Замечание 6.** Структура знаменателя (27) имеет явное сходство с формой дисперсионных уравнений, получаемых в задачах о распространении волн в средах с периодическими неоднородностями [19, 27–29]. А именно, — здесь фигурирует функция

$$\varphi(N_\lambda, S_c, n_r) = \frac{n_r}{S_c} \sin \frac{\pi S_c}{N_\lambda}, \quad (37)$$

характер которой определяет полосы пропускания и не-

пропускания сетки Йи. Действительно, легко понять, что область значений параметров  $(N_\lambda, S_c, n_r)$ , на которой выполняется условие  $|\varphi(N_\lambda, S_c, n_r)| > 1$ , отвечает непропусканию волн, так как выражение  $\arcsin \varphi$  при этом не имеет смысла в вещественных значениях.

Подобная картина явления имеет место в модели Кроинга–Пенни, а также в уравнениях Хилла и Матье, описывающих параметрические колебания [19, 27–29], а также распространение волн в системах с пространственной периодичностью в расположении неоднородностей. В качестве периодической структуры в нашем случае (в методе FDTD) выступает непосредственно сама расчетная сетка Йи. При этом пропускание и непропускание волн (квантово-механический аналог — разрешенные и запрещенные зоны) определяется как раз величинами  $N_\lambda$ ,  $S_c$  и  $n_r$ .

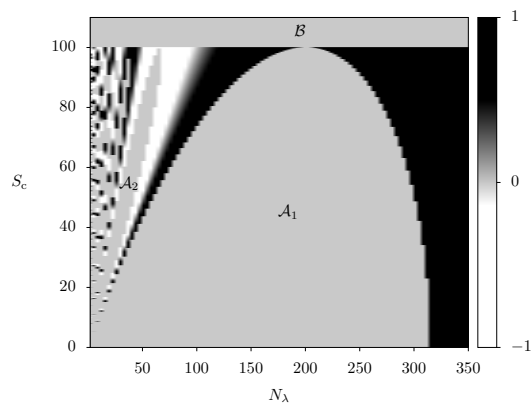


Рисунок 4.  $(N_\lambda, S_c)$ -диаграмма полос пропускания сетки Йи при  $n_r = 100$ .

Figure 4.  $(N_\lambda, S_c)$ -diagram of Yee grid bandwidths when  $n_r = 100$ .

Рисунок 4 иллюстрирует  $(N_\lambda, S_c)$ -диаграмму полос пропускания сетки Йи, построенную на основе функции (37) для сравнительно большого значения показателя преломления среды  $n_r = 100$ . Области полос непропускания  $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$ , соответствующие условию  $|\varphi(N_\lambda, S_c, n_r)| > 1$ , изображены на этой диаграмме однотонной заливкой серого цвета. Общее число таких областей  $\mathcal{N}$  (на рис. 4 отмечены первые две из них) зависит от величины показателя преломления среды  $n_r$  и растет с увеличением последнего. Полосы пропускания представлены на данной диаграмме градиентной заливкой, меняющейся от черного ( $\varphi = +1$ ) к белому ( $\varphi = -1$ ) цвету. Именно в рамках последних областей имеет смысл дисперсионное соотношение в форме (27).

Также на рис. 4 серым цветом выделена область  $\mathcal{B}$ , определяемая неравенством  $S_c > n_c$ , в рамках которой метод FDTD также не может обеспечивать корректного численного решения задачи о распространении волны в однородной недиспергирующей среде. Аргументы, подтверждающие справедливость данного утверждения, приведены в следующем разделе статьи при обсуждении рис. 6.

### 3. Связь численной дисперсии с числом Куранта

Теперь, после проведенного предварительного исследования, обсудим алгоритм коррекции численной диспер-

сии с помощью специального выбора числа Куранта. Его возможность опирается на соотношение (27), из которого непосредственно вытекает следующий результат.

**Утверждение 3.** При любых заданных  $\varepsilon_r$  и  $\mu_r$ , принадлежащих области определения (34), всегда можно устранить вычислительные ошибки, связанные с численной дисперсией, задавая число Куранта равным

$$S_c = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}. \quad (38)$$

*Доказательство.* Проверяется непосредственной подстановкой (38) в (27).  $\square$

*Замечание 7.* Значение числа Куранта (38) можно назвать «магическим», так как в этом случае фазовая скорость волны в FDTD-сетке  $\tilde{c}_p$  точно совпадает с реальным значением фазовой скорости  $c_p$ , независимо от выбранной дискретизации длины волны  $N_\lambda$ . В то же время в источнике [14] «магическим» называется значение  $S_c = 1$ , что справедливо только для вакуума, но никак не в общем случае. Здесь же отметим, что наш выбор (38) эквивалентен заданию  $S_c = 1$ , используемому в книге [17].

Несколько примеров, иллюстрирующих идею применения «магического» числа Куранта (38) для коррекции программной дисперсии в недиспергирующих однородных средах, ограниченных выбором параметров (34), приведены на рис. 5.

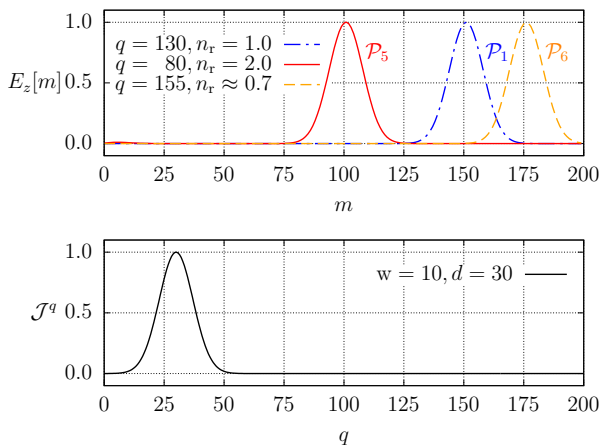


Рисунок 5. Моделирование распространения импульсов гауссова вида в средах, оптически более  $\mathcal{P}_5$  ( $n_r = 2$ ) и менее  $\mathcal{P}_6$  ( $n_r = \sqrt{1/2}$ ) плотных, чем вакуум, с применением коррекции программной дисперсии (38). Figure 5. Simulating of Gaussian pulse propagation in media optically more  $\mathcal{P}_5$  ( $n_r = 2$ ) and less dense  $\mathcal{P}_6$  ( $n_r = \sqrt{1/2}$ ) than vacuum, using correction of numeric dispersion (38).

Рисунок 5 подтверждает идею, сформулированную в виде Утверждения 3 — численная дисперсия здесь действительно не имеет места ни в случае среды оптически более плотной по сравнению с вакуумом (импульс  $\mathcal{P}_5$ ), ни в случае оптически менее плотной среды (импульс  $\mathcal{P}_6$ ). Рисунок 5 следует сопоставить с рис. 1, на котором численная дисперсия отчетливо проявляется на форме импульса  $\mathcal{P}_2$ . *Замечание 8.* Отметим также, что распространение электромагнитного поля в пространстве со временем (определяемым, как и всегда, величиной дискретного индекса  $q$ ), представленное на рис. 5 для импульса  $\mathcal{P}_5$ , происходит

с видимым опережением аналогичного процесса для импульса  $\mathcal{P}_2$  на рис. 1 в два раза. Следует подчеркнуть, что это опережение — только кажущееся, так как его причиной является именно двукратное отличие в числах Куранта, выбранных в случае рис. 1 и 5. В действительности же (при учете поправки на  $S_c$ ), все временные характеристики сигналов на рис. 1 и 5 идентичны. Другими словами, если считать пространственный шаг решетки  $\Delta_x$  фиксированным параметром, не меняющимся при переходе от моделирования в случае  $S_c = 1$ , представленного на рис. 1, к моделированию с числом Куранта (38), то «цена» каждого временного шага  $\Delta_t$  (а вместе с ним, и полная продолжительность моделирования) изменится в  $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$  раз. Тот же эффект (с точностью до замены слов «опережение» на «запаздывание») имеет место и в случае оптически менее плотных сред (см. импульс  $\mathcal{P}_6$ ) на рис. 5.

