

Научный журнал
Основан в 2010 г.
Выходит девять раз в год

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
Федеральный исследовательский центр
«Коми научный центр УрО РАН»

ИЗВЕСТИЯ

КОМИ НАУЧНОГО ЦЕНТРА
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 6 (82)

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

2025

Главный редактор – акад. РАН А. М. Асхабов
Зам. главного редактора – чл.-корр. РАН С. В. Дёгтева
Зам. главного редактора – чл.-корр. РАН В. Н. Лажнецов
Ответственный секретарь – к.и.н. Д. В. Милохин

Редакционный совет:

акад. РАН В. В. Алексеев, акад. РАН А. А. Барях, акад. РАН В. И. Бердышев, д.м.н. Е. Р. Бойко,
чл.-корр. РАН И. Н. Болотов, акад. РАН В. Н. Большаков, Ph.D. (Econ.) К. Борисова-Маринова (Болгария),
д.ф.-м.н. Т. М. Бречко (Польша), к.г.-м.н. И. Н. Бурцев, акад. РАН А. Д. Гвишиани, д.ф.-м.н. Н. А. Громов,
д.и.н. И. Л. Жеребцов, д.б.н. В. Г. Зайнуллин, чл.-корр. РАН В. А. Ильин, акад. РАН С. В. Кривовичев,
И. В. Курляк, акад. РАН А. В. Кучин, чл.-корр. РАН Ю. Б. Марин, акад. РАН В. П. Матвеев,
д.и.н. В. И. Меньковский (Беларусь), акад. РАН Г. А. Месяц, чл.-корр. РАН А. А. Москалев,
д.э.н. Л. А. Попова, д.г.-м.н. А. М. Пыстин, чл.-корр. РАН И. М. Роцевская,
акад. РАН М. П. Роцевский, д.х.н. С. А. Рубцова, д.и.н. Э. А. Савельева, д.и.н. Т. С. Садыков (Казахстан),
чл.-корр. РАН А. Ф. Титов, д.б.н. С. Н. Харин, к.б.н. И. Ф. Чадин, акад. РАН В. Н. Чарушин, д.т.н. Ю. Я. Чукреев,
д.б.н. Е. В. Шамрикова, акад. РАН В. С. Шацкий, д.э.н. А. Г. Шеломенцев, к.э.н. А. А. Юдин

Редакционная коллегия серии «Физико-математические науки»:

д.ф.-м.н. Н. А. Беляева, д.ф.-м.н. С. Г. Бобков (США), д.ф.-м.н. В. А. Бушуев, д.ф.-м.н. В. П. Голубятников,
д.т.н. А. П. Господариков, д.ф.-м.н. О. Н. Граничин, д.ф.-м.н. Н. А. Громов (ответственный редактор),
д.ф.-м.н. А. В. Жубр, д.ф.-м.н. Ю. А. Курочкин (Беларусь), д.ф.-м.н. В. В. Мазалов, д.ф.-м.н. В. И. Манько,
д.ф.-м.н. В. М. Нежинский, д.ф.-м.н. А. Б. Певный, д.ф.-м.н. С. М. Полещиков, д.ф.-м.н. В. И. Пунегов,
д.ф.-м.н. В. М. Редьков (Беларусь), д.ф.-м.н. В. Н. Сивков, д.ф.-м.н. В. Ф. Соколов,
к.ф.-м.н. Д. А. Тимушев (ответственный секретарь), д.ф.-м.н. А. Н. Тихомиров, д.ф.-м.н. В. В. Ульянов,
д.ф.-м.н. С. М. Хрящев, д.ф.-м.н. П. С. Щербаков

Адрес редакции:

167982, ГСП-2, Республика Коми, г. Сыктывкар,
ул. Коммунистическая, д. 24
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, каб. 317, 318.
Тел. (8212) 24-47-79, факс (8212) 24-22-64
E-mail: journal@frc.komisc.ru
www.izvestia.komisc.ru

ISSN 1994-5655

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору
за соблюдением законодательства в сфере массовых
коммуникаций и охране культурного наследия.

Свид. о регистрации средств массовой информации
ПИ № ФС 77-26969 от 11 января 2007 г.

Подписной индекс в каталоге «Почта России» 52047

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий ВАК

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр
«Коми научный центр УрО РАН», 2025

Science Journal
Founded in 2010
Published 9 times a year

Established by
Federal State Budgetary
Institution of Science
Federal Research Centre
«Komi Science Centre, Ural Branch, RAS»

PROCEEDINGS

OF THE KOMI SCIENCE CENTRE
URAL BRANCH
RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

№ 6 (82)

«PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES» series

2025

Editor-in-chief – RAS acad. A. M. Askhabov

Deputy editor-in-chief – RAS corresp. member S. V. Degteva

Deputy editor-in-chief – RAS corresp. member V. N. Lazhentsev

Executive secretary – Cand. Sci. (Hist.) D. V. Milokhin

Editorial Council:

RAS acad. V. V. Alekseev, RAS acad. A. A. Baryakh, RAS acad. V. I. Berdyshev, Dr. Sci. (Med.) E. R. Bojko,
RAS corresp. member I. N. Bolotov, RAS acad. V. N. Bolshakov, Ph.D. (Econ.) K. Borissova-Marinova (Bulgaria),
Dr. Sci. (Phys.-Math.) T. M. Brechko (Poland), Cand. Sci. (Geol.-Mineral.) I. N. Burtsev, RAS acad. A. D. Gvishiani,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) N. A. Gromov, Dr. Sci. (Hist.) I. L. Zherebtsov, Dr. Sci. (Biol.) V. G. Zainullin,
RAS corresp. member V. A. Ilyin, RAS acad. S. V. Krivovichev, I. V. Kurlyak, RAS acad. A. V. Kuchin,
RAS corresp. member Yu. B. Marin, RAS acad. V. P. Matveenko, Dr. Sci. (Hist.) V. I. Men'kovsky (Belarus),
RAS acad. G. A. Mesyats, RAS corresp. member A. A. Moskalev, Dr. Sci. (Econ.) L. A. Popova,
Dr. Sci. (Geol.-Mineral.) A. M. Pystin, RAS corresp. member I. M. Roshchevskaya,
RAS acad. M. P. Roshchevsky, Dr. Sci. (Chem.) S. A. Rubtsova, Dr. Sci. (Hist.) E. A. Savelyeva,
Dr. Sci. (Hist.) T. S. Sadykov (Kazakhstan), RAS corresp. member A. F. Titov,
Dr. Sci. (Biol.) S. N. Kharin, Cand. Sci. (Biol.) I. F. Chadin, RAS acad. V. N. Charushin,
Dr. Sci. (Tech.) Yu. Ya. Chukreev, Dr. Sci. (Biol.) E. V. Shamrikova, RAS acad. V. S. Shatsky,
Dr. Sci. (Econ.) A. G. Shelomentsev, Cand. Sci. (Econ.) A. A. Yudin

Editorial Board of the series «Physical and Mathematical Sciences»:

Dr. Sci. (Phys.-Math.) N. A. Belyaeva, Dr. Sci. (Phys.-Math.) S. G. Bobkov (USA), Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. A. Bushuev,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. P. Golubyatnikov, Dr. Sci. (Tech.) A. P. Gospodarikov,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) O. N. Granichin, Dr. Sci. (Phys.-Math.) N. A. Gromov (Executive editor),
Dr. Sci. (Phys.-Math.) A. V. Zhubr, Dr. Sci. (Phys.-Math.) Yu. A. Kurochkin (Belarus),
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. V. Mazalov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. I. Man'ko, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. M. Nezhinskij,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) A. B. Pevnyi, Dr. Sci. (Phys.-Math.) S. M. Poleshchikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. I. Punegov,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. M. Red'kov (Belarus), Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. N. Sivkov,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. F. Sokolov, Cand. Sci. (Phys.-Math.) D. A. Timushev (Executive secretary),
Dr. Sci. (Phys.-Math.) A. N. Tikhomirov, Dr. Sci. (Phys.-Math.) V. V. Ulyanov,
Dr. Sci. (Phys.-Math.) S. M. Khryashchev, Dr. Sci. (Phys.-Math.) P. S. Shcherbakov

Editorial Office:

Office 317, 318 Komi Science Centre, Ural Branch, RAS
24, Kommunisticheskaya st., GSP-2,
Syktyvkar 167982, Komi Republic
Tel. +7 8212 244779, Fax +7 8212 242264
E-mail: journal@frc.komisc.ru
www.izvestia.komisc.ru

ISSN 1994-5655

Registered by the Russian Federal Surveillance Service
for Compliance with the Law in Mass Communications
and Cultural Heritage Protection.

The certificate of mass media registration –
ПИ № ФС 77-26969 dated 11 January, 2007

The "Russian Post" catalogue subscription index 52047

*The journal is included in the list of peer-reviewed scientific
publications of the Higher Attestation Commission
of the Russian Federation*

© Federal State Budgetary Institution
of Science Federal Research Centre
"Komi Science Centre, Ural Branch, RAS", 2025

СОДЕРЖАНИЕ

А. Карабанов Гомологические инварианты в калибровочных теориях	5
В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов Деформация сжимаемого продольной силой стержня при жестких ограничениях на перемещения с различными граничными условиями	12
Н. А. Громов, В. В. Куратов, И. В. Костяков Нейтрино в остывающей Вселенной	20
И. В. Костяков, В. В. Куратов Орбифолды в одномерных пространствах Кэли-Клейна	28
В. В. Кисель, А. В. Бурый, П. О. Саченок, А. С. Мартыненко, Е. М. Овсюк Дираковская частица с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью	41
А. В. Бурый О роли скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2	48
А. В. Бурый, А. В. Ивашкевич, П. О. Саченок, Е. М. Овсюк Векторная частица с поляризуемостью в однородном магнитном поле	56
А. В. Ивашкевич Нерелятивистское приближение для частицы со спином $3/2$ в гравитационном поле	64
Д. В. Казаков, С. И. Колосов, В. И. Пунегов Картографирование рентгеновской Лауэ-дифракции от совершенных и клиновых многослойных структур	71
Д. Б. Ефимов Научный семинар лаборатории математики и телекоммуникаций Физико-математического института ФИЦ Коми НЦ УрО РАН	77
В. Н. Лаженцев Введение в научно-исследовательскую работу	84
Юбилеи Виталию Николаевичу Лаженцеву – 85 лет	89
Потери Памяти Андрея Вячеславовича Карпова (1980–2025)	91

CONTENTS

A. Karabanov Homological invariants in gauge theories	5
V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov Deformation of a rod compressed by a longitudinal force under rigid constraints on displacement with various boundary conditions	12
N. A. Gromov, V. V. Kuratov, I. V. Kostyakov Neutrinos in a cooling Universe	20
I. V. Kostyakov, V. V. Kuratov Orbifolds in one-dimensional Cayley-Klein spaces	28
V. V. Kisel, A. V. Bury, P. O. Sachenok, A. S. Martynenko, E. M. Ovsiyuk Dirac particle with anomalous magnetic moment and polarizability	41
A. V. Bury On the role of scalar field in the theory of massless spin 2 particle	48
A. V. Bury, A. V. Ivashkevich, P. O. Sachenok, E. M. Ovsiyuk Vector particle with polarizability in the uniform magnetic field	56
A. V. Ivashkevich The nonrelativistic approximation for a spin 3/2 particle in gravitation field	64
D. V. Kazakov, S. I. Kolosov, V. I. Punegov Reciprocal space mapping of X-ray Laue diffraction in perfect and wedge multilayers	71
D. B. Efimov Scientific Seminar of the Laboratory of Mathematics and Telecommunications of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS	77
V. N. Lazhentsev Introduction to research work	84
Anniversaries Vitaly Nikolaevich Lazhentsev is 85 years old	89
Losses To the memory of Andrey Vyacheslavovich Karpov (1980–2025)	91

Homological invariants in gauge theories

A. Karabanov

Cryogenic Ltd,
London, W3 7QE, UK
karabanov@hotmail.co.uk

Abstract

Extending the gauge formalism of the physical field theory to general graded Lie algebras, we show that in this formalism cohomology groups naturally arise, invariant under gauge transformations. Links of these groups to the Chern-Weil theory of characteristic classes are established. Applications of these cohomologies to Gerstenhaber-Nijenhuis deformations and Yang-Mills equations are discussed. These results can also be useful in the theory of integrable evolution equations and geometry of Lie groups.

Keywords:

gauge theories, algebraic formalism, homological invariants

Introduction

The gauge formalism of the physical field theory is an important tool that regulates redundant degrees of freedom and utilizes symmetries of the Lagrangian. It is considered as a basis for a unified theory of physical interactions.

The gauge formalism has two basic mathematical components, geometric and algebraic. Geometrically, gauge fields are associated to connections on principal fibre bundles over the space-time, with the structure group being the symmetry group. Algebraically, the gauge formalism is based on the theory of graded Lie algebras of exterior differential forms on manifolds, with values in a Lie algebra [1].

In these notes, the abstract algebraic component of the gauge theories, leaving aside their geometric features, is applied to general graded Lie algebras. The basic notations of the gauge formalism find their general algebraic analogues. It is shown that to each abstract gauge field a cohomology group can be naturally associated, which is an invariant of the gauge group. We also show that isomorphism classes of these groups are closely related to the Chern-Weil theory of characteristic classes. These homological invariants are applied to a curvature-preserving deformation theory, in the sense of the Gerstenhaber-Nijenhuis formalism [2, 3], and to the study of solutions to the Yang-Mills equations [1].

The results obtained can be useful also in the theory of integrable evolution equations (existence of integrable hierarchies [4] on non-Euclidean manifolds) and geometry of Lie groups (Maurer-Cartan forms [5]).

Гомологические инварианты в калибровочных теориях

A. Карабанов

ООО «Криогеника»,
г. Лондон, W3 7QE, Великобритания
karabanov@hotmail.co.uk

Аннотация

Распространяя калибровочный формализм физической теории поля на общие градуированные алгебры Ли, мы показываем, что в этом формализме естественным образом возникают группы когомологий, инвариантные относительно калибровочных преобразований. Устанавливаются связи этих групп с теорией характеристических классов Чжэня-Вейля. Обсуждаются приложения этих когомологий к деформациям Герстенхабера-Нийенхейса и уравнениям Янга-Миллса. Эти результаты могут быть полезны также в теории интегрируемых эволюционных уравнений и геометрии групп Ли.

Ключевые слова:

калибровочные теории, алгебраический формализм, гомологические инварианты

1. Gauge theories on graded Lie algebras

Let Ω be a graded Lie algebra over \mathbb{R} , i.e., a \mathbb{Z} -graded real vector space

$$\Omega = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k$$

with a bilinear operation (bracket)

$$[\cdot, \cdot] : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$$

that is graded skew-symmetric, respects the grading and satisfies the graded Jacobi identity

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= -(-1)^{kl}[\eta, \xi], \quad [\xi, \eta] \in \Omega^{k+l}, \\ (-1)^{kp}[\xi, [\eta, \theta]] + (-1)^{lk}[\eta, [\theta, \xi]] + \\ &+ (-1)^{pl}[\theta, [\xi, \eta]] = 0, \\ \xi \in \Omega^k, \quad \eta \in \Omega^l, \quad \theta \in \Omega^p. \end{aligned} \quad (1)$$

By Eq. (1), graded Lie algebras are not Lie algebras in the usual sense (although the 0th grade Ω^0 and the even part $\bigoplus \Omega^{2k}$ are usual Lie algebras). The terminology we use is induced by the gauge formalism and the deformation theory (see, for instance, Refs. [2, 5]). In the context of supersymmetry (basically in the even-odd $\mathbb{Z}/2$ setting), algebras with brackets, satisfying conditions (1), are called graded Lie superalgebras (see, for instance, Ref. [3]). In the context of usual Lie algebras, graded Lie algebras are understood as usual Lie algebras, carrying grading.

Elements of the grade Ω^k are called homogeneous elements of degree k . Let E^k be the space of homogeneous operators on Ω of degree k , i.e., endomorphisms of Ω which shift the grades by k ,

$$E^k = \{A \in \text{End}(\Omega) : A\Omega^l \subseteq \Omega^{l+k}, l \in \mathbb{Z}\}.$$

Then the endomorphisms space is written as a graded vector space

$$\text{End}(\Omega) \equiv E = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E^k.$$

Define a bracket on E by the rule

$$\begin{aligned} [A, B]_0 &= AB - (-1)^{ab} BA, \\ A &\in E^a, \quad B \in E^b. \end{aligned}$$

With this bracket the space E of endomorphisms of Ω becomes a graded Lie algebra. In fact, the bracket $[\cdot, \cdot]_0$ satisfies relations similar to Eq. (1).

Let ρ denote the adjoint representation of the algebra Ω ,

$$\begin{aligned} \rho : \Omega &\rightarrow E, \quad \rho(\xi)\eta = [\xi, \eta], \\ \rho([\xi, \eta]) &= [\rho(\xi), \rho(\eta)]_0. \end{aligned} \quad (2)$$

We assume that ρ is faithful,

$$\ker \rho = 0, \quad (3)$$

i.e., the algebra Ω has trivial centre.

Suppose a (real) Lie group G acts on the algebra Ω by automorphisms, i.e., there is a representation

$$\begin{aligned} T : G &\rightarrow GL(\Omega), \\ \rho(T(g)\xi) &= S(g)\rho(\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

$$g \in G, \quad \xi \in \Omega.$$

Here S is the action of G on the algebra E by conjugation automorphisms,

$$\begin{aligned} S(g) : A &\mapsto T(g)AT(g^{-1}), \\ g &\in G, \quad A \in E. \end{aligned}$$

Further, the elements of Ω^1 are called *gauge fields*.

Let d be a differential on Ω , i.e., a derivation of degree 1 that squares to zero,

$$\begin{aligned} \rho(d\xi) &= [d, \rho(\xi)]_0, \quad \xi \in \Omega, \\ d &\in E^1, \quad dd = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

To each gauge field $\omega \in \Omega^1$ we associate the linear operator

$$d_\omega = d + \rho(\omega) \in E^1, \quad (6)$$

which we call the *covariant derivative* along ω , and the magnitude

$$\phi(\omega) = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Omega^2, \quad (7)$$

which we call the *curvature* (or the *gauge field strength*) of ω . As a consequence of Eqs. (2), (5), for each gauge field, the covariant derivative is a derivation of degree 1,

$$\rho(d_\omega \xi) = [d_\omega, \rho(\xi)]_0, \quad \xi \in \Omega,$$

which is connected to the curvature by the relations

$$d_\omega(\phi(\omega)) = 0, \quad d_\omega d_\omega = \rho(\phi(\omega)). \quad (8)$$

Proposition 1. Suppose there exists a smooth function

$$\nu : G \rightarrow \Omega^1$$

such that

$$\rho(\nu(g)) = S(g)d - d. \quad (9)$$

Then, for all $g \in G$, the map

$$\begin{aligned} K(g) : \Omega^1 &\rightarrow \Omega^1, \\ \omega &\mapsto T(g)\omega + \nu(g) \end{aligned} \quad (10)$$

acts on covariant derivatives by the rule

$$d_{K(g)\omega} = S(g)d_\omega. \quad (11)$$

Proof. This is a simple consequence of Eqs. (60), (9). \square

Note that, since the adjoint representation ρ is faithful, the function $\nu(g)$ (if exists) is unique. The map (10) is called the *gauge transformation* corresponding to $g \in G$. Two gauge fields ω, ω' are called *equivalent* (or *gauge equivalent*), $\omega \sim \omega'$, if they are connected by a gauge transformation, $\omega' = K(g)\omega$, for some $g \in G$.

Corollary 1. It follows from Eqs. (60), (9) that the function ν satisfies the property

$$\nu(hg) = K(h)\nu(g).$$

Hence, the gauge transformations form a Lie group,

$$K(hg) = K(h)K(g), \quad h, g \in G,$$

which we call the *gauge group* and denote $K(G)$.

Corollary 2. Acting on both sides of Eq. (11) by the operator $d_{K(g)\omega}$ and using Eq. (8), we see that gauge transformations act on curvatures by the rule

$$\phi(K(g)\omega) = T(g)\phi(\omega).$$

Corollary 3. By Eq. (9),

$$d_{\nu(g)} = S(g)d,$$

where, for each $g \in G$, the right-hand side squares to zero. Hence, for each $g \in G$, the covariant derivative $d_{\nu(g)}$ is a differential on Ω . Since the adjoint representation ρ is faithful, by Eq. (8), the curvature of $\nu(g)$ is zero. This gives

$$d_{\nu(g)}d_{\nu(g)} = 0, \quad \phi(\nu(g)) = 0.$$

By Eq. (10), $\nu(g)$ is equivalent to the zero gauge field,

$$\nu(g) \sim 0, \quad g \in G.$$

The gauge fields $\nu(g)$ are called *pure gauge fields*.

The assumption of Proposition 1, Eq. (9), is fulfilled at least in two cases: where the differential d is an inner derivation or where $T(g)$ are inner automorphisms. In the former case, we have $d = \rho(\eta)$ for some $\eta \in \Omega^1$ (with $[\eta, \eta] = 0$), so $\nu(g) = T(g)\eta - \eta$. In the latter case, the differential t_e of the representation T at the identity element e of the group G maps the Lie algebra \mathfrak{g} of the group G to the Lie algebra

$\rho(\Omega^0)$ of inner derivations of degree 0, i.e., defines a representation

$$t_e : \mathfrak{g} \rightarrow \rho(\Omega^0) \subseteq E^0$$

(accompanied with a homomorphism $\mathfrak{g} \rightarrow \Omega^0$, as ρ is faithful). According to Eq. (9), we have $\nu(e) = 0$. The infinitesimal form near the identity element of the group G of the right-hand side of Eq. (9) is

$$[t_e(a), d]_0, \quad a \in \mathfrak{g}.$$

In the case where $t_e(a)$ is an inner derivation for all $a \in \mathfrak{g}$, using the fact that inner derivations form an ideal $\text{id}_{\text{der}}(\Omega)$ in the algebra of all derivations $\text{der}(\Omega) \subseteq E$, we obtain that the right-hand side of Eq. (9) is infinitesimally realised as an inner derivation. Since this right-hand side is a derivation for all $g \in G$, this local analysis is extended to the whole group G in the standard way, by left translations within G . We obtain then that, if $T(g)$ are inner automorphisms, the right-hand side of Eq. (9) forms an inner derivation for all $g \in G$. Such a situation realises, for instance, in the special case of the natural action of the Lie algebra Ω^0 on Ω . The latter can be extended to an inner action of the (local) Lie group that has Ω^0 as its Lie algebra.

Note that one of derivations d or $t_e(a)$ is not necessarily inner, as the ideal $\text{id}_{\text{der}}(\Omega) \subseteq \text{der}(\Omega)$ is not necessarily prime. Generally speaking, Eq. (9) means that the S -action preserves the coset generated by the derivation d in the quotient $\text{der}(\Omega)/\text{id}_{\text{der}}(\Omega)$. The case where $T(g)$ are inner automorphisms takes place, for instance, in the field-theoretical gauge formalism.

Eq. (3) suggests that we introduced an abstract non-abelian gauge theory. The abelian case corresponds to the trivial bracket $[\cdot, \cdot] = 0$, which gives $\rho = 0$. This reduces to the situation where the representation S preserves the differential, $S(g)d = d$ (for instance, T is trivial), the covariant derivative coincides with d for all gauge fields, $d_\omega = d$, the curvature reduces to $\phi(\omega) = d\omega$, and the function $\nu(g)$ is chosen to have zero curvature, $d(\nu(g)) = 0$ for all $g \in G$, and to satisfy the group property of Corollary 1.

2. Homological invariants

The differential d makes Ω a cochain complex and generates the graded cohomology group

$$H = \ker d / \text{im } d.$$

The differential $d_{\nu(g)}$ also makes Ω a cochain complex with the graded cohomology group

$$H(\nu(g)) = \ker d_{\nu(g)} / \text{im } d_{\nu(g)}.$$

By Eq. (11), the $T(g)$ -action is a quasi-isomorphism of these cochain complexes, so the cohomologies $H(\nu(g))$ and H are isomorphic,

$$H(\nu(g)) \sim H, \quad g \in G.$$

This observation is generalised as follows.

Proposition 2. For each gauge field $\omega \in \Omega^1$, the covariant derivative d_ω is a differential on the graded Lie subalgebra

$$\Omega(\omega) = \ker (d_\omega d_\omega) \subseteq \Omega \quad (12)$$

and generates on $\Omega(\omega)$ the graded cohomology group

$$H(\omega) = \ker d_\omega / \text{im } d_\omega.$$

Equivalent gauge fields have isomorphic cohomologies,

$$\Omega(\omega) \sim \Omega(\omega'), \quad H(\omega) \sim H(\omega'),$$

$$\omega' = K(g)\omega, \quad g \in G.$$

Proof. Since d_ω commutes with $d_\omega d_\omega$, it maps the kernel $\Omega(\omega)$ to itself and acts on $\Omega(\omega)$ as a differential. The $T(g)$ -action realises a quasi-isomorphism of the cochain complexes for gauge-equivalent ω, ω' . \square

Note that the subalgebra $\Omega(\omega)$ is never zero. It is indeed a graded Lie subalgebra of Ω , as it coincides with the centralizer of the curvature $\phi(\omega)$. In fact, by Eqs. (1), (8), the curvature $\phi(\omega)$ itself belongs to $\Omega(\omega)$. By definition, more generally, we have $\ker d_\omega \subseteq \Omega(\omega)$. In the special case $\phi(\omega) = 0$, the subalgebra (12) coincides with the ambient algebra,

$$\Omega(\omega) = \Omega, \quad \phi(\omega) = 0.$$

As mentioned, the pure gauge fields $\nu(g)$ all have zero curvature. They are all equivalent to $\omega = 0$, and the cohomology groups $H(\nu(g))$ are all isomorphic to the cohomology group generated by the differential d . In general, however, $H(\omega) \not\sim H$, even for $\phi(\omega) = 0$.

By Proposition 2, the cohomology groups $H(\omega)$ are invariants of the gauge group $K(G)$. The cohomologies $H(\omega)$ classify points of the orbit space $\Omega^1/K(G)$. For $H(\omega) \not\sim H(\omega')$, the gauge fields ω and ω' are not equivalent, and their $K(G)$ -orbits are different.

For each gauge field ω , the cohomology group $H(\omega)$ forms a graded Lie algebra. In fact, for each differential D , the image $\text{im } D$ is an ideal in the kernel $\ker D$. This follows from the fact that D is a derivation of Ω , i.e., $\rho(D\xi) = [D, \rho(\xi)]_0$, for all $\xi \in \Omega$, and $DD = 0$. Then it is easy to verify that the cohomology class of the bracket $[\xi, \eta]$, where $\xi, \eta \in \ker D$, depends only on the cohomology classes of ξ, η . Hence, the bracket $[\cdot, \cdot]$ in the algebra $\Omega(\omega)$ generates a bracket in the cohomology group $H(\omega)$. This bracket inherits the properties (1), i.e., it is again graded skew-symmetric, respects the grading and satisfies the graded Jacobi identity.

In this context, the quadratic map

$$f : \ker d_\omega \cap \Omega^1(\omega) \rightarrow \ker d_\omega \cap \Omega^2(\omega),$$

$$f : u \mapsto [u, u]$$

generates a quadratic map of cohomology groups

$$f' : H^1(\omega) \rightarrow H^2(\omega).$$

By Eq. (8), $\phi(\omega) \in \ker d_\omega \cap \Omega^2(\omega)$, so the cohomology class

$$[\phi(\omega)] \in H^2(\omega)$$

can be associated to each gauge field $\omega \in \Omega^1$. By Proposition 1 and Corollary 2, the property of ω to have trivial or a nontrivial cohomology class $[\phi(\omega)]$ is gauge-invariant. In fact, the condition $\phi(\omega) = d_\omega(\xi(\omega))$ implies

$$\begin{aligned} \phi(K(g)\omega) &= T(g)(\phi(\omega)) = \\ &= T(g)\{d_\omega(\xi(\omega))\} = d_{K(g)\omega}\{T(g)(\xi(\omega))\}. \end{aligned}$$

These observations are useful for the applications below.

3. Chern classes

Isomorphism classes of the even cohomology groups $H^{2k}(\omega)$ can be put into the context of Chern characteristic classes as follows.

Let a graded real vector space $\bar{\Omega} = \bigoplus \bar{\Omega}^k$ be given that generates a cochain complex with a differential \bar{d} and the relevant cohomology group $\bar{H} = \bigoplus \bar{H}^k$. For each gauge field ω , consider the cochain complex $\Omega(\omega)$ with the differential d_ω introduced in Section 2. Let

$$p_\omega : \Omega(\omega) \rightarrow \bar{\Omega}$$

be a "quasi-cochain map", i.e., a linear map that respects the grading and maps d_ω -closed elements to \bar{d} -closed elements,

$$q_\omega d_\omega = \bar{d} p_\omega \quad (13)$$

with some map $q_\omega : \Omega(\omega) \rightarrow \bar{\Omega}$. Considering the curvature $\phi(\omega) \in \Omega^2(\omega)$, it follows from Eqs. (8), (13) that the magnitude $p_\omega(\phi(\omega)) \in \bar{\Omega}^2$ is \bar{d} -closed. Hence, it generates the cohomology class

$$c_1(\omega) = [p_\omega(\phi(\omega))] \in \bar{H}^2,$$

which we call the *first Chern class* of ω in \bar{H} .

The terminology is induced by the classical Chern-Weil theory of characteristic classes, which links differential geometry and algebraic topology and plays an important part in topology of principal fiber bundles and vector bundles. In the space of connections ω on such a bundle, with the adjoint gauge group action, $\bar{\Omega}$ is the de Rham complex of the base manifold, and p_ω is generated by the Chern-Weil homomorphism (see, for example, [6] and references therein).

The following result shows that the first Chern class is an invariant of gauge transformations and in certain cases depends only on the class $[\phi(\omega)] \in H^2(\omega)$ introduced in Section 2. In fact, $c_1(\omega)$ is a characteristic class of isomorphisms of the cohomology groups $H(\omega)$.

Proposition 3. The first Chern class is gauge invariant,

$$c_1(\omega') = c_1(\omega), \quad \omega' = K(g)\omega, \quad g \in G,$$

and under one of the conditions

- i) p_ω is a cochain map, i.e., in Eq. (13) $q_\omega = p_\omega$, or
- ii) ω is a solution to the Yang-Mills equation, $d_\omega^*(\phi(\omega)) = 0$ (see Section 5),

$$c_1(\omega) = [p_\omega[\phi(\omega)]], \quad [\phi(\omega)] \in H^2(\omega). \quad (14)$$

Proof. Under the gauge transformations, the relevant cochain complexes, the quasi-cochain maps, the covariant derivatives and the curvatures are transformed as

$$\Omega(\omega') = T(g)\Omega(\omega), \quad p_{\omega'}T(g) = p_\omega, \quad q_{\omega'}T(g) = q_\omega,$$

$$d_{\omega'}T(g) = T(g)d_\omega, \quad \phi(\omega') = T(g)\phi(\omega).$$

This implies

$$p_{\omega'}(\phi(\omega')) = p_\omega(\phi(\omega)),$$

and we obtain that $c_1(\omega)$ is gauge invariant. Further, under condition i), the cochain map p_ω maps cohomology classes to cohomology classes. This implies Eq. (14). Under condition ii), we have $\phi(\omega) \perp \text{im } d_\omega$ (see Section 5), so $\phi(\omega)$ has zero projection to the space $d_\omega\Omega^1(\omega)$. This implies $\phi(\omega) = [\phi(\omega)]$ and leads again to Eq. (14). \square

Note that if the maps p_ω are T -invariant,

$$p_\omega T(g) = p_\omega,$$

then $p_\omega \equiv p$ can be chosen independently of ω .

Corollary 4. Under one of conditions i) or ii) of Proposition 3,

$$[\phi(\omega)] = 0 \in H^2(\omega) \quad \longrightarrow \quad c_1(\omega) = 0 \in \bar{H}^2.$$

In particular, gauge fields of zero curvature have trivial first Chern class. For example, pure gauge fields satisfy this condition.

Higher Chern classes can be introduced as follows. Let the bracket $[\ , \]$ be generated by some associative bilinear operation \wedge , i.e.,

$$[\xi, \eta] = \xi \wedge \eta - (-1)^{xy} \eta \wedge \xi, \quad \xi \in \Omega^x, \eta \in \Omega^y.$$

We assume that the operation \wedge preserves the automorphisms action $T(G)$, the differential d remaining a derivation of degree 1 that squares to zero,

$$(T(g)\xi) \wedge (T(g)\eta) = T(g)(\xi \wedge \eta),$$

$$d(\xi \wedge \eta) = (d\xi) \wedge \eta + (-1)^x \xi \wedge d\eta, \quad dd = 0.$$

Using the notation

$$\phi(\omega)^k = \phi(\omega) \wedge \dots \wedge \phi(\omega) \quad (k \text{ times}),$$

for each $k = 1, 2, \dots$, we define the k th Chern class to be

$$c_k(\omega) = [p_\omega(\phi(\omega)^k)] \in \bar{H}^{2k}.$$

Eq. (8) is generalized as

$$d_\omega(\phi(\omega)^k) = 0,$$

so $p_\omega(\phi(\omega)^k)$ are \bar{d} -closed, and the Chern classes are well-defined.

Like the first Chern class c_1 , the higher Chern classes are also gauge-invariant, being characteristic classes of isomorphisms of the cohomologies $H(\omega)$. Under one of conditions i) or ii) of Proposition 3, Eq. (14) generalizes to

$$c_k(\omega) = [p_\omega[\phi(\omega)^k]], \quad [\phi(\omega)^k] \in H^{2k}(\omega).$$

Classical Chern classes $c'_k(\omega)$ are defined in a different manner, being homogeneous polynomial combinations of the classes $c_k(\omega)$ we introduced. This is related to formal expansions [6]

$$\det(1 + t\phi(\omega)) = 1 + tc'_1(\omega) + t^2c'_2(\omega) + \dots$$

Here the first Chern class (up to scaling related to integer cohomologies) coincides with that we introduced,

$$c'_1(\omega) = c_1(\omega).$$

4. Gerstenhaber-Nijenhuis deformations

The cohomology groups $H^1(\omega)$, $H^2(\omega)$ play an important role in the curvature-preserving deformations, in the general framework of the Gerstenhaber-Nijenhuis theory [2, 3], as described below.

Let $M(\bar{\phi})$ be the manifold of gauge fields of a fixed curvature $\bar{\phi}$,

$$M(\bar{\phi}) = \{\omega \in \Omega^1 : \phi(\omega) = \bar{\phi}\}.$$

By Eqs. (8), (12), we have

$$\omega - \omega' \in \Omega^1(\omega) = \Omega^1(\omega'), \quad \omega, \omega' \in M(\bar{\phi}).$$

Proposition 4. Let $\omega \in M(\bar{\phi})$ have trivial second cohomology group, $H^2(\omega) = \{0\}$, and $\ker d_\omega \cap \Omega^1(\omega) \neq \{0\}$. Then ω can be deformed within the manifold $M(\bar{\phi})$ by a formal power series

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots \in M(\bar{\phi}), \\ \lambda &\in \mathbb{R}, \quad u_k \in \Omega^1(\omega), \end{aligned} \quad (15)$$

in the direction of any tangent vector $u_1 \in \ker d_\omega$.

Proof. The power series (15) is supposed to solve the equation

$$d\omega' + \frac{1}{2}[\omega', \omega'] = \bar{\phi},$$

which at $\lambda = 0$ is solved by the chosen $\omega \in M(\bar{\phi})$. We have formally

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega + u, \quad d_\omega u + \frac{1}{2}[u, u] = 0, \\ u &= \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots \end{aligned}$$

The first coefficient u_1 satisfies the equation

$$d_\omega u_1 = 0$$

and can be chosen arbitrarily from $\ker d_\omega$. Then the higher order coefficients u_2, u_3 , etc., are found recurrently as follows. Let the first q coefficients be known. Then we have

$$\begin{aligned} d_\omega u_r + \frac{1}{2}J_r &= 0, \quad r = 1, \dots, q, \\ J_r &= \sum_{p=1}^{r-1} [u_p, u_{r-p}]. \end{aligned} \quad (16)$$

The next $(q+1)$ th coefficient should satisfy the equation

$$d_\omega u_{q+1} + \frac{1}{2}J_{q+1} = 0, \quad (17)$$

and we should show that Eq. (2) is solvable. Let

$$u^{(a)} = \sum_{r=1}^q \lambda^r u_r$$

denote the q th partial sum of the series (15). We obtain from Eq. (1)

$$[\omega + u^{(a)}, [\omega + u^{(a)}, \omega + u^{(a)}]] = 0.$$

Taking the $(q+1)$ th power in λ of the expression above, this gives

$$[\omega, J_{q+1}] + \sum_{r=1}^q [u_{q+1-r}, 2[\omega, u_r] + J_r] = 0.$$

By Eq. (16),

$$2[\omega, u_r] + J_r = -2du_r,$$

which gives

$$[\omega, J_{q+1}] - 2 \sum_{r=1}^q [u_{q+1-r}, du_r] = 0. \quad (18)$$

We have

$$\begin{aligned} dJ_{q+1} &= \sum_{r=1}^q ([du_r, u_{q+1-r}] - [u_r, du_{q+1-r}]) = \\ &= -2 \sum_{r=1}^q [u_{q+1-r}, du_r], \end{aligned}$$

so Eq. (18) becomes

$$[\omega, J_{q+1}] + dJ_{q+1} = d_\omega J_{q+1} = 0.$$

Hence, we obtain $J_{q+1} \in \ker d_\omega \cap \Omega^2(\omega)$. By assumption, $H^2(\omega) = \{0\}$, which implies $J_{q+1} \in \text{im } d_\omega \cap \Omega^2(\omega)$, i.e., Eq. (2) is indeed has a solution. The coefficient u_{q+1} can be chosen uniquely if we require that it has zero projection to $\ker d_\omega$. \square

By Proposition 4, the cohomology group $H^2(\omega)$ obstructs the existence of smooth deformations of ω within the fixed-curvature manifold $M(\phi(\omega) = \bar{\phi})$. Indeed, for $H^2(\omega) \neq \{0\}$, Eq. (2) may be unsolvable and not all coefficients u_q of the power series (15) may exist. The subspace $\ker d_\omega \cap \Omega^1(\omega)$ consists of vectors tangent to the manifold $M(\bar{\phi})$ at the point ω . If this subspace is trivial then $M(\bar{\phi})$ locally consists of one point ω . The condition $\ker d_\omega \cap \Omega^1(\omega) \neq \{0\}$ in Proposition 4 is certainly satisfied if the first cohomology group is nontrivial, $H^1(\omega) \neq \{0\}$.