*Замечание 9.* Также отдельно укажем на то, что моделирование распространения импульса  $\mathcal{P}_6$  в среде оптически менее плотной, чем вакуум, в соответствии с расчетным алгоритмом (2) – (5) при выборе числа Куранта  $S_c = 1$  принципиально невозможно. Несложно убедиться в том, что вычисления в этом случае очень быстро приводят к расходимостям, не давая никакой полезной информации, и принципиально не описывают данный частный случай.

Последнее замечание прекрасно иллюстрирует рис. 6, на котором показан лавинообразный процесс накопления численных ошибок в процессе расчета по алгоритму (2) – (5) в случае превышения числа Куранта  $S_c$ , по сравнению с  $n_r$ , всего на 0.1%. Данная иллюстрация построена при тех же параметрах источника сигнала  $\mathcal{J}^q$ , что и на рис. 1 и 5, для случая вакуума, хотя принципиально такая же картина имеет место и в случае любых других однородных недиспергирующих сред из области определения (34).

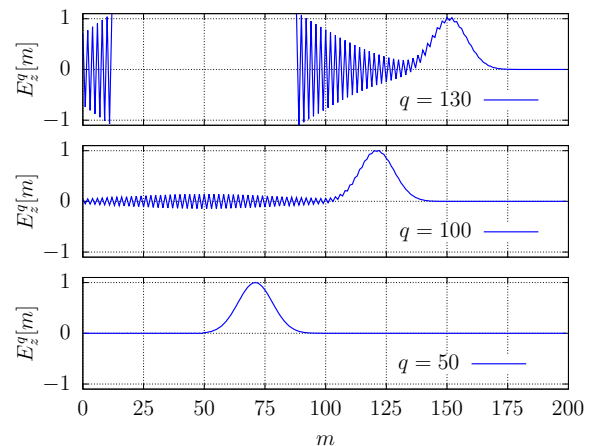


Рисунок 6. Временная динамика разрушения численного решения, получаемого в процессе вычислений согласно алгоритму (2) – (5) при  $S_c - n_r = 10^{-3}$ . Figure 6. Time dynamics of the numerical solution destruction obtained during computation according to the algorithm (2) – (5) when  $S_c - n_r = 10^{-3}$ .

Как видно из рис. 6, к моменту времени  $q = 130$  уровень шума, произвольно возникающего в результате вычислений по схеме (2) – (5) при  $S_c - n_r = 10^{-3}$ , двукратно превышает величину полезного сигнала по абсолютному



значению. При этом пространственная протяженность части сетки  $\mathbb{Y}$ , затронутой данным шумом, составляет  $3/4$  от всей длины расчетной области. Последнее обстоятельство существенно искажает форму заднего фронта моделируемого полезного сигнала. Далее с последующим развитием процесса при  $q > 130$  полезное решение разрушается полностью.

Дополнительные численные эксперименты, выполненные нами, также показывают, что эффекты, связанные с накоплением ошибок, вследствие самовозбуждения сетки, имеют место всегда при выполнении неравенства  $S_c > n_r$ . Так, при  $S_c - n_r = 10^{-4}$  самовозбуждение сетки становится заметным уже после прохождения полезного сигнала, однако его лавинообразный характер наблюдается и в этом случае. Все эти наблюдения можно обобщить в форме следующего утверждения.

**Утверждение 4.** Расчетный алгоритм (2) – (5) быстро расходится и не может быть использован для получения корректного численного решения задачи о распространении сигналов в недиспергирующих однородных средах при выборе  $S_c > n_r$ .

*Доказательство.* Исчерпывающая аргументация справедливости данного утверждения на «физическом уровне строгости» приведена выше при обсуждении рис. 6.  $\square$

Применением данного утверждения как раз и объясняется наличие области  $\mathcal{B}$ , показанной на рис. 4, хотя с формальной точки зрения функция (37) при этом не превышает единицу по модулю.

*Замечание 10.* В то же время отметим, что выбор значений  $S_c \leq n_r$ , согласованный с условием  $|\varphi(N_\lambda, S_c, n_r)| \leq 1$ , не приводит к столь драматическим последствиям, которые имеют место в Утверждении 4.

Важным следствием проведенного таким образом подробного исследования, основные результаты которого сдержатся в Утверждениях 3 и 4, является еще один факт. **Следствие 4.** Задание числа Куранта в форме (38) – единственно возможный оптимальный выбор с точки зрения применения численного FDTD-алгоритма (2) – (5) для моделирования распространения сигналов в недиспергирующих однородных средах.

*Доказательство.* Оптимальность такого выбора обусловлена тем, что он устраняет численную дисперсию при моделировании сигналов любой формы и спектрального состава, не противоречащих Утверждению 2 работы [18], распространяющихся в широком классе недиспергирующих однородных сред, описываемых областью определения (34). Единственность вытекает из Утверждения 4.  $\square$

*Замечание 11.* Проблема, оставшаяся нерешенной до конца на данный момент (возникающая при внимательном изучении применения алгоритма (2) – (5) к однородным недиспергирующим средам, оптически отличным от вакуума), состоит в том, что в данном случае помимо основного сигнала с избранной направленностью всегда наблюдается сигнал сравнительно малой амплитуды обратной направленности. Назовем для краткости этот последний сигнал – обратным  $\mathcal{P}_b$ , в противоположность исходному – прямому  $\mathcal{P}_f$ . Иллюстрация этой проблемы приведена на рис. 7,

который построен при тех же параметрах источника сигнала, что и рис. 1 и 5.

Рисунок 7 демонстрирует формирование обратного импульса  $\mathcal{P}_b$  при моделировании распространения сигнала гауссовой формы в средах, оптически менее плотных, чем вакуум при оптимальном выборе числа Куранта. Видно, что характер этого явления существенно зависит от величины относительного показателя преломления  $n_r$  среды. При стремлении последнего к нулю этим явлением уже нельзя пренебречь, так как оно приводит к искажению характеристик и полезного прямого сигнала  $\mathcal{P}_f$ . В то же время, в случае  $n_r > 10^{-1}$  соответствующая численная ошибка сравнительно мала, и может быть оценена не превышающей уровня в 1%.

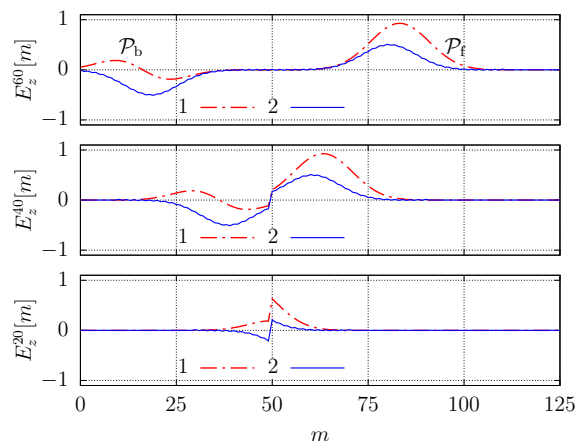


Рисунок 7. Динамика формирования прямого  $\mathcal{P}_f$  и обратного  $\mathcal{P}_b$  импульсов при моделировании распространения сигнала гауссовой формы в средах, оптически менее плотных, чем вакуум при оптимальном выборе числа Куранта. Штрих-пунктирная кривая 1 соответствует случаю  $S_c = n_r = 10^{-1}$ , сплошная линия 2 –  $S_c = n_r = 10^{-2}$ .

Figure 7. Dynamics of forward  $\mathcal{P}_f$  and backward  $\mathcal{P}_b$  impulses formed in simulating the propagation of a Gaussian-shaped signal in media optically less dense than vacuum under optimal choice of the Courant number. The dashed-dotted curve 1 corresponds to the case of  $S_c = n_r = 10^{-1}$ , the solid line 2 –  $S_c = n_r = 10^{-2}$ .

#### 4. Границы применимости основных результатов

В завершении данной работы обсудим вопрос о применимости полученных здесь результатов за рамками области определения (34).

Во-первых, укажем на то, что интервал значений  $0 < \varepsilon_r, \mu_r < 1$ , входящий в область определения (34), используемый при выполнении условий Утверждения 3, уже сам по себе расширяет диапазон применимости развитого в данной работе расчетного алгоритма на область экзотических сред, обычно не рассматриваемых в литературе.

Во-вторых, отметим, что наш численный алгоритм (2) – (5) остается справедливым и при расширении области определения (34) на интервал  $\varepsilon_r, \mu_r \in (-\infty, +\infty)$  при условии одновременной отрицательности проницаемостей среды  $\varepsilon_r \mu_r > 0$ .

Среды с одновременно отрицательными проницаемостями, как известно [23–25], называются левыми. В таких средах могут распространяться обратные волны [30], определяемые тем фактом, что для них скалярное произведение волнового вектора  $\mathbf{k}$  (в нашей работе всюду  $\mathbf{k} = \beta \mathbf{e}_x$ )



и вектора Умова-Пойнтинга  $\mathbf{S}$  — отрицательно

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) < 0, \quad (39)$$

где поток энергии, переносимый волной, и определяемый вектором  $\mathbf{S}$ , равен [20–23, 26]

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (40)$$

Справедливость такого обобщения демонстрирует рис. 8, на котором представлены результаты сравнения волновых пакетов, формируемых тем же источником сигнала, что и на рис. 1, 5–7, зафиксированные в одинаковый момент времени  $q = 100$ , при распространении в правой среде с  $\varepsilon_r = \mu_r = +1$  (нижняя половина рисунка) и левой среде с  $\varepsilon_r = \mu_r = -1$  (верхняя половина).

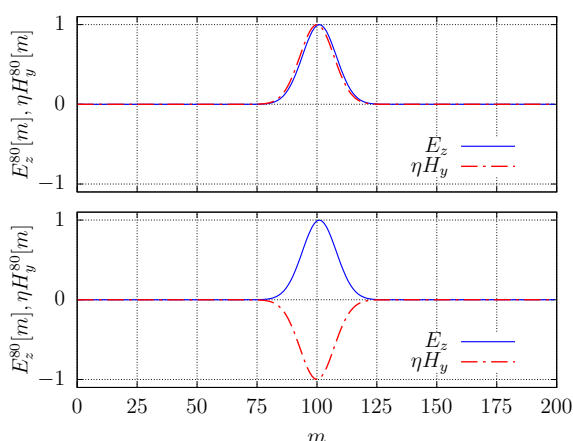


Рисунок 8. Мгновенные снимки прямых (нижняя половина) и обратных (верхняя часть) волн, распространяющихся в сетке Йи согласно расчетному алгоритму (2) – (5).

Figure 8. Instantaneous snapshots of forward (bottom half) and backward (top half) waves propagating in the Yee grid according to the computational algorithm (2) – (5).

Легко убедиться в том, что для волнового пакета, показанного в верхней части рис. 8 вектор Умова-Пойнтинга (40)  $\mathbf{S} \uparrow \downarrow \mathbf{e}_x$ , что как раз и определяет обратную волну согласно условию (39).

И наконец, поясним, что справедливость алгоритма (2) – (5) при расширении области определения (34) на интервал  $\varepsilon_r, \mu_r \in (-\infty, +\infty)$  при условии одновременной отрицательности проницаемостей среды  $\varepsilon_r \mu_r < 0$  в рамках данной работы нами не исследовалась. Это связано с тем, что при  $\varepsilon_r \mu_r < 0$  постоянная распространения (25) оказывается мнимой величиной, что соответствует сильному затуханию волн в таких средах, которые вследствие этого оказываются сильно диспергирующими (для них распространение плоских волн оказывается невозможным, а вместе с этим теряет простой смысл Утверждение 2, которое требует иной формулировки в данном случае). Все это выходит за рамки темы данной работы.

## Заключение

Таким образом, в данной работе исследовано явление численной дисперсии при FDTD-моделировании распространения электромагнитных сигналов в недиспергирующих однородных средах. Сформулированы несколько утверждений, определяющих характер этой дисперсии, а

также описано влияние на нее числа Куранта. Определено оптимальное значение числа Куранта, устраняющее численную дисперсию волновых пакетов. Исследованы границы применимости разработанного метода моделирования, и впервые указано на возможность его применения для сред, оптически менее плотных, чем вакуум, а также для левых сред.

Вместе с тем, тема исследования все еще остается достаточно интересной, так как в данной статье не исследовались многие интересные вопросы, часть из которых приведена ниже.

### Некоторые открытые вопросы

1. Чем может быть объяснено с физической точки зрения ухудшение точности FDTD-расчета в средах с  $n_r < 1$ ? Объяснение аналогичное ситуации в средах, для которых  $n_r > 1$ , и основанное на уменьшении длины волны в них (и, соответственно, плохой ее дискретизации) здесь не годится.
2. В чем причина формирования обратного импульса  $\mathcal{P}_b$  и как его устранить? Возможно, он является следствием каких-то аналитических ошибок, допущенных при записи (2) – (5) либо неустранимых ошибок машинного представления чисел с плавающей запятой при компьютерных вычислениях.
3. Возможно ли корректировать численную дисперсию при моделировании распространения сигналов в неоднородных средах? Можно ли этого добиться, изменяя число Куранта динамически в процессе моделирования?

Этот список интересных вопросов ни в коей мере не претендует на полноту и вполне может быть расширен.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Литература

1. Yee, K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // IEEE Trans. on Ant. and Prop. – 1966. – Vol. 14, № 3. – P. 302–307.
2. Miyazaki, Y. FDTD analysis of spatial filtering of scattered waves for optical CT of medical diagnosis / Y. Miyazaki, K. Kouno // IEEJ Trans. FM. – 2009. – Vol. 129, № 10. – P. 693–698.
3. Tan, T. Single realization stochastic FDTD for weak scattering waves in biological random media / T. Tan, A. Taflove, V. Backman // IEEE Trans. AP. – 2013. – Vol. 61, № 2. – P. 818–828.
4. Stark, J. Light scattering microscopy measurements of single nuclei compared with GPU-accelerated FDTD simulations / J. Stark [et al.] // Phys. Med. Biol. – 2016. – Vol. 61, № 7. – P. 2749–2761.
5. Nzao, A. B. S. Analysis and FDTD Modeling of the Influences of Microwave Electromagnetic Waves on Human Biological Systems / A. B. S. Nzao // Open Journal of Applied Sciences. – 2022. – Vol. 12. – P. 912–929.
6. Glubokovskikh, S. Seismic monitoring of CO<sub>2</sub> geosequestration: CO2CRC Otway case study using full 4D FDTD approach / S. Glubokovskikh [et al.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. – 2016. – Vol. 49. – P. 201–216.