5. Yang-Mills equations

Another application of the cohomology group $H^2(\omega)$ is found in the Yang-Mills theory [1], as described below.

Let a T -invariant inner product \langle, \rangle exist on Ω ,

$$\langle T(g)\xi, T(g)\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \quad g \in G.$$

This is true, for instance, if Ω is a pre-Hilbert space and the group G is compact. In this case, the inner product \langle, \rangle on Ω is averaged over the group G to a T -invariant inner product,

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_G \langle T(g)\xi, T(g)\eta \rangle' \partial g.$$

Here ∂g is a left-invariant measure on G .

Further we assume that homogeneous elements of different degrees are orthogonal,

$$\langle \Omega^k, \Omega^{k'} \rangle = 0, \quad k \neq k'.$$

By Corollary 2, the inner product \langle, \rangle generates the gauge-invariant energy (or action) functional

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\omega) &= \|\phi(\omega)\|^2 = \langle \phi(\omega), \phi(\omega) \rangle, \\ \mathcal{E}(K(g)\omega) &= \mathcal{E}(\omega), \quad \omega \in \Omega^1, \quad g \in G.\end{aligned}$$

Gauge fields ω of zero curvatures $\phi(\omega) = 0$ provide the global minimum $\mathcal{E}(\omega) = 0$ of the energy functional.

Consider the local minimisation problem

$$\omega : \mathcal{E}(\omega) \rightarrow \min \quad (19)$$

in terms of the Euler-Lagrange formalism. The solutions to the problem (19) are gauge fields ω , such that their small deformations infinitesimally preserve the value of the energy functional. By definitions (6), (7), we have, for all $u \in \Omega^1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\omega + u) - \mathcal{E}(\omega) &= 2\langle d_\omega u, \phi(\omega) \rangle + O(\|u\|^2) = \\ &= 2\langle u, d_\omega^* \phi(\omega) \rangle + O(\|u\|^2).\end{aligned}$$

Here d_ω^* is the operator adjoint to d_ω ,

$$\langle d_\omega \xi, \eta \rangle = \langle \xi, d_\omega^* \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \Omega.$$

Solutions to the problem (19) satisfy the Euler-Lagrange equation

$$d_\omega^* \phi(\omega) = 0. \quad (20)$$

The nonlinear Eq. (20) is called the *Yang-Mills equation*.

The existence of the adjoint operator d_ω^* is guaranteed, for instance, if Ω is a Hilbert space and d_ω is bounded. In a more general context, Eq. (20) can be replaced by the condition $\phi(\omega) \perp \text{im } d_\omega$.

Proposition 5. Let ω be a solution to Eq. (20) with trivial cohomology class $[\phi(\omega)] = 0 \in H^2(\omega)$ (and so trivial first Chern class $c_1(\omega) = 0$). Then ω is of zero curvature, $\phi(\omega) = 0$, and so provides the global minimum of the energy functional (and then all Chern classes are trivial, $c_k(\omega) = 0$).

Proof. By assumption, we have $d_\omega^* \phi(\omega) = 0$ and $\phi(\omega) = d_\omega(\xi(\omega))$ for some $\xi(\omega) \in \Omega^1(\omega)$. Then

$$\mathcal{E}(\omega) = \langle d_\omega(\xi(\omega)), \phi(\omega) \rangle = \langle \xi(\omega), d_\omega^* \phi(\omega) \rangle = 0.$$

This implies $\phi(\omega) = 0$. \square

The statement inverse to Proposition 5 is also true. The solutions to Eq. (20) with zero curvature $\phi(\omega) = 0$ obviously have trivial cohomology class $[\phi(\omega)] = 0$.

Corollary 5. It follows from Proposition 5 that solutions ω to the Yang-Mills equation with a nonzero curvature $\phi(\omega) \neq 0$ must have nontrivial cohomology classes $[\phi(\omega)] \neq 0$, and hence the second cohomology must be nontrivial, $H^2(\omega) \neq \{0\}$. If $H^2(\omega) = \{0\}$, and $\phi(\omega) \neq 0$, then ω cannot be a solution to the Yang-Mills equation. Local minima ω of the energy functional, $\mathcal{E}(\omega) \neq 0$, have nontrivial cohomology classes $[\phi(\omega)] \neq 0$.

Note that, in the field-theoretical gauge formalism, local minima of the energy functional are important because the existence of global minima $\phi(\omega) = 0$ can be topologically obstructed.

Due to the T -invariance of the inner product \langle, \rangle , if ω is a solution to Eq. (20) then $K(g)\omega$ is also a solution (with the same energy), for all $g \in G$. Thus, the gauge group $K(G)$ acts on the space Ω_{YM}^1 of solutions to the Yang-Mills equation. It follows from the results of Section 3 that the cohomology groups $H(\omega)$ classify points of the orbit space $\Omega_{\text{YM}}^1/K(G)$.

Along with the first equation of Eq. (8), the Yang-Mills Eq. (20) defines harmonic curvatures with respect to the Laplacian $\Delta_\omega = d_\omega d_\omega^* + d_\omega^* d_\omega$,

$$\Delta_\omega(\phi(\omega)) = 0 \quad \text{iff}$$

$$d_\omega(\phi(\omega)) = 0, \quad d_\omega^*(\phi(\omega)) = 0.$$

This reveals an analogy with the Hodge theory.

6. Conclusion

We have shown that a local part of the gauge formalism of the physical field theory can be formulated purely algebraically, for any graded Lie algebra. Here gauge fields, gauge groups, covariant derivatives and curvatures/field strengths find their general algebraic analogues. In this framework, cohomology groups naturally arise, which are gauge-invariant and encode a useful structural information. Isomorphism classes of these groups can be described in the spirit of the Chern-Weil theory of characteristic classes.

Two applications have been discussed: curvature-preserving deformations, closely related to the Gerstenhaber-Nijenhuis formalism [2, 3], and solutions to the Yang-Mills equations [1]. In the first case, nontriviality of the second cohomology group is an obstruction to existence of smooth deformations, while in the second one, this nontriviality is necessary for existence of local minima of the energy functional. The results presented have maximal generality, valid for any differential and any gauge-invariant inner product on the algebra.

Besides gauge theories, zero-curvature manifolds are encountered also in the theory of nonlinear evolution equations integrable by the inverse scattering transform. The first application (Proposition 4) reveals (co)homological obstructions to existence of integrable hierarchies (such as, for instance, the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy [4]) on non-Euclidean manifolds. Another example is the Maurer-Cartan forms in geometry of Lie groups [5]. Here Proposition 4 can be useful in the relevant deformation theory.

Note finally that the special case of zero differential $d = 0$ was considered before in the context of cohomologies and deformations of associative algebras and Lie algebras [2]. This has been recently applied also to a study of homological structure of orbit spaces for Lax equations on Lie superalgebras [3].

The author declares no conflict of interests.

References

1. Schwarz, A. S. Quantum field theory and topology / A. S. Schwarz. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

2. Nijenhuis, A. Cohomology and deformations in graded Lie algebras / A. Nijenhuis, R. W. Richardson // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1966. – Vol. 72, № 1. (1966).
3. Karabanov, A. Lax equations on Lie superalgebras / A. Karabanov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”*. 2024. № 5 (71). – P. 5–10.
4. Ablowitz, M. J. Solitons and inverse scattering transform / M. J. Ablowitz, H. Segur. – SIAM: Philadelphia, 1981.
5. Dotsenko, V. Maurer–Cartan methods in deformation theory / V. Dotsenko, S. Shadrin, B. Vallette. – Cambridge University Press, 2023.
6. Milnor, J. W. Characteristic classes / J. W. Milnor, J. D. Stasheff. – Princeton University Press, 1974.

Acknowledgments

The author is sincerely grateful to V. V. Kuratov and A. V. Zhubr for valuable discussions.

Для цитирования:

Карабанов, А. Гомологические инварианты в калибровочных теориях / А. Карабанов // *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки»*. – 2025. – № 6 (82). – С. 5–11. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-5-11

For citation:

Karabanov, A. Homological invariants in gauge theories / A. Karabanov // *Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”*. – 2025. – № 6 (82). – P. 5–11. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-5-11

Дата поступления статьи: 19.05.2025

Received: 19.05.2025

Деформация сжимаемого продольной силой стержня при жестких ограничениях на перемещения с различными граничными условиями

В. Ю. Андриюкова, В. Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

veran@list.ru

vntarasov@dm.komisc.ru

Аннотация

В работе авторы рассматривают задачу определения упругой линии сжимаемого продольной силой стержня, расположенного между двумя жесткими стенками. Изучают зависимость упругой линии и величин критических нагрузок от различных граничных условий. Получены точные решения задачи в нелинейной постановке.

Ключевые слова:

устойчивость, стержень, вариационная задача, точки бифуркации, односторонние ограничения, критическая сила

Введение

Задачу о продольном изгибе стержня впервые рассмотрел Л. Эйлер (см. обзор Е. Л. Николаи "О работах Эйлера по теории продольного изгиба" [1]). Плоские линии сжимаемого продольной силой упругого стержня получили название эластички Эйлера. Задача об упругой линии сжатого и скрученного стержня рассматривалась многими авторами. Фундаментальное исследование этой проблемы можно найти в работе Е. Л. Николаи "К задаче об упругой линии двоякой кривизны."

Проблема стесненного изгиба стержня является сложной, ибо приводит к необходимости решения задач вариационного исчисления при ограничениях на перемещения в виде неравенств. В линейной постановке упругая линия сжимаемого продольной силой стержня, расположенного между двумя жесткими стенками в случае граничных условий шарнирного опирания, рассмотрел В. И. Феодосьев в [2]. Нелинейный изгиб — в работе авторов [3]. В предложенной статье показано влияние граничных условий на упругую линию стесненного изгиба.

1. Граничные условия шарнирного опирания

Рассмотрим плоский изгиб упругого стержня длины ℓ , сжимаемого продольной силой P , которая в процессе деформации сохраняет свои величину и направление.

Deformation of a rod compressed by a longitudinal force under rigid constraints on displacement with various boundary conditions

V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

veran@list.ru

vntarasov@dm.komisc.ru

Abstract

The paper considers the problem of determining the elastic line of a rod compressed by a longitudinal force, located between two rigid walls. The dependence of the elastic line and the values of critical loads on various boundary conditions is studied. Exact solutions of the problem in a nonlinear formulation are obtained.

Keywords:

stability, rod, variational problem, bifurcation points, one-sided constraints, critical force

Стержень в первоначальном недеформированном состоянии расположен между двумя жесткими стенками на одинаковом расстоянии Δ от каждой из них. Пусть s — длина дуги стержня, $w(s)$, $z(s)$ — декартовы координаты деформированного стержня. Обозначим через $\gamma(s)$ угол между касательной к деформированной оси стержня и осью z . Тогда выполнены уравнения

$$w' = \sin \gamma, \quad z' = \cos \gamma. \quad (1)$$

Полная потенциальная энергия стержня имеет вид:

$$U = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EJ \gamma'^2 - P(1 - \cos \gamma) \right] ds.$$

Здесь $\gamma'(s)$ — кривизна упругой линии,

$$\int_0^\ell \frac{1}{2} EJ \gamma'^2 ds$$

— упругая энергия стержня,

$$\int_0^\ell P(1 - \cos \gamma) ds = \int_0^\ell P(ds - dz)$$

— работа внешних сил.

Предположим, что выполнены условия шарнирного опирания

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w''(0) = w''(\ell) = 0. \quad (2)$$

Определение перемещений сжатого продольной силой стержня при жестких ограничениях на перемещения сводится к экстремальной проблеме

$$U \rightarrow \min_{\gamma, w}$$

при ограничениях

$$|w(s)| \leq \Delta.$$

При этом функции $\gamma(s), w(s)$ удовлетворяют первому из уравнений (1) и выполнены граничные условия (2).

2. Решение в линейном приближении

Рассматриваемая задача решена В. И. Феодосьевым. Приведем его решение. Предположим, что Δ мал, прогиб w и угол γ также являются малыми величинами. Тогда можно положить

$$s = z, \quad \cos \gamma \approx 1 - \frac{1}{2}w'^2.$$

Оставляя в функционале $U(w)$ только квадратичные слагаемые, получаем задачу:

$$U_2(w) = \int_0^\ell \left(\frac{EJ}{2}w''^2 - \frac{P}{2}w'^2 \right) dz \rightarrow \min_{|w(z)| \leq \Delta}.$$

Предположим, что сила P больше первой критической силы Эйлера $P_*^{(1)}$, т. е.

$$P > P_*^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \quad \left(P_*^{(n)} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{\ell^2} \right),$$

и больше той силы, при которой происходит касание стержня со стенкой. Допустим при этом, что стержень полностью прилегает к стенке в некоторой своей средней части длины $\ell_2 = \ell - 2\ell_1$ (ℓ_1 - длина криволинейного участка стержня от конца до первой точки касания).

В этом случае определение прогиба сводится к решению вариационной задачи:

$$\int_0^{\ell_1} \left(\frac{EJ}{2}w''^2 - \frac{P}{2}w'^2 \right) dz \rightarrow \min_{w, \ell_1}. \quad (3)$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$w^{IV} + k^2 w'' = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}. \quad (4)$$

В точке ℓ_1 прогиб $w(z)$ и его первая производная $w'(z)$ должны быть непрерывны, т. е.

$$w(\ell_1) = 0, \quad w'(\ell_1) = 0. \quad (5)$$

Из условия минимума функционала (3) по ℓ_1 находим еще одно граничное условие:

$$w''(\ell_1) = 0. \quad (6)$$

Последнее равенство означает, что кривизна стержня в точке ℓ_1 является непрерывной. Интегрируя два раза уравнение (4) с учетом граничных условий, получаем

$$w'' + k^2 w = \frac{R}{EJ} z. \quad (7)$$

Данное соотношение является уравнением равновесия стержня на участке $z \in [0, \ell_1]$, R - сила реакции стенки в точке ℓ_1 .

Общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$w = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz + rz, \quad r = \frac{R}{EJ}. \quad (8)$$

Так как $w(0) = 0$, то $c_2 = 0$. Подставляя (8) в условия (5), (6), получаем для определения c_1, ℓ_1 систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 \sin k\ell_1 + r\ell_1 = \Delta, \\ kc_1 \cos k\ell_1 + r = 0, \\ \sin k\ell_1 = 0. \end{cases}$$

Из последней системы находим

$$k\ell_1 = \pi, \quad c_1 = \frac{\Delta}{\pi}, \quad r = \frac{k\Delta}{\pi},$$

откуда окончательно получаем выражение для прогиба на интервале $[0, \ell_1]$

$$w(z) = \frac{\Delta}{\pi} (\sin kz + kz)$$

и

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_1^2}. \quad (9)$$

Подставляя в последнюю формулу $\ell_1 = \ell/2$, находим, что минимальная сила, при которой может существовать участок полного прилегания стержня к стенке, равна

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}. \quad (10)$$

Это означает, что в случае

$$\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} < P < \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}$$

стержень либо не касается стенки, либо касается ее в единственной точке $z = \ell/2$. Если средний участок становится достаточно длинным, то он, в свою очередь, может потерять устойчивость. Критическая сила для этого участка равна первой критической силе для жестко заделанного стержня длины ℓ_2

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{\ell_2^2}. \quad (11)$$

Поскольку $\ell_2 = \ell - 2\ell_1$, то, приравняв силы (9), (11), находим

$$\ell_1 = \frac{\ell}{4}, \quad P = \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2}.$$

После того, как средний участок потеряет устойчивость, ℓ_1 скачком изменяет свое значение и становится равным $\ell/3$. Рассматривая теперь каждую треть стержня как новый самостоятельный стержень, для его описания в ранее полученных уравнениях необходимо заменить ℓ на $\ell/3$. Выражение (9) при этом даст

$$\ell_1 = \frac{\ell}{6}, \quad P = \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}.$$

Это означает, что при

$$P > \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$$

стержень снова начинает прилегать к стенкам. При

$$\frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} < P < \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$$

Интервалы изменения сил при нагрузке и разгрузке

Intervals of force changes during loading and unloading

№	При нагрузке	При разгрузке
1	$P \leq \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$P \leq \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2}$
2	$\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}$
3	$\frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2}$
4	$\frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$
5	$\frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{144\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{81\pi^2 EJ}{\ell^2}$
6	$\frac{144\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{324\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{81\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{324\pi^2 EJ}{\ell^2}$

3. Точное решение нелинейной задачи

Применение линейного уравнения (4) нуждается в дополнительном обосновании, ибо обычно в расчетах на устойчивость упругих систем линейное приближение позволяет находить критические нагрузки, а для определения перемещений необходимо решать нелинейные уравнения равновесия. Анализ нелинейного уравнения позволяет найти дополнительные решения к тем решениям, которые следуют из рассмотрения задачи в линейном случае.

В нелинейном случае вместо (3) следует рассмотреть задачу

$$\int_0^{\ell_1} \left[\frac{1}{2} EJ \gamma'^2 - P(1 - \cos \gamma) \right] ds \rightarrow \min_{\gamma, \ell_1} \quad (12)$$

при ограничениях

$$\int_0^{\ell_1} \sin \gamma ds = \Delta,$$

$$\gamma'(0) = 0, \quad \gamma(\ell_1) = 0, \quad \gamma'(\ell_1) = 0.$$

Равенство $\gamma'(\ell_1) = 0$ следует из условия минимума функционала (12) по ℓ_1 и означает, что в точке ℓ_1 кривизна является непрерывной.

Выпишем функционал Лагранжа:

$$\int_0^{\ell_1} \left[\frac{1}{2} EJ \gamma'^2 - P(1 - \cos \gamma) + R \sin \gamma \right] ds.$$

Уравнение Эйлера для функционала имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2} \gamma'^2 + k^2 \cos \gamma - r \sin \gamma = \tilde{c} = const.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{1}{2} \gamma'^2 = a \cos(\gamma + \beta) + c, \quad (13)$$

стержень соприкасается со стенками только в трех точках.

При разгрузке стержень перейдет к трехволновой форме равновесия при

$$P = \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2}, \quad \left(\text{а не при } P = \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} \right).$$

В таблице 1 приведены соответствующие интервалы изменения сил при нагрузке и разгрузке.

Таблица 1

Table 1

где

$$a = \sqrt{k^4 + r^2}, \quad \cos \beta = k^2 / \sqrt{k^4 + r^2},$$

$$\sin \beta = -r / \sqrt{k^4 + r^2}, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}, \quad r = \frac{R}{EJ}.$$

Из граничного условия $\gamma'(0) = 0$ находим ($\gamma_0 = \gamma(0)$)

$$c = -a \cos(\gamma_0 + \beta),$$

тогда уравнение (13) можно записать так

$$\gamma'^2 = 2a \left[\sin^2 \frac{\gamma_0 + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma + \beta}{2} \right].$$

Из последнего уравнения, используя граничное условие $\gamma'(\ell_1) = 0$, получим, что

$$\beta = -\frac{\gamma_0}{2}.$$

Выполним далее подстановку

$$\sin \frac{\gamma + \beta}{2} = -\sin \frac{\gamma}{4} \sin \psi, \quad (14)$$

тогда

$$\gamma'^2 = 4a \sin^2 \frac{\gamma_0}{4} \cos^2 \psi. \quad (15)$$

Из (14) следует, что

$$\psi_0 = \psi(0) = -\frac{\pi}{2},$$

а из (15) находим

$$\psi_1 = \psi(\ell_1) = \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

Дифференцируя (14) и используя уравнение (15), получаем

$$\cos^2 \frac{\gamma + \beta}{2} a^2 \sin^2 \frac{\gamma_0}{4} \cos^2 \psi = \sin^2 \frac{\gamma}{4} \cos^2 \psi \psi'^2,$$

или

$$\psi'^2 = a^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\gamma + \beta}{4} \right).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$kds = \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma_0}{4} \sin^2 \psi}}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$ks = \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} [F(m, \psi) + F(m, \frac{\pi}{2})], \quad (17)$$

где

$$F(m, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\tilde{\psi}}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \tilde{\psi}}} \quad (m^2 = \sin^2 \frac{\gamma_0}{4})$$

– эллиптический интеграл первого рода.

Из (16),(17) вытекает, в частности, формула для длины криволинейного участка

$$kl_1(\gamma_0) = 2 \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} F(m, \frac{\pi}{2}).$$

$$kw(\psi) = \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} \sin \frac{\gamma_0}{2} \left[2E(m, \psi) - F(m, \psi) + 2E(m, \frac{\pi}{2}) - F(m, \frac{\pi}{2}) \right] + 2 \left(\cos \frac{\gamma_0}{2} \right)^{3/2} \sin \frac{\gamma_0}{4} \cos \psi, \quad (18)$$

где

$$E(m, \psi) = \int_0^\psi \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \tilde{\psi}} d\tilde{\psi}$$

– эллиптический интеграл второго рода.

$$k\Delta(\gamma_0) = 2 \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} \sin \frac{\gamma_0}{2} \left[2E(m, \frac{\pi}{2}) - F(m, \frac{\pi}{2}) \right].$$

$$kz(\psi) = \left(\cos \frac{\gamma_0}{2} \right)^{3/2} [2E(m, \psi) - F(m, \psi) + 2E(m, \frac{\pi}{2}) - F(m, \frac{\pi}{2})] - 2 \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} \sin \frac{\gamma_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{4} \cos \psi.$$

Рассмотрим теперь графики функций $k\Delta(\gamma_0)$ и $kl_1(\gamma_0)$, изображенные на рис. 1. Из первого видно, что каждому значению критериального параметра $k\Delta = \sqrt{P/EI}$ отвечают две предполагаемые формы равновесия, пока

$$k\Delta < \max_{\gamma_0 \in [0, \pi]} k\Delta(\gamma_0) \approx 1.66.$$

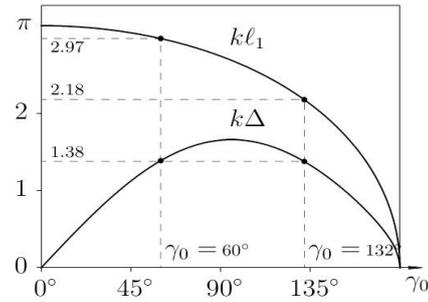


Рисунок 1. Графики функций $k\Delta(\gamma_0)$ и $kl_1(\gamma_0)$.

Figure 1. Graphs of functions $k\Delta(\gamma_0)$ and $kl_1(\gamma_0)$.

Например, пусть $\ell = 1$ м, $EI = 10^{-3}$ кН · м², $\Delta = 0.11$ м. Тогда для $P = P_*^{(4)} = 0.158$ кН имеем:

$$k\Delta = \Delta \sqrt{P/EI} = 1.38.$$

При указанных исходных данных возможны две формы равновесия для стержня (рис. 2), определяемые формулой (18) и значениями γ_0

$$\gamma_0^{(1)} = 60^\circ, \quad \gamma_0^{(2)} = 132^\circ.$$

Последним соответствуют величины

$$kl_1^{(1)} = 2.97, \quad kl_1^{(2)} = 2.18.$$

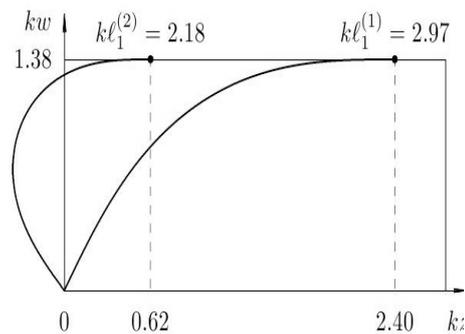


Рисунок 2. Две различные формы равновесия стержня.

Figure 2. Two different forms of rod equilibrium.

Таким образом, $\ell_1^{(1)} = 0.197$ м, $\ell_1^{(2)} = 0.236$ м – это длины криволинейных участков до первой точки касания, $\ell_2^{(1)} = 0.652$ м, $\ell_2^{(2)} = 0.528$ м – длины соответствующих участков выстилания.

4. Равновесие стержня при граничных условиях жесткой заделки

Предположим, что вместо (2) на концах стержня заданы граничные условия жесткой заделки

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w'(0) = w'(\ell) = 0. \quad (19)$$

Определим силу, при которой существует участок прилегания к стенке длины ℓ_2 . Пусть ℓ_1 – первая точка касания стержнем стенки. В силу симметрии $\ell_2 = \ell_1 - 2\ell_1$. Решение уравнения (4) имеет вид:

$$w(x) = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz + c_3 z + c_4.$$

Учитывая условия (19), (5), (6), получаем систему:

$$\begin{cases} c_2 + c_4 = 0, \\ c_1 k + c_3 = 0, \\ c_1 \sin k l_1 + c_2 \cos k l_1 + c_3 l_1 + c_4 = \Delta, \\ k c_1 \cos k l_1 - k c_2 \sin k l_1 + c_3 = 0, \\ c_1 \sin k l_1 + c_2 \cos k l_1 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из второго и четвертого уравнений следует равенство $c_1(\cos k l_1 - 1) = c_2 \sin k l_1$, откуда с учетом последнего уравнения:

$$\sin^2 k l_1 = -(\cos k l_1 - 1) \cos k l_1, \text{ или } \cos k l_1 = 1.$$

В качестве решения возьмем первый, не равный нулю корень $k l_1 = 2\pi$. Подставляя $k l_1$ в систему (20), находим значения коэффициентов:

$$c_1 = -\frac{\Delta}{2\pi}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{\Delta}{l_1} = \frac{k\Delta}{2\pi}, \quad c_4 = 0,$$

$$l_1 = \frac{2\pi}{k}.$$

Следовательно, уравнение изгиба стержня на интервале $[0, l_1]$ имеет вид:

$$w(x) = \frac{\Delta}{2\pi} (kx - \sin kx).$$

Очевидно

$$l_2 = l - \frac{4\pi}{k}. \quad (21)$$

Участок полного прилегания к стенке существует, если $l_2 > 0$, т. е. $k l > 4\pi$, а значит в случае

$$\frac{4\pi EJ}{l^2} < P \leq \frac{16EJ\pi}{l^2}$$

стержень либо не касается стенки, либо касается ее в единственной точке.

Средняя часть стержня длины l_2 , став достаточно большой, тоже может потерять устойчивость. Это произойдет при силе $P > \frac{4\pi^2 EJ}{l_2^2}$, $k l_2 > 2\pi$, или $k l > 6\pi$ (из формулы (21)).

Таким образом, существование участка полного прилегания к стенке возможно при

$$\frac{16\pi^2 EJ}{l^2} < P \leq \frac{36\pi^2 EJ}{l^2}.$$

5. Равновесие стержня при смешанных граничных условиях

При силе $P > \frac{36\pi^2 EJ}{l^2}$ стержень примет трехволновую форму равновесия, изображенную на рис. 3. При этом стержень точками $z = l_3$, $z = \tilde{l}_3 = l - l_3$ разделяется на три части, каждую из которых можно рассматривать как самостоятельный стержень.

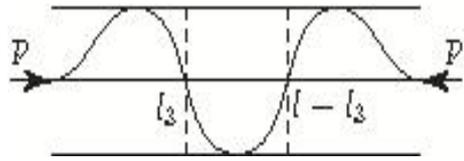


Рисунок 3. Трехволновая форма равновесия стержня.
Figure 3. Three-wave equilibrium form of the rod.

В точках $z = l_3$, $z = \tilde{l}_3$ выполняются граничные условия шарнирного опирания, поэтому возникает необходимость рассмотреть задачу равновесия стержня при смешанных граничных условиях:

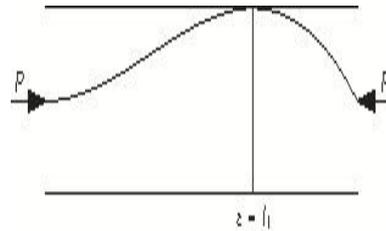


Рисунок 4. Форма равновесия стержня при смешанных граничных условиях.
Figure 4. Equilibrium form of a rod under mixed boundary conditions.

Критическая сила в случае смешанных граничных условий известна: $P = \frac{2.046\pi^2 EJ}{l^2}$. Ниже будет показано, что при силе $P > \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}$ будет происходить прилегание стержня к одной из стенок.

Пусть $z = l_1$ - точка касания. Решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$w(z) = \begin{cases} w_1(z) = a_1 \sin kz + a_2 \cos kz + a_3 z + a_4, & z \in [0, l_1], \\ w_2(z) = c_1 \sin k(l - z) + c_2 \cos k(l - z) + c_3(l - z) + c_4, & z \in [l_1, l]. \end{cases} \quad (22)$$

Решение (22) должно удовлетворять условиям:

$$w_1(0) = 0, \quad w_1'(0) = 0, \quad w_1(l_1) = \Delta, \quad w_1'(l_1) = 0,$$

$$w_2(l_1) = \Delta, \quad w_2'(l_1) = 0, \quad w_2(l) = 0, \quad w_2''(l) = 0,$$

кроме того, в точке l_1 вторая производная $w(z)$ при $z = l_1$ должна быть непрерывной: $w_1''(l_1) = w_2''(l_1)$. Следовательно, получим систему:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 k + a_3 = 0, \\ a_1 \sin k l_1 + a_2 \cos k l_1 + a_3 l_1 + a_4 = \Delta, \\ k a_1 \cos k l_1 - k a_2 \sin k l_1 + a_3 = 0, \\ c_2 + c_4 = 0, \\ c_2 k^2 = 0, \\ c_1 \sin k(l - l_1) + c_2 \cos k(l - l_1) + c_3(l - l_1) + c_4 = \Delta, \\ -k c_1 \cos k(l - l_1) + k c_2 \sin k(l - l_1) - c_3 = 0, \\ a_1 \sin k l_1 + a_2 \cos k l_1 = c_1 \sin k(l - l_1) + c_2 \cos k(l - l_1). \end{cases} \quad (23)$$

Используя первые восемь уравнений, находим:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\Delta \sin k l_1}{2 - 2 \cos k l_1 - k l_1 \sin k l_1}, \\
 a_2 &= \frac{\Delta (\cos k l_1 - 1)}{2 - 2 \cos k l_1 - k l_1 \sin k l_1}, \\
 a_3 &= -\frac{k \Delta \sin k l_1}{2 - 2 \cos k l_1 - k l_1 \sin k l_1}, \\
 a_4 &= -\frac{\Delta (\cos k l_1 - 1)}{2 - 2 \cos k l_1 - k l_1 \sin k l_1}, \\
 c_1 &= \frac{\Delta}{\sin k (\ell - l_1) - k (\ell - l_1) \cos k (\ell - l_1)}, \quad c_2 = 0, \\
 c_3 &= -\frac{k \Delta \cos k (\ell - l_1)}{\sin k (\ell - l_1) - k (\ell - l_1) \cos k (\ell - l_1)}, \quad c_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в последнее уравнение системы (23), получим:

$$\begin{aligned}
 &\frac{(1 - \cos k l_1)}{2 - 2 \cos k l_1 - k l_1 \sin k l_1} = \\
 &= \frac{\sin k (\ell - l_1)}{\sin k (\ell - l_1) - k (\ell - l_1) \cos k (\ell - l_1)}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Неизвестной величиной в уравнении (24) является $k l_1$, которая, разумеется, зависит от $k l$. Форма равновесия, показанная на рис. 5, возможна при

$$\frac{2.046 \pi^2 E J}{\ell^2} < P \leq \frac{9 \pi^2 E J}{\ell^2}, \quad \text{или } 1.43 \pi < k l \leq 3 \pi.$$

Можно предположить, что $l_1 > \ell/2$. Выберем решения уравнения (24), удовлетворяющее этому условию. Получим, что при изменении $k l$ в указанных пределах, будут выполнены неравенства: $2.782397 \leq k l_1 \leq 6.283073$. Это соответствует изменению l_1 в пределах $0.6027 \ell \leq l_1 \leq 0.66677 \ell$.

Рассмотрим случай прилегания средней части стержня при смешанных граничных условиях (рис. 5). Пусть в точке $z = l_1$ стержень касается стенки, l_2 – длина участка "выстилаяния," $\tilde{\ell} = l_1 + l_2$. Используя введенные обозначения, решение уравнения (4) запишем в виде

$$w(z) = \begin{cases} w_1(z) = a_1 \sin k z + a_2 \cos k z + a_3 z + a_4, \\ z \in [0, l_1], \\ \Delta, \quad z \in [l_1, \tilde{\ell}], \\ w_2(z) = c_1 \sin k (\ell - z) + c_2 \cos k (\ell - z) + \\ + c_3 (\ell - z) + c_4, \quad z \in [\tilde{\ell}, \ell]. \end{cases} \quad (25)$$

Потребовав выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned}
 w_1(0) &= 0, \quad w_1'(0) = 0, \quad w_1(l_1) = \Delta, \\
 w_1'(l_1) &= 0, \quad w_1''(l_1) = 0, \\
 w_2(\tilde{\ell}) &= \Delta, \quad w_2'(\tilde{\ell}) = 0, \quad w_2''(\tilde{\ell}) = 0, \\
 w_2(\ell) &= 0, \quad w_2''(\ell) = 0,
 \end{aligned}$$

получим систему:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 k + a_3 = 0, \\ a_1 \sin k l_1 + a_2 \cos k l_1 + a_3 l_1 + a_4 = \Delta, \\ k a_1 \cos k l_1 - k a_2 \sin k l_1 + a_3 = 0, \\ a_1 \sin k l_1 + a_2 \cos k l_1 = 0, \\ c_2 + c_4 = 0, \\ c_2 k^2 = 0, \\ c_1 \sin k (\ell - \tilde{\ell}) + c_2 \cos k (\ell - \tilde{\ell}) + c_3 (\ell - \tilde{\ell}) + c_4 = \Delta, \\ -k c_1 \cos k (\ell - \tilde{\ell}) + k c_2 \sin k (\ell - \tilde{\ell}) - c_3 = 0, \\ c_1 \sin k (\ell - \tilde{\ell}) + c_2 \cos k (\ell - \tilde{\ell}) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Как и при решении системы (20), можно получить равенства:

$$k l_1 = 2 \pi, \quad k (\ell - \tilde{\ell}) = \pi. \quad (27)$$

Из (27) и (26) находим коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{\Delta}{2 \pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{k \Delta}{2 \pi}, \quad a_4 = 0, \\
 c_1 &= \frac{\Delta}{\pi}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{k \Delta}{\pi}, \quad c_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Выражение для прогиба примет вид:

$$w(z) = \begin{cases} -\frac{\Delta}{2 \pi} (\sin k z - k z), & z \in [0, l_1], \\ \Delta, & z \in [l_1, \tilde{\ell}], \\ \frac{\Delta}{\pi} (\sin k (\ell - z) + k (\ell - z)), & z \in [\tilde{\ell}, \ell]. \end{cases} \quad (28)$$

Найдем длину участка полного прилегания стержня к стенке. Введем обозначение $l_3 = \ell - \tilde{\ell}$. Из (27)

$$\frac{2 \pi}{l_1} = \frac{\pi}{l_3}, \quad \text{следовательно, } 2 l_3 = l_1.$$

В то же время $l_1 + l_2 + l_3 = l$, откуда

$$l_2 = l - 3 l_3 = l - 3 \frac{\pi}{k}.$$

Найдем значение силы, при которой возможно существование участка прилегания стержня к стенке, т. е. при которой выполняется неравенство $l_2 > 0$. Из этого неравенства следует, что

$$l - 3 \frac{\pi}{k} > 0, \quad \text{или } k l > 3 \pi, \quad \text{откуда } P > \frac{9 \pi^2 E J}{\ell^2}.$$

Средняя часть стержня длины l_2 , став достаточно длинной, тоже может потерять устойчивость. Это произойдет при силе

$$P > \frac{4 \pi^2 E J}{\ell_2^2}, \quad \text{или } k l_2 > 2 \pi,$$

отсюда $k (\ell - 3 \frac{\pi}{k}) > 2 \pi$, окончательно $k l > 5 \pi$.

Таким образом, условием существования участка прилегания является выполнение неравенств

$$\frac{9 \pi^2 E J}{\ell^2} < P \leq \frac{25 \pi^2 E J}{\ell^2}.$$

6. Сравнение результатов

Стержень касается стенки в единственной точке ℓ_1 :

а) в случае граничных условий шарнирного опирания:

$$\ell_1 = \frac{\ell}{2}, \quad \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2};$$

б) в случае граничных условий жесткой заделки:

$$\ell_1 = \frac{\ell}{2}, \quad \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2};$$

с) на левом конце – граничные условия жесткой заделки, на правом – граничные условия шарнирного опирания:

$$0.6027 \leq \frac{\ell_1}{\ell} \leq 0.6667, \quad \frac{2.04\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2}.$$

При увеличении силы P будет происходить прилегание средней части стержня к стенке: а) в случае граничных условий шарнирного опирания:

$$\ell_2 = \ell - \frac{2\pi}{k}, \quad \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2}; \quad (29)$$

б) в случае граничных условий жесткой заделки:

$$\ell_2 = \ell - \frac{4\pi}{k}, \quad \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2};$$

с) на левом конце – граничные условия жесткой заделки, на правом – граничные условия шарнирного опирания:

$$\ell_2 = \ell - \frac{3\pi}{k}, \quad \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{25\pi^2 EJ}{\ell^2}. \quad (30)$$

Найдем минимальное значение силы P , при которой возможна форма равновесия, представленная на рис. 5. Если сила минимальна, то длины участков полного прилегания к стенке равны нулю, т. е. $\ell_2 - \ell_1 = 0$, $\ell_3 = \frac{\ell}{2}$. При $z = 0$ выполнены граничные условия жесткой заделки; при $z = \ell_3$: $w(\ell_3) = 0$, $w''(\ell_3) = 0$. Рассматривая часть стержня на участке от 0 до ℓ_3 как самостоятельный стержень со смешанными граничными условиями, используя формулу (30), получаем равенство $k\ell_3 = 9\pi$, для участка от ℓ_3 до $\ell - \ell_3$ из (29) находим $k(\ell - 2\ell_3) = 4\pi$, откуда $k\ell - 18\pi = 4\pi$, или

$$k = \frac{22\pi}{\ell}, \quad P = \frac{484\pi^2 EJ}{\ell^2},$$

т. е. при $P > \frac{484\pi^2 EJ}{\ell^2}$ может реализоваться форма равновесия, представленная на рис. 5.

Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 125031203621-2.

Acknowledgements (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the topic № 125031203621-2.

Для цитирования:

Андрюкова, В. Ю. Деформация сжимаемого продольной силой стержня при жестких ограничениях на перемещения

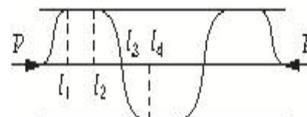


Рисунок 5. Возможная форма равновесия стержня.
Figure 5. Possible form of equilibrium of the rod.