7. Yu, J. Modeling of Whole-Space Transient Electromagnetic Responses Based on FDTD and its Application in the Mining Industry / J. Yu, R. Malekian, J. Chang, B. Su // *IEEE Trans. Indust. Inform.* – 2017. – Vol. 13, № 6. – P. 2974–2982.
8. Fantoni, A. A model for the refractive index of amorphous silicon for FDTD simulation of photonics waveguides / A. Fantoni, P. Lourenço, M. Vieira // *International Conference on Numerical Simulation of Optoelectronic Devices (NUSOD), Copenhagen, Denmark.* – 2017. – P. 167–168.
9. Mishra, C. S. FDTD approach to photonic based angular waveguide for wide range of sensing application / C. S. Mishra [et al.] // *Optik.* – 2019. – Vol. 176. – P. 56–59.
10. Mohanty, S. P. FDTD method to photonic waveguides for application of optical demultiplexer at 3-communication windows / S. P. Mohanty, S. K. Sahoo, A. Panda, G. Palai // *Optik.* – 2019. – Vol. 185. – P. 146–150.
11. Bakirtzis, S. FDTD-Based Diffuse Scattering and Transmission Models for Ray Tracing of Millimeter-Wave Communication Systems / S. Bakirtzis, T. Hashimoto, C. D. Sarris // *IEEE Trans. AP.* – 2021. – Vol. 69, № 6. – P. 3389–3398.
12. Makarov, P. Simulation of Electromagnetic Wave Propagation in Magnetic Randomly Inhomogeneous Magnetic Media / P. Makarov [et al.] // *IEEE Magnetics Letters.* – 2022. – Vol. 13. – P. 1–5.
13. Макаров, П. А. Моделирование распространения электромагнитных волн в магнитно-неоднородных средах / П. А. Макаров, В. А. Устюгов, В. И. Щеглов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 100–105.
14. Schneider, J. B. Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method / J. B. Schneider. – [www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd](http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd), 2010. – 403 p.
15. Inan, U. S. Numerical electromagnetics. The FDTD method / U. S. Inan, R. A. Marshall. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 406 p.
16. Taflove, A. Advances in FDTD computational electrodynamics photonics and nanotechnology / A. Taflove, A. Oskooi, S. G. Johnson. – Boston : Artech House, 2013. – 639 p.
17. Langtangen, H. P. Finite Difference Computing with PDEs: A Modern Software Approach / H. P. Langtangen, S. Linge. – Springer Cham, 2017. – XXIII. – 507 p.
18. Макаров, П. А. Особенности численного моделирования уравнений Максвелла методом FDTD в однородной и неоднородной формулировках / П. А. Макаров, В. А. Устюгов, В. И. Щеглов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки».* – 2023. – № 4 (62). – С. 96–107.
19. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – Москва : Наука, 1979. – 384 с.
20. Бредов, М. М. Классическая электродинамика / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. – Москва : Наука, 1985. – 400 с.
21. Кугушев, А. М. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн / А. М. Кугушев, Н. С. Голубева, В. Н. Митрохин. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 368 с.
22. Шустер, А. Введение в теоретическую оптику / А. Шустер. – Ленинград, Москва : ОНТИ, гл. ред. общетех. лит., 1935. – 376 с.
23. Веселаго, В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  / В. Г. Веселаго // *УФН.* – 1967. – Т. 92, № 3. – С. 517–526.
24. Pendry, J. Negative refraction / J. Pendry // *Contemporary Physics* – 2004. – V. 45, № 3. – С. 191–202.
25. Агранович, В. М. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света / В. М. Агранович, Ю. Н. Гартштейн // *УФН* – 2006. – Т. 176, № 10. – С. 1052–1068.
26. Ландсберг, Г. С. Оптика / Г. С. Ландсберг. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 848 с.
27. Коткин, Г. Л. Лекции по аналитической механике / Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо, А. И. Черных. – Москва, Ижевск : НИЦ РХД, 2017. – 236 с.
28. Карлов, Н. В. Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. – Москва : Физматлит, 2008. – 498 с.
29. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике, Т. I / З. Флюгге. – Москва : Мир, 1974. – 342 с.
30. Шевченко, В. В. Прямые и обратные волны: три определения, их взаимосвязь и условия применимости / В. В. Шевченко // *УФН.* – 2007. – Т. 177, № 3. – С. 301–306.

## References

1. Yee, K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // *IEEE Trans. on Ant. and Prop.* – 1966. – Vol. 14, № 3. – P. 302–307.
2. Miyazaki, Y. FDTD analysis of spatial filtering of scattered waves for optical CT of medical diagnosis / Y. Miyazaki, K. Kouno // *IEEJ Trans. FM.* – 2009. – Vol. 129, № 10. – P. 693–698.
3. Tan, T. Single realization stochastic FDTD for weak scattering waves in biological random media / T. Tan, A. Taflove, V. Backman // *IEEE Trans. AP.* – 2013. – Vol. 61, № 2. – P. 818–828.
4. Stark, J. Light scattering microscopy measurements of single nuclei compared with GPU-accelerated FDTD simulations / J. Stark [et al.] // *Phys. Med. Biol.* – 2016. – Vol. 61, № 7. – P. 2749–2761.
5. Nzao, A. B. S. Analysis and FDTD Modeling of the Influences of Microwave Electromagnetic Waves on Human Biological Systems / A. B. S. Nzao // *Open Journal of Applied Sciences.* – 2022. – Vol. 12. – P. 912–929.
6. Glubokovskikh, S. Seismic monitoring of CO<sub>2</sub> geosequestration: CO2CRC Otway case study using full 4D FDTD approach / S. Glubokovskikh [et al.] // *International Journal of Greenhouse Gas Control.* – 2016. – Vol. 49. – P. 201–216.
7. Yu, J. Modeling of Whole-Space Transient Electromagnetic Responses Based on FDTD and its Application in the Mining Industry / J. Yu, R. Malekian, J. Chang, B. Su // *IEEE Trans. Indust. Inform.* – 2017. – Vol. 13, № 6. – P. 2974–2982.

8. Fantoni, A. A model for the refractive index of amorphous silicon for FDTD simulation of photonics waveguides / A. Fantoni, P. Lourenço, M. Vieira // International Conference on Numerical Simulation of Optoelectronic Devices (NUSOD), Copenhagen, Denmark. – 2017. – P. 167–168.
9. Mishra, C. S. FDTD approach to photonic based angular waveguide for wide range of sensing application / C. S. Mishra [et al.] // Optik. – 2019. – Vol. 176. – P. 56–59.
10. Mohanty, S. P. FDTD method to photonic waveguides for application of optical demultiplexer at 3-communication windows / S. P. Mohanty, S. K. Sahoo, A. Panda, G. Palai // Optik. – 2019. – Vol. 185. – P. 146–150.
11. Bakirtzis, S. FDTD-Based Diffuse Scattering and Transmission Models for Ray Tracing of Millimeter-Wave Communication Systems / S. Bakirtzis, T. Hashimoto, C. D. Sarris // IEEE Trans. AP. – 2021. – Vol. 69, № 6. – P. 3389–3398.
12. Makarov, P. Simulation of Electromagnetic Wave Propagation in Magnetic Randomly Inhomogeneous Magnetic Media / P. Makarov [et al.] // IEEE Magnetics Letters. – 2022. – Vol. 13. – P. 1–5.
13. Makarov, P. A. Modelling of electromagnetic wave propagation in magnetically inhomogeneous media / P. A. Makarov, V. A. Ustyugov, V. I. Shcheglov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series «Physical and Mathematical Sciences». – 2022. – № 5 (57). – P. 100–105.
14. Schneider, J. B. Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method / J. B. Schneider. – www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd, 2010. – 403 p.
15. Inan, U. S. Numerical electromagnetics. The FDTD method / U. S. Inan, R. A. Marshall. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 406 p.
16. Taflove, A. Advances in FDTD computational electrodynamics photonics and nanotechnology / A. Taflove, A. Oskooi, S. G. Johnson. – Boston : Artech House, 2013. – 639 p.
17. Langtangen, H. P. Finite Difference Computing with PDEs: A Modern Software Approach / H. P. Langtangen, S. Linge. – Springer Cham, 2017. – XXIII. – 507 p.
18. Makarov, P. A. Numerical solution features of Maxwell equations by FDTD method in the homogeneous and non-homogeneous formulations of the problems / P. A. Makarov, V. A. Ustyugov, V. I. Shcheglov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series «Physical and Mathematical Sciences». – 2023. – № 4 (62). – P. 96–107.
19. Vinogradova, M. B. Wave theory / M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, A. P. Suhorukov. – Moscow : Nauka, 1979. – 384 p.
20. Bredov, M. M. Classical electrodynamics / M. M. Bredov, V. V. Romyantsev, I. N. Toptygin. – Moscow : Nauka, 1985. – 400 p.
21. Kugushev, A. M. Fundamentals of radioelectronics. Electrodynamics and radio waves propagation / A. M. Kugushev, N. S. Golubeva, V. N. Mitrohin. – Moscow: Bauman Moscow State Technical University Press, 2001. – 368 p.
22. Schuster, A. An introduction to the theory of optics. / A. Schuster. – Leningrad, Moscow: ONTI, main. ed. alltech. lit., 1935. – 376 p.
23. Veselago, V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\varepsilon$  and  $\mu$  / V. G. Veselago // Sov. Phys. Usp. – 1968. – V. 10. – P. 509–514.
24. Pendry, J. Negative refraction / J. Pendry // Contemporary Physics – 2004. – V. 45, № 3. – C. 191–202.
25. Agranovich, V. M. Spatial dispersion and negative refraction of light / V. M. Agranovich, Yu. N. Gartstein // Phys. Usp. – 2006. – V. 49. – P. 1029–1044.
26. Landsberg, G. S. Optics / G. S. Landsberg. – Moscow : Fizmatlit, 2010. – 848 p.
27. Kotkin, G. L. Lectures on analytic mechanics / G. L. Kotkin, V. G. Serbo, A. I. Chernykh. – Moscow, Izhevsk : NITc RChD, 2017. – 236 p.
28. Karlov, N. V. Oscillations, waves, structures / N. V. Karlov, N. A. Kirichenko. – Moscow : Fizmatlit, 2008. – 498 p.
29. Flügge, S. Practical Quantum Mechanics, Vol. I / S. Flügge. – Moscow : Mir, 1974. – 342 p.
30. Shevchenko, V. V. Forward and backward waves: three definitions and their interrelation and applicability / V. V. Shevchenko // Phys. Usp. – 2007. – V. 50. – P. 287–292.

#### Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040400069-8.

#### Acknowledgement (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040400069-8.

#### Для цитирования:

Макаров, П. А. Влияние числа Куранта на результаты численного моделирования распространения сигналов в недиспергирующих однородных средах / П. А. Макаров, Р. Н. Скандаков, В. А. Устюгов, В. И. Щеглов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 73–83.

#### For citation:

Makarov, P. A. Impact of Courant number on the results of numerical simulating of signal propagation in non-dispersive homogeneous media / P. A. Makarov, R. N. Skandakov, V. A. Ustyugov, V. I. Shcheglov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series «Physical and Mathematical Sciences». – 2024. – № 5 (71). – P. 73–83.

Дата поступления рукописи: 05.07.2024

Received: 05.07.2024

## Об одной связи моделей обмена и Леонтьева

И. В. Костяков, В. В. Куратов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар

kostyakov@ipm.komisc.ru  
kuratov@ipm.komisc.ru

### Аннотация

Авторы показывают, что модель Леонтьева линейного межотраслевого баланса можно получить предельным переходом по некоторым параметрам из линейной модели обмена с изменением экономического статуса некоторых участников хозяйственного процесса. Более того, саму модель Леонтьева можно подвергнуть такой же предельной процедуре и получить новую модель Леонтьева. Параметры могут иметь разные интерпретации, зависящие от конкретной ситуации в экономике: смена приоритетов в народном хозяйстве и др.

### Ключевые слова:

модель Леонтьева, контракции групп Ли

### Введение

Аффинные преобразования  $\mathbb{R}^n$  — это обратимые отображения  $\mathbb{R}^n$  в себя, которые в декартовых координатах задаются формулой

$$\vec{r} \rightarrow A\vec{r} + \vec{b},$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t, \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t, \quad (1)$$

где  $t$  обозначает транспонирование, и образуют аффинную группу  $A(n)$  [1]. Существует вложение пространства  $\mathbb{R}^n$  в пространство  $\mathbb{R}^{n+1}$  на единицу большей размерности с координатами  $(x_1, \dots, x_{n+1})$ , задаваемое гиперплоскостью  $x_{n+1} = 1$ , тогда каждому аффинному преобразованию  $(A, \vec{b})$  из (1) можно сопоставить линейное преобразование, задаваемое  $(n+1) \times (n+1)$ -матрицей  $\tilde{A}$ :

$$(A, \vec{b}) \rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ограничение этого преобразования на гиперплоскость  $x_{n+1} = 1$  дает формулу (1). Отображение (2) задает гомоморфное вложение группы аффинных преобразований  $A(n)$  в группу  $GL(n+1)$  [1].

## On one connection of the exchange and Leontief models

I. V. Kostyakov, V. V. Kuratov

Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,  
Syktyvkar

kostyakov@ipm.komisc.ru  
kuratov@ipm.komisc.ru

### Abstract

The authors show that the Leontief model of linear interindustry balance can be available passing to the limit for some parameters from linear exchange model with change in economic status of some participants in economic operations. Moreover, the Leontief model itself can be subjected to the same limit procedure and transform to a new Leontief model. Parameters can have different interpretations, depending on the specific situation in the economy: change of priorities in the national economy, etc.

### Keywords:

Leontief model, contractions of Lie groups

Можно рассмотреть отображение, сопоставляющее каждому аффинному преобразованию (1) линейное преобразование

$$\vec{r} \rightarrow A\vec{r}, \quad (3)$$

которое является гомоморфизмом аффинной группы  $A(n)$  на группу линейных преобразований  $GL(n)$  [1]. Ядро этого гомоморфизма совпадает с группой сдвигов  $T(\vec{b})$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , которая является нормальной подгруппой аффинной группы  $A(n)$ . Если матрица  $A$  ортогональна, то будем иметь группу движений евклидовых пространств, являющуюся подгруппой  $A(n)$ .

Технически, аффинные преобразования пространства  $\mathbb{R}^n$  могут быть также получены предельными переходами [2, 3] по некоторым параметрам  $\epsilon_i$  из группы общих линейных преобразований  $GL(n+1)$  пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Параметры  $\epsilon_i$  могут играть роль масштабных преобразований в пространстве представления  $\mathbb{R}^{n+1}$ . В случае одного параметра  $\epsilon$ , при этом изменяется масштаб вдоль выделенного направления. Таким образом, параметр  $\epsilon$  разделяет  $(n+1)$ -мерное пространство представления, на котором действовала группа  $GL(n+1)$ , на два пространства с разными свойствами (масштабами, физическими размерностями и т. д.) —  $n$ -мерное, на котором действует теперь аффинная группа  $A(n)$  и одномерное. Примером может служить получение группы движений евклидовой плоскости

$E(2)$  из ортогональной группы вращений трехмерного пространства  $O(3)$ . В физике элементарных частиц  $E(2)$  симметрию безмассовых частиц можно получить в пределе бесконечных импульсов из  $SO(3)$  симметрии массивных частиц [4]. Группу Галилея, действующую в пространстве двух величин разной природы — пространства и времени, также можно получить из группы вращений [2, 3].

Аффинные преобразования используются в различных приложениях. Например, преобразования Пуанкаре в релятивистской физике являются подгруппой аффинных преобразований и могут быть записаны в виде (1) или (2), где  $\vec{r}$  — четырехмерный вектор пространства-времени,  $A = (A_{ij}) \in SO(3, 1)$  — матрица преобразований группы Лоренца,  $\vec{b}$  — четырехмерный вектор трансляции. Группу Пуанкаре можно получить предельным переходом из групп псевдовращений де Ситтера  $SO(1, 4)$  или анти-де Ситтера  $SO(2, 3)$ .

В квантовой механике матрица плотности кубита может быть представлена в виде [5]

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & 1 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

и эволюцию открытой квантовой системы, описываемую преобразованиями Крауса, можно свести к действию группы сжимающих аффинных преобразований (1) на вектор  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  [6].

Еще один пример из математической модели нейрона, которую предложили МакКаллош и Питс [7]. Активационный потенциал нейрона  $u_k$  получается аффинным преобразованием в результате суммирования входных сигналов  $x_j$  с различными весами  $a_{kj}$  и сдвига на постоянную величину  $b_k$  — барьер активации [8]

$$u_k = \sum_{j=1}^N a_{kj} x_j + b_k. \quad (5)$$

Наконец, в математических моделях экономики стационарные состояния отображений (1) и (3) соответствуют моделям Леонтьева и линейным моделям обмена. В данной статье мы используем идею предельных переходов  $GL(n+1) \rightarrow A(n)$  для получения модели Леонтьева для  $n$  участников из модели линейного обмена или международной торговли для  $n+1$  участников. При этом один из участников меняет свою “природу” — экономический статус и становится “чистым” потребителем.

## 1. Модель Леонтьева

Применение математических методов в экономике имеет богатое прошлое. Теорию, методологию и практику межотраслевого баланса предложил В. В. Леонтьев [9]. В 1973 г. ему была присуждена Нобелевская премия по экономике “за развитие метода “затраты-выпуск” и применение его к важнейшим экономическим проблемам”. Математические модели экономики, отражающие с помощью математических соотношений основные свойства экономических процессов и явлений, представляют собой эффективный инструмент исследования сложных экономических проблем.