Точно так же, как и в случае граничных условий шарнирного опирания, можно получить точное решение нелинейной задачи для случая граничных условий жесткой заделки.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Николаи, Е. Л. Труды по механике / Е. Л. Николаи. – М: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 584 с.
2. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – М: Наука, 1967. – 376 с.
3. Andryukova, V. Yu. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov // Abstracts of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – 268 p. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.

References

1. Nikolai, Ye. L. Trudy po mekhanike / Ye. L. Nikolai. – Moskva: Izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury. 1955. – 584 s.
2. Feodosiev, V. I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials] / V. I. Feodosiev. – Moskva: Nauka, 1967. – 376 p.
3. Andryukova, V. Yu. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov // Abstracts of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – 268 p. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.

с различными граничными условиями / В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 12–19. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-12-19

For citation:

Andryukova, V. Yu. Deformation of a rod compressed by a longitudinal force under rigid constraints on displacement with various boundary conditions / V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 12–19. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-12-19

Дата поступления статьи: 11.08.2025

Received: 11.08.2025

Нейтрино в остывающей Вселенной

Н. А. Громов, В. В. Куратов, И. В. Костяков

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

gromov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru
kostyakov@ipm.komisc.ru

Аннотация

В рамках гипотезы о деформации калибровочной группы стандартной модели рассматривается поведение электрослабой модели при охлаждении Вселенной до температур ниже рубежа спонтанного нарушения симметрии. Анализируются процессы упругого рассеяния нейтрино на лептонах и кварках, а также реакции прямого и обратного бета-распада. Сравнение преобразованного сечения рассеяния с теоретически вычисленными и экспериментально установленными значениями дало возможность получить зависимость параметра деформации от температуры Вселенной. В широком диапазоне температур показана согласованность гипотезы о деформации калибровочной группы электрослабой модели с экспериментальными фактами: слабым взаимодействием нейтрино с веществом, а также ростом сечения этого взаимодействия с увеличением энергии нейтрино. Показано относительное изменение силы электрослабого взаимодействия частиц при уменьшении температуры Вселенной.

Ключевые слова:

стандартная модель, электрослабая модель, деформация калибровочной группы, нейтрино, упругое рассеяние, бета-распад, остывающая Вселенная

Введение

Современная теория элементарных частиц – стандартная модель – включает в себя электрослабую модель, описывающую электромагнитные и слабые взаимодействия частиц, и квантовую хромодинамику, описывающую сильные взаимодействия кварков [1]. Стандартная модель представляет собой калибровочную теорию с группой $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, в которой подгруппа $SU(3)$ отвечает квантовой хромодинамике, а множитель $SU(2) \times U(1)$ соответствует электрослабой модели. Стандартная модель убедительно подтверждена открытием бозона Хиггса в экспериментах на Большом адронном коллайдере (БАК). Несмотря на это, она не лишена недостатков, например, таких как присутствие в теории около двух десятков свободных параметров никак не объясняемых в рамках модели. Также среди них нет параметра, описывающего предельный вариант теории при высоких тем-

Neutrinos in a cooling Universe

N. A. Gromov, V. V. Kuratov, I. V. Kostyakov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

gromov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru
kostyakov@ipm.komisc.ru

Abstract

Within the framework of the hypothesis of deformation of the gauge group of the standard model, the behavior of the electroweak model is considered when the Universe cools down to temperatures below the threshold of spontaneous symmetry breaking. The processes of elastic scattering of neutrinos on leptons and quarks, as well as reactions of direct and inverse beta decay are analyzed. Comparison of the transformed scattering cross-section with theoretically calculated and experimentally established values made it possible to obtain the dependence of the deformation parameter on the temperature of the Universe. In a wide range of temperatures, the agreement between the hypothesis of deformation of the gauge group of the electroweak model and experimental data is shown: weak interaction of neutrinos with matter, as well as an increase in the cross section of this interaction with increasing neutrino energy. The relative change in the strength of the electroweak interaction of particles with decreasing temperature of the Universe is shown.

Keywords:

standard model, electroweak model, gauge group deformation, neutrino, elastic scattering, beta decay, cooling universe

пературах, характерных для начальных мгновений существования Вселенной после ее возникновения в результате Большого взрыва [2].

В работах [3–5] выдвинута гипотеза о том, что калибровочная группа стандартной модели становится проще с увеличением температуры Вселенной, а механизмом изменения калибровочной группы предложена операция контракции [6, 7], параметр которой уменьшается при увеличении температуры $\epsilon \sim T^{-q} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ ($q > 0$). В результате контракции лагранжиан стандартной модели представляется в виде слагаемых, которые различаются степенями параметра ϵ . Таким образом, двигаясь вперед во времени, т. е. в обратном к высокотемпературной контракции направлении, заключаем, что после рождения Вселенной частицы и их взаимодействия проходят ряд стадий в эволюции от предельного состояния

с "бесконечной" температурой до состояния, описываемого канонической стандартной моделью. Эти стадии формирования кварк-глюонной плазмы, восстановления электрослабой и цветовой симметрий различаются по степеням контракционного параметра и, следовательно, по времени их возникновения.

Анализ доминантного механизма рождения и регистрации бозонов Хиггса на БАК и сравнение с экспериментальными данными, полученными на БАК по сечениям рождения бозонов Хиггса при энергиях 7,8,13 и 14 ТэВ [8], показывает, что гипотеза о контракции калибровочной группы стандартной модели при высоких температурах как минимум не противоречит эксперименту [9–11].

Наличие непрерывно изменяющегося параметра $\epsilon \sim T^{-q}$ свидетельствует о перераспределении роли отдельных слагаемых в лагранжиане электрослабой модели при $\epsilon \rightarrow 0$, т. е. об изменении относительного вклада частиц и их взаимодействий в формирование космической плазмы по мере остывания Вселенной. Естественно предположить, что этот процесс не останавливается на рубеже спонтанного нарушения симметрии, но продолжается и при дальнейшем остывании. В данной работе мы рассмотрим деформацию калибровочной группы электрослабой модели при температурах меньших 100 ГэВ, и ее влияние на процессы с участием нейтрино.

1. Электрослабая модель при низких температурах

Электрослабая модель, описывающая электромагнитные и слабые взаимодействия элементарных частиц, представляет собой [12] калибровочную теорию с калибровочной группой $SU(2) \times U(1)$, действующей в двумерном комплексном пространстве полей C_2 :

$$SU(2) : \vec{z}' = G\vec{z},$$

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

$$U(1) : \vec{z}' = e^{i\omega/2}\vec{z} = e^{i\omega Y}\vec{z}, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

В качестве C_2 берутся лептонное пространство, состоящее из векторов $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$, где e есть электрон, а ν_e обозначает электронное нейтрино и кварковое пространство, содержащее поля u - и d -кварков $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$. (Мы ограничимся только первыми поколениями лептонов и кварков). Лагранжиан модели, равный сумме бозонного, лептонного и кваркового лагранжианов выбирается инвариантным относительно действия калибровочной группы.

В данной конструкции частицы задаются компонентами векторов из пространств представления, а взаимодействия между ними описываются элементами калибровочной группы. Согласованное переопределение элементов группы $SU(2)$ и компонент векторов пространства C_2

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ \epsilon z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon\beta \\ -\epsilon\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \epsilon z_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

при $\epsilon \neq 0$ приводит к деформированной полупростой группе $SU(2; \epsilon)$, изоморфной $SU(2)$, а в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ дает неполупростую группу $SU(2; \epsilon = 0)$, изоморфную евклидовой группе $E(2)$, действующей в расслоенном пространстве $C_2(\epsilon = 0)$ с базой, натянутой на первую координату $\{z_1\}$, и слоем, порождаемым второй координатой $\{z_2\}$. В эквивалентной форме преобразование (2) записывается как действие деформированной матрицы на недеформированный вектор в виде

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon^2\beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Деформация (2), (3) канонической электрослабой модели описывает ее поведение при высоких температурах, превышающих 100 ГэВ [3–5, 9, 10], характерных для ранних стадий развития Вселенной вскоре после ее рождения в результате Большого взрыва [2]. При этом вторые компоненты векторов, образованных лептонными и кварковыми полями, уменьшаются с уменьшением $\epsilon(T) = AT^{-q}$, $q > 0$, $A = const$, где T температура Вселенной, и в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$) превосходят первую компоненту. Наоборот, при понижении температуры Вселенной вследствие ее расширения, вторые компоненты векторов увеличиваются по сравнению с первыми. Таким образом, на рубеже $\epsilon \sim 1$ ($T \sim 100$ ГэВ) происходит структурная перестройка описания электрослабой модели от предела высоких температур к пределу низких температур, которой отвечает согласованное преобразование калибровочной группы $SU(2; \xi)$ и пространства $C_2(\xi)$

$$\begin{pmatrix} \xi z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \xi\beta \\ -\xi\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

с зависимостью безразмерного параметра ξ от температуры вида $\xi(T) = BT^p$, $p > 0$, $B = const$. Эквивалентно преобразование (4) можно записать как действие деформированной матрицы на недеформированный вектор

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\xi^2\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Выбор между (2) и (3) или (4) и (5) диктуется соображениями удобства. В частности, формулы (2), (4) и вытекающие из них правила преобразования полей удобны для получения лагранжиана деформированной электрослабой модели из стандартного лагранжиана.

Подчеркнем, что преобразованные матрицы калибровочной группы в формулах (2) и (4), в отличие от (3) и (5), одинаковы. Различаются только преобразования компонент векторов (полей) из пространств представления, поэтому преобразования калибровочных полей и поля бозона Хиггса останутся такими же, как и в случае высоких энергий [10], а левые и правые компоненты лептонных и кварковых полей преобразуются как компоненты вектора z в (4). Таким образом, низкотемпературный предел электрослабой модели достигается подстановками

$$W_\mu^\pm \rightarrow \xi W_\mu^\pm, \quad Z_\mu \rightarrow Z_\mu, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu, \\ \chi \rightarrow \chi, \quad \nu \rightarrow \nu,$$

$$e_l \rightarrow e_l, \quad e_r \rightarrow e_r, \quad d_l \rightarrow d_l, \quad d_r \rightarrow d_r, \\ \nu_l \rightarrow \xi \nu_l, \quad u_l \rightarrow \xi u_l, \quad u_r \rightarrow \xi u_r. \quad (6)$$

В результате преобразований (6) бозонный лагранжиан [10, 11] можно представить в виде

$$\hat{L}_B(\xi) = \\ = \hat{L}_{B,0} + \hat{L}_{B,0}^{int} + \xi^2 \left(\hat{L}_{B,2} + \hat{L}_{B,2}^{int} \right) + \xi^4 \hat{L}_{B,4}^{int}, \quad (7)$$

где

$$L_{B,0} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} \mathcal{Z}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 (Z_\mu)^2 + \\ + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2, \quad (8)$$

$$L_{B,2} = -\frac{1}{2} \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ \mathcal{W}_{\mu\nu}^- + m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^-, \quad (9)$$

$$L_{B,0}^{int} = -\frac{\lambda}{4} \chi^4 - \lambda v \chi^3 + \frac{g m_z}{2 \cos \theta_W} \chi (Z_\mu)^2 + \\ + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} \chi^2 (Z_\mu)^2, \quad (10)$$

$$L_{B,2}^{int} = g \chi W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{g^2}{4} \chi^2 W_\mu^+ W_\nu^- - \\ - 2ig (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+) \left(\mathcal{F}_{\mu\nu} \sin \theta_W + \mathcal{Z}_{\mu\nu} \cos \theta_W \right) - \\ - \frac{i}{2} e \left[A_\mu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - \right. \\ \left. - A_\nu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\mu^+) \right] - \\ - \frac{i}{2} g \cos \theta_W \left[Z_\mu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - \right. \\ \left. - Z_\nu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\mu^+) \right] - \\ - \frac{e^2}{4} \left\{ \left[(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2 \right] (A_\nu)^2 - \right. \\ \left. - 2 (W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-) A_\mu A_\nu + \right. \\ \left. + \left[(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2 \right] (A_\mu)^2 \right\} - \\ - \frac{g^2}{4} \cos \theta_W \left\{ \left[(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2 \right] (Z_\nu)^2 - \right. \\ \left. - 2 (W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-) Z_\mu Z_\nu + \right. \\ \left. \left[(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2 \right] (Z_\mu)^2 \right\} - \\ - eg \cos \theta_W \left[W_\mu^+ W_\mu^- A_\nu Z_\nu + W_\nu^+ W_\nu^- A_\mu Z_\mu - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-) (A_\mu Z_\nu + A_\nu Z_\mu) \right], \quad (11)$$

$$L_{B,4}^{int} = \frac{g^2}{4} (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+)^2. \quad (12)$$

Канонический лептонный лагранжиан [10, 11] через поля электронов и нейтрино преобразуется к виду

$$\hat{L}_L(\xi) = \hat{L}_{L,0} + \hat{L}_{L,0}^{int} + \xi^2 \left(\hat{L}_{L,2} + \hat{L}_{L,2}^{int} \right), \quad (13)$$

где

$$\hat{L}_{L,0} = e_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu e_l + e_r^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu e_r - m_e (e_r^\dagger e_l + e_l^\dagger e_r), \quad (14)$$

$$\hat{L}_{L,2} = \nu_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu \nu_l, \quad (15)$$

$$\hat{L}_{L,0}^{int} = g' \cos \theta_w e_r^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu e_r - g' \sin \theta_w e_r^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu e_r - \\ - h_e \chi (e_r^\dagger e_l + e_l^\dagger e_r) - \frac{g}{2 \cos \theta_w} e_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu e_l, \quad (16)$$

$$\hat{L}_{L,2}^{int} = e \nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu \nu_l + \frac{g \cos 2\theta_w}{2 \cos \theta_w} \nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu \nu_l + \\ + \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\nu_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^+ e_l + e_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^- \nu_l \right). \quad (17)$$

Кварковый лагранжиан [10, 11] представляется в виде слагаемых

$$\hat{L}_Q(\xi) = \hat{L}_{Q,0} + \hat{L}_{Q,0}^{int} + \xi^2 \left(\hat{L}_{Q,2} + \hat{L}_{Q,2}^{int} \right), \quad (18)$$

где

$$\hat{L}_{Q,0} =$$

$$= d_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu d_l + d_r^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu d_r - m_d (d_r^\dagger d_l + d_l^\dagger d_r), \quad (19)$$

$$\hat{L}_{Q,2} =$$

$$= u_l^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu u_l + u_r^\dagger i \tilde{\tau}_\mu \partial_\mu u_r - m_u (u_r^\dagger u_l + u_l^\dagger u_r), \quad (20)$$

$$\hat{L}_{Q,0}^{int} = - \left(\frac{g}{2} \cos \theta_w + \frac{g'}{6} \sin \theta_w \right) d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu d_l - \\ - \frac{e}{3} d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu d_l - h_d \chi (d_r^\dagger d_l + d_l^\dagger d_r) + \\ + \frac{1}{3} g' (\sin \theta_w d_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu d_r - \cos \theta_w d_r^\dagger \tau_\mu A_\mu d_r), \quad (21)$$

$$\hat{L}_{Q,2}^{int} = \frac{2e}{3} u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu A_\mu u_l - h_u \chi (u_r^\dagger u_l + u_l^\dagger u_r) + \\ + \left(\frac{g}{2} \cos \theta_w - \frac{g'}{6} \sin \theta_w \right) u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu Z_\mu u_l + \\ + \frac{g}{\sqrt{2}} \left(u_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^+ d_l + d_l^\dagger \tilde{\tau}_\mu W_\mu^- u_l \right) + \\ + \frac{2}{3} g' (\cos \theta_w u_r^\dagger \tau_\mu A_\mu u_r - \sin \theta_w u_r^\dagger \tau_\mu Z_\mu u_r). \quad (22)$$

Полный лагранжиан электрослабой модели с преобразованием калибровочной группы и пространств полей вида (4), (6) равен сумме бозонного, лептонного и кваркового лагранжианов $\hat{L}_{EWM}(\xi) = \hat{L}_B(\xi) + \hat{L}_L(\xi) + \hat{L}_Q(\xi)$ и записывается в виде разложения по степеням параметра ξ

$$\hat{\mathcal{L}}_{EWM}(\xi) = L(\xi) + L^{int}(\xi) = \\ = \hat{L}_0 + \hat{L}_0^{int} + \xi^2 \left(\hat{L}_2 + \hat{L}_2^{int} \right) + \xi^4 \hat{L}_4^{int}, \quad (23)$$

где слагаемые

$$\begin{aligned}\hat{L}_0 &= \hat{L}_{B,0} + \hat{L}_{L,0} + \hat{L}_{Q,0}, \\ \hat{L}_0^{int} &= \hat{L}_{B,0}^{int} + \hat{L}_{L,0}^{int} + \hat{L}_{Q,0}^{int}, \\ \hat{L}_2 &= \hat{L}_{B,2} + \hat{L}_{L,2} + \hat{L}_{Q,2}, \\ \hat{L}_2^{int} &= \hat{L}_{B,2}^{int} + \hat{L}_{L,2}^{int} + \hat{L}_{Q,2}^{int}, \\ \hat{L}_4^{int} &= \hat{L}_{B,4}^{int}\end{aligned}\quad (24)$$

даются формулами (7)–(22).

При уменьшении температуры $T \rightarrow 0$, параметр $\xi = BT^p \rightarrow 0$, поэтому слагаемые с более высокими степенями ξ вносят меньший вклад в лагранжиан электрослабой модели по сравнению со слагаемыми с меньшими степенями, т. е. происходит изменение доли вкладов разных слагаемых в общий лагранжиан. Таким образом, по мере остывания Вселенной имеет место непрерывное перераспределение силы взаимодействий между входящими в электрослабую модель элементарными частицами их вклада в формирование космической плазмы.

2. Упругое рассеяние нейтрино

Чтобы прояснить физический смысл параметра деформации ξ , рассмотрим упругое рассеяние нейтрино на лептонах и кварках. На рис. 1, а) представлена диаграмма, описывающая взаимодействия нейтрино с электронами посредством заряженных токов с помощью обмена W -бозонами, а на рис. 1, б) — с помощью нейтральных токов путем обмена Z -бозонами. При подстановке преобразованных полей (6) обе вершины на диаграмме 1, а) умножаются на ξ^2 , а пропагатор виртуального поля W умножается на ξ^{-2} , поскольку пропагатор есть обратный оператор к оператору свободного поля, который для поля W умножается на ξ^2 . Для диаграммы на рис. 1, б) только одна вершина приобретает множитель ξ^2 , тогда как вторая вершина и пропагатор поля Z не изменяются.

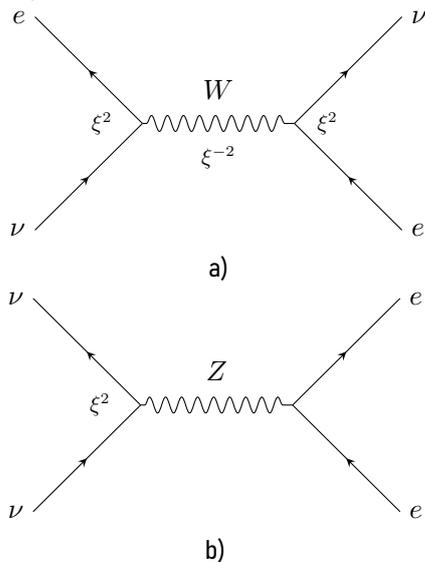


Рисунок 1. Упругое рассеяние нейтрино на лептонах.
Figure 1. Elastic scattering of neutrinos on leptons.

Таким образом, амплитуды вероятностей для заряженных и нейтральных слабых токов преобразуются одинаково $\mathcal{M} \rightarrow \xi^2 \mathcal{M}$. Сечение пропорционально квадрату амплитуды, следовательно, сечение упругого рассеяния нейтрино на лептонах при деформации (4) калибровочной группы умножается на ξ^4 . При энергиях нейтрино $m_e \ll E_\nu \ll m_W$ оно вносит основной вклад во взаимодействие нейтрино с лептонами и имеет вид [13, 14]

$$\sigma_{\nu l} = G_F^2 s f(x), \quad (25)$$

где $G_F = 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$ есть константа Ферми, s – квадрат энергии столкновения в системе центра масс, $f(x)$ – функция угла Вайнберга, $x = \sin \theta_w$. Принимая во внимание, что параметр ξ безразмерный, можно написать

$$\sigma_{\nu l} = \xi^4 \sigma_0 = (G_F s)(G_F f), \quad (26)$$

где σ_0 – сечение рассеяния при $\xi = 1$, и получить выражение контрационного параметра через константу Ферми и энергию нейтрино в системе центра масс

$$\xi^2(s) = \sqrt{G_F s}. \quad (27)$$

Диаграммы упругого рассеяния нейтрино на кварках посредством нейтральных и заряженных токов изображены на рис. 2. Они преобразуются аналогично диаграммам рис. 1. Сечения рассеяния нейтрино на кварках при энергиях $m_e \ll E_\nu \ll m_W$ имеют такой же вид (25) [13]

$$\sigma_{\nu W} = G_F^2 s \hat{f}(x), \quad \sigma_{\nu Z} = G_F^2 s \check{f}(x). \quad (28)$$

Нуклоны представляют собой сложные образования из кварков, поэтому в выражении для сечения рассеяния нейтрино на нуклонах появляется формфактор

$$\sigma_{\nu n} = G_F^2 s \hat{F}(x), \quad (29)$$

но оно по-прежнему преобразуется согласно (26). При энергиях $m_e \ll E_\nu \ll m_W$ упругое рассеяние вносит основной вклад в общее сечение $\sigma_{\nu m}$ взаимодействия нейтрино с веществом, поэтому последнее при деформации калибровочной группы (4) ведет себя аналогично $\sigma_{\nu l}$ (25), (26).

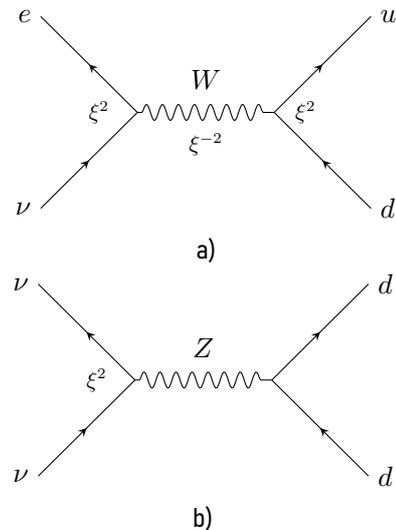


Рисунок 2. Упругое рассеяние нейтрино на кварках.
Figure 2. Elastic scattering of neutrinos on quarks.

В лабораторной системе отсчета сечение рассеяния $\sigma_{\nu l}$ (25) в интервале энергий $m_e \ll E_\nu \ll m_W$ линейно зависит от энергии E_ν падающего нейтрино [15]

$$\sigma_{\nu l}(E_\nu) = m_e G_F^2 E_\nu \hat{g}, \quad (30)$$

где \hat{g} – форм-фактор. При энергиях в середине интервала от $m_e = 0,5$ МэВ $= 0,5 \cdot 10^{-3}$ ГэВ $= 0,5 \cdot 10^6$ эВ до $m_W = 80$ ГэВ $= 8 \cdot 10^{10}$ эВ, т. е. до своего отщепления, нейтрино находится в термодинамическом равновесии с космической средой, поэтому энергия термализованного нейтрино совпадает с температурой Вселенной: $E_\nu = T$. В нашей модели деформация электрослабой модели начинается при температуре $T_0 = 10^2$ ГэВ. При этой температуре параметр деформации равен единице $\xi(T_0) = 1$, а сечение $\sigma_{\nu l}(T_0) = \sigma_0$. Заменяя в (30) энергию на температуру и учитывая (26), перепишем последнее выражение в виде

$$\sigma_{\nu l}(T) = \xi^4(T) \sigma_0 = m_e G_F^2 T \hat{g}, \quad (31)$$

где $\sigma_0 = m_e G_F^2 T_0 \hat{g}$. Тогда при T ниже 100 ГэВ из (31) получаем зависимость параметра деформации от температуры Вселенной

$$\xi^4(T) = T_0^{-1} T = T \cdot (10^{-2} \text{ГэВ}^{-1}), \quad (32)$$

где температура измеряется в ГэВ. В результате сечение рассеяния нейтрино на лептонах в указанных пределах линейно зависит от температуры

$$\sigma_{\nu l}(T) = T_0^{-1} T \sigma_0, \quad (33)$$

что согласуется с имеющимися экспериментальными данными, представленными на рис. 3, взятом из работ [14, 15].

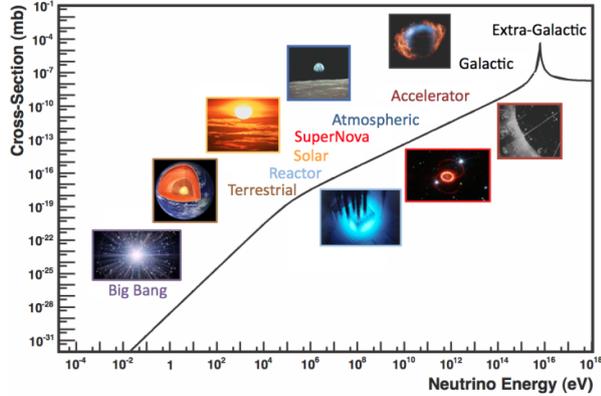


Рисунок 3. Электрослабое сечение для реакции $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$ рассеяния на электронах как функция энергии нейтрино.

Figure 3. Electroweak cross section for the reaction $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$ scattering on electrons as a function of neutrino energy.

3. Бета-распад

Важными реакциями с участием нейтрино являются радиоактивные превращения атомных ядер

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (34)$$

которые происходят за счет слабого взаимодействия путем превращения нейтрона в протон

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (35)$$

или эквивалентно

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^- \quad (36)$$

и называются *электронным* или *прямым β^- -распадом* [14].

Диаграмма Фейнмана прямого β^- -распада (36) изображена на рис. 4. Один из двух d -кварков, входящих в состав нейтрона n , испуская W^- -бозон, переходит в u -кварк. В результате оставшийся d -кварк и два u -кварка образуют протон p , а W^- -бозон, взаимодействуя с электронным нейтрино ν_e , порождает электрон e^- . На диаграмме рис. 4 обозначены множители вершин и пропагатора, полученные согласно преобразованию полей (6).

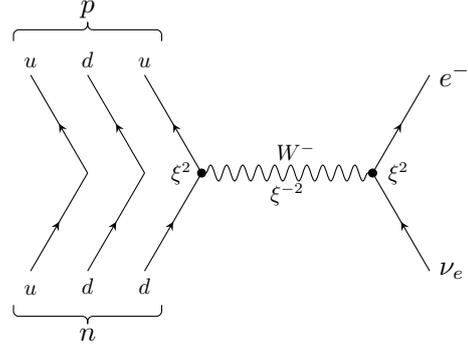


Рисунок 4. Диаграмма Фейнмана прямого β^- -распада (36).
Figure 4. Feynman diagram of direct beta decay (36).

В системе центра масс сечение реакции (36) в приближении низких энергий $m_e \ll E_\nu \ll m_W$ выражается такой же формулой [13], как и в случае упругого рассеяния нейтрино

$$\sigma = G_F^2 s \tilde{f}, \quad (37)$$

где s – энергия нейтрино в системе центра масс, G_F – константа Ферми, \tilde{f} – форм-фактор. Следовательно, и зависимость параметра деформации от энергии нейтрино такая же (27).

Другой тип β -превращений *позитронный* или *обратный β^+ -распад*

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e. \quad (38)$$

При $X = p$ получаем β^+ -распад свободного протона

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e, \quad (39)$$

который, однако, запрещен законом сохранения энергии, поскольку $m_p < m_n + m_e$. Действительно, $m_p \cong 938.27$ МэВ, $m_n \cong 939.56$ МэВ, $m_e \cong 0.51$ МэВ. Тем не менее процесс может происходить внутри ядра. Наконец, к β -превращениям относятся процессы захвата нейтрино и антинейтрино ядрами с испусканием электрона и позитрона соответственно

$$\nu_e + {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^-, \quad (40)$$

$$\bar{\nu}_e + {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+. \quad (41)$$

Примером нейтринного захвата является реакция

$$\nu + {}^{37}_{17} \text{Cl} \rightarrow {}^{37}_{18} \text{Ar} + e^-, \quad (42)$$

предложенная Б. М. Понтекорво для регистрации солнечных нейтрино. Хлор-аргоновый метод Понтекорво был использован Р. Дэвисом в первом эксперименте по обнаружению солнечных нейтрино.

Нуклиды, подверженные β -превращениям, имеются буквально у каждого элемента начиная с $Z = 0$ (нейтрон) и до больших Z . В частности, при $Z = 1, A = 1$ реакция (41) дает

$$\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (43)$$

Диаграмма Фейнмана обратного β^+ -распада (43) изображена на рис. 5.

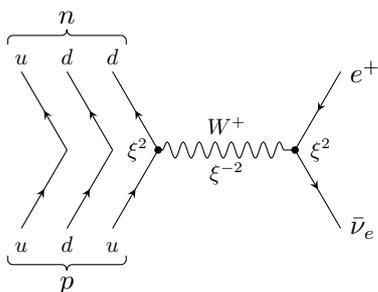


Рисунок 5. Диаграмма Фейнмана обратного β^+ -распада (43).
Figure 5. Feynman diagram of inverse beta decay (43).

Один из двух u -кварков, входящих в состав протона p , испускает W^+ -бозон, переходит в d -кварк. В результате оставшийся u -кварк и два d -кварка образуют нейтрон n , а W^+ -бозон, взаимодействуя с электронным антинейтрино $\tilde{\nu}_e$, порождает позитрон e^+ . На диаграмме рис. 5 обозначены множители вершин и пропагатора, полученные согласно преобразованию полей (6). Сечение реакции находится аналогично сечению прямого β^- -распада и совпадает с (37).

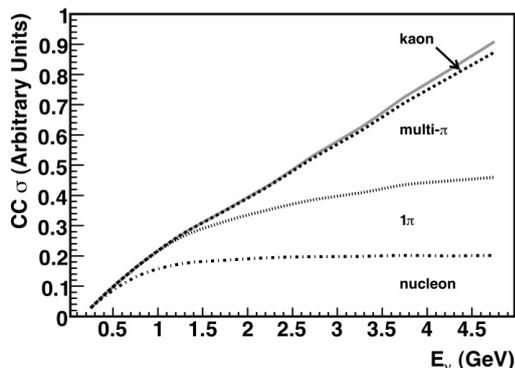


Рисунок 6. Предсказанные процессы для полного сечения инклюзивного рассеяния нейтрино на ядрах при промежуточных энергиях [15].
Figure 6. Predicted processes for the total cross section of inclusive neutrino scattering on nuclei at intermediate energies [15].

Полное сечение рассеяния нейтрино на ядрах, включая процессы прямого и обратного β -распадов, содержит вклады квазиупругих, резонансных и глубоконеупругих процессов. При промежуточных энергиях $1 \text{ ГэВ} < E_\nu < 20 \text{ ГэВ}$ оно демонстрирует линейную зависимость от энергии нейтрино по мере увеличения энергии нейтрино (рис. 6), а с учетом того, что энергия нейтрино совпадает с температурой (средней энергией) Вселенной $E_\nu = T$, линейно зависит от T , как и в случае упругого рассеяния (33).

Заключение

Деформация (4) или (5) калибровочной группы электрослабой модели приводит к перераспределению вклада различных слагаемых лагранжиана (23), т. е. к относительному усилению или ослаблению электрослабых взаимодействий между частицами и, следовательно, изменению их вклада в общее течение электрослабых процессов. Анализ преобразований фейнмановских диаграмм, описывающих упругое рассеяние нейтрино на лептонах и кварках, нахождение вида преобразования сечения рассеяния (31) в зависимости от температуры Вселенной и сравнение с теоретически вычисленным сечением позволили установить зависимость (32) параметра деформации от температуры $\xi^4(T) = T_0^{-1}T = T \cdot (10^{-2} \text{ ГэВ}^{-1})$, если температура измеряется в ГэВ. Верхний предел деформационного параметра $\xi(T_0) = 1$ достигается при $T_0 = 10^2 \text{ ГэВ}$, связанной с характерной температурой электрослабого взаимодействия.

Рассмотрение более сложных процессов с участием нейтрино, таких как радиоактивные превращения атомных ядер, включая прямой (36) и обратный (43) β -распады, фейнмановские диаграммы которых изображены на рис. 4 и 5, несмотря на то, что многие факторы усложняют их простое описание, также демонстрирует линейную зависимость сечения реакции от энергии нейтрино [15], т. е. от температуры T (см. рис. 6).

Температура Вселенной в настоящее время совпадает с температурой реликтового излучения $T = 2,7^\circ \text{ К} = 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ ГэВ}$ ($1^\circ \text{ К} = 8,6 \cdot 10^{-14} \text{ ГэВ}$), что дает величину параметра деформации $\xi^2(2,7^\circ \text{ К}) \simeq 5 \cdot 10^{-8}$. При характерной температуре сильного взаимодействия параметр деформации равен $\xi^2(0,2 \text{ ГэВ}) \simeq 5 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, деформации калибровочной группы (4), (5) соответствуют низкотемпературному пределу стандартной электрослабой модели и согласованы с экспериментально установленными фактами: слабым взаимодействием нейтрино с веществом, а также ростом сечения этого взаимодействия с увеличением энергии нейтрино.

Поскольку в электрослабой модели калибровочная группа отвечает за взаимодействия между частицами модели, то ее деформация, связанная с уменьшением внедиагональных и соответствующим увеличением диагональных элементов, свидетельствует о перераспределении силы электрослабого взаимодействия между нейтрино, электроном, u - d -кварками при понижении температуры Вселенной от 100 ГэВ до температуры настоящего времени.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Емельянов, В. М. Стандартная модель и ее расширения / В. М. Емельянов. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
2. Горбунов, Д. С. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. – М.: ЛЕНАНД, 2022. – 616 с.

3. Gromov, N. A. Elementary particles in the early Universe / N. A. Gromov // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* – 2016. – Vol. 03. – P. 053.
4. Gromov, N. A. Particles in the early Universe: high-energy limit of the standard model from the contraction of its gauge group / N. A. Gromov. – Singapore: World Scientific, 2020. – 159 p.
5. Громов, Н. А. Стандартная модель при высоких энергиях из контракции калибровочной группы / Н. А. Громов // *Физика элемент. частиц и атом. ядра.* – 2020. – Т. 51, вып. 4. – С. 601–610.
6. İnönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. İnönü, E. P. Wigner // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* – 1953. – Vol. 39. – P. 510–524.
7. Громов, Н. А. Контракции классических и квантовых групп / Н. А. Громов. – М.: Физматлит, 2012. – 318 с.
8. Zyla, P. A. The review of particle physics / P. A. Zyla [et al.] (Particle Data Group) // *Prog. Theor. Exp. Phys.* – 2020. – P. 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104.
9. Громов, Н. А. Гипотеза о контракции калибровочной группы Стандартной модели и экспериментальные данные БАК // *Известия Коми НЦ УрО РАН. Сер. «Физ.-мат. науки».* – 2022. – Вып. 5 (57). – С. 34–41. DOI 10.19110/1994-5655-2022-5-34-41.
10. Gromov, N. A. Contraction of the Standard model gauge group is not in conflict with LHC data / N. A. Gromov // *Physics of Particles and Nuclei.* – 2023. – Vol. 54, № 6. – P. 1045–1048. DOI: 10.1134/S106377962306014X.
11. Gromov, N. A. Standard model at high temperatures / N. A. Gromov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2023. – Vol. 26, № 4. – P. 328–341. DOI: 10.5281/zenodo.104060481.
12. Рубаков, В. А. Классические калибровочные поля / В. А. Рубаков. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 336 с.
13. Окунь, Л. Б. Лептоны и кварки / Л. Б. Окунь. – М.: Эдиториал УРСС, 2005. – 352 с.
14. Наумов, А. И. Физика атомного ядра и элементарных частиц / А. И. Наумов. – М.: Просвещение, 1984. – 384 с.
15. Formaggio, J. A. From eV to EeV: neutrino cross-sections across energy scales / J. A. Formaggio, G. P. Zeller // *Rev. Mod. Phys.* – 2012. – Vol. 84, № 3. – P. 1307–1342. arXiv:1305.7513v1 [hep-ex] 31 мая 2013 г.
- D. S. Gorbunov, V. A. Rubakov. – М.: LENAND, 2022. – 616 p.; Singapore: World Scientific, 2011. – 488 p.
3. Gromov, N. A. Elementary particles in the early Universe / N. A. Gromov // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* – 2016. – Vol. 03. – P. 053.
4. Gromov, N. A. Particles in the early Universe: high-energy limit of the Standard model from the contraction of its gauge group / N. A. Gromov. – Singapore: World Scientific, 2020. – 159 p.
5. Gromov, N. A. High-energy Standard model from the gauge group contraction / N. A. Gromov // *Phys. Partic. Nucl.* – 2020. – Vol. 51, № 4. – P. 540–544. DOI: 10.1134/S1063779620040310.
6. İnönü, E. On the contraction of groups and their representations / E. İnönü, E. P. Wigner // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* – 1953. – Vol. 39. – P. 510–524.
7. Gromov, N. A. Kontraksii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups] / N. A. Gromov. – М.: Физматлит, 2012. – 318 p.
8. Zyla, P. A. The review of particle physics / P. A. Zyla [et al.] (Particle data group) // *Prog. Theor. Exp. Phys.* – 2020. – P. 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104.
9. Gromov, N. A. Gipoteza o kontraksii kalibrovchnoy gruppy Standartnoy modeli i eksperimental'nyye dannyye BAK [Hypothesis about contraction of the gauge group of the Standard Model and LHC experimental data] / N. A. Gromov // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* – 2022. – № 5 (57). – P. 34–41. DOI 10.19110/1994-5655-2022-5-34-41.
10. Gromov, N. A. Contraction of the Standard model gauge group is not in conflict with LHC data / N. A. Gromov // *Physics of Particles and Nuclei.* – 2023. – Vol. 54, № 6. – P. 1045–1048. DOI: 10.1134/S106377962306014X.
11. Gromov, N. A. Standard model at high temperatures / N. A. Gromov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2023. – Vol. 26, № 4. – P. 328–341. DOI: 10.5281/zenodo.104060481.
12. Rubakov, V. A. Klassicheskiye kalibrovchnyye polya [Classical gauge fields] / V. A. Rubakov. – М.: Editorial URSS, 1999. – 336 p.
13. Okun', L. B. Leptony i kvarki [Leptons and quarks] / L. B. Okun'. – М.: Editorial URSS, 2005. – 352 p.
14. Naumov, A. I. Fizika atomnogo yadra i elementarnykh chastits [Physics of the atomic nucleus and elementary particles] / A. I. Naumov. – М.: Prosveshchenie, 1984. – 384 p.
15. Formaggio, J. A. From eV to EeV: neutrino cross-sections across energy scales / J. A. Formaggio, G. P. Zeller // *Rev. Mod. Phys.* – 2012. – Vol. 84, № 3. – P. 1307–1342. arXiv:1305.7513v1 [hep-ex] 31 May 2013

References

1. Emel'yanov V. M. Standartnaya model i ee rasshireniya [Standard model and its extensions] / V. M. Emel'yanov. – М.: Физматлит, 2007. – 584 p.
2. Gorbunov, D. S. Vvedeniye v teoriyu ranney Vselennoy: teoriya goryachego Bol'shogo vzryva [Introduction to the theory of the early Universe: hot Big Bang theory] /

Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 125031203621-2.