Большой вклад в развитие экономико-математических исследований, в том числе межотраслевого баланса, внесли отечественные ученые [10–12].

Эффективное ведение народного хозяйства предполагает наличие баланса между отдельными отраслями [9–14]. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой — как потребитель продуктов, производимых другими отраслями.

Будем предполагать, что вся производящая сфера народного хозяйства разбита на некоторое число  $n$  отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт, причем разные отрасли производят разные продукты [12–14]. Например, межотраслевой баланс СССР за 1959 г. был построен по 83 отраслям, а за 1972 г. — по 112 отраслям [12].

Введем следующие обозначения:

$x_i$  — общий объем продукции отрасли  $i$  за данный промежуток времени — валовой выпуск  $i$ -й отрасли;

$x_{ij}$  — объем продукции отрасли  $i$ , расходуемый отраслью  $j$  в процессе производства;

$y_i$  — объем продукции отрасли  $i$ , предназначенный к потреблению в непродуцирующей сфере — объем конечного потребления.

Объем конечного потребления составляет обычно более 75 % всей произведенной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт [14].

В народном хозяйстве должно выполняться соотношение баланса, т. е. для любого  $i$  выполняться равенство

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i. \quad (6)$$

Единицы измерения всех величин могут быть натуральными (кубометры, тонны, штуки и т. п.) или стоимостными.

В. В. Леонтьев, рассматривая развитие американской экономики 30-е г. XX в., обратил внимание на то, что величины  $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$  остаются постоянными в течение ряда лет.

Это обуславливается примерным постоянством используемой технологии. Коэффициенты  $a_{ij}$  называют коэффициентами прямых затрат (коэффициентами материалоёмкости).

Используя гипотезу линейности, получаем систему линейных уравнений, описывающую неподвижные при отображении (1) точки (положения равновесия)

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}. \quad (7)$$

Вектор  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  называется вектором валового выпуска, вектор  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$  — вектором конечного потребления, а матрица  $A$  — матрицей прямых затрат [13, 14].

Матрица  $A$  — неотрицательная (все ее компоненты неотрицательны). Векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  тоже неотрицательны. Уравнение (7) называется уравнением линейного межотраслевого баланса (моделью Леонтьева) [13, 14]. Основная задача межотраслевого баланса: найти такой вектор вало-

вого выпуска  $\vec{x}$ , который при известной матрице прямых затрат  $A$  обеспечивает заданный вектор конечного потребления  $\vec{y}$ . Матрица  $A$  называется продуктивной, если для любого вектора  $\vec{y} \geq 0$  существует решение  $\vec{x} \geq 0$  уравнения (7). В этом случае и модель Леонтьева, определяемая матрицей  $A$ , тоже называется продуктивной.

Систему линейных уравнений (7), используя отображение (2), можно переписать как [14]

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n+1} \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $y_i$  и  $a_{i,n+1}$  связаны равенством  $y_i = a_{i,n+1}x_{n+1}$ .

Уравнение (7) можно решить относительно  $\vec{x}$

$$\vec{x} = S\vec{y}, \quad S = (E - A)^{-1}. \quad (10)$$

Матрица  $S$  называется матрицей полных затрат. Элементы этой матрицы  $s_{ij}$  — величины валового выпуска продукции  $i$ -й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта  $j$ -й отрасли. Существует несколько критериев продуктивности матрицы  $A$  [13, 14].

Первый критерий — матрица  $A$  продуктивна тогда и только тогда, когда матрица  $S$  существует и неотрицательна.

Второй критерий — матрица  $A$  продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса  $\lambda_A$  (максимальное положительное собственное число матрицы  $A$ ) меньше единицы.

Число Фробениуса  $\lambda_A$  неотрицательной матрицы удовлетворяет неравенствам [14]

$$r \leq \lambda_A \leq R, \quad s \leq \lambda_A \leq S, \quad (11)$$

где  $r = \min r_i$ ,  $R = \max r_i$ ,  $s = \min s_i$ ,  $S = \max s_i$ ,  $r_i$  — сумма элементов  $i$ -й строки,  $s_i$  — сумма элементов  $i$ -го столбца. Если матрица  $A$  положительна, то все неравенства строгие.

Мы можем рассмотреть и более общую модель

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = B\vec{\xi}, \quad (12)$$

где  $\vec{\xi}$  —  $k$ -мерный вектор производящей сферы народного хозяйства,  $D$  — матрица размера  $k \times k$ ,  $B$  — матрица размера  $k \times n$ . Производящие отрасли связаны соотношением  $\vec{\xi} = D\vec{\xi}$ , которое формально выглядит как линейная модель обмена, обсуждаемая ниже. Эта модель означает, что отрасли  $x_i$  не пользуются продуктами отраслей  $\xi_m$ , а отрасли  $\xi_m$  используют продукты отраслей  $x_i$ .

Модель Леонтьева (7) или (8),(9) для  $n$  участников может быть получена из модели линейного обмена с матрицей  $\tilde{A}$  для  $n + 1$  участника

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

зачислением элементов  $a_{n+1,i}$ , при этом  $a_{n+1,n+1} = 1$ , а элементы  $a_{i,n+1}$  становятся произвольными числами. Как следствие изменяется роль одного из участников. В физических теориях этому соответствует изменение природы  $(n + 1)$ -го направления.

Введение параметра  $\epsilon$  в матрицу  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}(\epsilon)$  и последующее устремление этого параметра к нулю известно в математике и физических приложениях как контракция [2, 3]. Мы будем вводить параметр  $\epsilon$  таким образом, чтобы зачислялись элементы  $a_{n+1,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а элемент  $a_{n+1,n+1}$  стремился бы к 1.

## 2. Линейная модель обмена

Линейная модель обмена или модель международной торговли дает ответ на следующий вопрос: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, т. е. не было значительного дефицита торгового баланса для каждой из стран участниц [14]?

Пусть  $x_i$  — национальные бюджеты  $i$ -й страны,  $a_{ij}$  — доли бюджетов  $x_j$ , которую  $j$ -я страна тратит на покупку товаров  $i$ -й страны. Будем полагать, что весь национальный бюджет каждой страны расходуется только на закупку товаров либо внутри страны, либо вне ее, т. е. выполняется равенство  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Условие бездефицитной торговли принимает вид [13, 14]

$$\vec{x} = A\vec{x}. \quad (14)$$

Все элементы вектора  $\vec{x}$  и матрицы  $A$  неотрицательны:  $x_i \geq 0$ ,  $a_{ij} \geq 0$ .

Уравнение (14) означает, что "вектор бюджетов"  $\vec{x}$  является собственным вектором матрицы  $A$  с собственным значением  $\lambda_A$ , равным 1. Известно, что если в неотрицательной матрице  $A$  сумма элементов каждого столбца (строки) равна одному и тому же числу  $\lambda$ , то ее число Фробениуса  $\lambda_A$  равно  $\lambda$ . В линейной модели обмена сумма всех элементов в столбце равна 1, поэтому число Фробениуса  $\lambda_A$  для нее равно 1, а значит, имеется нетривиальное решение уравнения (14).

## 3. Предельный переход

Покажем, что модель Леонтьева (7) для  $n$  участников можно получить из модели международной торговли для  $n + 1$  участника в результате выделения строки и столбца  $(n + 1)$ -го участника модели обмена введением специ-

альным образом параметра  $\epsilon$  и последующего предельного перехода.

Рассмотрим модель (14) с матрицей  $A = \tilde{A}$  и  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})^t$ ,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Число Фробениуса этой матрицы равно 1, так как сумма всех  $a_{ij}$  в каждом столбце равна 1

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1. \quad (16)$$

Заметим, что если мы вычеркнем из этой матрицы любую  $i$ -ю строку и  $i$ -й столбец, то получим матрицу  $A$  размером  $n \times n$ , у которой число Фробениуса меньше 1, так как сумма оставшихся элементов  $a_{ij}$  в каждом столбце будет меньше 1, что как раз и является условием продуктивности модели Леонтьева.