Acknowledgements (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the topic № 125031203621-2.

Для цитирования:

Громов, Н. А. Нейтрино в остывающей Вселенной / Н. А. Громов, В. В. Куратов, И. В. Костяков // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 20–27. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-20-27

For citation:

Gromov, N. A. Neutrinos in a cooling Universe / N. A. Gromov, V. V. Kuratov, I. V. Kostyakov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2025. – № 6 (82). – P. 20–27. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-20-27

Дата поступления статьи: 05.06.2025

Received: 05.06.2025

Орбифолды в одномерных пространствах Кэли-Клейна

И. В. Костяков, В. В. Куратов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Описаны дискретные группы симметрий движений эллиптической, гиперболической и евклидовой прямых. Рассмотрены орбифолды на этих прямых, получаемые факторизацией по соответствующей дискретной группе. Орбифолды в виде отрезков и окружностей могут использоваться в моделях Калуцы-Клейна и теории суперструн при компактификации дополнительных измерений.

Ключевые слова:

орбифолды, дискретные группы, пространства Кэли-Клейна

Введение

Орбифолды лежат на пересечении многих различных областей математики, включая алгебраическую и дифференциальную геометрию, топологию, алгебру. В физике они нашли применение для описания компактификаций дополнительных измерений в теориях Калуцы-Клейна и суперструн [1–3]. В калибровочных теориях орбифолды появляются как фазовое или конфигурационное пространство [4–6].

Идеи многомерия в работах математиков обсуждались уже давно. В конце 1921 г. в Германии опубликована статья Т. Калуцы [7], в которой было предложено объединение электромагнетизма и гравитации в пятимерном пространстве-времени. О. Клейн в работе [8] показал, что дополнительное измерение может быть скомпактифицировано до размеров порядка планковской длины $l_{Pl} \approx 1.6 \cdot 10^{-35}$ м. Этому соответствует планковская энергия $E \sim 10^{19}$ ГэВ. На таких масштабах практическое обнаружение скрытых размерностей выходит за рамки современных экспериментальных возможностей. В дальнейшем было показано, что используя большее число дополнительных измерений, можно единым образом описать все фундаментальные взаимодействия. Сейчас теориями Калуцы-Клейна принято называть целый класс теорий, основанных на предположении о существовании дополнительных компактных пространственных измерений [9–12].

Р. И. Пименов для построения единой полевой теории гравитации и электромагнетизма использовал полуриманову геометрию ${}^3\mathbb{V}_5^4$, в которой базой является четырех-

Orbifolds in one-dimensional Cayley-Klein spaces

I. V. Kostyakov, V. V. Kuratov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar
kostyakov@ipm.komisc.ru
kuratov@ipm.komisc.ru

Abstract

Discrete symmetry groups of motions of the elliptic, hyperbolic and Euclidean lines are described. Orbifolds on these lines, obtained by factorization by the corresponding discrete group, are considered. Orbifolds in the form of segments and circles can be used in Kaluza-Klein models and superstring theory for compactification of extra dimensions.

Keywords:

orbifolds, discrete groups, Cayley-Klein spaces

мерное псевдориманово пространство-время ОТО, а одномерный слой, играющий роль дополнительного измерения, ответственен за электричество. Геометрия этого слоя задавалась евклидовой и определялась метрикой, не зависящей от метрики четырехмерного пространства-времени базы. В отличие от теорий типа Калуцы-Клейна здесь не возникает дополнительного скалярного поля и ограничений на преобразования пятимерного пространства и размеры дополнительного измерения [13–15].

В модели Рэндалл-Сундрума [16] дополнительное измерение представляет собой орбифолд S^1/Z_2 , имеющий вид отрезка с двумя неподвижными точками, в которых расположены две браны, на одной из которых локализованы поля Стандартной модели.

Десятимерная теория суперструн также является серьезным кандидатом на объединение Стандартной модели и квантовой гравитации. Чтобы получить четырехмерную суперсимметричную теорию, нужно скомпактифицировать 6 из 10 измерений на пространства Калаби-Яу. Другой эквивалентный подход, предложенный Д. Гепнером, связан с компактификацией шести дополнительных измерений на $N = 2$ суперконформную теорию поля с центральным зарядом $c = 9$. В работах [17–19] предложены новые конструкции моделей орбифолдов для подхода Гепнера к четырехмерной суперструне.

В данной работе мы опишем одномерные орбифолды в пространствах Кэли-Клейна, которые могут быть использованы при компактификации дополнительных измерений

и приведем простые примеры из классической и квантовой механики на этих орбиголдах.

1. Три геометрии Кэли-Клейна на прямой

На прямой имеется три различные геометрии Кэли-Клейна — эллиптическая геометрия Римана, обычная геометрия Евклида и гиперболическая геометрия Лобачевского [14, 15, 20–25], соответственно положительной, нулевой и отрицательной кривизны, которые определяются своими группами симметрий, являющихся подгруппами преобразований проективной прямой. Эллиптической геометрии соответствует группа вращений окружности $O(2)$, геометрии Евклида — группа трансляций и отражений, гиперболической — группа Лоренца $O(1, 1)$.

Моделью для эллиптической прямой (будем обозначать ее как $\mathbb{E}l^1$) можно взять окружность радиуса R с отождествленными противоположными точками на плоскости \mathbb{R}^2 (рис. 1 а) там же. Примем за расстояние между точками A_1 и B_1 длину дуги A_1B_1 (рис. 1 а), пропорциональную углу $\phi_{A_1B_1}$ между прямыми OB_1 и OA_1 и радиусу R окружности

$$s_{A_1B_1} = R |\phi_{A_1B_1}|. \quad (1)$$

Длина всей эллиптической прямой равна πR , поэтому она компактна в метрическом смысле. Две различные точки эллиптической прямой делят ее на две части. Длина одной из них меньше $\frac{1}{2}\pi R$, другой — больше. Поэтому расстояние между двумя точками двузначно и выбирается меньшее из них.

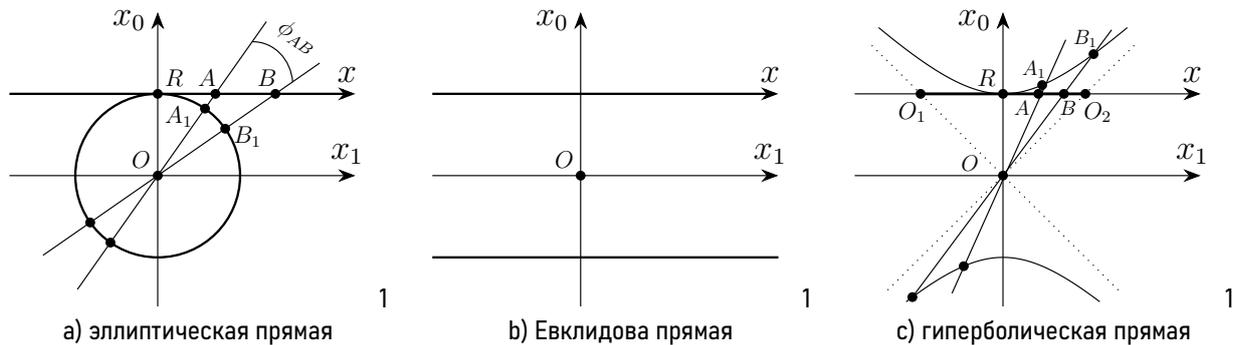


Рисунок 1. Три геометрии Кэли-Клейна на прямой как окружности $S^1(j)/C_2$ с отождествленными противоположными точками.
Figure 1. Three Cayley-Klein geometries on the line as circles $S^1(j)/C_2$ with identified antipodal points.

Пусть (x_0, x_1) — декартовы координаты на плоскости \mathbb{R}^2 . В полярных координатах связь между углом ϕ и координатами x_i задается формулами

$$\begin{cases} x_0 = r \cos \phi, \\ x_1 = r \sin \phi, \end{cases} \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (2)$$

Тогда расстояние $s_{A_1B_1}$ между точками A_1 и B_1 на эллиптической прямой можно определить по формуле

$$\cos \frac{s_{A_1B_1}}{R} = \frac{1}{R^2} |x_{0A_1} x_{0B_1} + x_{1A_1} x_{1B_1}|. \quad (3)$$

Эллиптическую прямую можно рассматривать и как проективную прямую, снабженную расстоянием (1), (3). Действительно, прямые, проходящие через центр и противоположные точки окружности, образуют проективную прямую $\mathbb{R}P^1 = S^1/Z_2$, где Z_2 — группа поворотов на 180° , связывающая противоположные точки окружности.

Можно каждой точке эллиптической прямой сопоставить бельтрамиеву координату $x = R \frac{x_1}{x_0}$, $x = R \operatorname{tg} \phi$. Тогда расстояние (1) или (3) между точками A и B эллиптической прямой можно выразить через координаты этих точек x_A и x_B

$$s_{AB} = \left| R \operatorname{arctg} \frac{x_B - x_A}{R \left(1 + \frac{x_A x_B}{R^2} \right)} \right|. \quad (4)$$

Для близких точек с координатами x и $x + dx$, расстояние и метрика определяются формулами

$$ds = R d\phi = \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{R^2}}, \quad g = \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right)^{-2}. \quad (5)$$

Множество точек эллиптической прямой, так же как и проективной, можно выбрать по-разному. Действительно, каждому значению бельтрамиевой координаты x соответствует бесконечный набор точек прямой $x = R \frac{x_1}{x_0}$ на плоскости (x_0, x_1) . Представим эллиптическую прямую в виде прямой $x_0 = R$, к которой добавлена бесконечно удаленная точка (рис. 1 а). Движения одномерного эллиптического пространства, сохраняющие расстояния (1),(4), определяются группой вращений $O(2)$, которая на координаты x_0, x_1 действует вращениями $A(\phi)$ и отражениями $P(\phi)$

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \\ P(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

а на бельтрамиеву координату x — дробно-линейными преобразованиями

$$x' = \frac{x + R \operatorname{tg} \phi}{1 - \frac{x}{R} \operatorname{tg} \phi}, \quad x' = \frac{-x + R \operatorname{tg} \phi}{1 + \frac{x}{R} \operatorname{tg} \phi}. \quad (8)$$

Матрица $P(\phi)$ задает симметрию (отражение) относительно прямой $x_1 = x_0 \operatorname{tg} \phi$. Композиция двух отражений $P(\phi_1 + \phi) \cdot P(\phi_1)$ задает вращение $A(2\phi)$ на угол 2ϕ . Группы движений эллиптической прямой и окружности (а значит и их геометрии) изоморфны.

Рассмотрим спинорное представление группы движений эллиптической прямой [23, 24]. Алгебраический подход связан с сопоставлением вектору $\vec{X} = (x_0, x_1)^t$ на плоскости \mathbb{R}^2 с метрикой $g_{mn} = \operatorname{diag}(1, 1)$ элемента алгебры Клиффорда $\hat{X} = x_0 e_1 + x_1 e_2 = \bar{z} f + z \bar{f}$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ вещественной алгебры Клиффорда $Cl_2^{\mathbb{R}}$ с единичным элементом I и образующими e_1 и e_2 , которые удовлетворяют определяющим соотношениям

$$e_m e_n + e_n e_m = 2g_{nm} I, \quad n, m = 1, 2. \quad (9)$$

В матричном виде образующие e_n можно представить как

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$e_1 e_2 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Введем новые образующие f и \bar{f} [26]

$$f = \frac{1}{2}(e_1 + i e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(e_1 - i e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которые вместе с единицей I образуют одномерную алгебру \mathcal{A}_1 свободного фермиона или фермионного осциллятора

$$f^2 = \bar{f}^2 = 0, \quad f \bar{f} + \bar{f} f = I. \quad (12)$$

Алгебра \mathcal{A}_1 ввиду (11) изоморфна алгебре Клиффорда Cl_2 , поэтому построение представлений алгебры Клиффорда можно свести к построению пространства Фока \mathcal{F} , соответствующего алгебре фермионного осциллятора (12). Вакуумный вектор $|0\rangle$ и вектор $|1\rangle$, определяемые как

$$f|0\rangle = 0, \quad |1\rangle = \bar{f}|0\rangle, \quad (13)$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

задают базис в пространстве Фока. Вектор $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$ в этом пространстве называется спинором.

Так как $e_i^2 = 1$, они задают некоторые отражения в \mathbb{R}^2 . Образующая e_1 задает отражение $p_1 = e_1 = f + \bar{f}$ относительно прямой $x_1 = 0$, $(x_0, x_1) \rightarrow (x_0, -x_1)$

$$\hat{X}' = p_1 \hat{X} p_1 = x_0 e_1 - x_1 e_2 = z f + \bar{z} \bar{f}, \quad (14)$$

а отражение относительно прямой $x_0 = 0$, $(x_0, x_1) \rightarrow (-x_0, x_1)$ задается элементом $p_2 = e_2 = i(f - \bar{f})$

$$\hat{X}' = p_2 \hat{X} p_2 = -x_0 e_1 + x_1 e_2 = -(z f + \bar{z} \bar{f}). \quad (15)$$

Отражению относительно прямой $x_1 = x_0 \operatorname{tg} \phi$ сопоставляется элемент алгебры Клиффорда $p(\phi) = \cos \phi e_1 + \sin \phi e_2 = e^{-i\phi} f + e^{i\phi} \bar{f}$, $p^2(\phi) = 1$

$$\hat{X}' = p(\phi) \hat{X} p(\phi). \quad (16)$$

Заметим, что $p(\phi)$ и $-p(\phi)$ задают одно и то же отражение. Композиция двух отражений $p(\phi_1)$ и $p(\phi_1 + \phi)$ задает спинорное представление $a(\phi)$ вращения $A(2\phi)$ (6) на удвоенный угол 2ϕ

$$a(\phi) = p(\phi_1 + \phi) \cdot p(\phi_1) =$$

$$= \cos(\phi) I - \sin(\phi) e_1 e_2 = e^{-i\phi} f \bar{f} + e^{i\phi} \bar{f} f, \quad (17)$$

$$a^{-1}(\phi) = \bar{a}(\phi) = p(\phi_1) \cdot p(\phi_1 + \phi) =$$

$$= \cos(\phi) I + \sin(\phi) e_1 e_2 = e^{i\phi} f \bar{f} + e^{-i\phi} \bar{f} f. \quad (18)$$

$$\hat{X}' = a(\phi) \hat{X} \bar{a}(\phi). \quad (19)$$

$a(\phi)$ и $-a(\phi)$ задают одно и то же вращение. Формулы (16), (19) задают спинорное представление $\operatorname{Pin}(2)$ отражений $P(\phi)$ и вращений $A(2\phi)$ (6) группы $O(2)$ элементами алгебры Клиффорда $\pm p(\phi)$ и $\pm a(\phi)$. Ввиду того, что одному элементу группы $O(2)$ соответствует два элемента спинорного представления, последнее является двойной накрывающей группы $O(2)$. Действие $p(\phi)$ и $a(\phi)$ на спиноры $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$ определяется так

$$|p'\rangle = p(\phi)|\psi\rangle, \quad |a'\rangle = a(\phi)|\psi\rangle. \quad (20)$$

Повороту на угол 2ϕ в пространстве \mathbb{R}^2 , задаваемому матрицей $A(2\phi)$, соответствует поворот на угол ϕ в спинорном пространстве, задаваемый матрицей $a(\phi)$.

Есть ли в подмножестве алгебры Клиффорда $x_0 e_1 + x_1 e_2 = \bar{z} f + z \bar{f}$, соответствующем плоскости \mathbb{R}^2 , подмножество, остающееся инвариантным относительно действия вращений (19)? Несложно убедиться, что это одномерные подпространства вдоль образующих f и \bar{f} . Покажем, что они соответствуют изотропным подпространствам в \mathbb{R}^2 [24, 27]. Координаты изотропных векторов $\vec{\Xi} = (x_0, x_1)^t$ в \mathbb{R}^2 , удовлетворяют соотношению

$$x_0^2 + x_1^2 = 0. \quad (21)$$

В проективной геометрии эти изотропные подпространства называются абсолютами. Имеем две возможности $x_0 = \xi_1^2$, $x_1 = i\xi_1^2$ и $x_0 = \xi_2^2$, $x_1 = -i\xi_2^2$. В бельтрамиевых координатах у эллиптической прямой имеется два абсолюта

$x = \pm iR$, которые остаются инвариантными при преобразованиях (8). Этим изотропным векторам соответствуют элементы алгебры Клиффорда

$$\hat{\xi}_1 = \xi_1^2 f, \quad \hat{\xi}_2 = \xi_2^2 \bar{f} \quad (22)$$

и спиноры

$$|\Psi_0\rangle = \xi_1|0\rangle, \quad |\Psi_1\rangle = \xi_2|1\rangle. \quad (23)$$

При преобразованиях (19) и (20)

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &\rightarrow e^{-2i\phi}\hat{\xi}_1, & \hat{\xi}_2 &\rightarrow e^{2i\phi}\hat{\xi}_2, \\ |\Psi_0\rangle &\rightarrow e^{-i\phi}|\Psi_0\rangle, & |\Psi_1\rangle &\rightarrow e^{i\phi}|\Psi_1\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, координаты спиноров связаны с координатами вдоль абсолютов, а спинорные представления вращений эллиптической прямой соответствуют преобразованиям абсолютов при этих движениях.

Аналогично эллиптическому случаю, в качестве модели для одномерного вещественного гиперболического пространства отрицательной кривизны \mathbb{H}^1 (одномерного пространства Лобачевского) можно взять гиперболу (псевдоокружность) (рис. 1 с)

$$x_0^2 - x_1^2 = R^2 \quad (25)$$

с отождествленными противоположными точками двух ее веток в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ с метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2. \quad (26)$$

Множество прямых, проходящих через центр и пару противоположных точек ветвей гиперболы, лежат между изотропными прямыми $x_0 = \pm x_1$, которые соответствуют абсолютам в проективной геометрии. Каждой такой прямой можно сопоставить точку одномерного гиперболического пространства, бельтрамиеву координату $x = R \frac{x_1}{x_0}$ и гиперболический угол ϕ . В полярных координатах связь между гиперболическим углом ϕ и координатами x_i задается формулами

$$\begin{cases} x_0 = r \operatorname{ch} \phi, \\ x_1 = r \operatorname{sh} \phi, \end{cases}, \quad \phi \in (-\infty, +\infty). \quad (27)$$

Выберем в качестве множества таких точек интервал (O_1, O_2) на прямой $x_0 = R$, где точки O_i соответствуют изотропным прямым (абсолютам) $x_0 = \pm x_1$ (пунктирные линии на рис. 1 с), $x_{O_1} = -R, x_{O_2} = R$. В релятивистской механике эти изотропные прямые (абсолюты) связаны со световыми конусами и движением частиц нулевой массы (например, фотонами), при этом само пространство Лобачевского является пространством скоростей и имеет тесную связь со специальной теорией относительности [28].

Расстояние между точками A_1 и B_1 на гиперболе (псевдоокружности) (рис. 1 с) (с учетом (26),(27)) пропорционально гиперболическому углу $\phi_{A_1 B_1} = \phi_{A_1} - \phi_{B_1}$

$$s_{A_1 B_1} = R |\phi_{A_1 B_1}|. \quad (28)$$

В бельтрамиевых координатах расстояние выражается формулой

$$s_{AB} = |R\phi_{AB}| = \left| R \operatorname{arctch} \frac{x_B - x_A}{R \left(1 - \frac{x_A x_B}{R^2}\right)} \right|. \quad (29)$$

Группой симметрии гиперболического пространства, сохраняющей расстояние (29), является группа Лоренца $O(1, 1)$, которая в пространстве Минковского действует собственными преобразованиями Лоренца $A(\phi)$ и отражениями $P(\phi)$

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \phi & \operatorname{sh} \phi \\ \operatorname{sh} \phi & \operatorname{ch} \phi \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$P(\phi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \phi & \operatorname{sh} \phi \\ -\operatorname{sh} \phi & -\operatorname{ch} \phi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \phi & \operatorname{sh} \phi \\ \operatorname{sh} \phi & \operatorname{ch} \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \phi & \operatorname{sh} \phi \\ -\operatorname{sh} \phi & -\operatorname{ch} \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

а на бельтрамиеву координату следующими дробно-линейными преобразованиями

$$x' = \frac{x + R \operatorname{th} \phi}{1 + \frac{x}{R} \operatorname{th} \phi}, \quad x' = -\frac{x + R \operatorname{th} \phi}{1 + \frac{x}{R} \operatorname{th} \phi}. \quad (32)$$

Если обозначить $v_1 = R \operatorname{th} \phi_1$, $v_2 = R \operatorname{th} \phi_2$, то композиция двух преобразований, задаваемых векторами v_1 и v_2 , будет задаваться вектором v

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{R^2}}. \quad (33)$$

Заменяя R на скорость света, c легко увидеть формулу сложения скоростей в специальной теории относительности (СТО) и то, что скорость света является предельной (абсолютом). Абсолюты O_1 и O_2 остаются инвариантными при действии группы $O(1, 1)$. Расстояние между точками A и B можно определить, как в проективной геометрии, с помощью двойного отношения

$$\begin{aligned} s_{AB} &= \frac{1}{2} \left| R \ln \left(\frac{|AO_1|}{|AO_2|} \cdot \frac{|BO_2|}{|BO_1|} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{2} R \left| \ln \left(\frac{(R + x_A)}{(R - x_A)} \cdot \frac{(R - x_B)}{(R + x_B)} \right) \right|. \end{aligned} \quad (34)$$

Из формулы (34) видно, что расстояние от любой точки гиперболической прямой до абсолюта равно бесконечности, поэтому гиперболическая прямая некомпактна в метрическом смысле. Легко показать, используя связь гиперболического логарифма и гиперболического арктангенса, что формулы (34) и (29) эквивалентны. Кэли для определения расстояний использовал арккосинусы, а Клейн — логарифмы. Для близких точек с координатами x и $x + dx$ формулы (29) и (34) дают расстояние и метрику

$$ds = \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{R^2}}, \quad g = \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{-2}. \quad (35)$$

Таким образом, гиперболическая прямая (прямая Лобачевского) изображается отрезком (O_1O_2) (модель Кэли-Клейна) с расстоянием, определяемым формулами (34) и (35). При замене R на iR , геометрия Лобачевского переходит в эллиптическую. Так как с проективной точки зрения эллиптическая прямая тоже имеет два мнимых абсолюта $x_0 = \pm ix_1$ или $x = \pm iR$, инвариантные относительно вращений (7), (8), на ней можно определить расстояние, эквивалентное (4)

$$s_{AB} = \frac{1}{2} \left| R \ln \left(\frac{(iR + x_A)}{(iR - x_A)} \cdot \frac{(iR - x_B)}{(iR + x_B)} \right) \right|. \quad (36)$$

Рассмотрим спинорное представление группы движений гиперболической прямой [23, 24]. Вектору $\vec{X} = (x_0, x_1)^t$ пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ с метрикой $g_{mn} = \text{diag}(+1, -1)$ сопоставим элемент $\hat{X} = x_0 e_1 + x_1 e_2 = z_+ f + z_- \bar{f}$, $z_{\pm} = x \pm y$ вещественной алгебры Клиффорда $Cl_{(1,1)}^{\mathbb{R}}$ с единицей I и образующими e_1 и e_2

$$e_m e_n + e_n e_m = 2g_{nm} I, \quad n, m = 1, 2. \quad (37)$$

В матричном виде образующие e_n равны

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$e_1 e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отражение относительно прямой $x_1 = \text{th} \phi x_0$ задается двумя элементами алгебры Клиффорда $p(\phi) = e_1 \text{ch} \phi + e_2 \text{sh} \phi = e^{\phi} f + e^{-\phi} \bar{f}$ и $-p(\phi)$, $p^2(\phi) = 1$, действующими по формуле

$$\hat{X}' = p(\phi) \hat{X} p(\phi). \quad (40)$$

Композиция двух отражений $p(\phi_1)$ и $p(\phi_1 + \phi)$ задает спинорное преобразование Лоренца $a(\phi)$, соответствующее преобразованию Лоренца $A(2\phi)$ (30) на удвоенный угол 2ϕ

$$a(\phi) = p(\phi_1 + \phi) \cdot p(\phi_1) = \text{ch}(\phi) I - \text{sh}(\phi) e_1 e_2 = e^{\phi} f \bar{f} + e^{-\phi} \bar{f} f, \quad (41)$$

$$a^{-1}(\phi) = p(\phi_1) \cdot p(\phi_1 + \phi) = \text{ch}(\phi) I + \text{sh}(\phi) e_1 e_2 = e^{-\phi} f \bar{f} + e^{\phi} \bar{f} f. \quad (42)$$

$$\hat{X}' = a(\phi) \hat{X} a^{-1}(\phi). \quad (43)$$

$a(\phi)$ и $-a(\phi)$ задают одно и то же вращение. Формулы (40), (43) задают спинорное представление $\text{Pin}(1, 1)$ отражений $P(\phi)$ и вращений $A(2\phi)$ (6) группы $O(1, 1)$ элементами алгебры Клиффорда $\pm p(\phi)$ и $\pm a(\phi)$. Это представление является двойной накрывающей группы $O(1, 1)$. Действие на спиноры описывается формулой (20).

Повороту на гиперболический угол 2ϕ в пространстве $\mathbb{R}^{1,1}$, задаваемому матрицей $A(2\phi)$, соответствует поворот на угол ϕ в спинорном пространстве, задаваемый матрицей $a(\phi)$. Точно так же, как в эллиптическом случае, несложно убедиться, что одномерные подпространства вдоль f и \bar{f} соответствуют изотропным подпространствам в $\mathbb{R}^{1,1}$ [24, 27]. Координаты изотропных векторов $\vec{\Xi} = (x_0, x_1)^t$ в этом случае удовлетворяют соотношению

$$x_0^2 - x_1^2 = 0. \quad (44)$$

Имеем две возможности $x_0 = \xi_1^2$, $x_1 = \xi_1^2$ и $x_0 = \xi_2^2$, $x_1 = -\xi_2^2$. В бельтрамиевых координатах на гиперболической прямой им соответствуют два абсолюта $x = \pm R$, которые остаются инвариантными при преобразованиях (32). Этим изотропным векторам соответствуют элементы алгебры Клиффорда

$$\hat{\Xi}_1 = \xi_1^2 f, \quad \hat{\Xi}_2 = \xi_2^2 \bar{f} \quad (45)$$

и спиноры

$$|\Psi_0\rangle = \xi_1 |0\rangle, \quad |\Psi_1\rangle = \xi_2 |1\rangle. \quad (46)$$

При преобразованиях (43) и (20)

$$\hat{\Xi}_1 \rightarrow e^{2\phi} \hat{\Xi}_1, \quad \hat{\Xi}_2 \rightarrow e^{-2\phi} \hat{\Xi}_2, \quad (47)$$

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow e^{\phi} |\Psi_0\rangle, \quad |\Psi_1\rangle \rightarrow e^{-\phi} |\Psi_1\rangle.$$

Таким образом, как и для эллиптической прямой, координаты спиноров связаны с координатами вдоль абсолютов, а спинорные представления преобразований Лоренца гиперболической прямой соответствуют преобразованиям абсолютов при этих движениях.

Евклидову геометрию можно получить из эллиптической или гиперболической в пределе больших R , при этом два абсолюта сливаются в один (бесконечно удаленная точка), и расстояние определяется обычным образом как разность координат

$$s_{AB} = |x_A - x_B|, \quad ds = dx. \quad (48)$$

Топологически, одномерная евклидова прямая эквивалентна эллиптической прямой, из которой выколота одна точка. И наоборот, если к евклидовой прямой добавим бесконечно удаленную точку, то получим эллиптическую прямую (окружность).

Также группу трансляций и отражений на евклидовой прямой можно представить с помощью вырожденной алгебры Клиффорда $Cl_{(1,0,1)}^{\mathbb{R}}$. Для этого рассмотрим полуевклидово пространство с метрикой $g = \text{diag}(1, 0)$ и каждому вектору $\vec{X} = (x_0, x_1)^t$ этого пространства сопоставим элемент $\hat{X} = x_0 e_1 + x_1 e_2 = z_+ f + z_- \bar{f}$, $z_{\pm} = x \pm iy$ вещественной вырожденной алгебры Клиффорда $Cl_{(1,0,1)}^{\mathbb{R}}$ с единицей I и образующими e_1 и e_2

$$e_m e_n + e_n e_m = 2g_{nm} I, \quad n, m = 1, 2. \quad (49)$$

Здесь ι – нильпотентная единица со свойством $\iota^2 = 0$, но

$\iota^2 = 0$. В матричном виде образующие e_n равны

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \iota \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$e_1 e_2 = \iota i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где f и \bar{f} имеют вид (11), (39). Евклидовой прямой сопоставим слой $x_0 = 1$ в полуевклидовом пространстве. Тогда каждой точке евклидовой прямой с координатой x можно сопоставить элемент алгебры Клиффорда $\hat{X} = e_1 + x e_2$. Отражение относительно точки с координатой $x = b$ задается двумя элементами алгебры Клиффорда $p(b) = e_1 + b e_2$ и $-p(b)$, $p^2(\phi) = 1$

$$\hat{X}' = p(b) \hat{X} p(b), \quad x' = 2b - x. \quad (51)$$

Композиция двух отражений $p(b_1)$ и $p(b_1 + b)$ задает трансляцию $a(b)$, соответствующую трансляции на евклидовой прямой на $2b$

$$a(b) = p(b_1 + b) \cdot p(b) = I - 2b e_1 e_2, \quad (52)$$

$$\hat{X}' = a(b) \hat{X} a^{-1}(b). \quad (53)$$

$a(b)$ и $-a(b)$ задают одну и ту же трансляцию.

Мы видим, что три одномерные геометрии Кэли-Клейна тесно связаны между собой предельными переходами и аналитическими продолжениями. Они могут быть описаны единым образом [15] как окружности $S^1(j)$ (рис. 1)

$$x_0^2 + j^2 x_1^2 = R^2 \quad (54)$$

с отождествленными противоположными точками на плоскостях $\mathbb{R}^2(j) = (x_0, j x_1)$ с метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 + j^2 dx_1^2, \quad j = 1, \iota, i, \quad \iota^2 = 0. \quad (55)$$

Значению $j = 1$ соответствует эллиптическая геометрия, $j = \iota$ — геометрия Евклида, а $j = i$ — гиперболическая. Группы симметрии G этих окружностей, сохраняющие расстояния (55), состоят из вращений $A(\phi, j)$ и отражений $P(\phi, j)$

$$A(\phi, j) = \begin{pmatrix} \cos j\phi & -j \sin j\phi \\ \frac{1}{j} \sin j\phi & \cos j\phi \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$P(\phi, j) = \begin{pmatrix} \cos j\phi & j \sin j\phi \\ \frac{1}{j} \sin j\phi & -\cos j\phi \end{pmatrix}.$$

Как обычно, композиция двух отражений, задаваемых двумя прямыми, относительно которых происходит отражение, дает поворот на угол, равный удвоенному углу между этими прямыми

$$P(\phi_1 + \phi, j) P(\phi_1, j) = A(\phi, j). \quad (57)$$

Можно единым образом определить расстояние и метрику на этих трех геометриях, объединяя формулы (4), (5),

(29), (35), (48), с помощью параметра j

$$\frac{R}{j} \operatorname{tg} \frac{j s_{AB}}{R} = \frac{x_B - x_A}{R \left(1 - j^2 \frac{x_A x_B}{R^2} \right)}, \quad (58)$$

$$ds = \frac{dx}{1 + j^2 \frac{x^2}{R^2}}, \quad g = \left(1 + j^2 \frac{x^2}{R^2} \right)^{-2}.$$

Также возможно единым образом представить группы движений этих трех геометрий, используя алгебры Клиффорда, связанные с метрикой $g = \operatorname{diag}(1, j^2)$.

2. Орбиболды на одномерных геометриях Кэли-Клейна

Орбиболд — это многообразие с особенностями и его можно определить как факторизацию многообразия X по некоторой дискретной подгруппе Γ группы движений этого многообразия X/Γ . При этом особыми точками будут неподвижные точки этой дискретной подгруппы. Вне особых точек орбиболды устроены так же, как исходное многообразие. Таким образом, чтобы описать орбиболды на одномерных геометриях Кэли-Клейна, нужно описать дискретные подгруппы их групп движений. Начнем с евклидовой прямой. Любая дискретная подгруппа Γ группы движений евклидовой прямой имеет вид [29–31]

1. Γ порождается одной симметрией (отражением)

$$\Gamma = D_1 = \mathbb{Z}_2 = \{e, P(a, \iota)\}.$$

В матричном виде имеет представление

$$D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (59)$$

2. Γ порождается параллельным переносом $T(a) = O(a, \iota)$, действующим на координату x как

$$T(a)x = x + a, \quad \Gamma = \{T(na) | n \in \mathbb{Z}\}.$$

В матричном представлении состоит из бесконечного числа матриц вида

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (60)$$

и изоморфна группе целых чисел по сложению $(\mathbb{Z}, +)$.

3. Γ порождается двумя отражениями $P(a, \iota)$ и $P(b, \iota)$, действие которых определяется так $P(a, \iota)x = a - x$, $P(a, \iota)^2 = 1$, или, так как композиция двух отражений есть трансляция, можно представить подгруппу Γ как порожденную параллельным переносом $T(b - a)$ и симметрией (отражением) $P(a, \iota)$,

$$\Gamma = \{T(n(b - a)), P(a, \iota)T(n(b - a))\} \cong D_\infty.$$

В матричном виде группа диэдра D_∞ представляется бесконечным набором матриц вида

$$D_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n(b - a) & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n(b - a) + a & -1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (61)$$

На рис. 2 приведены примеры орнаментов с группой симметрий D_∞ (2 а) и группой трансляций T (2 б).



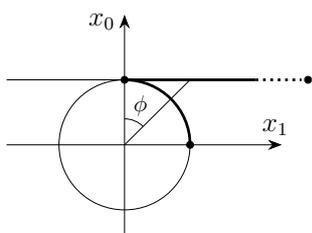
Рисунок 2. Орнаменты на евклидовой прямой с симметриями D_∞ и T .
Figure 2. Ornaments on the Euclidean line with symmetries D_∞ and T .

Дискретные подгруппы группы движений окружности $O(2)$ изучал еще Леонардо до Винчи и дал полный их перечень [32]. Это группы симметрии правильных n -угольников — циклическая группа C_n , порожденная вращением на угол $\frac{2\pi}{n}$ и состоящая из n поворотов

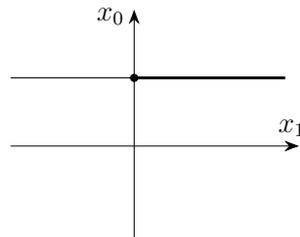
$$C_n = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & -\sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

и группа диэдра D_n , порожденная одним (для $n = 1$) или двумя отражениями $P(\phi, 1)$ и $P(\phi + \frac{\pi}{n}, 1)$ и состоящая из n поворотов на углы $\frac{2\pi k}{n}$ и n отражений

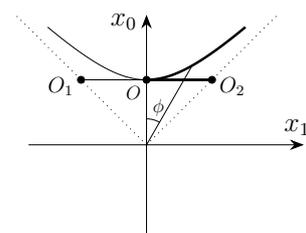
$$D_n = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & -\sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & \sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & -\cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, k = 0, \dots, n-1 \right\}. \quad (62)$$



3 а) Эллиптическая прямая



3 б) Евклидова прямая



3 с) Гиперболическая прямая

Рисунок 3. Орбиформы на одномерных геометриях Кэли-Клейна, получаемые факторизацией по подгруппе диэдра D_1 , связанной с отражением.
Figure 3. Orbifolds on one-dimensional Cayley-Klein geometries obtained by factorization by the dihedral subgroup D_1 , related to reflection.

Выбирая в качестве конечной подгруппы группы движений Кэли-Клейна подгруппу диэдра D_1 , порожденную отражением $P(\phi, j)$ относительно соответствующей точки прямой, получаем орбиформы $\mathbb{S}^1(j)/D_1$, выделенные на рис. 3 (выбрана точка $O(0,0)$, относительно которой производится отражение, т. е. $x \rightarrow -x$). На рис. 3 также отмечены сингулярные точки (неподвижные точки при таком отождествлении). У орбиформы на эллиптической прямой две сингулярные точки, которые делят ее на два равных отрезка длиной $\frac{1}{2}\pi R$, поэтому он компактный в метриче-

Дискретные подгруппы группы движений гиперболической прямой включают в себя подгруппу диэдра D_1 , порождаемую одним отражением

$$D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{ch } \phi & -\text{sh } \phi \\ \text{sh } \phi & -\text{ch } \phi \end{pmatrix} \right\}, \quad (63)$$

дискретную подгруппу Лоренца, порождаемую конкретным бустом (псевдовращением) на угол ϕ , изоморфную группе трансляций (60) или группе целых чисел по сложению $(\mathbb{Z}, +)$ и состоящую из бесконечного числа матриц вида

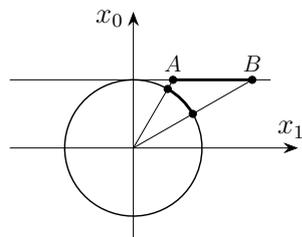
$$L(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} \text{ch } n\phi & \text{sh } n\phi \\ \text{sh } n\phi & \text{ch } n\phi \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (64)$$

Также имеется подгруппа, порожденная двумя отражениями, например, $P(\psi, i), P(\psi + \phi, i)$

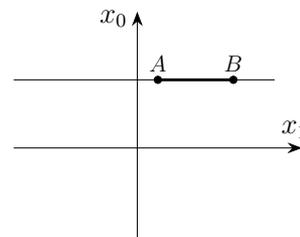
$$D_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \text{ch } n\phi & \text{sh } n\phi \\ \text{sh } n\phi & \text{ch } n\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{ch } n\phi & \text{sh } n\phi \\ -\text{sh } n\phi & -\text{ch } n\phi \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (65)$$

и изоморфная бесконечной группе диэдра D_∞ .

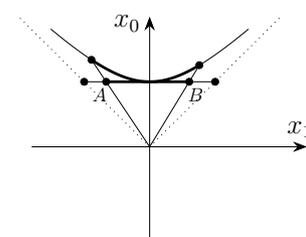
ском смысле. Этот орбиформ играет важную роль в теориях суперструн, пятимерных калибровочных теориях Янга-Миллса, моделях Рэндалл-Сундрума и т. д. У орбиформов на евклидовой и гиперболической прямой — одна сингулярная точка. Орбиформ на евклидовой прямой представляет собой полубесконечный интервал $[0, \infty)$, а орбиформ на гиперболической прямой представляет собой отрезок OO_2 , компактный в топологическом смысле и не компактный в метрическом, так как расстояние от любой точки этого орбиформы до абсолюта O_2 равно бесконечности.



4а) Эллиптическая прямая



4б) Евклидова прямая



4с) Гиперболическая прямая

Рисунок 4. Орбиформы на одномерных геометриях Кэли-Клейна, получаемые факторизацией по соответствующей дискретной подгруппе диэдра и имеющие вид отрезка AB .
Figure 4. Orbifolds on one-dimensional Cayley-Klein geometries obtained by factorization by the corresponding discrete dihedral subgroup and having the form of a segment AB .

Можно выбрать в качестве дискретной подгруппы, подгруппу, порожденную двумя отражениями $P(\phi_1, j)$ и $P(\phi_2, j)$. Соответствующие орбиолды в виде отрезков $[AB]$ представлены на рис. 4 и имеют две особые точки, соответствующие точкам, относительно которых производятся отражения и которые остаются неподвижными.

Орбиолдами $\mathbb{R}^1/T(a)$ на евклидовой прямой, \mathbb{S}^1/C_n на окружности (эллиптической прямой) и $\mathbb{H}^1/L(\phi)$, на гиперболической прямой являются окружности — компактные многообразия без особенностей, так как дискретные подгруппы трансляций $T(a)$, вращений C_n и псевдовращений $L(\phi)$ на \mathbb{R}^1 , \mathbb{S}^1 и \mathbb{H}^1 действуют свободно и не имеют неподвижных точек. Таким образом, орбиолды в одномерных геометриях Кэли-Клейна имеют вид либо отрез-

ков с двумя сингулярными точками, либо окружностей, либо полубесконечной прямой с одной особой точкой.

3. Классическая механика свободной частицы на орбиолдах одномерных геометрий Кэли-Клейна

Пространства постоянной кривизны используются в различных областях современной физики. Мы рассмотрим движение свободной частицы в конфигурационном пространстве, являющимся орбиолдом в соответствующем пространстве Кэли-Клейна и которое имеет вид отрезка $[AB]$ (рис. 4) и построим орбиолды соответствующих фазовых пространств.

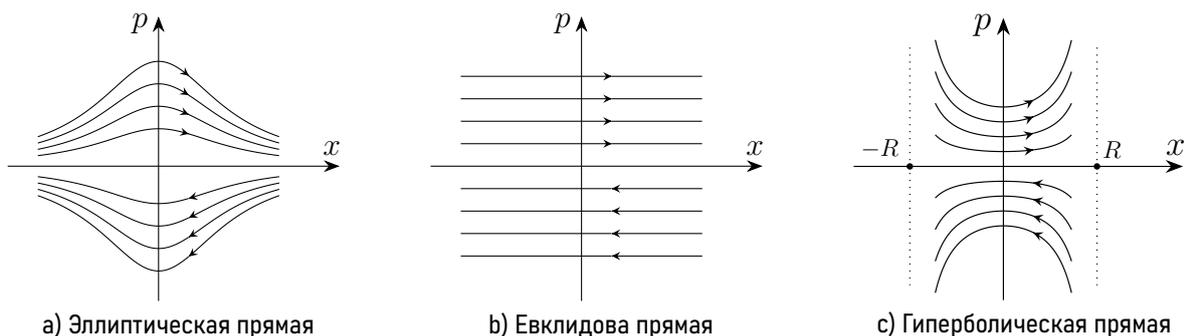


Рисунок 5. Траектории свободной частицы $p^2 = 2mEg$ в фазовых пространствах трех одномерных геометрий Кэли-Клейна.
Figure 5. Trajectories of a free particle $p^2 = 2mEg$ in phase spaces of three one-dimensional Cayley-Klein geometries.

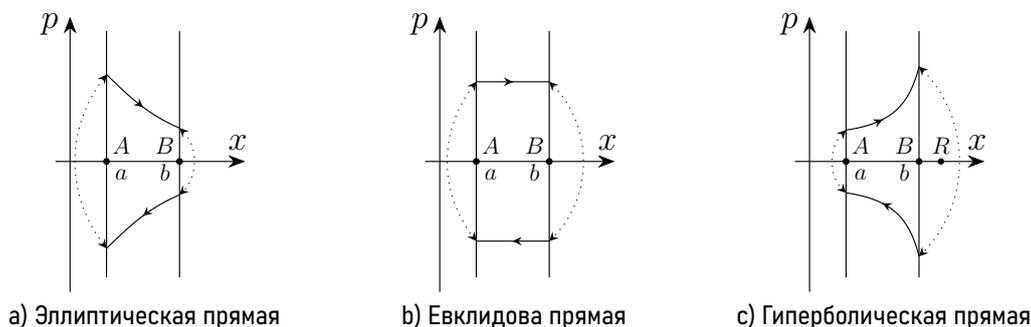


Рисунок 6. Траектории в фазовых пространствах на орбиолдах рис. 4. Пунктирными линиями со стрелками соединены склеиваемые точки.
Figure 6. Trajectories in phase spaces on orbifolds in Fig. 4. The dotted lines with arrows connect the glued points.

Лагранжиан и гамильтониан свободной частицы на всей прямой в трех геометриях можно описать единым образом

$$L = \frac{1}{2}mg\dot{x}^2, \quad H = g^{-1}\frac{p^2}{2m}, \quad p = mg\dot{x}, \quad (66)$$

где метрика g для трех геометрий равна

$$g = \left(1 + j^2 \frac{x^2}{R^2}\right)^{-2}.$$

Траектории на фазовых плоскостях, соответствующие постоянной энергии E и имеющие вид $p^2 = 2mEg$ представлены на рис. 5.

Рассмотрим теперь движение в конфигурационном пространстве, которое имеет вид отрезка $[AB]$ и являет-

ся орбиолдом, представленным на рис. 4. Фазовое пространство на первый взгляд имеет вид бесконечной полосы, ограниченной двумя прямыми $x = a$ и $x = b$. Примеры траекторий на этой полосе для всех трех геометрий указаны на рис. 6. В точке (b, p) в результате отражения от точки B импульс меняется на противоположный и траектория в фазовом пространстве меняется скачком на $(b, -p)$. Однако из физических соображений никаких скачков в фазовом пространстве в данной системе быть не может [5, 6]. Нужно отождествить (склеить) точки (b, p) и $(b, -p)$. Это означает, что состояния (b, p) и $(b, -p)$ физически эквивалентны. Также нужно отождествить (склеить) точки (a, p) и $(a, -p)$. В результате получаем орбиолд, имеющий две особые точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$, окрестности которых имеют вид конуса.

4. Квантовая механика в пространстве-времени с дополнительным измерением

Площадь под траекториями в фазовом пространстве равна действию S . В классической механике величина этой площади может быть любой. В квантовой механике траектории в фазовом пространстве, представленные на рис. 6, образуют дискретное множество (квантованы) [33]. Разность площадей равна кванту действия \hbar .

Согласно постулату Бора, классическое действие за период равно целому числу квантов [33]

$$\oint p dx = nh, \quad n = 1, 2, \dots \quad (67)$$

Здесь p и x — это канонически сопряженные импульс и координата. Интеграл (67) равен площади фазового пространства (p, x) , ограниченного траекторией движения за период (рис. 6). Траектории на рис. 6 имеют вид $p^2 = 2mEg$. Подставляя выражение для импульса в формулу (67), получаем, что площадь фазового пространства, задаваемая этой траекторией, и энергия квантованы

$$\oint p dx = 2\sqrt{2mE_n} \int_a^b \sqrt{g} dx = 2\pi n\hbar, \quad (68)$$

$$E_n = \frac{2\pi^2 \hbar^2 n^2}{ml^2},$$

$$l = 2 \int_a^b \sqrt{g} dx = \frac{2R}{j} \left(\arctg \frac{jx}{R} \right) \Big|_a^b. \quad (69)$$

Здесь l — удвоенная длина отрезка $[a, b]$, которая в каждой из трех геометрий считается с учетом метрики g . В классическом случае на величину интеграла (67) не накладывается никаких ограничений и площадь фазового пространства, момент импульса и энергия могут быть любыми. Задача на орбиформах рис. 4 похожа на обычную задачу квантовой механики на отрезках с двумя бесконечными стенками на концах, где для каждой из трех геометрий учитывается своя метрика.

В работе [34] были исследованы квантовомеханические задачи о гармоническом осцилляторе и кулоновской частице на одномерных геометриях Кэли-Клейна. Уравнение Шредингера в этих примерах имеет стандартный вид

$$\hat{H}\psi = E\psi. \quad (70)$$

Для осциллятора на эллиптической прямой гамильтониан \hat{H} с учетом метрики g равен

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Энергия осциллятора квантуется

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2 R^4}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (71)$$

Гамильтониан для одномерного кулоновского потенциала на эллиптической прямой

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{d}{dx} - \frac{q^2}{|x|}. \quad (72)$$

Уровни энергии

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2} - \frac{mq^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (73)$$

При малых значениях R спектр энергий осциллятора и одномерного атома водорода совпадает со спектром свободной частицы на окружности

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2} = \frac{2\pi^2 \hbar^2 n^2}{ml^2}, \quad l = 2\pi R \quad (74)$$

и уходит в область высоких энергий. Таким образом, квантование свободной частицы в случае малых размеров характерных траекторий вполне может служить для оценки спектра энергий.

Рассмотрим уравнение Шредингера для свободной частицы на орбиформах в виде отрезков рис. 4. Гамильтониан для трех геометрий, используя параметр j , можно записать как

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(1 + j^2 \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{d}{dx} \left(1 + j^2 \frac{x^2}{R^2} \right) \frac{d}{dx}. \quad (75)$$

Для евклидовой прямой ($j = i, R \rightarrow \infty$) он имеет очень простой вид и общее решение ищем в виде

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (76)$$

Волновая функция $\psi(x)$ при отражениях относительно точек $x_A = a$ и $x_B = b$ может приобретать дополнительную фазу. Поэтому она должна удовлетворять следующим условиям

$$\psi(x) = e^{i\alpha} \psi(2a - x), \quad \psi(x) = e^{i\beta} \psi(2b - x). \quad (77)$$

Чтобы выполнялось (77), фазы α, β и волновое число k должны быть следующими

$$\alpha = \pi n_1, \quad \beta = \pi n_2, \quad k_n = \frac{\pi n}{b - a}, \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}. \quad (78)$$

Тогда волновая функция может быть представлена в виде суперпозиции двух базисных решений

$$\psi_{1,n} = \sin \frac{\pi n(x - a)}{b - a}, \quad \psi_{2,n} = \cos \frac{\pi n(x - a)}{b - a}, \quad (79)$$

а энергия квантуется так же, как и при использовании постулата Бора (68) или (74), где удвоенная длина орбиформа $l = 2(b - a)$. Для эллиптической и гиперболической прямых, переходя от координаты x к угловой ϕ ,

$$x = \frac{R}{j} \operatorname{tg} j\phi,$$

можно все свести к предыдущим вычислениям и получить такое же выражение для уровней энергии (68),(74), где удвоенная длина l будет вычисляться с учетом метрики на этих прямых, как в (69).

Если мы рассмотрим частицу в некотором пятимерном пространстве-времени, где (3+1) обычные измерения с координатами (x_0, x_1, x_2, x_3) , а дополнительное измерение

с координатой x_3 компактифицированно или на окружность или на орбифолд с длиной l (за период) в одной из трех геометрий Кэли-Клейна. Если при этом потенциал зависит только от первых трех координат $U(x_1, x_2, x_3)$, то спектр такой системы будет иметь вид

$$E_{N,n} = E_N + \frac{2\pi^2 \hbar^2 n^2}{ml^2}, \quad N, n = 0, 1, \dots \quad (80)$$

Уровни энергии E_N совпадают с уровнями энергии в потенциале $U(x_1, x_2, x_3)$ и определяются набором квантовых чисел N . При низких энергиях наличие дополнительного измерения не обнаруживается. И только при высоких энергиях $E \sim \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ml^2}$ появляются дополнительные уровни, указывающие на наличие дополнительного измерения [1].

Таким образом, планковские кванты энергии могут служить индикатором наличия дополнительного пятого измерения, поскольку связаны с движением частиц по замкнутым траекториям этого измерения.

5. Модели на двумерных орбифолдах

Приведем пример естественного возникновения орбифолда как фазового пространства в $SO(2)$ калибровочной теории в пространстве-времени $(0+1)$ [5, 6]. Рассмотрим простейший пример абелевой калибровочной теории — скалярную электродинамику в пространстве-времени $(0+1)$ [5, 6]. Лагранжиан, инвариантный относительно глобальной $SO(2)$ симметрии во внутреннем пространстве полей (ϕ_1, ϕ_2) , имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_2^2 - V(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (81)$$

Если заменить обозначения ϕ_i на x_i видно, что лагранжиан (81) описывает нерелятивистскую частицу единичной массы в двумерном пространстве (x_1, x_2)

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{x}_2^2 - V(x_1^2 + x_2^2). \quad (82)$$

Удобно ввести комплексную переменную

$$z = x_1 + ix_2 = re^{i\varphi},$$

с которой лагранжиан (82) примет вид

$$L = \frac{1}{2} |\dot{z}|^2 - V(|z|^2) = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 - V(r^2). \quad (83)$$

Если мы перейдем во вращающуюся систему отсчета (x'_1, x'_2) , $z' = e^{i\alpha(t)} z$,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) & \sin \alpha(t) \\ -\sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (84)$$

то скорость и ускорение будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{z}' &= (\dot{z} + i\dot{\alpha}z) e^{i\alpha(t)}, \\ \ddot{z}' &= (\ddot{z} - \dot{\alpha}^2 z + i(\ddot{\alpha}z + 2\dot{\alpha}\dot{z})) e^{i\alpha(t)}, \end{aligned} \quad (85)$$

а лагранжиан в декартовых переменных

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 - \dot{\alpha}x_2)^2 + \frac{1}{2} (\dot{x}_2 + \dot{\alpha}x_1)^2 - V(x_1^2 + x_2^2).$$

В комплексной записи

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{d}{dt} + i\dot{\alpha} \right) z \right|^2 - V(|z|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 - V(r^2). \end{aligned} \quad (86)$$

Вращения порождают дополнительные силы инерции — центробежную силу, переносное вращательное ускорение и силу Кориолиса [35].

Мы хотим ввести в лагранжиан (82),(83) компенсирующее (калибровочное) поле A (нулевую компоненту вектор-потенциала A_μ в абелевой скалярной электродинамике) так, чтобы компенсировать возникающие при переходе во вращающуюся систему координат силы инерции

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 + Ax_2)^2 + \frac{1}{2} (\dot{x}_2 - Ax_1)^2 - V(r^2), \quad (87)$$

или в комплексной записи

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{d}{dt} - iA \right) z \right|^2 - V(|z|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 (\dot{\varphi} - A)^2 - V(r^2). \end{aligned} \quad (88)$$

Лагранжиан (87), (88) инвариантен при переходе во вращательную систему координат. Калибровочные преобразования при этом имеют вид

$$z' = ze^{i\alpha(t)}, \quad A' = A + \dot{\alpha}(t). \quad (89)$$

Поле A в этом случае имеет размерность угловой скорости и порождает те же поля инерции. Действительно, уравнения Эйлера-Лагранжа для поля A лагранжиана (87) имеют вид

$$A = \frac{\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (90)$$

Мы можем связать с калибровочными полями A замкнутые 1-формы в качестве связностей

$$A_1 = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad A_2 = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (91)$$

$$iA_1 + A_2 = \frac{dz}{z}.$$

Первая 1-форма A_1 соответствует полю, компенсирующему силу, связанную с вращательным ускорением. Вторая A_2 соответствует полю, которое компенсирует центробежную силу.

Гамильтониан этой модели равен

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + A(p_2 x_1 - p_1 x_2) + V(x_1^2 + x_2^2), \quad (92)$$

где обобщенные импульсы

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_1 + Ax_2, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \dot{x}_2 - Ax_1, \quad (93)$$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} = 0.$$

Имеются две связи первого рода

$$\pi = 0, \quad p_2 x_1 - p_1 x_2 = 0. \quad (94)$$

Из трех степеней свободы A, x_1, x_2 лишь одна физическая. В силу калибровочной инвариантности точки окружности $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ физически неразличимы. Из уравнения связи (94) следует, что $p_i = \lambda x_i$. Можно положить $x_2 = p_2 = 0$ и считать, что в фазовом пространстве (x_1, p_1) действует калибровочная группа $\mathbb{Z}_2: (x_1, p_1) \rightarrow (-x_1, -p_1)$, при этом точки (x_1, p_1) и $(-x_1, -p_1)$ физически неразличимы. Физическое фазовое пространство при этом есть конус (орбиформ $\mathbb{R}^2(x_1, p_1)/\mathbb{Z}_2$) [5, 6]. Группа \mathbb{Z}_2 является конечной подгруппой калибровочной группы $SO(2)$.

6. Заключение

Орбиформы на одномерных геометриях Кэли-Клейна имеют вид отрезков, окружностей и полупрямых с соответствующей метрикой. Одномерные орбиформы S^1/\mathbb{Z}_2 в виде отрезка с двумя неподвижными точками находят широкое применение в теоретической физике в моделях Калуцы-Клейна, Рэндалла-Сундрума, теориях суперструн и других. В работе [36] разбирался пример, связанный с решением Шварцшильда, имеющий вид двух листов, соединенных мостом. Частица представлялась как мост, соединяющий эти листы. Мост можно представить себе и как орбиформ.

Орбиформы в виде отрезка на эллиптической и евклидовой прямых эквивалентны и обладают евклидовой метрикой. Интересна возможность применения орбиформа на гиперболической прямой с метрикой геометрии Лобачевского. Мы привели простейшие примеры из классической и квантовой механики на таких орбиформах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Цвибах, Б. Начальный курс теории струн / Б. Цвибах. – М.: Едиториал УРСС, 2011. – 784 с.
2. Беккер, К. Теория струн и М-теория. Современное введение / К. Беккер, М. Беккер, Дж. Шварц. – М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, R&C dynamics, 2015. – 624 с.
3. Adem, A. Orbifolds and Stringy Topology / A. Adem, J. Leida, Y. Ruan // Cambridge Tracts in Mathematics. 2007. – Vol. 171. – 164 p.
4. Emmrich, C. Orbifolds as configuration spaces of systems with gauge symmetries / C. Emmrich, H. Römer // Commun. Math. Phys. – 1990. – Vol. 129. – P. 69–94.
5. Прохоров, Л. В. Фазовое пространство механических систем с калибровочной группой / Л. В. Прохоров, С. В. Шабанов // УФН. – 1991. – Т. 161, № 2. – С. 13–75.
6. Прохоров, Л. В. Гамильтонова механика калибровочных систем / Л. В. Прохоров, С. В. Шабанов. – М.: URSS, КомКнига, 2006. – 292 с.
7. Калуца, Т. К проблеме единства физики / Т. Калуца // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979. – С. 529–534. arXiv:1803.08616 [physics.hist-ph]
8. Klein, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie / O. Klein // Zeitschrift für Physik A. – 1926. – Vol. 37, № 12. – P. 895–906.
9. Боос, Э. Э. Физика и феноменология больших дополнительных измерений / Э. Э. Боос, В. Е. Буничев, И. П. Волобуев [и др.] // УФН. – 2025. – Т. 195, № 2. – С. 116–153.
10. Арефьева, И. Я. Суперсимметрия: теория Калуцы-Клейна, аномалии, суперструны / И. Я. Арефьева, И. В. Волович // УФН. – 1985. – Т. 146, № 4. – С. 655–681.
11. Ходос, А. Теории Калуцы-Клейна: общий обзор / А. Ходос // УФН. – 1985. – Т. 146, № 4. – С. 647–654.
12. Рубаков, В. А. Большие и бесконечные дополнительные измерения / В. А. Рубаков // УФН. – 2001. – Т. 171, № 9. – С. 913–938.
13. Пименов, Р. И. Применение полуримановой геометрии к единой теории поля / Р. И. Пименов // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 157, № 4. – С. 795–797.
14. Пименов, Р. И. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени) / Р. И. Пименов. – Л.: Наука, 1968. – 496 с.
15. Громов, Н. А. Контракции классических и квантовых групп / Н. А. Громов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 318 с.
16. Randall, L. An Alternative to compactification / L. Randall, R. Sundrum // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83, iss. 23. – P. 4690–4693, arXiv:hep-th/9906064.
17. Белавин, А. А. Явная конструкция $N = 2$ суперконформных орбиформов / А. А. Белавин, С. Е. Пархоменко // ТМФ. – 2021. – Т. 209, № 1. – С. 59–81.
18. Belavin, A. A. Explicit construction of $N = 2$ SCFT orbifold models. Spectral flow and mutual locality / A. A. Belavin, V. A. Belavin, S. E. Parkhomenko // Nuclear Physics B. – 2022. – Vol. 982. – 115891.
19. Belavin, A. A. Mirror symmetry and new approach to constructing orbifolds of Gepner models / A. A. Belavin, S. E. Parkhomenko // Nuclear Physics B. – 2024. – Vol. 998. – 116431.
20. Пименов, Р. И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений / Р. И. Пименов // Литовский мат. сб. – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 457–486.
21. Яглом, И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия / И. М. Яглом. – М., 1969. – 304 с.
22. Александров, П. С. Энциклопедия элементарной математики. Книга пятая. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. – М.: Наука, 1966. – 624 с.
23. Розенфельд, Б. А. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства / Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. – М.: МЦНМО, 2003. – 560 с.
24. Розенфельд, Б. А. Неевклидовы геометрии / Б. А. Розенфельд. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 777 с.
25. Сосинский, А. Б. Геометрии / А. Б. Сосинский. – М.: МЦНМО, 2017. – 263 с.
26. Исаев, А. П. Теория групп и симметрий. Кн. 2: Представления групп и алгебр Ли. Приложения. / А. П. Исаев, В. А. Рубаков. – М.: КРАСАНД, 2020. – 704 с.
27. Картан, Э. Теория спиноров / Э. Картан. – М.: ИЛ, 1947. – 223 с.
28. Котельников, А. П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского / А. П. Котельников. – Казань, In mem. Lobatshevskii, 2, ГЛАВНАУКА, 1927. – С. 3–66.

29. Новиков, С. П. Современные геометрические структуры и поля / С. П. Новиков, И. А. Тайманов. – М.: МЦНМО, 2014. – 581 с.
30. Ошемков, А. А. Курс наглядной геометрии и топологии / А. А. Ошемков, Ф. Ю. Попеленский, А. А. Тужилин [и др.]. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 352 с.
31. Винберг, Э. Б. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны / Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман. – Геометрия–2. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. – М.: ВИНТИ, 1988. – Т. 29. – С. 147–259.
32. Вейль, Г. Симметрия / Г. Вейль. – М.: Наука, 1968. – 192 с.
33. Зелевинский, В. Г. Квантовая физика / В. Г. Зелевинский. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. – Т. 1. – 502 с.
34. Громов, Н. А. Квантовая механика на одномерных геометриях Кэли–Клейна / Н. А. Громов, В. В. Куратов // Известия Коми НЦ УрО РАН. – 2017. – № 2 (30). – С. 5–11.
35. Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М.: МГУ, 1978. – 576 с.
36. Эйнштейн А. Проблема частиц в общей теории относительности / А. Эйнштейн, Н. Розен // Собрание научных трудов. Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 880 с.

References

1. Zwiebach, B. A first course in string theory / B. Zwiebach. – Cambridge: Cambridge University Press, 2021. – 864 p.
2. Becker, K. String theory and M-theory. A modern introduction / K. Becker, M. Becker and J. N. Schwarz. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 757 p.
3. Adem, A. Orbifolds and stringy Topology / A. Adem, J. Leida, Y. Ruan // Cambridge Tracts in Mathematics. – 2007. – Vol. 171. – 164 p.
4. Emmrich, C. Orbifolds as configuration spaces of systems with gauge symmetries / C. Emmrich, H. Römer // Commun. Math. Phys. – 1990. – Vol. 129. – P. 69–94.
5. Prokhorov, L. V. Phase space of mechanical systems with a gauge group / L. V. Prokhorov, S. V. Shabanov // Sov. Phys. Usp. – 1991. – Vol. 34, №2. – P. 108–140.
6. Prokhorov, L. V. Gamil'tonova mekhanika kalibrovchny'kh sistem [Hamiltonian mechanics of gauge systems] / L. V. Prokhorov, S. V. Shabanov. – Moscow: URSS, KomKniga, 2006. – 292 p.
7. Kaluza, T. On the unification problem in physics / T. Kaluza // Int. J. Mod. Phys. D. – 2018. – Vol. 27, № 14. – 1870001, arXiv:1803.08616 [physics.hist-ph].
8. Klein, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie / O. Klein // Zeitschrift für Physik A. – 1926. – Vol. 37, № 12. – P. 895–906.
9. Boos, E. E. Physics and phenomenology of large extra dimensions / E. E. Boos, V. E. Bunichev, I. P. Volobuev [et al.] // Sov. Phys. Usp. – 2025. – Vol. 68, iss. 2. – P. 111–145.
10. Arefeva, I. Ya. Supersymmetry: Kaluza-Klein theory, anomalies, and superstrings / I. Ya. Arefeva, I. V. Volovich. // Sov. Phys. Usp. – 1985. – Vol. 28, iss. 8. – P. 694–708.
11. Chodos, A. Kaluza-Klein theories: Overview / A. Chodos // Comm. Nucl. and Part. Phys. – 1984. – Vol. 13. – P. 171–181.
12. Rubakov, V. A. Large and infinite extra dimensions / V. A. Rubakov // Sov. Phys. Usp. – 2001. – Vol. 44, iss. 9. – P. 871–893.
13. Pimenov, R. I. An application of semi-Riemannian geometry to unified field theory // R. I. Pimenov. // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1964. – Vol. 157, № 4. – P. 795–797.
14. Pimenov, R. I. Kinematic spaces: mathematical theory of space-time / R. I. Pimenov. – New York: Consultants Bureau, 1970. – 185 p.
15. Gromov, N. A. Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups] / N. A. Gromov. – Moscow: FIZMATLIT, 2012. – 318 p.
16. Randall, L. An alternative to compactification / L. Randall, R. Sundrum // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83, iss. 23. – P. 4690–4693, arXiv:hep-th/9906064.
17. Belavin, A. A. Explicit construction of $N = 2$ superconformal orbifolds / A. A. Belavin, S. E. Parkhomenko // Theoretical and Mathematical Physics. – 2021. – Vol. 209, iss. 1. – P. 1367–1386.
18. Belavin, A. A. Explicit construction of $N = 2$ SCFT orbifold models. Spectral flow and mutual locality / A. A. Belavin, V. A. Belavin, S. E. Parkhomenko // Nuclear Physics B. – 2022. – Vol. 982. – 115891.
19. Belavin, A. A. Mirror symmetry and new approach to constructing orbifolds of Gepner models / A. A. Belavin, S. E. Parkhomenko // Nuclear Physics B. – 2024. – Vol. 998. – 116431.
20. Pimenov, R. I. Edinaya aksiomatika prostranstv s maksimal'noj gruppoj dvizhenij [Unified axiomatics of spaces with maximal movement group] / R. I. Pimenov // Lithuanian Math. J. – 1965. – Vol. 5, № 3. – P. 457–486.
21. Yaglom, I. M. A simple non-Euclidean geometry and its physical basis: an elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity / I. M. Yaglom. – New York: Springer, 1979. – 307 p.
22. Aleksandrov, P. S. Enciklopediya elementarnoj matematiki. Kniga pyataya. Geometriya [Encyclopedia of elementary mathematics. Book five. Geometry] / P. S. Aleksandrov, A. I. Markushevich, A. Ya. Hinchin. – Moscow: Nauka, 1966. – 624 p.
23. Rozenfel'd, B. A. Geometriya grupp Li. Simmetricheskie, parabolicheskie i periodicheskie prostranstva [Geometry of Lie groups. Symmetric, parabolic and periodic spaces] / B. A. Rozenfel'd, M. P. Zamahovskij. – Moscow: MCNMO, 2003. – 560 p.
24. Rozenfel'd, B. A. Neevklidovy geometrii. [Non-Euclidean Geometries] / B. A. Rozenfel'd. – Moscow: GITTL, 1955. – 777 p.
25. Sosinskij, A. B. Geometrii [Geometries] / A. B. Sosinskij. – Moscow: MCNMO, 2017. – 263 p.
26. Isaev, A. P. Teoriya grupp i simmetrij. Kn. 2: Predstavleniya grupp i algebr Li. Prilozheniya [Theory of groups and symmetries. Book 2: Representations of Lie groups and algebras. Appendices] / A. P. Isaev, V. A. Rubakov. – Moscow: KRASAND, 2020. – 704 p.
27. Cartan, E. The theory of spinors / E. Cartan. – Cambridge: Mass., M.I.T. Press, 1967. – 157 p.

28. Kotel'nikov, A. P. Princip otноситel'nosti i geometriya Lobachevskogo [The principle of relativity and Lobachevsky geometry] / A. P. Kotel'nikov // Kazan': In mem. Lobatshevskii, 2, GLAVNAUKA, 1927. – P. 37–66.
29. Novikov, S. P. Modern geometric structures and fields / S. P. Novikov, I. A. Taimanov. – Amer. Math. Soc., 2006. – 659 p.
30. Oshemkov, A. A. Kurs naglyadnoj geometrii i topologii [Course of visual geometry and topology] / A. A. Oshemkov, F. Yu. Popelenskij, A. A. Tuzhilin [et al.]. – Moscow: LENAND, 2016. – 352 p.
31. Vinberg, E. B. Discrete groups of motions of spaces of constant curvature / E. B. Vinberg, O. V. Schwarzman. – Geometry-2. Itogi nauki i tekhniki. Ser. sovrem. probl. mat. Fund. napr. – Moscow: VINITI, 1988. – Vol. 29. – P. 147–259.
32. Weyl, H. Symmetry / H. Weyl. – Princeton Univ. Press, 1952. – 168 p.
33. Zelevinsky, V. G. Quantum physics / V. G. Zelevinsky. – Weinheim: Wiley-VCH, 2011. – Vol. 1. – 602 p.
34. Gromov, N. A. Kvantovaya mekhanika na odnomernyh geometriyah Keli-Klejna [Quantum mechanics on one-dimensional Cayley-Klein geometries] / N. A. Gromov, V. V. Kuratov // Izvestiya Komi NC UrO RAN. – 2017. – № 2 (30). – P. 5–11.
35. Ol'hovskij, I. I. Kurs teoreticheskoy mekhaniki dlya fizikov [Course of theoretical mechanics for physicists] / I. I. Ol'hovskij. – Moscow: MGU, 1978. – 576 p.
36. Einstein A. The particle problem in the general theory of relativity / A. Einstein and N. Rosen // Phys. Rev. – 1935. – Vol. 48, iss. 1. – P. 73–77.

Благодарность

Авторы благодарят П. А. Макарова за вопросы по квантовой механике и ссылки на статьи по единым теориям поля и орнаментам.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 125031203621-2.

Acknowledgements

The authors thank P. A. Makarov for questions on quantum mechanics and references to articles on unified field theories and ornaments.

Acknowledgements (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the topic № 125031203621-2.

Для цитирования:

Костяков, И. В. Орбифолды в одномерных пространствах Кэли-Клейна / И. В. Костяков, В. В. Куратов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 28–40. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-28-40

For citation:

Kostyakov, I. V. Orbifolds in one-dimensional Cayley-Klein spaces / I. V. Kostyakov, V. V. Kuratov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 28–40. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-28-40

Дата поступления рукописи: 1.07.2025

Received: 1.07.2025

Дираковская частица с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью

В. В. Кисель¹, А. В. Бурый², П. О. Саченок¹,
А. С. Мартыненко¹, Е. М. Овсиюк¹

¹ Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина,
г. Мозырь, Беларусь

² Институт физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

vasiliy.bspu@mail.ru
anton.buryy.97@mail.ru
polinasacenok@gmail.com
alishshaaaa.aaa@gmail.com
e.ovsiyuk@mail.ru

Аннотация

В рамках общего формализма Гельфанда–Яглома, исходя из расширенного набора представлений группы Лоренца, строится релятивистское уравнение для частицы со спином $1/2$ с двумя дополнительными характеристиками. В тензорной форме учтено наличие внешних электромагнитных полей. После исключения вспомогательных переменных полной волновой функции выведено обобщенное уравнение типа Дирака. Оно включает два дополнительных члена взаимодействия, которые интерпретируются как связанные с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью частицы.

Ключевые слова:

частица со спином $1/2$, внешнее электромагнитное поле, аномальный магнитный момент, поляризуемость

Введение

В рамках метода Гельфанда–Яглома [1–3] рассмотрено релятивистское обобщенное уравнение для частицы со спином $1/2$. Исходя из расширенного набора представлений группы Лоренца, строится уравнение для частицы со спином $1/2$ и двумя дополнительными характеристиками: аномальным магнитным моментом [4–7] и поляризуемостью. В работе [8] изучался тот же набор неприводимых представлений группы Лоренца, но авторы ограничились только теорией свободной частицы. В настоящей работе учтено наличие внешних электромагнитных полей. Это приводит к появлению дополнительных членов взаимодействия.

1. Формализм Гельфанда–Яглома

Будем строить P -инвариантное релятивистское уравнение первого порядка для частицы с массой M и спином $S = 1/2$

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + M) \Psi = 0 \quad (1)$$

Dirac particle with anomalous magnetic moment and polarizability

V. V. Kisel¹, A. V. Buryy², P. O. Sachenok¹,
A. S. Martynenko¹, E. M. Ovsiyuk¹

¹ Mozyr State Pedagogical University
named after I. P. Shamyakin,
Mozyr, Belarus

² B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

vasiliy.bspu@mail.ru
anton.buryy.97@mail.ru
polinasacenok@gmail.com
alishshaaaa.aaa@gmail.com
e.ovsiyuk@mail.ru

Abstract

In the frames of general formalism by Gel'fand–Yaglom, starting with an extended set of representations of the Lorentz group, we have constructed relativistic equation for a spin $1/2$ particle with two additional electromagnetic characteristics. We take into account the presence of external electromagnetic fields. After eliminating the supplementary variables of the complete wave function we have derived a generalized Dirac-like equation, which includes two additional interaction terms, they are related to anomalous magnetic moment and polarizability.

Keywords:

spin $1/2$ particle, external electromagnetic field, anomalous magnetic moment, polarizability

на основе использования набора представлений группы Лоренца со следующей схемой зацепления (тройки впереди означают кратность используемых представлений):

$$\begin{array}{ccc} 3(1/2, 0) & \longleftrightarrow & 3(0, 1/2) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (1, 1/2) & \longleftrightarrow & (1/2, 1). \end{array}$$

Соответствующая система спинорных уравнений имеет вид

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_1 \psi_b + \lambda_2 \varphi_b + \lambda_3 \Phi_b) + \lambda_4 \partial_{\dot{c}}^b f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M \psi^{\dot{a}} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_{a\dot{b}}(\lambda_1 \psi^{\dot{b}} + \lambda_2 \varphi^{\dot{b}} + \lambda_3 \Phi^{\dot{b}}) + \lambda_4 \partial_{\dot{c}}^c f_{(ac)}^{\dot{b}} + M \psi_a = 0, \quad (3)$$

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_5 \psi_b + \lambda_6 \varphi_b + \lambda_7 \Phi_b) + \lambda_8 \partial_{\dot{c}}^b f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M \varphi^{\dot{a}} = 0, \quad (4)$$

$$\partial_{a\dot{b}}(\lambda_5 \psi^{\dot{b}} + \lambda_6 \varphi^{\dot{b}} + \lambda_7 \Phi^{\dot{b}}) + \lambda_8 \partial_{\dot{c}}^c f_{(ac)}^{\dot{b}} + M \varphi_a = 0, \quad (5)$$

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_9 \psi_b + \lambda_{10} \varphi_b + \lambda_{11} \Phi_b) + \lambda_{12} \partial_{\dot{c}}^b f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M \Phi^{\dot{a}} = 0, \quad (6)$$

$$\partial_{ab}(\lambda_9\psi^{\dot{b}} + \lambda_{10}\varphi^{\dot{b}} + \lambda_{11}\Phi^{\dot{b}}) + \lambda_{12}\partial_b^c f_{(ac)}^{\dot{b}} + M\Phi_a = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left[\partial_c^{\dot{a}}(\lambda_{13}\psi^{\dot{b}} + \lambda_{14}\varphi^{\dot{b}} + \lambda_{15}\Phi^{\dot{b}}) + \partial_c^{\dot{b}}(\lambda_{13}\psi^{\dot{a}} + \lambda_{14}\varphi^{\dot{a}} + \lambda_{15}\Phi^{\dot{a}}) \right] + \frac{1}{2}\lambda_{16} \left[\partial_c^{\dot{a}} f_{(kc)}^{\dot{b}} + \partial_c^{\dot{b}} f_{(kc)}^{\dot{a}} \right] + Mf_c^{(\dot{a}\dot{b})} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \left[\partial_a^{\dot{c}}(\lambda_{13}\psi_b + \lambda_{14}\varphi_b + \lambda_{15}\Phi_b) + \partial_b^{\dot{c}}(\lambda_{13}\psi_a + \lambda_{14}\varphi_a + \lambda_{15}\Phi_a) \right] + \frac{1}{2}\lambda_{16} \left[\partial_{ka} f_b^{(\dot{c}\dot{k})} + \partial_{kb} f_a^{(\dot{c}\dot{k})} \right] + Mf_{(ab)}^{\dot{c}} = 0. \quad (9)$$

Здесь λ_i – коэффициенты, ограничения на которые будут накладываться в соответствии с наличием у частицы единственного массового параметра и единственного спина $S = 1/2$. Используем обозначения

$$\partial_{ab} = \frac{1}{i}\partial_\mu(\sigma^1)_{ab}, \quad (\sigma^1)_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\sigma^2)_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma^3)_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(\sigma^4)_{ab} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Операция P -отражения задается соотношениями

$$\psi^{\dot{a}} \leftrightarrow \psi_a, \quad \varphi^{\dot{a}} \leftrightarrow \varphi_a, \quad \Phi^{\dot{a}} \leftrightarrow \Phi_a, \quad f_c^{(\dot{a}\dot{b})} \leftrightarrow f_{ab}^{\dot{c}}.$$

Система уравнений (2)–(9) может быть представлена в форме (1). Перечислим компоненты полной волновой функции

$$\Psi^{spinor} =$$

$$= (\psi^{\dot{1}}, \psi^{\dot{2}}, \psi_1, \psi_2; \varphi^{\dot{1}}, \varphi^{\dot{2}}, \varphi_1, \varphi_2; \Phi^{\dot{1}}, \Phi^{\dot{2}}, \Phi_1, \Phi_2;$$

$$f_{(11)}^{\dot{1}}, f_{(12)}^{\dot{1}}, f_{(22)}^{\dot{1}}, f_{(11)}^{\dot{2}}, f_{(12)}^{\dot{2}}, f_{(22)}^{\dot{2}}, f_1^{(\dot{1}\dot{1})}, f_1^{(\dot{1}\dot{2})}, f_1^{(\dot{2}\dot{2})},$$

$$f_2^{(\dot{1}\dot{1})}, f_2^{(\dot{1}\dot{2})}, f_2^{(\dot{2}\dot{2})})^t,$$

где t – знак транспонирования.