Поскольку все элементы матрицы  $\tilde{A}$ , в том числе и элементы  $a_{n+1,i}$ ,  $a_{i,n+1}$ , меньше единицы, то можно эти элементы обозначить как  $a_{n+1,i} = \sin \phi_i$ ,  $a_{i,n+1} = \sin y_i$ ,  $a_{n+1,n+1} = \cos \phi_{n+1}$ . Введем теперь параметр  $\epsilon$  несимметричным вариантом контракции [2] и перейдем к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{A}(\epsilon) &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \frac{1}{\epsilon} \sin \epsilon y_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & \frac{1}{\epsilon} \sin \epsilon y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \frac{1}{\epsilon} \sin \epsilon y_n \\ \epsilon \sin \epsilon \phi_1 & \dots & \epsilon \sin \epsilon \phi_n & \cos \epsilon \phi_{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vec{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17) \end{aligned}$$

Число Фробениуса матрицы  $A$  с элементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  размером  $n \times n$  меньше 1, что и является условием продуктивности полученной модели Леонтьева. При этом один из участников меняет свой статус и становится потребителем.

Далее можно устроить новый предельный переход уже в модели Леонтьева с матрицей  $A$ , вводя в нее новый параметр и получить новую модель с двумя объектами непродуцирующей сферы, которая также будет продуктивна.

#### 4. Одномерная модель Леонтьева

В качестве простого примера рассмотрим одномерную модель Леонтьева, в которой есть один производитель, выпускающий продукцию  $x_1$ . Часть продукции ( $a_{11} < 1$ ) идет на внутреннее потребление, остальное — на внешнее потребление ( $y$ )

$$x_1 = a_{11}x_1 + y. \quad (18)$$

Элемент одномерной матрицы  $a_{11}$  совпадает в этом случае с числом Фробениуса и условие продуктивности  $a_{11} < 1$  выполняется.

Эту модель можно записать как модель для двух участников

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = a_{12}x_2. \quad (19)$$

Можно зафиксировать  $x_2 = 1$  и привести к виду

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Задавая значения  $y$  в уравнениях (18), (20) или  $x_2$  в уравнении в (19), будем находить необходимый объем выпуска продукции  $x_1$ .

Рассмотрим линейную модель обмена для двух участников

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \tilde{A}\vec{x}, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (21) \end{aligned}$$

Для баланса нужно, чтобы сумма элементов в каждом столбце матрицы равнялась единице

$$a_{1i} + a_{2i} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Число Фробениуса матрицы  $\tilde{A}$  равно 1, при этом  $a_{11} < 1$ . Так как все элементы  $a_{ij}$  меньше 1, их можно обозначить как  $a_{21} = \sin \phi_{21}$ ,  $a_{12} = \sin y$ ,  $a_{22} = \cos \phi_{22}$ . Выделим второго участника модели Леонтьева и изменим его экономическую "природу" с производителя на потребителя, организовав тем самым предельный переход [2]

$$\begin{aligned} \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}(\epsilon) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{\epsilon} \sin \epsilon y \\ \epsilon \sin \epsilon \phi_{21} & \cos \epsilon \phi_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{A}(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22) \end{aligned}$$

Это означает, что второй участник процесса потребляет продукцию первого, а первый не использует продукцию второго. Получим продуктивную модель Леонтьева.

#### 5. Заключение

Мы показали, что модель международного обмена и модель Леонтьева, будучи математически совершенно разными, тем не менее генетически связаны предельным переходом.

В физике предельными переходами можно связать разные теории. Например, квантовую и классическую механику можно связать предельным переходом, в котором параметром служит постоянная Планка  $\epsilon = \hbar$ . Классическую механику можно получить предельным переходом к малым скоростям по сравнению со скоростью света из специальной теории относительности с параметром  $\epsilon = \frac{v}{c}$ . Похожим образом могут быть связаны и две разные экономические модели — модель Леонтьева и линейная модель обмена. Здесь параметр  $\epsilon$  выделяет одного из производителей, уменьшая в процессе предельного перехода его вклад в общее производство и превращая в потребителя. Таким

образом, происходит разделение  $(n + 1)$ -го производителей на  $n$  производителей и одного потребителя.

Параметр  $\epsilon$  появляется и в соотношении, связывающим запас продуктивности  $\alpha(\epsilon)$  и число Фробениуса  $\lambda_L(\epsilon)$  полученной модели Леонтьева [12, 14]

$$(1 + \alpha(\epsilon))\lambda_L(\epsilon) = \lambda_{\bar{A}} = 1,$$

откуда

$$\alpha(\epsilon) = \frac{1}{\lambda_L(\epsilon)} - 1.$$

Мы полагаем, что предельные переходы между различными моделями могут использоваться для описания кризисных экономических процессов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Литература

- Новиков, С. П. Современные геометрические структуры и поля / С. П. Новиков, И. А. Тайманов. – Москва: МЦНМО, 2014. – 581 с.
- Громов, Н. А. Контракции классических и квантовых групп / Н. А. Громов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 318 с.
- Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E. P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39, № 6. – P. 510–524.
- Емельянов, В. М. Фундаментальные симметрии / В. М. Емельянов. – Москва: МИФИ, 2008. – 560 с.
- Нильсен, М. А. Квантовые вычисления и квантовая информация / М. А. Нильсен, И. Л. Чанг. – Москва: Мир, 2006. – 824 с.
- Ruskai, M. B. An analysis of completely-positive trace-preserving maps on  $2 \times 2$  matrices / M. B. Ruskai, S. Szarek, E. Werner // Lin. Alg. Appl. – 2002. – Vol. 347. – P. 159–187. ArXiv:quant-ph/0101003.
- McCulloch, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity / W. McCulloch, W. Pitts // Bull. Math. Biophys. – 1943. – V. 5. – P. 115–133.
- Алтайский, М. В. Квантовые нейронные сети: современное состояние и перспективы развития / М. В. Алтайский, Н. Е. Капуткина, В. А. Крылов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2014. – Т. 45, № 5/6. – С. 1824–1864.
- Леонтьев, В. В. Избранные произведения в 3-х томах. Т. 1. Общеэкономические проблемы межотраслевого анализа / В. В. Леонтьев. – Москва: Экономика, 2006. – 406 с.
- Аганбегян, А. Г. Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР / А. Г. Аганбегян, А. Г. Гранберг. – Москва: Мысль, 1968. – 357 с.
- Немчинов, В. С. Избранные произведения в 6 т. Планирование и народно-хозяйственные балансы. Т. 5 / В. С. Немчинов. – Москва: Наука, 1968. – 430 с.
- Гранберг, А. Г. Математические модели социалистической экономики: Общие принципы моделирования и статические модели народного хозяйства: учебное пособие для вузов / А. Г. Гранберг. – Москва: Экономика, – 1978. – 351 с.
- Колемаев, В. А. Математическая экономика: учебник для вузов / В. А. Колемаев. – Москва: ЮНИТИ, 2002. – 399 с.
- Солодовников, А. С. Математика в экономике: учебник. Ч. 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандра. – Москва: Финансы и статистика, 2013. – 384 с.
- Novikov, S. P. Modern geometric structures and fields / S. P. Novikov, I. A. Taimanov. – Amer. Math. Soc., 2006. – 659 p.
- Gromov, N. A. Kontraksii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups] / N. A. Gromov. – Moscow: FIZMATLIT, 2012. – 318 p.
- Inönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E. P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1953. – Vol. 39, № 6. – P. 510–524.
- Emel'yanov, V. M. Fundamental'nye simmetrii [Fundamental symmetries] / V. M. Emel'yanov. – Moscow: MIFI, 2008. – 560 p.
- Nielsen, M. A. Quantum computation and quantum information / M. A. Nielsen, I. L. Chuang. – Cambridge University Press, 2010. – 702 p.
- Ruskai, M. B. An analysis of completely-positive trace-preserving maps on  $2 \times 2$  matrices / M. B. Ruskai, S. Szarek, E. Werner // Lin. Alg. Appl. – 2002. – Vol. 347. – P. 159–187. ArXiv:quant-ph/0101003.
- McCulloch, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity / W. McCulloch, W. Pitts // Bull. Math. Biophys. – 1943. – Vol. 5. – P. 115–133.
- Altaisky, M. V. Quantum neural networks: Current status and prospects for development / M. V. Altaisky, N. E. Kaputkina, V. A. Krylov // Physics of Particles and Nuclei. – 2014. – Vol. 45. – P. 1013–1032.
- Leont'ev, V. V. Izbrannye proizvedeniya v 3-x tomakh. V. 1. Obšeeekonomicheskie problemy mezhotraslevogo analiza [Selected works in 3 volumes. Vol. 1. General economic problems of intersectoral analysis] / V. V. Leont'ev. – Moscow: Ekonomika, 2006. – 406 p.
- Aganbegyan, A. G. Ekonomiko-matematicheskij analiz mezhotraslevogo balansa SSSR [Economic and mathematical analysis of the USSR interindustry balance] / A. G. Aganbegyan, A. G. Granberg. – Moscow: Mysl', 1968. – 357 p.
- Nemchinov, V. S. Izbrannye proizvedeniya v 6 t. Planirovanie i narodno-hozyajstvennye balansy. T. 5. [Selected works in 6 volumes. Vol. 5. Planning and national-economic balances] / V. S. Nemchinov. – Moscow: Nauka, 1968. – 430 p.
- Granberg, A. G. Matematicheskie modeli socialisticheskoy ekonomiki: Obshchie principy modelirovaniya i staticheskie modeli narodnogo hozyajstva: uchebnoe posobie dlya vuzov [Mathematical models of a socialist economy. General principles of modeling and static models of the national economy. study guide for universities] / A. G. Granberg. – Moscow: Ekonomika, – 1978. – 351 p.