После выполнения необходимых вычислений с переходом сначала к каноническому базису

$$\Psi^{canon} = \left(\psi_{(1/2,0)}^{(1/2,0)}, \psi_{(-1/2,0)}^{(1/2,0)}, \psi_{(0,1/2)}^{(0,1/2)}, \psi_{(0,-1/2)}^{(0,1/2)}; \right.$$

$$\varphi_{(1/2,0)}^{(1/2,0)}, \varphi_{(-1/2,0)}^{(1/2,0)}, \varphi_{(0,1/2)}^{(0,1/2)}, \varphi_{(0,-1/2)}^{(0,1/2)};$$

$$\Phi_{(1/2,0)}^{(1/2,0)}, \Phi_{(-1/2,0)}^{(1/2,0)}, \Phi_{(0,1/2)}^{(0,1/2)}, \Phi_{(0,-1/2)}^{(0,1/2)};$$

$$f_{(1/2,1)}^{(1/2,1)}, f_{(-1/2,1)}^{(1/2,1)}, f_{(1/2,0)}^{(1/2,1)}, f_{(-1/2,0)}^{(1/2,1)},$$

$$f_{(1/2,-1)}^{(1/2,1)}, f_{(-1/2,-1)}^{(1/2,1)}; f_{(1,1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(-1,1/2)}^{(1,1/2)},$$

$$\left. f_{(0,1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(1,-1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(0,-1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(-1,-1/2)}^{(1,1/2)} \right)^t,$$

а затем к модифицированному базису Гельфанда–Яглома

$$\Psi^{canon} = B\Psi^{spinor}.$$

Это преобразование задается общей формулой

$$\psi_{(l_3, l_{3'})}^{(l, l')} = \left[\frac{(2l)!}{(l+l_3)!(l-l_3)!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\frac{(2l')!}{(l'+l_3)!(l'-l_3)!} \right]^{1/2} \psi_{(1\dots 1 \dot{2} \dots \dot{2})}^{(i\dots i \dot{2} \dots \dot{2})}.$$

Здесь параметры $(l_3, l_{3'})$ определяют составляющие функции, преобразующейся по неприводимому представлению (l, l') собственной группы Лоренца. Число спинорных индексов $\dot{1}$ в правой части формулы равно $(l + l_3)$, число индексов типа $\dot{2}$ равно $(l - l_3)$, число индексов типа 1 равно $(l' + l_{3'})$, а типа 2 составляет $(l' - l_{3'})$.

В результате приходим к спинорной форме представления матрицы $\Gamma_4^{(G.-Y.)}$ (это выражение можно представить в компактном виде, что является преимуществом модифицированного базиса Гельфанда–Яглома):

$$\Gamma_4^{(G.-Y.)} = \begin{pmatrix} \beta^{(1/2)} \otimes \gamma_4 & 0 \\ 0 & \beta^{(3/2)} \otimes I_2 \otimes \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\beta^{(1/2)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_8 \\ \lambda_9 & \lambda_{10} & \lambda_{11} & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{12} \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{13} & \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{14} & \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{15} & \frac{1}{2}\lambda_{16} \end{pmatrix},$$

$$\beta^{(3/2)} = \lambda_{16}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Убеждаемся в выполнении условия P -инвариантности уравнения, поскольку

$$\Gamma_4^{(G.-Y.)} P = P \Gamma_4^{(G.-Y.)},$$

$$P = \begin{pmatrix} P^{(1/2)} \otimes \gamma_4 & 0 \\ 0 & P^{(3/2)} \otimes I_2 \otimes \gamma_4 \end{pmatrix},$$

$$P^{(1/2)} = I_4, \quad P^{(3/2)} = -1.$$

В модифицированном базисе Гельфанда–Яглома матрица билинейной формы задается в виде

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^{(1/2)} \otimes \gamma_4 & 0 \\ 0 & \eta^{(3/2)} \otimes I_2 \otimes \gamma_4 \end{pmatrix},$$

$$\eta^{(1/2)} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix},$$

$$\eta^{(3/2)} = -k_4, \quad k_i = \pm 1.$$

Из стандартного соотношения $(\eta\Gamma_4)^\dagger = \eta\Gamma_4$ получаем

$$\lambda_1^* = \lambda_1, \quad \lambda_6^* = \lambda_6, \quad \lambda_{11}^* = \lambda_{11}, \quad \lambda_{16}^* = \lambda_{16},$$

$$\lambda_5^* = k_1 k_2 \lambda_2, \quad \lambda_9^* = k_1 k_3 \lambda_3, \quad \lambda_{10}^* = k_2 k_3 \lambda_7,$$

$$\lambda_{13}^* = -k_1 k_4 \lambda_4, \lambda_{14}^* = -k_2 k_4 \lambda_8, \lambda_{15}^* = -k_3 k_4 \lambda_{12}.$$

Например, если $k_1 = +1, k_2 = k_3 = k_4 = -1$, то

$$\lambda_5^* = -\lambda_2, \lambda_9^* = -\lambda_3, \lambda_{10}^* = \lambda_7, \lambda_{13}^* = \lambda_4, \\ \lambda_{14}^* = -\lambda_8, \lambda_{15}^* = -\lambda_{12}.$$

Найдем ограничения на параметры λ_i , обусловленные требованием, чтобы частица имела единственное массовое состояние M и единственное значение спина $S = 1/2$ (последнее означает, что состояния со спином $S = 3/2$ отсутствуют). Таким образом, структура спиновых блоков имеет вид (11) при $\lambda_{16} = 0$. Кроме того, поскольку матрица $\beta^{(1/2)}$ должна иметь одно собственное значение, равное $(+1)$, а остальные — нулевые (они могут быть и кратными), то должны выполняться ограничения

$$\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_{11} = 1, \quad (12)$$

$$\lambda_2 \lambda_5 + \lambda_3 \lambda_9 + \lambda_7 \lambda_{10} - \lambda_1 \lambda_6 - \lambda_1 \lambda_{11} - \lambda_6 \lambda_{11} - \\ - \frac{3}{2} (\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}), \quad (13)$$

$$(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) - (\lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 + \\ + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_9 + \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 + \lambda_2 \lambda_7 \lambda_9 + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_{10} + \\ + \lambda_3 \lambda_9 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_7 \lambda_{10} + \lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{11}) + \\ + \frac{3}{2} (\lambda_1 \lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_2 \lambda_8 \lambda_{13} + \lambda_3 \lambda_{12} \lambda_{13} + \lambda_4 \lambda_5 \lambda_{14} + \\ + \lambda_6 \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_7 \lambda_{12} \lambda_{14} + \lambda_8 \lambda_{10} \lambda_{15} + \lambda_{11} \lambda_{12} \lambda_{15}) = 0, \quad (14)$$

$$\lambda_{13} (\lambda_2 \lambda_7 \lambda_{12} + \lambda_4 \lambda_6 \lambda_{11} + \lambda_3 \lambda_8 \lambda_{10} - \lambda_4 \lambda_7 \lambda_{10} - \\ - \lambda_3 \lambda_6 \lambda_{12} - \lambda_2 \lambda_8 \lambda_{11}) + \lambda_{14} (\lambda_4 \lambda_7 \lambda_9 + \lambda_3 \lambda_5 \lambda_{12} + \\ + \lambda_1 \lambda_8 \lambda_{11} - \lambda_1 \lambda_7 \lambda_{12} - \lambda_4 \lambda_5 \lambda_{11} - \lambda_3 \lambda_8 \lambda_9) + \\ + \lambda_{15} (\lambda_1 \lambda_6 \lambda_{12} + \lambda_4 \lambda_5 \lambda_{10} + \lambda_2 \lambda_8 \lambda_9 - \lambda_4 \lambda_6 \lambda_9 - \\ - \lambda_2 \lambda_5 \lambda_{12} - \lambda_1 \lambda_8 \lambda_{10}) = 0. \quad (15)$$

В приведенных соотношениях отражается тот факт, что след матрицы $(\beta^{(1/2)})^n$ равен 1, а определитель $\beta^{(1/2)}$ равен 0.

Соотношения (12)–(15) выглядят громоздко. Их можно упростить, если учесть, что зацепления между используемыми кратными представлениями группы Лоренца можно разорвать [1]. При этом физическое содержание результатов не меняется. Разрыв указанных зацеплений фактически означает зануление соответствующих постоянных λ_i . В рассматриваемом случае имеем $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_7 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 0$. Соответственно, получаем

$$\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_{11} = 1, \quad (16)$$

$$\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11} + \\ + \frac{3}{2} (\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) = 0, \quad (17)$$

$$(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) - \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} + \\ + \frac{3}{2} (\lambda_1 \lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_6 \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{11} \lambda_{12} \lambda_{15}) = 0, \quad (18)$$

$$\lambda_4 \lambda_6 \lambda_{11} \lambda_{13} + \lambda_1 \lambda_8 \lambda_{11} \lambda_{14} + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{12} \lambda_{15} = 0. \quad (19)$$

С учетом ограничений на параметры λ_i минимальный полином для матрицы $\beta^{(1/2)}$ (11) при $\lambda_{16} = 0$ принимает вид

$$(\beta^{(1/2)})^3 [\beta^{(1/2)} - 1] = 0,$$

а минимальный полином для матрицы Γ_4 следующий:

$$\Gamma_4^3 (\Gamma_4^2 - 1) = 0.$$

2. Спин-тензорная форма уравнений

Для дальнейшего анализа перейдем к спин-тензорной форме записи системы уравнений (2)–(9) (при этом используем условия (16)–(19)). Будем учитывать соотношения

$$f_m^{(k\dot{n})} = \delta_{(\dot{r}\dot{s})}^{(k\dot{n})} (\sigma^\mu)^{\dot{r}} f_{\mu}^{\dot{s}}, \quad f_{(kn)}^{\dot{m}} = \delta_{(kn)}^{(rs)} (\sigma^\mu)^{\dot{m}} f_{s\mu}, \quad (20)$$

где $\delta_{(\dot{r}\dot{s})}^{(k\dot{n})}$, $\delta_{(kn)}^{(rs)}$ — обобщенные спинорные символы Кронекера

$$\delta_{(\dot{r}\dot{s})}^{(k\dot{n})} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\dot{r}}^{\dot{k}} \delta_{\dot{s}}^{\dot{n}} + \delta_{\dot{s}}^{\dot{k}} \delta_{\dot{r}}^{\dot{n}} \right),$$

$$\delta_{(kn)}^{(rs)} = \frac{1}{2} \left(\delta_k^r \delta_n^s + \delta_n^r \delta_k^s \right).$$

Два первых спинорных уравнения представимы в форме

$$\lambda_1 \partial^{ab} \psi_b + \frac{\lambda_4}{2} \left[\partial_b^c (\sigma^\mu)_c^{\dot{a}} f_{\mu}^{\dot{b}} + \partial_b^c (\sigma^\mu)_c^{\dot{b}} f_{\mu}^{\dot{a}} \right] + M \psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\lambda_1 \partial_{ab} \psi^{\dot{b}} + \frac{\lambda_4}{2} \left[\partial_c^{\dot{b}} (\sigma^\mu)_a^{\dot{c}} f_{b\mu} + \partial_c^{\dot{b}} (\sigma^\mu)_b^{\dot{c}} f_{a\mu} \right] + M \psi_a = 0$$

или

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} \psi_b - \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu \left[(\sigma^\mu)^{\dot{a}\dot{c}} (\sigma^\nu)_{\dot{c}\dot{b}} f_{\mu}^{\dot{b}} + \right. \\ \left. + (\sigma^\nu)^{\dot{b}\dot{c}} (\sigma^\mu)_{\dot{c}\dot{b}} f_{\mu}^{\dot{a}} \right] + M \psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} \psi^{\dot{b}} - \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu \left[(\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{c}} (\sigma^\nu)^{\dot{c}\dot{b}} f_{b\mu} + \right. \\ \left. + (\sigma^\nu)_{\dot{b}\dot{c}} (\sigma^\mu)^{\dot{c}\dot{b}} f_{a\mu} \right] + M \psi_a = 0.$$

С учетом тождества $(\sigma^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} (\sigma^\nu)_{\dot{b}\dot{a}} = (\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} (\sigma^\nu)^{\dot{b}\dot{a}} = -2\delta_{\mu\nu}$ получаем

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} \psi_b + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu \left[-(\sigma^\mu)^{\dot{a}\dot{c}} (\sigma^\nu)_{\dot{c}\dot{b}} f_{\mu}^{\dot{b}} + \right. \\ \left. + 2f_{\mu}^{\dot{a}} \right] + M \psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} \psi^{\dot{b}} + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu \left[-(\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{c}} (\sigma^\nu)^{\dot{c}\dot{b}} f_{b\mu} + \right. \\ \left. + 2f_{a\mu} \right] + M \psi_a = 0.$$

Объединим два последних уравнения в одно

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} \\ (\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{\dot{b}} \\ \psi_b \end{pmatrix} + \\ + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu \begin{pmatrix} -(\sigma^\mu)^{\dot{a}\dot{c}} (\sigma^\nu)_{\dot{c}\dot{b}} + 2\delta_b^{\dot{a}} \delta_{\nu\mu} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\left(\sigma^\mu\right)_{\dot{a}c}\left(\sigma^\nu\right)^{\dot{c}b}+2\delta_b^a\delta_{\nu\mu}\right)\left(\begin{array}{c} f_\mu^b \\ f_{b\mu} \end{array}\right)+ \\ +M\left(\begin{array}{c} \psi^b \\ \psi_b \end{array}\right)=0.$$

Поскольку выполняются два тождества

$$\left(\sigma^\mu\right)^{\dot{a}b}\left(\sigma^\nu\right)_{b\dot{c}}+\left(\sigma^\nu\right)^{\dot{a}b}\left(\sigma^\mu\right)_{b\dot{c}a}=-2\delta_{\mu\nu}\delta_c^{\dot{a}}, \\ \left(\sigma^\mu\right)_{\dot{a}b}\left(\sigma^\nu\right)^{b\dot{c}}+\left(\sigma^\nu\right)_{\dot{a}b}\left(\sigma^\mu\right)^{b\dot{c}a}=-2\delta_{\mu\nu}\delta_a^{\dot{c}}, \quad (21)$$

то конструкция

$$\frac{1}{i}\left(\begin{array}{cc} 0 & \left(\sigma^\mu\right)^{\dot{a}b} \\ \left(\sigma^\mu\right)_{\dot{a}b} & 0 \end{array}\right)$$

совпадает с видом матрицы Дирака γ_μ . Следовательно, уравнение записывается так

$$\lambda_1\hat{\partial}\psi+\frac{\lambda_4}{2i}\partial_\nu\left(\gamma_\mu\gamma_\nu+2\delta_{\nu\mu}\right)f_\mu+M\psi=0, \\ \lambda_1\hat{\partial}\psi-2i\lambda_4\left(\partial_\mu-\frac{1}{4}\hat{\partial}\gamma_\mu\right)f_\mu+M\psi=0, \quad (22)$$

где ψ – биспинор, f_μ – вектор-биспинор. Аналогичным образом получаем

$$\lambda_6\hat{\partial}\varphi-2i\lambda_8\left(\partial_\mu-\frac{1}{4}\hat{\partial}\gamma_\mu\right)f_\mu+M\varphi=0, \\ \lambda_{11}\hat{\partial}\Phi-2i\lambda_{12}\left(\partial_\mu-\frac{1}{4}\hat{\partial}\gamma_\mu\right)f_\mu+M\Phi=0. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{1}{2}\left[\partial_c^{\dot{a}}\left(\lambda_{13}\psi^b+\lambda_{14}\varphi^b+\lambda_{15}\Phi^b\right)+\right. \\ \left.+\partial_c^{\dot{b}}\left(\lambda_{13}\psi^{\dot{a}}+\lambda_{14}\varphi^{\dot{a}}+\lambda_{15}\Phi^{\dot{a}}\right)\right]+Mf_c^{(\dot{a}\dot{b})}=0.$$

С учетом (20) имеем

$$\frac{1}{2}\left[\partial_c^{\dot{a}}\left(\lambda_{13}\psi^b+\lambda_{14}\varphi^b+\lambda_{15}\Phi^b\right)+\right. \\ \left.+\partial_c^{\dot{b}}\left(\lambda_{13}\psi^{\dot{a}}+\lambda_{14}\varphi^{\dot{a}}+\lambda_{15}\Phi^{\dot{a}}\right)\right]+ \\ +\frac{1}{2}M\left[\left(\sigma^\mu\right)_c^{\dot{a}}f_\mu^b+\left(\sigma^\mu\right)_c^{\dot{b}}f_\mu^{\dot{a}}\right]=0.$$

Свернем приведенное уравнение с $(\sigma^\lambda)_a^{\dot{c}}$ по спинорным индексам

$$\frac{1}{2}\lambda_{13}\left[-\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{a}c}\partial_{c\dot{a}}\psi^b-\partial^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\psi^{\dot{a}}\right]+$$

$$\frac{1}{i}\partial_\nu\left(\begin{array}{cc} 2\delta_{\lambda\nu}\delta_a^{\dot{b}}-\left(\sigma^\nu\right)^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}} & 0 \\ 0 & 2\delta_{\lambda\nu}\delta_b^{\dot{a}}-\left(\sigma^\nu\right)_{b\dot{c}}\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{c}a} \end{array}\right)\left[\lambda_{13}\left(\begin{array}{c} \psi^{\dot{a}} \\ \psi_a \end{array}\right)+\lambda_{14}\left(\begin{array}{c} \varphi^{\dot{a}} \\ \varphi_a \end{array}\right)+\lambda_{15}\left(\begin{array}{c} \Phi^{\dot{a}} \\ \Phi_a \end{array}\right)\right]+ \\ +M\left(\begin{array}{cc} 2\delta_{\lambda\mu}\delta_a^{\dot{b}}-\left(\sigma^\mu\right)^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}} & 0 \\ 0 & 2\delta_{\lambda\mu}\delta_b^{\dot{a}}-\left(\sigma^\mu\right)_{b\dot{c}}\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{c}a} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} f_\mu^{\dot{a}} \\ \Phi_{a\mu} \end{array}\right)=0$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_{14}\left[-\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{a}c}\partial_{c\dot{a}}\varphi^b-\partial^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\varphi^{\dot{a}}\right]+ \\ +\frac{1}{2}\lambda_{15}\left[-\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{a}c}\partial_{c\dot{a}}\Phi^b-\partial^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\Phi^{\dot{a}}\right]+ \\ +\frac{1}{2}M\left[-\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{a}c}\left(\sigma^\mu\right)_{c\dot{a}}f_\mu^b-\left(\sigma^\mu\right)^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}f_\mu^{\dot{a}}\right]=0.$$

С учетом приведенных выше соотношений имеем

$$\lambda_{13}\left[\frac{2}{i}\delta_{\lambda\nu}\partial_\nu\psi^b-\partial^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\psi^{\dot{a}}\right]+ \\ +\lambda_{14}\left[\frac{2}{i}\delta_{\lambda\nu}\partial_\nu\varphi^b-\partial^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\varphi^{\dot{a}}\right]+ \\ +\lambda_{15}\left[\frac{2}{i}\delta_{\lambda\nu}\partial_\nu\Phi^b-\partial^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\Phi^{\dot{a}}\right]+ \\ +M\left[2\delta_{\lambda\nu}f_\mu^b-\left(\sigma^\mu\right)^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}f_\mu^{\dot{a}}\right]=0 \\ \text{или} \\ \lambda_{13}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\psi^b-\left(\sigma^\nu\right)^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\psi^{\dot{a}}\right]+ \\ +\lambda_{14}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\varphi^b-\left(\sigma^\nu\right)^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\varphi^{\dot{a}}\right]+ \\ +\lambda_{15}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\Phi^b-\left(\sigma^\nu\right)^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}\Phi^{\dot{a}}\right]+ \\ +M\left[2\delta_{\lambda\nu}f_\mu^b-\left(\sigma^\mu\right)^{\dot{b}c}\left(\sigma^\lambda\right)_{c\dot{a}}f_\mu^{\dot{a}}\right]=0. \quad (24)$$

Аналогично можно показать, что уравнение

$$\frac{1}{2}\left[\partial_a^{\dot{c}}\left(\lambda_{13}\psi_b+\lambda_{14}\varphi_b+\lambda_{15}\Phi_b\right)+\right. \\ \left.+\partial_b^{\dot{c}}\left(\lambda_{13}\psi_a+\lambda_{14}\varphi_a+\lambda_{15}\Phi_a\right)\right]+Mf_c^{(\dot{a}b)}=0$$

сводится к виду

$$\lambda_{13}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\psi_b-\left(\sigma^\nu\right)_{b\dot{c}}\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{c}a}\psi_a\right]+ \\ +\lambda_{14}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\varphi_b-\left(\sigma^\nu\right)_{b\dot{c}}\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{c}a}\varphi_a\right]+ \\ +\lambda_{15}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\Phi_b-\left(\sigma^\nu\right)_{b\dot{c}}\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{c}a}\Phi_a\right]+ \\ +M\left[2\delta_{\lambda\nu}f_{b\mu}-\left(\sigma^\nu\right)_{b\dot{c}}\left(\sigma^\lambda\right)^{\dot{c}a}f_{a\mu}\right]=0. \quad (25)$$

Уравнения (24), (25) объединяем в одно

или

$$M \left(2\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\gamma_{\mu} \right) - i \left(\partial_{\lambda} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\hat{\partial} \right) \Psi = 0, \quad (26)$$

где $\Psi = \lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi$. Таким образом, система спин-тензорных уравнений имеет вид (22), (23), (26). При этом нужно учитывать ограничения на постоянные λ_i .

3. Минимальная система в свободном случае

Выразим из уравнения (26) величину $(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\gamma_{\mu}) f_{\mu}$

$$\left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\gamma_{\mu} \right) f_{\mu} = \frac{i}{M} \left(\partial_{\lambda} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\hat{\partial} \right) \Psi.$$

Отсюда получаем

$$\left(\partial_{\lambda} - \frac{1}{4}\hat{\partial}\gamma_{\mu} \right) f_{\mu} = \frac{3i}{4M} \square \Psi. \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ M^3 + M^2\hat{\partial} + M(\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_{11})\square + \lambda_1\lambda_6\lambda_{11}\square\hat{\partial} \right\} \Psi + \\ & + \frac{3}{2M} \left\{ (\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_8\lambda_{14} + \lambda_{12}\lambda_{15})M^2 + M[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6 + \lambda_{11}) + \lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1 + \lambda_{11}) + \lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1 + \lambda_6)]\hat{\partial} + \right. \\ & \left. + (\lambda_4\lambda_6\lambda_{11}\lambda_{13} + (\lambda_1\lambda_8\lambda_{11}\lambda_{14} + \lambda_1\lambda_6\lambda_{12}\lambda_{15})\square) \right\} \square \Psi = 0. \end{aligned}$$

Далее с учетом ограничений (16)–(19) получаем

$$M^2 \{ M + \hat{\partial} \} \Psi = 0,$$

т. е. приходим к уравнению Дирака для свободной частицы, описываемой функцией Ψ

$$(\hat{\partial} + M)\Psi = 0, \quad \Psi = \lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi.$$

4. Взаимодействие с внешним полем

Исходим из системы уравнений

$$(M + \lambda_1\hat{D})\psi - 2i\lambda_4 \left(D_{\mu} - \frac{1}{4}\hat{D}\gamma_{\mu} \right) f_{\mu} = 0, \quad (31)$$

$$(M + \lambda_6\hat{D})\varphi - 2i\lambda_8 \left(D_{\mu} - \frac{1}{4}\hat{D}\gamma_{\mu} \right) f_{\mu} = 0, \quad (32)$$

$$(M + \lambda_{11}\hat{D})\Phi - 2i\lambda_{12} \left(D_{\mu} - \frac{1}{4}\hat{D}\gamma_{\mu} \right) f_{\mu} = 0, \quad (33)$$

$$M \left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\gamma_{\mu} \right) f_{\mu} - i \left(D_{\lambda} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\hat{D} \right) \Psi = 0, \quad (34)$$

где $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$, A_{μ} - 4-потенциал электромагнитного поля. Определим из последнего уравнения системы (31)–(34) величину

$$\left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\gamma_{\mu} \right) f_{\mu} = \frac{i}{M} \left(D_{\lambda} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda}\hat{D} \right) \Psi.$$

Поддействуем на последнее уравнение оператором D_{λ}

$$\left(D_{\mu} - \frac{1}{4}\hat{D}\gamma_{\mu} \right) f_{\mu} = \frac{i}{M} \left(D^2 - \frac{1}{4}\hat{D}\hat{D} \right) \Psi, \quad (35)$$

Учтем соотношение (27) в уравнениях (22), (23):

$$(M + \lambda_1\hat{\partial})\Psi + \frac{3}{2M}\lambda_4\square\Psi = 0, \quad (28)$$

$$(M + \lambda_6\hat{\partial})\varphi + \frac{3}{2M}\lambda_8\square\Psi = 0, \quad (29)$$

$$(M + \lambda_{11}\hat{\partial})\Phi + \frac{3}{2M}\lambda_{12}\square\Psi = 0. \quad (30)$$

Поддействуем на уравнения (28)–(30) соответственно следующими операторами

$$\lambda_{13}(M + \lambda_6\hat{\partial})(M + \lambda_{11}\hat{\partial}),$$

$$\lambda_{14}(M + \lambda_1\hat{\partial})(M + \lambda_{11}\hat{\partial}),$$

$$\lambda_{15}(M + \lambda_1\hat{\partial})(M + \lambda_6\hat{\partial})$$

и просуммируем результаты. В результате приходим к уравнению

где $D^2 = D_{\mu}D_{\mu}$. С учетом (35) уравнения (31)–(33) представляем в виде

$$(M + \lambda_1\hat{D})\psi + \frac{2}{M}\lambda_4 \left(D^2 - \frac{1}{4}\hat{D}\hat{D} \right) \Psi = 0, \quad (36)$$

$$(M + \lambda_6\hat{D})\varphi + \frac{2}{M}\lambda_8 \left(D^2 - \frac{1}{4}\hat{D}\hat{D} \right) \Psi = 0, \quad (37)$$

$$(M + \lambda_{11}\hat{D})\Phi + \frac{2}{M}\lambda_{12} \left(D^2 - \frac{1}{4}\hat{D}\hat{D} \right) \Psi = 0. \quad (38)$$

На уравнения системы (36)–(38) соответственно поддействуем операторами

$$\lambda_{13}(M + \lambda_6\hat{D})(M + \lambda_{11}\hat{D}),$$

$$\lambda_{14}(M + \lambda_1\hat{D})(M + \lambda_{11}\hat{D}),$$

$$\lambda_{15}(M + \lambda_1\hat{D})(M + \lambda_6\hat{D})$$

в результате получаем

$$\begin{aligned} & \lambda_{13}\hat{M}\psi + \frac{2}{M}\lambda_4\lambda_{13} \left\{ M^2 + M(\lambda_6 + \lambda_{11})\hat{D} + \right. \\ & \left. + \lambda_6\lambda_{11}\hat{D}\hat{D} \right\} \left(D^2 - \frac{1}{4}\hat{D}\hat{D} \right) \Psi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{14}\hat{M}\varphi + \frac{2}{M}\lambda_8\lambda_{14} \left\{ M^2 + M(\lambda_1 + \lambda_{11})\hat{D} + \right. \\ & \left. + \lambda_1\lambda_{11}\hat{D}\hat{D} \right\} \left(D^2 - \frac{1}{4}\hat{D}\hat{D} \right) \Psi = 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_{15}\hat{M}\Phi + \frac{2}{M}\lambda_{12}\lambda_{15} \left\{ M^2 + M(\lambda_1 + \lambda_6)\hat{D} + \right.$$

$$+\lambda_1\lambda_6\hat{D}\hat{D}\left\{\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi=0,\right.$$

где

$$\hat{M}=M^3+M^2\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})\hat{D}\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})\hat{D}\hat{D}\hat{D}.$$

Суммируем эти три уравнения

$$\left\{M^3+M^2\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})\hat{D}\hat{D}+\right. \\ \left.+\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}\hat{D}\hat{D}\hat{D}\right\}\Psi+\frac{2}{M}\left\{M^2(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})+\right. \\ \left.+M[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\right. \\ \left.+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{D}+[\lambda_4\lambda_6\lambda_{11}\lambda_{13}+\lambda_1\lambda_8\lambda_{11}\lambda_{14}+\right. \\ \left.+\lambda_1\lambda_6\lambda_{12}\lambda_{15}]\hat{D}\hat{D}\right\}\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi=0. \quad (39)$$

Отметим, что последнее слагаемое в уравнении (39) в силу ограничения (19) обращается в нуль. Следовательно, получаем

$$\left\{M^3+M^2\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})\hat{D}\hat{D}+\right. \\ \left.+\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}\hat{D}\hat{D}\hat{D}+2M(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})+\right. \\ \left.+2[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\right. \\ \left.+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\right\}\hat{D}\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi=0.$$

Воспользуемся соотношениями (матрицы $J_{[\mu\nu]}$ представляют генераторы биспинорного поля)

$$\hat{D}\hat{D}=D^2-ieF_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}, \quad F_{[\mu\nu]}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu, \\ J_{[\mu\nu]}=\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu),$$

тогда уравнение принимает вид

$$\left\{M^3+M^2\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})D^2+\right. \\ \left.+\frac{3}{2}M(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})D^2-\right. \\ \left.-ieM(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+\right. \\ \left.+\frac{ie}{2}M(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+\right. \\ \left.+\left[\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}+\frac{3}{2}(\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\right.\right. \\ \left.+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{D}D^2+ie[-\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}+\right. \\ \left.+\frac{1}{2}(\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\right. \\ \left.+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\right\}\Psi=0$$

или

$$\left\{M^3+M^2\hat{D}+2ieM(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+\right. \\ \left.\hat{D}+M+ie\mu F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+ie\sigma\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\right\}\Psi=0.$$

$$+\left[(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})+\frac{3}{2}(\lambda_1\lambda_4\lambda_{13}+\right.$$

$$\left.+\lambda_6\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{15})+\frac{3}{2}(\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\right.$$

$$\left.+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{D}D^2+\right.$$

$$\left.+ie\left[-(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})-\frac{3}{2}(\lambda_1\lambda_4\lambda_{13}+\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_6\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{15})+\frac{1}{2}(\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\right.$$

$$\left.+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\right\}\Psi=0.$$

Таким образом, получаем следующее уравнение:

$$\left\{M^3+M^2\hat{D}+2ieM(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+\right. \\ \left.+2ie[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\right. \\ \left.+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\right\}\Psi=0.$$

Следовательно, при наличии взаимодействия с внешним электромагнитным полем приходим к обобщенному уравнению Дирака

$$\left\{\hat{D}+M+2\frac{ie}{M}(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+\right. \\ \left.+2\frac{ie}{M^2}[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\right. \\ \left.+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\right\}\Psi=0 \quad (40)$$

относительно функции $\Psi=\lambda_{13}\psi+\lambda_{14}\varphi+\lambda_{15}\Phi$. Уравнение (40) содержит два дополнительных слагаемых. Слагаемое

$$2\frac{ie}{M}(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}$$

описывает аномальный магнитный момент частицы. Второе слагаемое

$$2\frac{ie}{M^2}[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}$$

$$\Psi=ie\sigma\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}$$

будем связывать с дополнительной электромагнитной характеристикой частицы σ - поляризуемостью. Итоговое уравнение может быть кратко представлено так:

5. Заключение

Построено обобщенное релятивистское уравнение для частицы со спином $1/2$ с двумя дополнительными характеристиками в присутствии внешних электромагнитных полей. Оно включает два дополнительных члена взаимодействия, интерпретируемых как связанные с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью частицы. Это уравнение может служить основой для экспериментальной проверки внутренней структуры частицы со спином $1/2$.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
2. Плетухов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетухов, В. М. Ред'ков, В. И. Стражев. – Минск: Белорусская наука, 2015. – 327 с.
3. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, V. Balan, [et al.] – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 418, 414 pp.
4. Petraš, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin / M. Petraš // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
5. Spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, Ya. A. Voynova, [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.
6. Ovsiyuk, E. M. Spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment in presence of external magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // Chapter in the book: Relativity, Gravitation, Cosmology: Beyond Foundations / Ed. V. V. Dvoeglazov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2019. – P. 65–80.
7. On P-noninvariant wave equation for a spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment / V. V. Kisel, V. A. Pletyukhov, E. M. Ovsiyuk, [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, № 1. – P. 18–40.
8. Santhaman, T. S. Bhabha equations for unique mass and spin / T. S. Santhaman, A. R. Tekumalla // Fortsch. Phys. – 1974. – Vol. 22, № 8. – P. 431–452.

References

1. Gelfand, I. M. Obshchiye relyativistski invariantnyye uravneniya i beskonechnomernyye predstavleniya gruppy Lorentsa [General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group] / I. M. Gelfand, A. M. Yaglom // Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. – 1948. – Vol. 18, № 8. – P. 703–733.
2. Pletukhov, V. A. Relyativistskie volnovye uravneniya i vnutrennie stepeni svobody [Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom] / V. A. Pletukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk: Belorusskaya nauka [Belarusian Science], 2015. – 327 p.
3. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, V. Balan, [et al.] – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 418, 414 pp.
4. Petraš, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin / M. Petraš // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
5. Spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, Ya. A. Voynova, [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.
6. Ovsiyuk, E. M. Spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment in presence of external magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // Chapter in the book: Relativity, Gravitation, Cosmology: Beyond Foundations / Ed. V. V. Dvoeglazov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2019. – P. 65–80.
7. On P-noninvariant wave equation for a spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment / V. V. Kisel, V. A. Pletyukhov, E. M. Ovsiyuk, [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, № 1. – P. 18–40.
8. Santhaman, T. S. Bhabha equations for unique mass and spin / T. S. Santhaman, A. R. Tekumalla // Fortsch. Phys. – 1974. – Vol. 22, № 8. – P. 431–452.

Для цитирования:

Кисель, В. В. Дираковская частица с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью / В. В. Кисель, А. В. Бурый, П. О. Саченко [и др.] // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 41–47. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-41-47

For citation:

Kisel, V. V. Dirac particle with anomalous magnetic moment and polarizability / V. V. Kisel, A. V. Bury, P. O. Sachenok [et al.] // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 41–47. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-41-47

Дата поступления рукописи: 28.07.2025

Received: 28.07.2024

О роли скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2

А. В. Бурый

Институт физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

anton.buryy.97@mail.ru

Аннотация

В работе изложена общая теория для поля со спином 2 на основе 30-компонентной системы уравнений первого порядка Федорова–Редже. В результате исключения дополнительных вектора и тензора третьего ранга выведены уравнения второго порядка Паули–Фирца для скаляра и симметричного тензора. Согласно анализу Паули–Фирца исследована имеющаяся калибровочная симметрия. Построены шесть независимых решений в виде плоских волн для безмассовой частицы. Показано, что четыре из них являются калибровочными и, следовательно, могут быть исключены как нефизические.

Ключевые слова:

поле спина 2, плоские волны, независимые решения, безмассовая частица, физические степени свободы

Введение

Начиная с работ В. Паули, М. Фирца и др. [1–4] теория массивного и безмассового полей со спином 2 всегда присутствовала в литературе. Подход Паули–Фирца основан на системе второго порядка для тензора второго ранга и скаляра. Большая часть исследований выполнена в рамках именно этого подхода. Однако известно, что в теории частиц с высшими спинами при использовании уравнений второго порядка возникает много сложностей из-за так называемой неоднозначности порядка написания производных. Такого рода трудностей не возникает, если с самого начала использовать формализм уравнений первого порядка [5–10]. Первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено Ф. И. Федоровым [5], см. также работу Т. Редже [6]. Оказалось, что в таком подходе частица со спином 2 требует для своего описания 30-компонентной полевой функции. При этом для описания поля используется набор из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга и тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. Появление рядом с тензором второго ранга трех дополнительных тензоров — скаляра, вектора и тензора третьего ранга с определенной симметрией — объясняется следующим обстоятельством: чтобы перейти от уравнений второго по-

On the role of scalar field in the theory of massless spin 2 particle

A. V. Bury

B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

anton.buryy.97@mail.ru

Abstract

The paper presents a general theory for spin 2 field, based on the 30-component first-order Fedorov–Regge equations. By eliminating the auxiliary vector and third-rank tensor, the second-order Pauli–Fierz equations for the scalar and symmetric tensor are derived. The gauge symmetry, as analyzed by Pauli and Fierz, is investigated. Six independent plane-wave solutions for a massless particle are constructed; four of them are shown to be pure gauge and can thus be excluded as nonphysical.

Keywords:

spin 2 field, plane waves, independent solutions, massless particle, physical degrees of freedom

рядка к уравнениям первого порядка, всегда приходится вводить вспомогательные компоненты. Кроме того, в формализме уравнений первого порядка обязательно присутствуют явная форма лагранжиана теории, а также теорема Нетер, связывающая симметрии с физически наблюдаемыми величинами (тензор энергии-импульса, тензор полного углового момента с учетом спина поля и др.).

Описания массивной и безмассовой частиц со спином 2 существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Калибровочные степени свободы не дают вклада в наблюдаемые величины, например, в тензор энергии-импульса поля. Это приводит к необходимости в безмассовом случае выделять калибровочные решения, оставляя только физически наблюдаемые.

В настоящей работе исследуется роль скалярного поля в описании калибровочной симметрии в теории Паули–Фирца для безмассовой частицы со спином 2. При этом используются решения типа плоских волн. Выполненный анализ показывает необходимость присутствия скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2. Оно обеспечивает корректное описание калибровочной симметрии в этой теории.

1. Безмассовая частица, калибровочная симметрия

Будем исходить из системы уравнений первого порядка для безмассовой частицы со спином 2 [11, 12] (она эквивалентна исходной теории Паули-Фирца с использованием уравнений второго порядка)

$$\partial^a \Phi_a = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \partial_a \Phi - \frac{1}{3} \partial^b \Phi_{ab} = \Phi_a, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left(\partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_{[kn]} \right) + \left(\partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_k \right) = 0, \quad (3)$$

$$\partial_k \Phi_{(ab)} - \partial_a \Phi_{(kb)} - \frac{1}{3} (g_{kb} \partial^n \Phi_{(an)} - g_{ba} \partial^n \Phi_{(kn)}) = \Phi_{[ka]b}. \quad (4)$$

Здесь имеем следующую ситуацию с дополнительными условиями. Так, сворачивая в уравнении (3) индексы a и b , приходим к тождеству $0 \equiv 0$, т. е. условия неприводимости симметричного тензора не возникает. Далее, сворачивая в уравнении (4) индексы a и b , получаем дополнительное условие в виде $\partial_k \Phi_n^n = \Phi_{[kn]}^n$. Следовательно, теория безмассового поля со спином 2 основана на функции с $(1 + 4 + 10 + 24 - 4) = 35$ компонентами.

С помощью (2) исключим из уравнения (1) дополнительное поле Φ_a , в результате получаем уравнение второго порядка для скаляра $\Phi(x)$ и тензора $\Phi_{(ab)}(x)$:

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \Phi_{(ab)} = 0. \quad (5)$$

Исключим из уравнения (3) дополнительные поля Φ_a и $\Phi_{[ka]b}$ (при этом будем учитывать равенство $\Phi_{[kn]}^n = \partial_k \Phi$), это дает

$$\left(\partial_a \partial_b + \frac{1}{2} g_{ab} \square \right) \Phi - \frac{1}{4} g_{ab} \square \Phi_n^n + \square \Phi_{(ab)} - \partial_a \partial^n \Phi_{(nb)} - \partial_b \partial^n \Phi_{(na)} = 0. \quad (6)$$

Уравнения (5),(6) описывают безмассовое поле со спином 2 в подходе Паули-Фирца.

Убедимся, что уравнения второго порядка (5),(6) (а следовательно, и уравнения первого порядка) имеют класс калибровочных решений [13]:

$$\bar{\Phi} = \partial^l \Lambda_l, \quad \bar{\Phi}_{(ab)} = \partial_a \Lambda_b + \partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^l \Lambda_l, \quad (7)$$

где $\Lambda_l(x)$ - произвольный 4-вектор. Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \partial^a \partial^b \bar{\Phi}_{(ab)} &= -\frac{1}{2} \square \partial^l \Lambda_l = -\frac{1}{2} \square \bar{\Phi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \square^2 \bar{\Phi} - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \bar{\Phi}_{(ab)} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, учитывая равенства

$$\left(\partial_a \partial_b - \frac{1}{4} g_{ab} \square \right) \bar{\Phi} = \partial_a \partial_b \partial^l \Lambda_l, \quad \bar{\Phi}_a^a = 0,$$

$$\square \bar{\Phi}_{(ab)} = \square \partial_a \Lambda_b + \square \partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} \square \partial^l \Lambda_l,$$

$$-\partial_a \partial^l \Phi_{(bl)}^{(0)} = -\frac{1}{2} \partial_a \partial_b \partial^l \Lambda_l - \square \partial_a \Lambda_b,$$

$$-\partial_a \partial^l \Phi_{(al)}^{(0)} = -\frac{1}{2} \partial_b \partial_a \partial^l \Lambda_l - \square \partial_b \Lambda_a,$$

$$\frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \partial^l \Phi_{(kl)}^{(0)} = +\frac{3}{2} g_{ab} \square \partial^l \Lambda_l,$$

убеждаемся, что набор полей (7) удовлетворяет уравнению (6). Найдем выражения для тензоров $\bar{\Phi}_a$ и $\bar{\Phi}_{[ka]b}$, сопутствующих набору полей (7):

$$\bar{\Phi}_a = +\frac{1}{3} \partial_a \partial^l \Lambda_l - \frac{1}{3} \square \Lambda_a, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{[ab]c} &= \partial_c (\partial_a \Lambda_b - \partial_b \Lambda_a) - \\ & - \frac{1}{3} (g_{cb} \partial_a - g_{ca} \partial_b) \partial^l \Lambda_l + \frac{1}{3} (g_{cb} \square \Lambda_a - g_{ca} \square \Lambda_b). \end{aligned} \quad (10)$$

Отмечаем справедливость равенства $\bar{\Phi}_{[ac]}^c = 0$. Последнее согласуется с соотношением $\bar{\Phi}_a^a = 0$ и дополнительным условием $\partial_a \bar{\Phi}_b^b = \bar{\Phi}_{[ac]}^c$.

Таким образом, безмассовое поле со спином 2 можно описывать либо системой уравнений первого порядка, либо системой уравнений второго порядка (формализм Паули-Фирца):

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^k \partial^l \Phi_{(kl)} = 0, \quad (11)$$

$$\left(\partial_a \partial_b + \frac{1}{2} g_{ab} \square \right) - \frac{1}{4} g_{ab} \square \Phi_c^c +$$

$$+ \square \Phi_{(ab)} - \partial_a \partial^l \Phi_{(bl)} - \partial_b \partial^l \Phi_{(al)} = 0. \quad (12)$$

При этом в уравнениях имеется калибровочная симметрия [13], связанная с существованием класса решений (7), определяемых произвольным 4-вектором $\Lambda_a(x)$.

2. Плоские волны, калибровочная симметрия

Получим решения уравнений для тензора и скаляра в виде плоских волн:

$$\Phi(x) = e^{-ik_a x^a} f, \quad \Phi_{ab}(x) = e^{-ik_a x^a} f_{ab},$$

$$f_{ab} = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{03} & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_{01} & f_1 & c_1 & c_2 \\ d_2 & c_1 & f_2 & c_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 & f_3 \end{pmatrix}.$$

Позднее мы сменим обозначения (чтобы они совпадали с использованными в массивном случае):

$$c_1, c_2, c_3 \Leftrightarrow c_3, c_2, c_1. \quad (13)$$

С учетом $k_0^2 = \vec{k}^2$ имеем тождество $\square^2 \Phi = 0$ и уравнение (11) дает

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \Phi_{(ab)} = 0 \Rightarrow k^a k^b f_{ab} = 0; \quad (14)$$

в свою очередь, уравнение (12) приводит к соотношению

$$-k_a k_b f + k_a k^l f_{bl} + k_b k^l f_{al} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, имеем алгебраическую систему уравнений

$$k_a k_b f_{ab} = 0, \quad -k_a k_b f + k_a k^l f_{bl} + k_b k^l f_{al} = 0. \quad (16)$$

Калибровочные решения определяются вектором $\Lambda_l = e^{-ik_a x^a} \lambda_l$:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \bar{f} e^{-ik_a x^a}, \quad \bar{f} = -ik^l \lambda_l; \\ \bar{\Phi}_{(ab)} &= \bar{f}_{ab} e^{-ik_a x^a}, \\ \bar{f}_{ab} &= -i \left[k_a \lambda_b + k_b \lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} k^l \lambda_l \right], \quad \bar{f}_a^a \equiv 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Убеждаемся, что эти калибровочные решения удовлетворяют уравнениям (16)

$$\begin{aligned} k^a k^b \bar{f}_{ab} &= (-i) k^a k^b \left[k_a \lambda_b + k_b \lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} k^l \lambda_l \right] = \\ &= (-i) \left[0 + 0 - \frac{1}{2} k^a k^b g_{ab} k^l \lambda_l \right] \equiv 0; \\ -k_a k_b \bar{f} + k_a k^l \bar{f}_{bl} + k_b k^l \bar{f}_{al} &= -i \left\{ -k_a k_b \cdot k^n \lambda_n + \right. \\ &\quad \left. + k_a k^l \left[k_b \lambda_l + k_l \lambda_b - \frac{1}{2} g_{bl} k^n \lambda_n \right] + \right. \\ &\quad \left. + k_b k^l \left[k_a \lambda_l + k_l \lambda_a - \frac{1}{2} g_{al} k^n \lambda_n \right] \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Детализируем уравнения (16). Первое уравнение дает

$$\begin{aligned} &k^0 (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) + \\ &+ k^1 (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) + \\ &+ k^2 (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) + \\ &+ k^3 (d_3 k^0 + c_2 k^1 + c_3 k^2 + f_3 k^3) = 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение приводит к 16 соотношениям. С учетом совпадающих имеем только 10 уравнений. Таким образом, уравнения (16) дают систему

$$\begin{aligned} &k_0 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) - \\ &- k_1 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) - \\ &- k_2 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) - \\ &- k_3 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) = 0, \quad (18) \\ &2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = k_0 f, \\ &2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = k_1 f, \\ &2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) = k_2 f, \\ &2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) = k_3 f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2k_0 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) + \\ &+ 2k_1 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k_0 k_1 f, \\ &2k_0 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ &+ 2k_2 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k_0 k_2 f, \\ &2k_0 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ &+ 2k_3 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k_0 k_3 f, \quad (19) \\ &2k_1 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ &+ 2k_2 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = 2k_1 k_2 f, \\ &2k_1 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ &+ 2k_3 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = 2k_1 k_3 f, \\ &2k_2 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ &+ 2k_3 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) = 2k_2 k_3 f. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (19). С помощью второго, третьего и четвертого уравнений

$$\begin{aligned} k_1 f &= 2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3), \\ k_2 f &= 2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3), \\ k_3 f &= 2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) \end{aligned}$$

преобразуем остальные шесть к виду.

$$\begin{aligned} k_0 k_1 f + 2k_1 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= -2k_0 k_1 f, \\ k_0 k_2 f + 2k_2 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= -2k_0 k_2 f, \\ k_0 k_3 f + 2k_3 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= -2k_0 k_3 f, \\ 2k_1 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + k_2 k_1 f &= 2k_1 k_2 f, \\ 2k_1 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + k_3 k_1 f &= 2k_1 k_3 f, \\ 2k_2 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + k_3 k_2 f &= 2k_2 k_3 f. \end{aligned}$$

Учитывая совпадающие уравнения и тождества, получаем систему

$$\begin{aligned} 2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= k_0 f, \\ 2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) &= k_1 f, \\ 2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) &= k_2 f, \\ 2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) &= k_3 f, \\ 2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= -k_0 f. \end{aligned}$$

С учетом первого и последнего уравнений данной системы находим $f = 0$, при этом остаются лишь четыре независимых уравнения

$$\begin{aligned} f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3 &= 0 \\ d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3 &= 0 \\ d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3 &= 0, \quad (20) \\ d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3 &= 0. \end{aligned}$$

Переходя к другим обозначениям (13) $c_1 \Leftrightarrow c_3$, из (20) приходим к системе

$$\begin{aligned} d_1 k_1 + d_2 k_2 &= f_0 k_0 - d_3 k_3, \\ d_1 k_0 - c_3 k_2 - c_2 k_3 &= f_1 k_1, \\ d_2 k_0 - c_3 k_1 &= f_2 k_2 + c_1 k_3, \\ c_2 k_1 &= d_3 k_0 - c_1 k_2 - f_3 k_3. \end{aligned} \quad (21)$$

В матричной форме она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 & k_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 k_0 - d_3 k_3 \\ f_1 k_1 \\ c_1 k_3 + f_2 k_2 \\ -c_1 k_2 + d_3 k_0 - f_3 k_3 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

В правую часть входит шесть свободных переменных. Убеждаемся, что определитель отличен от нуля: $\det A = -2k_0 k_1^2 k_2 \equiv D^{-1}$. Общее решение системы (22) имеет вид

$$\begin{aligned} c_2 &= D[k_0 k_1 k_2 (2c_1 k_2 - 2d_3 k_0 + 2f_3 k_3)], \\ c_3 &= D[k_0 k_1 (2d_3 k_3 k_0 - f_0 k_0^2 + f_1 k_1^2 + f_2 k_2^2 - f_3 k_3^2)], \\ d_1 &= D[k_1 k_2 (2c_1 k_2 k_3 - f_0 k_0^2 - f_1 k_1^2 + f_2 k_2^2 + f_3 k_3^2)], \\ d_2 &= D[k_1^2 (-2c_1 k_2 k_3 + 2d_3 k_3 k_0 - f_0 k_0^2 + f_1 k_1^2 - \\ &\quad - f_2 k_2^2 - f_3 k_3^2)]. \end{aligned}$$

Его можно представить в матричной форме и затем разложить в линейную комбинацию шести независимых решений (здесь учтен явный вид величины D)

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = f_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_0^2}{2k_1 k_2} \\ \frac{k_0}{2k_1} \\ \frac{k_0}{2k_2} \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_1}{2k_2} \\ \frac{k_1}{2k_0} \\ -\frac{k_1^2}{2k_0 k_2} \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{2k_1} \\ \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} \\ \frac{k_2}{k_0} \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} -\frac{k_3}{2k_1 k_2} \\ \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} \\ -\frac{k_3^2}{2k_0 k_1} \\ \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{k_1} \\ 0 \\ -\frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} \\ \frac{k_3}{k_0} \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} \frac{k_0}{k_1} \\ -\frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} \\ 0 \\ -\frac{k_3}{k_2} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Это решение можно представить в виде симметричной матрицы (записываем ее по столбцам):

$$f_{(ab)} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_0 \left(\frac{k_0}{2k_1} f_0 + \frac{k_1}{2k_0} f_1 - \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} f_2 - \frac{k_3^2}{2k_0 k_1} f_3 - \frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} c_1 \right) \\ \vdots \\ f_1 \\ \vdots \\ \left(\frac{k_0}{2k_2} f_0 - \frac{k_1^2}{2k_0 k_2} f_1 + \frac{k_2}{2k_0} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} f_3 + \frac{k_3}{k_0} c_1 - \frac{k_3}{k_2} d_3 \right) \\ \left(\frac{k_0^2}{2k_1 k_2} f_0 - \frac{k_1}{2k_2} f_1 - \frac{k_2}{2k_1} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} f_3 - \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} d_3 \right) \\ f_2 \\ \vdots \\ d_3 \\ \left(-\frac{k_3}{k_1} f_3 - \frac{k_2}{k_1} c_1 + \frac{k_0}{k_1} d_3 \right) \\ c_1 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу также можно разложить в линейную суперпозицию

$$\begin{aligned} f_{(ab)} &= \\ &= f_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{k_0}{2k_1} & \frac{k_0}{2k_2} & 0 \\ \cdot & 0 & \frac{k_0}{2k_1 k_2} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ f_1 \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_1}{2k_0} & -\frac{k_1^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \cdot & 1 & -\frac{k_1}{2k_2} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ f_2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2^2}{2k_0 k_1} & \frac{k_2}{2k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_2}{2k_1} & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ f_3 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_3^2}{2k_0 k_1} & \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \cdot & 0 & \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} & -\frac{k_3}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ c_1 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ d_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или коротко так:

$$f_{(ab)} = f_0 F_0 + f_1 F_1 + f_2 F_2 c_1 C_1 + d_3 D_3. \quad (24)$$

Учтем существование калибровочных решений. Они задаются соотношениями

$$\bar{f} = -i k^l \lambda_l,$$

$$\bar{f}_{ab} = -1 \left[k_a \lambda_b + k_b \lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} k^l \lambda_l \right] \quad (25)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -i(k_0 \lambda_0 - k_1 \lambda_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3), \\ \bar{f}_{ab} &= -i \begin{pmatrix} 2k_0 \lambda_0 - \frac{1}{2} k^l \lambda_l & k_0 \lambda_1 + k_1 \lambda_0 \\ k_0 \lambda_1 + k_1 \lambda_0 & 2k_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} k^l \lambda_l \\ k_0 \lambda_2 + k_2 \lambda_0 & k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1 \\ k_0 \lambda_3 + k_3 \lambda_0 & k_1 \lambda_3 + k_3 \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} k_0 \lambda_2 + k_2 \lambda_0 & k_0 \lambda_3 + k_3 \lambda_0 \\ k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1 & k_1 \lambda_3 + k_3 \lambda_1 \\ 2k_2 \lambda_2 + \frac{1}{2} k_l \lambda_l & k_2 \lambda_3 + k_3 \lambda_2 \\ k_2 \lambda_3 + k_3 \lambda_2 & 2k_3 \lambda_3 + \frac{1}{2} k_l \lambda_l \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

Убеждаемся, что выполняется тождество $\bar{f}_a^a = \bar{f}_{00} - \bar{f}_{11} - \bar{f}_{22} - \bar{f}_{33} \equiv 0$. Результат (26) можно переписать иначе

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -i(k_0 \lambda_0 - k_1 \lambda_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3), \\ \bar{f}_0 &= -i \left(\frac{3}{2} k_0 \lambda_0 + \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 + \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_1 &= -i \left(\frac{1}{2} k_0 \lambda_0 + \frac{3}{2} k_1 \lambda_1 - \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 - \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_2 &= -i \left(\frac{1}{2} k_0 \lambda_0 - \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 + \frac{3}{2} k_2 \lambda_2 - \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_3 &= -i \left(\frac{1}{2} k_0 \lambda_0 - \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 - \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 + \frac{3}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{d}_1 &= -i(k_0 \lambda_1 + k_1 \lambda_0), \quad \bar{d}_2 = -i(k_0 \lambda_2 + k_2 \lambda_0), \\ &\quad \bar{d}_3 = -i(k_0 \lambda_3 + k_3 \lambda_0), \\ \bar{c}_1 &= -i(k_2 \lambda_3 + k_3 \lambda_2), \quad \bar{c}_2 = -i(k_1 \lambda_3 + k_3 \lambda_1), \\ &\quad \bar{c}_3 = -i(k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1). \end{aligned}$$

Если потребовать, чтобы калибровочные преобразования не нарушали равенства нулю скалярной компоненты $f = 0$, то следует наложить ограничение

$$k_0 \lambda_0 = k_1 \lambda_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3. \quad (27)$$

Тогда общее калибровочное решение примет вид

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2ik_1 \lambda_1 - 2i\lambda_2 k_2 - 2i\lambda_3 k_3, \\ \bar{f}_1 &= -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_2 = -2ik_2 \lambda_2, \quad \bar{f}_3 = -2ik_3 \lambda_3, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{d}_2 &= -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{d}_3 &= -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{c}_1 &= -ik_2 \lambda_3 - ik_3 \lambda_2, \quad \bar{c}_2 = -ik_1 \lambda_3 - ik_3 \lambda_1, \\ &\quad \bar{c}_3 = -ik_1 \lambda_2 - ik_2 \lambda_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Его можно разложить в три независимых решения.

При $\lambda_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_2 = 0, \quad \bar{f}_3 = 0, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1, \\ \bar{c}_1 &= 0, \quad \bar{c}_2 = -ik_3 \lambda_1, \quad \bar{c}_3 = -ik_1 \lambda_1 \end{aligned} \quad (29)$$

или

$$\begin{aligned} f_{(ab)}^{(1)} &= \\ &= \begin{pmatrix} -2ik_1 \lambda_1 & -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1 & -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1 & -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 \\ \cdot & -2ik_1 \lambda_1 & -ik_2 \lambda_1 & -ik_3 \lambda_1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

При $\lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2i\lambda_2 k_2, \quad \bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = -2ik_2 \lambda_2, \quad \bar{f}_3 = 0, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2, \\ \bar{c}_1 &= -ik_3 \lambda_2, \quad \bar{c}_2 = 0, \quad \bar{c}_3 = -ik_1 \lambda_2 \end{aligned} \quad (31)$$

или

$$\begin{aligned} f_{(ab)}^{(2)} &= \\ &= \begin{pmatrix} -2i\lambda_2 k_2 & -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2 & -i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2 & -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2 \\ \cdot & 0 & -ik_1 \lambda_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & -2ik_2 \lambda_2 & -ik_3 \lambda_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (32)$$

При $\lambda_3 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2i\lambda_3 k_3, \quad \bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = 0, \quad \bar{f}_3 = -2ik_3 \lambda_3, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{c}_1 &= -ik_2 \lambda_3, \quad \bar{c}_2 = -ik_1 \lambda_3, \quad \bar{c}_3 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

или

$$\begin{aligned} f_{(ab)}^{(3)} &= \\ &= \begin{pmatrix} -2i\lambda_3 k_3 & -i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3 & -i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3 & -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3 \\ \cdot & 0 & 0 & -ik_1 \lambda_3 \\ \cdot & \cdot & 0 & -ik_2 \lambda_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2ik_3 \lambda_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Эти простейшие калибровочные решения должны раскладываться в линейные комбинации по найденным шести независимым решениям.

Сначала рассмотрим случай $\lambda_1 \neq 0$ ($c_1 = 0$).

Из $f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(1)}$ имеем

$$\begin{pmatrix} f_0 & \left(\frac{k_0}{2k_1} f_0 + \frac{k_1}{2k_0} f_1 - \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} f_2 - \frac{k_3^2}{2k_0 k_1} f_3 - \frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} c_1 \right) \\ \cdot & f_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{k_0}{2k_2} f_0 - \frac{k_1^2}{2k_0 k_2} f_1 + \frac{k_2}{2k_0} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} f_3 + \frac{k_3}{k_0} c_1 - \frac{k_3}{k_2} d_3 \\ \left(\frac{k_0^2}{2k_1 k_2} f_0 - \frac{k_1}{2k_2} f_1 - \frac{k_2}{2k_1} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} f_3 - \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} d_3 \right) \\ f_2 \\ \cdot \\ \left(-\frac{k_3}{k_1} f_3 - \frac{k_2}{k_1} c_1 + \frac{k_0}{k_1} d_3 \right) \\ c_1 \\ f_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2ik_1 \lambda_1 & -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1 & -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1 & -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 \\ \cdot & -2ik_1 \lambda_1 & -ik_2 \lambda_1 & -ik_3 \lambda_1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует система из 10и уравнений, которая эквивалентна следующей:

$$f_0 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_2 = 0,$$

$$f_3 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_3 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1,$$

$$\frac{k_0}{2k_1} (-2ik_1 \lambda_1) + \frac{k_1}{2k_0} (-2ik_1 \lambda_1) = -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1,$$

$$\frac{k_0}{2k_2} (-2ik_1 \lambda_1) - \frac{k_1^2}{2k_0 k_2} (-2ik_1 \lambda_1) - \frac{k_3}{k_2} \left(-i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 \right) = -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1,$$

$$\frac{k_0^2}{2k_1 k_2} (-2ik_1 \lambda_1) - \frac{k_1}{2k_2} (-2ik_1 \lambda_1) - \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} \left(-i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 \right) = -ik_2 \lambda_1.$$

В результате приходим к соотношениям

$$f_0 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

$$c_1 = 0, \quad d_3 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1, \quad k_0^2 + k_1^2 \equiv k_0^2 + k_1^2,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0.$$

Таким образом, это калибровочное решение задается так:

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(1)}, \quad f_0 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_1 = -2ik_1 \lambda_1,$$

$$f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_3 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1. \quad (35)$$

Приведем конечные результаты для двух оставшихся калибровочных решений.

Случай $\lambda_2 \neq 0$ ($c_2 = 0$)

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^2, \quad f_0 = -2i\lambda_2 k_2, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = -2ik_2 \lambda_2,$$

$$f_3 = 0, \quad c_1 = -ik_3 \lambda_2, \quad d_3 = -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2. \quad (36)$$

Случай $\lambda_3 \neq 0$ ($c_3 = 0$)

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^3, \quad f_0 = -2i\lambda_3 k_3, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

$$f_3 = -2ik_3 \lambda_3, \quad c_1 = -ik_2 \lambda_3,$$

$$d_3 = -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3. \quad (37)$$

Среди общего решения исходной системы уравнений существуют три, которые могут быть отождествлены с калибровочными:

$$f_0^1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_1^1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_2^1 = 0,$$

$$f_3^1 = 0, \quad c_1^1 = 0, \quad d_3^1 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1;$$

$$f_0^2 = -2ik_2 \lambda_2, \quad f_1^2 = 0, \quad f_2^2 = -2ik_2 \lambda_2,$$

$$f_3^2 = 0, \quad c_1^2 = -ik_3 \lambda_2, \quad d_3^2 = -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2;$$

$$f_0^3 = -2ik_3 \lambda_3, \quad f_1^3 = 0, \quad f_2^3 = 0, \quad f_3^3 = -2ik_3 \lambda_3,$$

$$c_1^3 = -ik_2 \lambda_3, \quad d_3^3 = -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3. \quad (38)$$

Приведем также явный вид общего решения уравнения

$$f_{(ab)} =$$

$$= f_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{k_0}{2k_1} & \frac{k_0}{2k_2} & 0 \\ \cdot & 0 & \frac{k_0^2}{2k_1 k_2} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_1}{2k_0} & -\frac{k_1^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \cdot & 1 & -\frac{k_1}{2k_2} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ f_2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2^2}{2k_0 k_1} & \frac{k_2}{2k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_2}{2k_1} & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ f_3 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_3^2}{2k_0 k_1} & \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \cdot & 0 & \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} & -\frac{k_3}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ c_1 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

или коротко

$$(f_{(ab)}) = f_0 F_0 + f_1 F_1 + f_2 F_2 + c_1 C_1 + d_3 D_3. \quad (39)$$

Для трех случаев из (38) соотношение (39) принимает соответственный вид

$$f_{(ab)}^{(1)} = f_0^{(1)} F_0 + f_1^{(1)} F_1 + d_3^{(1)} D_3,$$

$$f_{(ab)}^{(2)} = f_0^{(2)} F_0 + f_2^{(2)} F_2 + c_1^{(2)} C_1 + d_3^{(2)} D_3, \quad (40)$$

$$f_{(ab)}^{(3)} = f_0^{(3)} F_0 + f_3^{(3)} F_2 + c_1^{(3)} C_1 + d_3^{(3)} D_3.$$

Характер присутствия отдельных калибровочных решений внутри общего решения можно пояснить так:

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & c_1 & d_3 \\ (1): & f_0^{(1)} & f_1^{(1)} & 0 & 0 & d_3^{(1)} \\ (2): & f_0^{(2)} & 0 & f_2^{(2)} & 0 & c_1^{(2)} & d_3^{(2)} \\ (3): & f_0^{(3)} & 0 & 0 & f_3^{(3)} & c_1^{(3)} & d_3^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Решения F_1, F_2, F_3 являются калибровочными и поэтому могут быть отброшены как нефизические. Проследим за этим детальнее. Фактически нужно исследовать следующую величину

$$f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3)}, \quad (42)$$

учитывая при этом три равенства

$$\begin{aligned} f_1 = f_1^{(1)} &= -2ik_1\lambda_1, & f_2 = f_2^{(3)} &= -2ik_2\lambda_2, \\ f_3 = f_3^{(3)} &= -2ik_3\lambda_3. \end{aligned} \quad (43)$$

В явном виде соотношение (41) записывается так:

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3)} = \\ &= f_0 \cdot F_0 + f_1 \cdot F_1 + f_2 \cdot F_2 + f_3 \cdot F_3 + c_1 \cdot C_1 + \\ &+ d_3 \cdot D_3 + 2k_1\lambda_1 \cdot F_0 + 2ik_1\lambda_1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + \\ &+ 0 \cdot F_3 + 0 \cdot C_1 + \frac{ik_3k_1}{k_0}\lambda_1 D_3 + \\ &+ 2ik_2\lambda_2 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 2ik_2\lambda_2 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + \\ &+ ik_3\lambda_2 \cdot C_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0}\lambda_2 D_3 + \\ &+ 2ik_3\lambda_3 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 2ik_3\lambda_3 \cdot F_3 + \\ &+ ik_2\lambda_3 \cdot C_1 + i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 \cdot D_3, \end{aligned}$$

что после приведения подобных дает

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= (f_0 - \bar{f}_0) \equiv 0 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + \\ &+ 0 \cdot F_3 + (c_1 + ik_3\lambda_2 + ik_2\lambda_3) \cdot C_1 + \\ &+ \left(d_3 + \frac{ik_3k_1}{k_0}\lambda_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0}\lambda_2 + i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 \right) \cdot D_3. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение исходной системы уравнений, не содержащее калибровочных компонент, выглядит так:

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= (c_1 + ik_3\lambda_2 + ik_2\lambda_3)C_1 + \\ &+ \left(d_3 + \frac{ik_3k_1}{k_0}\lambda_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0}\lambda_2 + i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 \right) D_3 = \\ &= \mu_1 C_1 + \mu_2 D_3 = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2k_3}{k_0k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_0k_3}{k_1k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Этот симметричный тензор содержит два произвольных числовых параметра μ_1 и μ_2 , следовательно, он описывает два линейно независимых решения уравнения для безмассовой частицы со спином 2.

Заключение

Выполненный анализ показывает необходимость присутствия скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2. Оно обеспечивает корректное описание калибровочной симметрии в этой теории. Возможности расширения описания калибровочной симметрии в теории поля со спином 2 на фоне псевдориманова пространства-времени обсуждались в работе [14].

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
2. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.
3. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
4. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1950. – Вып. 20, № 1. – С. 27–38.
5. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Ученые записки Беларускаго государственного университета имени В. И. Ленина. Серия физика и математика. – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.
6. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325–326.
7. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Annals of Physics. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145.
8. Федоров, Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф. И. Федоров // Доклады Академии наук СССР. – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 802–805.
9. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Physical Review. – 1969. – Vol. 188, № 5. – P. 2218–2222.
10. Кисель, В. В. К релятивистским волновым уравнениям для частицы со спином 2 / В. В. Кисель // Весці НАН

Беларусі. Серія фіз.-мат. навук. – 1986. – Т. 5. – С. 94–99.

11. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
12. Ovsyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2014. – 486 p.
13. Кисель, В. В. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 / В. В. Кисель, Е. М. Овсийук, О. В. Веко [и др.] // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 58–63.
14. Dudko, I. G. Spin 2 particle with anomalous magnetic moment in Riemann space-time, restriction to massless case, gauge symmetry / I. G. Dudko, O. A. Semenyuk, V. V. Kisel [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 2. – P. 286–296.

References

1. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
2. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.
3. Gel'fand, I. M. Obshchie relyativistski invariantnye uravneniya i beskonechnomernye predstavleniya grupy Lorentza [General relativistically invariant equations and infinite dimensional representations of the Lorentz group] / I. M. Gel'fand, A. M. Yaglom // Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. – 1948. – Vol. 18, № 8. – P. 703–733.
4. Fradkin, E. S. K teorii chastits s vysshimi spinami [To the theory of the higher spin particles] / E. S. Fradkin // Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. – 1950. – Vol. 20, № 1. – P. 27–38.
5. Fedorov, F. I. K teorii chastitsy so spinom 2 [Towards a theory of a particle with spin 2] / F. I. Fedorov // Uchenye zapiski Belarusskogo gosudarstvennogo uni-

versiteta imeni V. I. Lenina. Seriya fizika i matematika [Scientific notes of the Belarusian State University named after V. I. Lenin. Series physics and mathematics]. – 1951. – Vol. 12. – P. 156–173.

6. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325–326.
7. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Annals of Physics. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145.
8. Fedorov, F. I. Uravneniya pervogo poryadka dlya gravitacionnogo polya [First order equation for a gravitational field] / F. I. Fedorov // Doklady Akademii Nauk SSSR [Reports of the National Academy of Sciences of the USSR]. – 1968. – Vol. 179, № 4. – P. 802–805.
9. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Physical Review. – 1969. – Vol. 188, № 5. – P. 2218–2222.
10. Kisel, V. V. K relyativistskim volnovym uravneniyam dlya chasticy so spinom 2 [To the relativistic wave equations for the spin 2 particle] / V. V. Kisel // Vesci NAN Belarusi. Seriya fiz.-mat. navuk [Vesti AN of Belarus. Ser. Phys-math.]. – 1986. – Т. 5. – С. 94–99.
11. Red'kov, V. M. Particle fields in Riemannian space and Lorentz group / V. M. Red'kov. – Минск: Belarusskaja nauka [Belarusian Science], 2009. – 486 p.
12. Ovsyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2014. – 486 p.
13. Kisel, V. V. Analiz vklada kalibrovocnyh stepenej svobody v strukturu tenzora energii-impul'sa bezmassovogo polya so spinom 2 [Analysis of the contribution of gauge degrees of freedom to the structure of the energy-momentum tensor of a massless field with spin 2] / V. V. Kisel, E. M. Ovsyuk, O. V. Veko [et al.] // Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 2015. – № 2. – P. 58–63.
14. Dudko, I. G. Spin 2 particle with anomalous magnetic moment in Riemann space-time, restriction to massless case, gauge symmetry / I. G. Dudko, O. A. Semenyuk, V. V. Kisel [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 2. – P. 286–296.

Для цитирования:

Бурый, А. В. О роли скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2 / А. В. Бурый // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 48–55. DOI: 10.19110/1994-5655-2024-6-48-55

For citation:

Bury, A. V. On the role of scalar field in the theory of massless spin 2 particle / A. V. Bury // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 48–55. DOI: 10.19110/1994-5655-2024-6-48-55

Дата поступления рукописи: 08.07.2025

Received: 08.07.2025

Vector particle with polarizability in the uniform magnetic field

A. V. Bury¹, A. V. Ivashkevich¹, P. O. Sachenok²,
E. M. Ovsyuk²

¹B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

²Mozyr State Pedagogical University
named after I. P. Shamyakin,
Mozyr, Belarus

anton.buryy.97@mail.ru
ivashkevich.alina@yandex.by
polinasacenok@gmail.com
e.ovsiyuk@mail.ru

Abstract

There is a 15-component equation, which describes the vector particle with the additional electromagnetic characteristics – polarizability. We specify this equation in cylindrical coordinates and in presence of the external uniform magnetic field. After separating the variables, the system of 15 first-order differential equations in the polar coordinate is derived. To resolve this system, we apply the algebraization method. In this approach, the complete wave function is decomposed into the sum of three parts. Dependence of the components in each part is determined by only one corresponding function $F_i(r)$, $i = 1, 2, 3$. We construct these three basic variables in terms of the confluent hypergeometric functions. There is a quantization rule for some spectral parameter exists. Additionally, there arises an algebraic homogenous system of 15 equations, which completely determines the structure of 15-component solutions. From vanishing the determinant of this linear system, we derive a cubic algebraic equation with respect to the energy parameter ε^2 . Its solutions are found in analytical form and studied numerically. In this way, we have obtained three energy spectra. One does not depend on the polarizability parameter and the other two are substantially modified by this characteristics.

Keywords:

spin 1 particle, polarizability, cylindrical symmetry, external uniform magnetic field, separation of the variables, algebraization method, exact solutions, energy spectra

Векторная частица с поляризуемостью в однородном магнитном поле

А. В. Бурый¹, А. В. Ивашкевич¹, П. О. Саченок²,
Е. М. Овсиюк²

¹Институт физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

²Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина,
г. Мозырь, Беларусь

anton.buryy.97@mail.ru
ivashkevich.alina@yandex.by
polinasacenok@gmail.com
e.ovsiyuk@mail.ru

Аннотация

Известно 15-компонентное уравнение, описывающее векторную частицу с дополнительной электромагнитной характеристикой – поляризуемостью. Это уравнение исследуется в цилиндрических координатах при наличии внешнего однородного магнитного поля. После разделения переменных получена система 15 дифференциальных уравнений первого порядка в полярных координатах. Для решения этой системы используется метод алгебраизации. В этом подходе полная 15-компонентная волновая функция раскладывается на сумму трех частей. Зависимость компонент в каждой части определяется только одной функцией $F_i(r)$, $i = 1, 2, 3$. Три основные переменные построены в терминах вырожденных гипергеометрических функций. При этом существует правило квантования для некоторого спектрального параметра. Дополнительно возникает алгебраическая однородная система из 15 уравнений, которая полностью определяет структуру 15-компонентных решений. Из обращения в нуль определителя этой линейной системы получено кубическое алгебраическое уравнение относительно параметра энергии ε^2 . Его решения найдены в аналитическом виде и исследованы численно. Получено три энергетических спектра, один из которых тривиален и не зависит от параметра поляризуемости, а два других существенно модифицированы этой дополнительной характеристикой.

Ключевые слова:

частица со спином 1, поляризуемость, цилиндрическая симметрия, внешнее однородное магнитное поле, разделение переменных, метод алгебраизации, точные решения, энергетические спектры

Introduction

In the present paper, we will study a vector particle with additional electromagnetic characteristics – polarizability in presence of the external uniform magnetic field. We specify the relevant 15-component equation [1–6] to cylindrical coordinates and tetrad. After separating the variables, we derive the system of 15 first-order differential equations in polar coordinate. To resolve this system, we apply the algebraization method. Within this approach, the complete 15-component wave function is presented as a sum of three constituents. Dependence of each constituent on the polar coordinates is determined by only one function $F_i(r)$, $i = 1, 2, 3$. We find expressions for these variables $F_i(r)$ in terms of the confluent hypergeometric functions. At this there arises a quantization rule due to the presence of the external magnetic field. Besides, there is an algebraic homogenous system of 15 equations. Its solutions determine the structure of 15-component solutions. From vanishing the determinant of the system, it follows a third-order equation with respect to the energy parameter ε^2 . Its solutions are found in analytic form and studied numerically. So, we have found three series of physically interpretable energy levels. One does not depend on the polarizability parameter σ and the other two are substantially modified by the polarizability parameter σ .