13. Kolemaev, V. A. Matematicheskaya ekonomika: ucheb-  
nik dlya vuzov [Mathematical economics: textbook for  
universities] / V. A. Kolemaev. – Moscow : YuNITI,  
2002. – 399 p.
14. Solodovnikov, A. S. Matematika v ekonomike: ucheb-  
nik. Ch. 1. Linejnaya algebra, analiticheskaya geometriya i  
linejnoe programmirovaniye [Mathematics in economics:  
textbook. Part 1. Linear algebra, analytical geometry and  
linear programming] / A. S. Solodovnikov, V. A. Babajcev,  
A. V. Brailov, I. G. Shandra. – Moscow : Finansy i statistika,  
2013. – 384 p.

**Благодарность (госзадание)**

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

**Acknowledgement (state task)**

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

The authors thank the reviewer for insightful comments.

**Для цитирования:**

Костяков, И. В. Об одной связи моделей обмена и Леонтьева / И. В. Костяков, В. В. Куратов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 84–89.

**For citation:**

Kostyakov, I. V. On one connection of the exchange and Leontief models / I. V. Kostyakov, V. V. Kuratov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2024. – № 5 (71). – P. 84–89.

Дата поступления рукописи: 27.06.2024

Received: 27.06.2024

## Юбилей

### Василий Ильич Пунегов



8 ноября 2024 г. исполняется 70 лет **Василию Ильичу ПУНЕГОВУ**, главному научному сотруднику Физико-математического института ФИЦ Коми научного центра УрО РАН, доктору физико-математических наук, профессору, крупному специалисту в области теории дифракции, рентгеновской оптики и неразрушающей рентгенодифракционной диагностики функциональных материалов современной наноэлектроники.

Василий Ильич Пунегов родился в г. Сыктывкаре. В 1962 г. поступил и в 1972 г. окончил Сыктывкарскую среднюю школу № 26. В том же году был принят на первый курс физико-математического факультета Сыктывкарского государственного университета (СыктГУ) по специальности физика. В 1977 г. окончил с отличием физико-математический факультет СыктГУ. После окончания университета работал в должности инженера, а затем ассистента кафедры общей физики Сыктывкарского государственного университета.

С 1977 по 1979 г. служил в рядах Советской армии (г. Свердловск). С 1982 по 1985 г. обучался в аспирантуре физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. После окончания аспирантуры и защиты в 1986 г. кандидатской диссертации работал в СыктГУ в различных должностях. С 1996 по 2006 г. заведовал кафедрой физики твердого тела, был членом Ученого совета СыктГУ. В 2004 г. перешел на работу в Отдел математики Коми НЦ УрО РАН вначале в должности ведущего научного сотрудника, а затем заведующего созданной им лаборатории теоретической и вычислительной физики. Кандидатская (1986) и докторская (1996) диссертации были защищены в МГУ им. М. В. Ломоносова.

Научные интересы В. И. Пунегова связаны с развитием теории рентгеновской дифракции в многослойных и градиентных кристаллах, исследованием фокусировки синхро-

## Anniversaries

### Vasily I. Punegov

тронного излучения, а также рассмотрением когерентного и диффузного рассеяния рентгеновских лучей в периодических средах. Основное внимание он уделяет разработке неразрушающих рентгенодифракционных методов исследования наноструктурированных материалов. В период с 1986 по 1996 г. В. И. Пунеговым разработано новое научное направление — статистическая теория рассеяния в решении прямых и обратных задач высокоразрешающей рентгеновской дифракции в кристаллических структурах с дефектами.

В настоящее время В. И. Пунегов разрабатывает два новых научных направления, связанных с решением прямых и обратных задач высокоразрешающей рентгеновской дифракции в наноструктурированных средах, включая полупроводниковые гетероструктуры с квантовыми ямами, нитями и точками, нанопористые материалы и элементы рентгеновской оптики. Второе новое научное направление основано на развитии динамической теории пространственно ограниченных рентгеновских пучков в кристаллах и многослойных структурах.

На протяжении всей научно-педагогической деятельности В. И. Пунегов большое внимание уделял подготовке кадров высшей квалификации. Семь его учеников защитили кандидатские диссертации, четверо из них работают в университетах Австралии, Германии, Новой Зеландии и Голландии.

Благодаря научным публикациям в высокорейтинговых международных журналах научные коллективы под руководством В. И. Пунегова выигрывали престижные международные и российские гранты: Международного научного фонда, Международной ассоциации по сотрудничеству ученых стран СНГ и Западной Европы (INTAS), Министерства образования Российской Федерации, РФФИ, РФФ.

Василий Ильич является членом Ученого совета Физико-математического института, а также членом редакционной коллегии журнала "Известия Коми НЦ УрО РАН". Серия "Физико-математические науки".

По материалам исследований В. И. Пунеговым опубликовано 270 научных статей, из них более 100 включено в базу данных Web of Science. Он участник более чем 50 научных конференций, симпозиумов и семинаров, в том числе международных.

Талантливый ученый В. И. Пунегов удостоен в 2014 г. звания Заслуженный работник Республики Коми, а в 2016 г. стал лауреатом премии Правительства Республики Коми в области научных исследований.

От всей души поздравляем известного ученого, замечательного семьянина и прекрасного человека Василия Ильича Пунегова с юбилеем и желаем ему счастливой, долгой, плодотворной и творческой жизни!

*Коллектив Физико-математического института  
Коми научного центра Уральского отделения  
Российской академии наук*



Научный журнал

# ИЗВЕСТИЯ

Коми научного центра  
Уральского отделения Российской академии наук

**Серия «Физико-математические науки»  
№ 5 (71)**

Номер подготовили:

Ответственный редактор серии – д.ф.-м.н. Н. А. Громов  
Ответственный секретарь серии – к.ф.-м.н. Д. А. Тимушев  
Выпускающий редактор – И. В. Курляк  
Редактор – О. А. Гросу  
Переводчики – Е. С. Кузьмина, С. Ф. Камалова  
Компьютерное макетирование – Л. В. Михайлова  
Дизайн обложки – Я. С. Куликова

Лицензия № 0047 от 10.01.1999.

Подписано в печать 22.07.2024. Дата выхода в свет 25.07.2024.

Уч.-изд.л. 11,5. Усл.-печ.л. 11,0. Тираж 300. Заказ № 32.

Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Свободная цена.

---

Подготовлено к изданию и отпечатано в редакционно-издательском центре ФИЦ Коми НЦ УрО РАН  
167982, Российская Федерация, ГСП-2, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24.

Адрес учредителя, издателя: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр «Коми научный центр УрО РАН».  
167982, Российская Федерация, ГСП-2, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24.