1. The basic equation

Initial equation has the form [7]

$$\left[\Gamma^\alpha(x) \left(\partial_\alpha + B_\alpha - i \frac{e}{\hbar} A_\alpha \right) - i \frac{Mc}{\hbar} \right] \Psi(x) = 0,$$

where

$$\Gamma^\alpha(x) = \Gamma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad B_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha e_{(b)\beta},$$

$e_{(a)}^\alpha(x)$ is a tetrad, J^{ab} represents generators of the used 15-component set of tensors. Below we will use the notation M instead of Mc/\hbar . To the uniform magnetic field $\vec{B} = (0, 0, B)$, there corresponds the following 4-potential

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}, \quad A_z = 0.$$

We will use the diagonal cylindrical tetrad and the relevant Ricci rotation coefficients

$$\gamma_{ab0}(x) = 0, \quad \gamma_{ab1}(x) = 0,$$

$$\gamma_{ab2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & -1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ab3}(x) = 0.$$

The local matrices $\Gamma^\alpha(x)$ have the form

$$\Gamma^\alpha(x) = (\Gamma^t(x), \Gamma^r(x), \Gamma^\phi(x), \Gamma^z(x)) = \left(\Gamma^0, \Gamma^1, \frac{\Gamma^2}{r}, \Gamma^3 \right).$$

In this way, we get the following explicit form of the basic free equation

$$\left[\Gamma^0 \partial_0 + \Gamma^1 \partial_r + \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + J^{12}) + \Gamma^3 \partial_z - M \right] \Psi(t, r, \phi, z) = 0. \quad (1)$$

The presence of the magnetic field may be taken into account by using the formal change in eq. (1):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + J^{12}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{1}{r} \Gamma^2 \left(\partial_\phi + \frac{ieB}{2\hbar} r^2 + J^{12} \right). \end{aligned}$$

We will take into account the last replacement later on, besides, we will apply the shortening notation B instead of $eB/(2\hbar)$.

For separating the variables, we need the explicit form of the matrices Γ^α . The most convenient is their representation in the so called cyclic basis, where the generator J^{12} is diagonal (we will apply the block structure of the matrices with dimensions 1, 1, 3, 1, 3, 3, 3, see in [7]):

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & 0 \\ 1 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & -\sigma I & 0 \\ 1 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & \pm I & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\vec{e}_i & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & -\sigma \vec{e}_i & \vec{0} \\ \vec{e}_i^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & -\sigma \tau_i \\ 0 & 0 & \vec{0} & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{e}_i^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & -(\pm) \vec{e}_i^t & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0}^t & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t & (\pm) \tau_i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where $\vec{e}_i, \vec{e}_i^t, \tau$ stand for the matrices

$$\vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\vec{e}_2 = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right), \quad \vec{e}_3 = (0, 1, 0),$$

$$\vec{e}_1^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2^t = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = -i \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

the generator J^{12} is diagonal, $J^{12} = \text{diag}(0, 0, \tau_3, 0, \tau_3, \tau_3, \tau_3)$.

2. Separating the variables

Let us search for solutions in the form of cylindrical waves:

$$\Psi\{C, C_0, \vec{C}, \Phi_0, \vec{\Phi}, \vec{E}, \vec{H}\}, \quad C(x) = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} C(r),$$

$$C_0(x) = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} C_0(r),$$

$$\vec{C}(x) = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} C_1(r) \\ C_2(r) \\ C_3(r) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_0(x) = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} \Phi_0(r),$$

$$\vec{\Phi}(x) = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} \Phi_1(r) \\ \Phi_2(r) \\ \Phi_3(r) \end{pmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} E_1(r) \\ E_2(r) \\ E_3(r) \end{pmatrix},$$

$$\vec{H}(x) = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \end{pmatrix}.$$

Taking in mind the block structure of the wave function and matrices, we obtain the block equations

$$-i\frac{\epsilon}{\hbar c}C_0 - \vec{e}_1 \frac{d}{dr}\vec{C} - \frac{1}{r}\vec{e}_2(im + \tau_3)\vec{C} - ik\vec{e}_3\vec{C} = MC,$$

$$-\vec{e}_1 \frac{d}{dr}\vec{E} - \frac{1}{r}\vec{e}_2(im + \tau_3)\vec{E} - ik\vec{e}_3\vec{E} = MC_0,$$

$$i\frac{\epsilon}{\hbar c} - \tau_1 \frac{d}{dr}\vec{H} - \frac{1}{r}\tau_2(im + \tau_3)\vec{H} - ik\tau_3\vec{H} = M\vec{C},$$

$$-i\frac{\epsilon}{\hbar c}\sigma C - \frac{1}{r}\vec{e}_2(im + \tau_3)\vec{E} - ik\vec{e}_3\vec{E} = M\Phi_0,$$

$$i\frac{\epsilon}{\hbar c}\vec{E} + \sigma\vec{e}_1 \frac{d}{dr}C - \tau_1 \frac{d}{dr}\vec{H} +$$

$$+ \frac{1}{r} \left[im\sigma\vec{e}_2 C - \tau_2(im + \tau_3)\vec{H} \right] +$$

$$+ ik(\sigma\vec{e}_3 C - \tau_3\vec{H}) = M\vec{\Phi},$$

$$-i\frac{\epsilon}{\hbar c}\vec{\Phi} - \vec{e}_1 \frac{d}{dr}\Phi_0 - \frac{1}{r}im\vec{e}_2\Phi_0 - ik\vec{e}_3\Phi_0 = M\vec{E},$$

$$\tau_1 \frac{d}{dr}\vec{\Phi} + \frac{1}{r}\tau_2(im + \tau_3)\vec{\Phi} + ik\tau_3\vec{\Phi} = M\vec{H}.$$

With the use of the shortening notations (to take into account the presence of the magnetic field, we make the change $m \Rightarrow m + Br^2$):

$$m\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = a_m,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = b_m,$$

we can present the resulting system of equations as follows

$$-i\epsilon C_0 - b_{m-1}C_1 - a_{m+1}C_3 - ikC_2 = MC;$$

$$-b_{m-1}E_1 - a_{m+1}E_3 - ikE_2 = MC_0,$$

$$i\epsilon E_1 + ia_m H_2 - kH_1 = MC_1,$$

$$i\epsilon E_2 - ib_{m-1}H_1 + ia_{m+1}H_3 = MC_2;$$

$$i\epsilon E_3 - ib_m H_2 + kH_3 = MC_3,$$

$$-i\epsilon\sigma C - b_{m-1}E_1 - a_{m+1}E_3 - ikE_2 = M\Phi_0,$$

$$i\epsilon E_1 - \sigma a_m C + ia_m H_2 - kH_1 = M\Phi_1,$$

$$i\epsilon E_2 - ib_{m-1}H_1 + ia_{m+1}H_3 + ik\sigma C = M\Phi_2,$$

$$i\epsilon E_3 - \sigma b_m C - ib_m H_2 + kH_3 = M\Phi_3;$$

$$-i\epsilon\Phi_1 + a_m\Phi_0 = ME_1, \quad -i\epsilon\Phi_2 - ik\Phi_0 = ME_2,$$

$$-i\epsilon\Phi_3 + b_m\Phi_0 = ME_3, \quad -ia_m\Phi_2 + k\Phi_1 = MH_1,$$

$$ib_{m-1}\Phi_1 - ia_{m+1}\Phi_3 = MH_2, \quad ib_m\Phi_2 - k\Phi_3 = MH_3.$$

3. Solving the system of equations, algebraization method

Analyzing the structure of the above equations, we can notice that they may be transformed to algebraic form, if the complete wave function is presented as the sum of three parts and each part is determined by only one corresponding function $F_1(r), F_2(r), F_3(r)$:

$$\Psi = \Psi_1(r) + \Psi_2(r) + \Psi_3(r),$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(r) & \left(C(r), C_0(r), C_1(r), C_2(r), C_3(r), \Phi_0(r), \Phi_1(r), \right. \\ & \left. \Phi_2(r), \Phi_3(r), E_1(r), E_2(r), E_3(r), H_1(r), H_2(r), H_3(r) \right)^t = \\ & = \left(C, C_0, 0, C_2, 0, \Phi_0, 0, \Phi_2, 0, 0, E_2, 0, 0, H_2, 0 \right)^t F_1(r) + \\ & + \left(0, 0, C_1, 0, 0, 0, \Phi_1, 0, 0, E_1, 0, 0, H_1, 0, 0 \right)^t F_2(r) + \\ & + \left(0, 0, 0, 0, C_3, 0, 0, 0, \Phi_3, 0, 0, E_3, 0, 0, H_3 \right)^t F_3(r), \end{aligned}$$

where t denotes transposition. Additionally the following differential constraints should be imposed

$$b_{m-1}F_2(r) = \alpha_1 F_1(r), \quad a_m F_1(r) = \alpha_3 F_2(r),$$

$$a_{m+1}F_3(r) = \alpha_2 F_1, \quad b_m F_1(r) = \alpha_4 F_3(r),$$

where $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ are some numerical parameters. In the last constraints, without loss of generality, we can set $\alpha_3 = \alpha_1, \alpha_4 = \alpha_2$. Then we get

$$b_{m-1}F_2(r) = \alpha_1 F_1(r), \quad a_m F_1(r) = \alpha_1 F_2(r),$$

$$a_{m+1}F_3(r) = \alpha_2 F_1, \quad b_m F_1(r) = \alpha_2 F_3(r),$$

whence follow the second-order equations for the separate functions:

$$(b_{m-1}a_m - \alpha_1^2)F_1(r) = 0, \quad (a_m b_{m-1} - \alpha_1^2)F_2(r) = 0,$$

$$(a_{m+1}b_m - \alpha_2^2)F_1(r) = 0, \quad (b_m a_{m+1} - \alpha_2^2)F_3(r) = 0.$$

We will turn to these equations later on.

In this way, we arrive at the following algebraic system

$$\begin{aligned} -i\epsilon C_0 - \alpha_1 C_1 - ikC_2 - \alpha_2 C_3 &= MC, \\ -\alpha_1 E_1 - ikE_2 - \alpha_2 E_3 &= MC_0, \\ i\epsilon E_1 - ikH_1 + i\alpha_1 H_2 &= MC_1, \\ i\epsilon E_2 - i\alpha_1 H_1 + i\alpha_2 H_3 &= MC_2, \\ i\epsilon E_3 - i\alpha_2 H_2 + kH_3 &= MC_3, \\ -i\epsilon\sigma C - \alpha_1 E_1 - ikE_2 - \alpha_2 E_3 &= M\Phi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sigma\alpha_1 C + i\epsilon E_1 - kH_1 + i\alpha_1 H_2 &= M\Phi_1, \\ ik\sigma C + i\epsilon E_2 - i\alpha_1 H_1 + i\alpha_2 H_3 &= M\Phi_2, \\ -\sigma\alpha_2 C + i\epsilon E_3 - i\alpha_2 H_2 + kH_3 &= M\Phi_3, \\ \alpha_1\Phi_0 - i\epsilon\Phi_1 &= ME_1, \quad -ik\Phi_0 - i\epsilon\Phi_2 = ME_2, \\ \alpha_2\Phi_0 - i\epsilon\Phi_3 &= ME_3, \quad k\Phi_1 - i\alpha_1\epsilon\Phi_2 = MH_1, \\ i\alpha_1\Phi_1 - i\alpha_2\Phi_3 &= MH_2, \quad i\alpha_2\Phi_2 - k\Phi_3 = MH_3. \end{aligned}$$

It may be presented in the matrix form $A_{15 \times 15} \Psi = 0$, where matrix $A_{15 \times 15}$ is as follows

$$A_{15 \times 15} = \begin{pmatrix} -M & -i\epsilon & -\alpha_1 & -ik & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & -ik & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\epsilon & 0 & 0 & -k & i\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\epsilon & 0 & -i\alpha_1 & 0 & i\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\epsilon & 0 & -i\alpha_2 & k \\ -i\epsilon\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & -ik & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & i\epsilon & 0 & 0 & -k & i\alpha_1 & 0 \\ ik\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & i\epsilon & 0 & -i\alpha_1 & 0 & i\alpha_2 \\ -\sigma\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & i\epsilon & 0 & -i\alpha_2 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & -i\epsilon & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ik & 0 & -i\epsilon & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & -i\epsilon & 0 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & -i\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\alpha_1 & 0 & -i\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\alpha_2 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & -M \end{pmatrix}.$$

From vanishing its determinant, we get

$$\begin{aligned} \det A &= -M^5(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2 + M^2 - \epsilon^2) \times \\ &\times \left\{ \alpha_1^6 \sigma(k^2 + M^2 - \epsilon^2) + \alpha_1^4(k^2 + M^2 - \epsilon^2) \times \right. \\ &\times [-\alpha_2^2 \sigma + \sigma(k^2 - \epsilon^2) + M^2(\sigma + 1)] - \\ &- \alpha_1^2 \{ \alpha_2^4(k^2 + M^2 - \epsilon^2) - 2M^4(k^2 + M^2 - \epsilon^2) + \\ &+ 2\alpha_2^2 [k^2(M^2(2\sigma + 1) - 2\sigma\epsilon^2) + k^4\sigma + \\ &+ M^4(\sigma - 1) - M^2(2\sigma + 1)\epsilon^2 + \sigma\epsilon^4] \} + \\ &+ (k^2 + M^2 - \epsilon^2) [\alpha_2^6 \sigma + \alpha_2^4(\sigma(k^2 - \epsilon^2) + M^2(\sigma + 1)) + \\ &+ M^4(k^2 + M^2 - \epsilon^2) + 2\alpha_2^2 M^4] \left. \right\} = 0. \end{aligned}$$

Further we find three roots:

$$\begin{aligned} \epsilon_0^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2 + M^2, \\ \epsilon_{\pm}^2 &= \frac{1}{2[M^4 + \sigma(\alpha_1^4 + \alpha_2^4 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2)]} \times \\ &\times \left\{ \sigma[(\alpha_1^6 + \alpha_2^6 - \alpha_1^2\alpha_2^4 - \alpha_1^4\alpha_2^2) + \right. \\ &+ (M^2 + k^2)(2\alpha_1^4 + 2\alpha_2^4 - 4\alpha_1^2\alpha_2^2)] + \\ &+ (2M^6 + 2\alpha_1^2 M^4 + 2\alpha_2^2 M^4 + \alpha_1^4 M^2 + \\ &+ \alpha_2^4 M^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 M^2 + 2k^2 M^4) \pm \\ &\pm (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)[\sigma^2(\alpha_1^8 + \alpha_2^8 - 2\alpha_1^4\alpha_2^4) + \\ &+ \sigma(4\alpha_1^4 M^4 + 4\alpha_2^4 M^4 - 8\alpha_1^2\alpha_2^2 M + 2\alpha_1^6 M^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2\alpha_2^6 M^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2^4 M^2 - 2\alpha_1^4\alpha_2^2 M^2) + \\ &+ (4M^8 + 4\alpha_1^2 M^6 + 4\alpha_2^2 M^6 + \\ &+ \alpha_1^4 M^4 + \alpha_2^4 M^4 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 M^4)]^{1/2} \left. \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

4. Second-order equations for basic functions

Let us turn to the second-order equations for separate functions. Taking in mind the definitions

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right),$$

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right),$$

we get their explicit form

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - B^2 r^2 - \frac{m^2}{r^2} - 2Bm + 2B + 2\alpha_1^2 \right] F_1 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - B^2 r^2 - \frac{m^2}{r^2} - 2Bm - 2B + 2\alpha_2^2 \right] F_1 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - B^2 r^2 - \frac{(m-1)^2}{r^2} - 2Bm + 2\alpha_1^2 \right] F_2 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - B^2 r^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2} - 2Bm + 2\alpha_2^2 \right] F_3 = 0.$$

From two first equations, it follows a constraint for α_1^2 and α_2^2 :

$$2\alpha_2^2 = 2\alpha_1^2 + 4B.$$

Let us introduce the notation $2B + 2\alpha_1^2 = X$, then the above two equations read

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - B^2 r^2 - \frac{m^2}{r^2} - 2Bm + X \right] F_1 = 0.$$

Correspondingly, two remaining equations are presented as follows

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - B^2 r^2 - \frac{(m-1)^2}{r^2} - 2B(m+1) + X \right] F_2 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - B^2 r^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2} - 2B(m-1) + X \right] F_3 = 0.$$

We can notice the symmetry between them: $m \Leftrightarrow -m$, $B \Leftrightarrow -B$.

Now, we take the inverse transformation $B/2 \Leftrightarrow B$ (see (2)); then we obtain three different equations:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{B^2 r^2}{4} - \frac{m^2}{r^2} - Bm + X \right] F_1 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{B^2 r^2}{4} - \frac{(m-1)^2}{r^2} - B(m+1) + X \right] F_2 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{B^2 r^2}{4} - \frac{(m+1)^2}{r^2} - B(m-1) + X \right] F_3 = 0.$$

In the variable $x = Br^2/2$, they read more symmetrically:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} - \frac{(m/2)^2}{x^2} + \frac{1}{x} \left(-\frac{m}{2} + \frac{X}{2B} \right) \right] F_1 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} - \frac{[(m+1)/2]^2}{x^2} + \frac{1}{x} \left(-\frac{m-1}{2} + \frac{X}{2B} \right) \right] F_2 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} - \frac{[(m-1)/2]^2}{x^2} + \frac{1}{x} \left(-\frac{m+1}{2} + \frac{X}{2B} \right) \right] F_3 = 0.$$

These three equations are of the same type. It is enough to examine the first one, and the similar results for the remaining two can be obtained by formal changes. We are looking for solutions of first equation in the form $F_1(x) = x^A e^{Cx} f_1(x)$. For function $f_1(x)$ we get the equation

$$x f_1'' + (2A + 1 + 2Cx) f_1' + \left[\frac{1}{x} (A^2 - (m/2)^2) + \left(2AC + C - \frac{m}{2} + \frac{X}{2B} \right) + x \left(C^2 - \frac{1}{4} \right) \right] f_1 = 0.$$

Let

$$A^2 - (m/2)^2 = 0 \Rightarrow A = \pm |m/2|,$$

$$C^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow C = \pm \frac{1}{2}.$$

To construct solutions related to bound states, we are to set $A = +|m/2|$, $C = -1/2$, then the above equation simplifies

$$x f_1'' + (|m| + 1 - x) f_1' - \left(\frac{|m| + m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{X}{2B} \right) f_1 = 0.$$

It is of confluent hypergeometric type with parameters

$$a = \frac{|m| + m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{X}{2B}, \quad c = |m| + 1,$$

$$F = \Phi(a, c, x).$$

The polynomial condition $a = -n_1$ gives

$$X = +2B \left(\frac{|m| + m}{2} + \frac{1}{2} + n_1 \right) > 0, \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots$$

This spectrum corresponds to the following solutions:

$$F_1(x) = x^{+|m|/2} e^{-x/2} f_1(x),$$

$$f_1(x) = \Phi(-n_1, |m| + 1, x).$$

Other two equations lead to similar results. Thus we have

$$F_1(x) = x^{+|m|/2} e^{-x/2} f_1(x),$$

$$f_1(x) = \Phi(-n_1, |m| + 1, x).$$

$$X = 2B \left(\frac{|m| + m}{2} + \frac{1}{2} + n_1 \right) > B,$$

$$n_1 = 0, 1, 2, \dots;$$

$$F_2(x) = x^{+|m+1|/2} e^{-x/2} f_2(x),$$

$$f_2(x) = \Phi(-n_2, |m+1| + 1, x),$$

$$X = 2B \left(\frac{|m+1| + m - 1}{2} + \frac{1}{2} + n_2 \right) > B,$$

$$n_2 = 0, 1, 2, \dots;$$

$$F_3(x) = x^{+|m-1|/2} e^{-x/2} f_3(x),$$

$$f_3(x) = \Phi(-n_3, |m-1|+1, x),$$

$$X = 2B \left(\frac{|m-1|+m+1}{2} + \frac{1}{2} + n_3 \right) > B,$$

$$n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

In all three cases the quantity X is the same, below we will apply the variant

$$X = 2BN > 0,$$

$$N = \left(\frac{|m|+m}{2} + \frac{1}{2} + n \right), n = 0, 1, 2, \dots$$

Note that parameter N takes half-integer values. Note the formulas

$$X = B + 2\alpha_1^2,$$

$$2\alpha_2^2 = 2B + 2\alpha_1^2 = 2B + (X - B) = B + X,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{X-B}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{X+B}, \quad (3)$$

$$X = 2BN, \quad N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

5. Numerical study of the energy spectra

Taking into account relations (3), we transform equation $\det A = 0$ to the more simple form (it is factorized into two equations)

$$k^2 + M^2 + X - \epsilon^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \epsilon^4 (B^2\sigma + M^4) + \epsilon^2 (-2B^2k^2\sigma - B^2M^2(2\sigma + 1) - \\ - B^2\sigma X - 2k^2M^4 - 2M^4X - 2M^6) + \\ + B^2k^2M^2(2\sigma + 1) + B^2k^4\sigma + B^2k^2\sigma X + \\ + B^2M^4\sigma + B^2M^2\sigma X + 2k^2M^4X + 2k^2M^6 + \\ + k^4M^4 + M^4X^2 + 2M^6X + M^8 = 0. \end{aligned}$$

In dimensionless quantities

$$\frac{\epsilon^2}{M^2} = E^2, \quad \frac{B}{M^2} = b,$$

$$\frac{k^2}{M^2} = K^2, \quad \frac{X}{M^2} = x = 2bN,$$

they read simpler:

$$\epsilon^2 = K^2 + 1 + x,$$

and

$$\begin{aligned} E^4 (b^2\sigma + 1) + E^2 (-2b^2K^2\sigma - b^2(2\sigma + 1) - \\ - b^2\sigma x - 2K^2 - 2x - 2) + b^2K^2(2\sigma + 1) + \\ + b^2K^4\sigma + b^2K^2\sigma x + b^2\sigma + b^2\sigma x + \\ + 2K^2x + 2K^2 + K^4 + x^2 + 2x + 1 = 0. \end{aligned}$$

The second equation leads to the roots

$$E^2 = \frac{1}{2(1+b^2\sigma)} \times$$

$$\times \left[b^2 + 2K^2 + 2x + 2 + (2b^2K^2 + 2b^2 + b^2x)\sigma \pm \right. \\ \left. \pm b\sqrt{b^2 + 4x + 4 + (4b^2\sigma + 2b^2\sigma x + b^2\sigma^2x^2)} \right],$$

$$x = 2bN, \quad N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

Let us detail numerically several particular cases:

$$b = 0.1, K = 0.1, \sigma = 0.01$$

	ϵ_0^2	ϵ_-^2	ϵ_+^2
$N = 1/2$	1.05357	1.01	1.21999
$N = 3/2$	1.14455	1.20086	1.42911
$N = 5/2$	1.22882	1.39241	1.63754
$N = 7/2$	1.30767	1.58449	1.84544
$N = 9/2$	1.38203	1.77703	2.05288
$N = 11/2$	1.45258	1.96995	2.25994
$N = 13/2$	1.51987	2.1632	2.46666
$N = 15/2$	1.5843	2.35674	2.67311

$$b = 1, K = 0.1, \sigma = 0.01$$

	ϵ_0^2	ϵ_-^2	ϵ_+^2
$N = 1/2$	1.41774	1.01	3.9902
$N = 3/2$	2.0025	2.44301	6.53739
$N = 5/2$	2.45153	3.99801	8.96259
$N = 7/2$	2.83019	5.6186	11.3222
$N = 9/2$	3.16386	7.28183	13.6392
$N = 11/2$	3.46554	8.97564	15.9255
$N = 13/2$	3.74299	10.6928	18.1886
$N = 15/2$	4.00125	12.4285	20.4331

$$b = 0.1, K = 0.1, \sigma = 0.001$$

	ϵ_0^2	ϵ_-^2	ϵ_+^2
$N = 1/2$	1.05357	1.01	1.22
$N = 3/2$	1.14455	1.20087	1.42912
$N = 5/2$	1.22882	1.39242	1.63757
$N = 7/2$	1.30767	1.58452	1.84548
$N = 9/2$	1.38203	1.77707	2.05293
$N = 11/2$	1.45258	1.97	2.25999
$N = 13/2$	1.51987	2.16325	2.46673
$N = 15/2$	1.5843	2.3568	2.67318

$$b = 1, K = 0.1, \sigma = 0.001$$

	ϵ_0^2	ϵ_-^2	ϵ_+^2
$N = 1/2$	1.41774	1.01	4.008
$N = 3/2$	2.0025	2.4479	6.5681
$N = 5/2$	2.45153	4.0088	9.00521
$N = 7/2$	2.83019	5.63581	11.3762
$N = 9/2$	3.16386	7.30578	13.7042
$N = 11/2$	3.46554	9.00657	16.0014
$N = 13/2$	3.74299	10.7309	18.2752
$N = 15/2$	4.00125	12.4738	20.5302

Conclusions

We can see that only two obtained spectra depend on the value of additional parameters σ .

Besides, it should be noted that the used algebraization method to solve the system of 15 differential equations is more simple than previously applied method for treating this problem in the paper [7], though the energy spectra are the same.

Also it should be mentioned that the used algebraization method is closely related to method developed by Gronskiy and Fedorov [8] for treating the particle with multi-spins $S = 1/2 \oplus 3/2$, where the three constituents of the complete wave function were fixed with the use of projective operators constructed from generator J^{12} of the field. The algebraization method may be effectively used for separating the variables in various physical problems.

The authors declare no conflict of interest.

References

1. Fedorov, F. I. Volnovye uravneniya s kratnymi predstavleniyami gruppy Lorentsa [Wave equations with repeated representations of the Lorentz group] / F. I. Fedorov, V. A. Pletukhov // *Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk* [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 1969. – № 6. – P. 81–88.
2. Pletukhov, V. A. Volnovoe uravnenie s kratnymi predstavleniyami dlya chasticy so spinom 1 [Wave equation with repeated representations for a spin 1 particle] / V. A. Pletukhov, F. I. Fedorov // *Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk* [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 1970. – № 3. – P. 84–92.
3. Kisel, V. V. Elektricheskaya polarizuemost' chastic so spinom 1 v teorii relyativistskih volnovykh uravnenij [Electrical polarizability of particles with spin 1 in the theory of relativistic wave equations] / V. V. Kisel // *Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk* [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 1982. – № 3. – P. 73–78.
4. Tokarevskaya, N. G. On non-relativistic approximation for charged scalar and vector particles with polarizability and Wigner's time reversion / N. G. Tokarevskaya, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // *Proceedings of XI Ann. Seminar. Nonlinear Phenomena in Complex Systems. Minsk, 2001.* – P. 382–388.
5. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, V. Balan, O. V. Veko, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 418, 414 p.
6. Fields of particles with spin, theory and application / A. V. Ivashkevich, N. G. Krylova, E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. Balan, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2023. – 434 p.
7. Kisel, V. V. Exact solutions for a quantum-mechanical particle with spin 1 and additional intrinsic characteristic in a homogeneous magnetic field / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov [et al.] // *Acta Physica Polonica B.* – 2010. – Vol. 41, № 11. – P. 2347–2363.
8. Гронский, В. К. Магнитные свойства частицы со спином 3/2 / В. К. Гронский, Ф. И. Федоров // *Доклады НАН Беларуси.* – 1960. – Т. 4, № 7. – С. 278–283.

Литература

1. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // *Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1969. – № 6. – С. 81–88.
2. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // *Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1970. – № 3. – С. 84–92.
3. Кисель, В. В. Электрическая поляризуемость частиц со спином 1 в теории релятивистских волновых уравнений / В. В. Кисель // *Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1982. – № 3. – С. 73–78.
4. Tokarevskaya, N. G. On non-relativistic approximation for charged scalar and vector particles with polarizability and Wigner's time reversion / N. G. Tokarevskaya, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // *Proceedings of XI Ann. Seminar. Nonlinear Phenomena in Complex Systems. Minsk, 2001.* – P. 382–388.
5. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, V. Balan, O. V. Veko, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 418, 414 p.
6. Fields of particles with spin, theory and application / A. V. Ivashkevich, N. G. Krylova, E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. Balan, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2023. – 434 p.
7. Kisel, V. V. Exact solutions for a quantum-mechanical particle with spin 1 and additional intrinsic characteristic in a homogeneous magnetic field / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov [et al.] // *Acta Physica Polonica B.* – 2010. – Vol. 41, № 11. – P. 2347–2363.
8. Гронский, В. К. Магнитные свойства частицы со спином 3/2 / В. К. Гронский, Ф. И. Федоров // *Доклады НАН Беларуси.* – 1960. – Т. 4, № 7. – С. 278–283.

Для цитирования:

Бурый, А. В. Векторная частица с поляризуемостью в однородном магнитном поле / А. В. Бурый, А. В. Ивашкевич, П. О. Саченко [и др.] // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 56–63. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-56-63

For citation:

Bury, A. V. Vector particle with polarizability in the uniform magnetic field / F. V. Bury, A. V. Ivashkevich, P. O. Sachenok [et al.] // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 56–63. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-56-63

Дата поступления рукописи: 28.07.2025

Received: 28.07.2025

Нерелятивистское приближение для частицы со спином 3/2 в гравитационном поле

А. В. Ивашкевич

Институт физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

ivashkevich.alina@yandex.by

Аннотация

В работе предлагается основанный на соображениях симметрии простой метод нахождения нерелятивистского уравнения для частицы со спином 3/2 с учетом внешних электромагнитных и гравитационных полей, основанный на исходном релятивистском уравнении и выделении больших и малых компонент волновой функции в нерелятивистском пределе с использованием метода проективных операторов. Сначала этот вопрос рассмотрен в пространстве Минковского, затем результат обобщен на случай искривленного пространства.

Ключевые слова:

частица со спином 3/2, нерелятивистское приближение, проективные операторы, внешние электромагнитные и гравитационные поля

Введение

После классических работ Паули-Фирца и Рариты-Швингера об описании частиц со спином 3/2 [1–3] в научной литературе сохраняется устойчивый интерес к различным аспектам теории этого поля [4–23]. В работе предлагается простой метод нахождения уравнения паулиевского типа для частицы со спином 3/2, сначала этот вопрос рассмотрен в пространстве Минковского, затем результат обобщен на случай пространства с кривизной.

Нерелятивистское приближение в релятивистских волновых уравнениях возможно (независимо от величины спина частицы) в классе пространств с метрикой

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

$$e_{(a)\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{(i)k}(x) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

При этом выражения для связности существенно упрощаются [1]:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} J^{ik} e_{(i)}^m (\nabla_0 e_{(k)m}),$$

$$\Gamma_l = \frac{1}{2} J^{ik} e_{(i)}^m (\nabla_l e_{(k)m}), \quad (2)$$

The nonrelativistic approximation for a spin 3/2 particle in gravitation field

A. V. Ivashkevich

B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

ivashkevich.alina@yandex.by

Abstract

In the paper, a new and simple approach to derive the non-relativistic equation for a spin 3/2 particle in presence of external electromagnetic and gravitational fields is proposed. It is based on the initial relativistic equation and the general method to determine the large and small components of the wave function in the non-relativistic limit with the use of projective operator method. First The problem is first solved in Minkowsly space, after that this approach is extended to curved space-time background.

Keywords:

spin 3/2 particle, non-relativistic approximation, projective operators, external electromagnetic and gravitational fields

вклад в связность от генераторов J^{0k} отсутствует; используется следующее обозначение для трех генераторов $J^{ik} = \sigma^{ik} \otimes I + I \otimes j^{ik}$; релятивистская волновая функция является вектор-биспинором относительно группы Лоренца.

1. Нерелятивистское уравнение в пространстве Минковского

Вначале обратимся к трансформационным свойствам нерелятивистской волновой функции относительно группы вращений. При этом 2-мерные спиноры, входящие в биспинор, преобразуются относительно группы вращений одинаково:

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} \Phi_{1(0)} & \Phi_{1(1)} & \Phi_{1(2)} & \Phi_{1(3)} \\ \Phi_{2(0)} & \Phi_{2(1)} & \Phi_{2(2)} & \Phi_{2(3)} \\ \varphi_{1(0)} & F_{1(1)} & F_{1(2)} & F_{1(3)} \\ \varphi_{2(0)} & F_{2(1)} & F_{2(2)} & F_{2(3)} \end{pmatrix},$$

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} \Phi & \vec{\Phi} \\ \varphi & \vec{F} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Законы преобразования относительно группы вращений (глобальной или локальной) такие:

$$\begin{aligned}\Phi' &= B\Phi, \varphi' = B\varphi, \Phi' = (B \otimes O)\Phi, \\ F' &= (B \otimes O)F,\end{aligned}\quad (4)$$

где матрицы B и O описывают преобразования вращения для 2-спиноров и 3-векторов.

Из более детального изложения в [2] следует, что если в полной 16-компонентной волновой функции оставить только большие компоненты, то первый столбец при этом зануляется (в нем содержатся только малые компоненты):

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} 0 & L_1 & L_3 & L_5 \\ 0 & L_2 & L_4 & L_6 \\ 0 & L_1 & L_3 & L_5 \\ 0 & L_2 & L_4 & L_6 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

и закон преобразования для оставшихся больших компонент такой:

$$\begin{aligned}\Psi^+ &= \begin{pmatrix} \Phi_{1(1)} & \Phi_{1(2)} & \Phi_{1(3)} \\ \Phi_{2(1)} & \Phi_{2(2)} & \Phi_{2(3)} \\ F_{1(1)} & F_{1(2)} & F_{1(3)} \\ F_{2(1)} & F_{2(2)} & F_{2(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ F \end{pmatrix}, \\ \Phi' &= (B \otimes O)\Phi, F' = (B \otimes O)F;\end{aligned}\quad (6)$$

достаточно следить за двумя первыми строками. Найдем соответствующие формулам (6) выражения для генераторов нерелятивистских преобразований

$$J_j = (i/2)\sigma_j \otimes I + I \otimes V_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}V_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ V_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Для операторов $V_k, k = 1, 2, 3$ выполняются коммутационные соотношения $V_1V_2 - V_2V_1 = V_3$ и циклическая перестановка индексов.

Найдем сначала матричное представление для генераторов J_j :

$$\begin{aligned}J_1\Psi &= \begin{pmatrix} \frac{i\Phi_{21}}{2} & \left(\frac{i\Phi_{22}}{2} - \Phi_{13}\right) & \left(\Phi_{12} + \frac{i\Phi_{23}}{2}\right) \\ \frac{i\Phi_{11}}{2} & \left(\frac{i\Phi_{12}}{2} - \Phi_{23}\right) & \left(\frac{i\Phi_{13}}{2} + \Phi_{22}\right) \end{pmatrix}, \\ J_2\Psi &= \begin{pmatrix} \left(\Phi_{13} + \frac{\Phi_{21}}{2}\right) & \frac{\Phi_{22}}{2} & \frac{1}{2}(\Phi_{23} - 2\Phi_{11}) \\ \left(\Phi_{23} - \frac{\Phi_{11}}{2}\right) & -\frac{\Phi_{12}}{2} & \left(-\frac{\Phi_{13}}{2} - \Phi_{21}\right) \end{pmatrix}, \\ J_3\Psi &= \begin{pmatrix} \left(\frac{i\Phi_{11}}{2} - \Phi_{12}\right) & \left(\Phi_{11} + \frac{i\Phi_{12}}{2}\right) & \frac{i\Phi_{13}}{2} \\ \left(-\frac{i\Phi_{21}}{2} - \Phi_{22}\right) & \left(\Phi_{21} - \frac{i\Phi_{22}}{2}\right) & -\frac{i\Phi_{23}}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (8)$$

В 6-мерном представлении имеем

$$\begin{aligned}\Phi^t &= (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{21}, \Phi_{22}, \Phi_{23})^t = \\ &= (L_1, L_3, L_5, L_2, L_4, L_6)^t,\end{aligned}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i/2 \\ i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} i/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i/2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $()^t$ обозначает транспонирование. Вычисляем коммутаторы

$$J_1J_2 - J_2J_1 = J_3 + \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = J_3 + K_3,$$

$$J_2J_3 - J_3J_2 = J_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_1 + K_1,$$

$$J_3J_1 - J_1J_3 = J_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2 + K_2.$$

Квадраты матриц K_i пропорциональны единичной матрице I

$$K_1^2 = K_2^2 = K_3^2 = -I, \quad (10)$$

а для матриц выполняются антикоммутационные соотношения

$$\begin{aligned}K_2K_3 + K_3K_2 &= 0, \quad K_3K_1 + K_1K_3 = 0, \\ K_1K_2 + K_2K_1 &= 0\end{aligned}\quad (11)$$

равенства

$$K_2K_3 = K_1, \quad K_3K_1 = K_2, \quad K_1K_2 = K_3 \quad (12)$$

и коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}K_2K_3 - K_3K_2 &= 2K_1, \quad K_3K_1 - K_1K_3 = 2K_2, \\ K_1K_2 - K_2K_1 &= 2K_3.\end{aligned}$$

Изменением нормировки $S_i = \frac{1}{2}K_i$ они принимают вид перестановочных соотношений для группы вращений

$$\begin{aligned} S_2S_3 - S_3S_2 &= S_1, & S_3S_1 - S_1S_3 &= S_2; \\ S_1S_2 - S_2S_1 &= S_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Если учесть антикоммутирующие $K_2K_3 = -K_3K_2$, $K_3K_1 = -K_1K_3$, $K_1K_2 = -K_2K_1$, то легко получить тождество

$$\begin{aligned} (K_1D_1 + K_2D_2 + K_3D_3)^2 &= -(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) + \\ &+ K_2K_3(D_2D_3 - D_3D_2) + K_3K_1(D_3D_1 - D_1D_3) + \\ &+ K_1K_2(D_1D_3 - D_2D_1), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} (K_1D_1 + K_2D_2 + K_3D_3)^2 &= \\ &= -(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) + ieF_{23}K_2K_3 + \\ &+ ieF_{31}K_3K_1 + ieF_{12}K_1K_2. \end{aligned}$$

Разделив это равенство на $2M$, получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2M} (K_1D_1 + K_2D_2 + K_3D_3)^2 &= \\ &= -\frac{1}{2M} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) + \\ &+ \frac{ie}{M} (F_{23}S_1 + F_{31}S_2 + F_{12}S_3), \end{aligned} \quad (14)$$

которое напоминает структуру гамильтониана для нерелятивистской частицы со спином $3/2$.

Убедимся, что в (14) действительно записано найденное в [2] нерелятивистское уравнение для частицы со спином $3/2$. Исходим из системы уравнений (14), записанной в матричном виде

$$\begin{aligned} iD_0 \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_5 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_6 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2M} D^2 \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_5 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_6 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{ie}{2M} \left\{ F_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ &+ F_{31} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left. + \right\} \end{aligned}$$

$$+ F_{12} \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_5 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_6 \end{pmatrix}.$$

В явном виде имеем шесть уравнений

$$\begin{aligned} iD_0L_1 &= -\frac{1}{2M} D^2L_1 + \mu F_{23}(-iL_2) + \\ &+ \mu F_{31}(-L_2) + \mu F_{12}(-iL_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iD_0L_3 &= -\frac{1}{2M} D^2L_3 + \mu F_{23}(-iL_4) + \\ &+ \mu F_{31}(-L_4) + \mu F_{12}(-iL_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iD_0L_5 &= -\frac{1}{2M} D^2L_5 + \mu F_{23}(-iL_6) + \\ &+ \mu F_{31}(-L_6) + \mu F_{12}(-iL_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iD_0L_2 &= -\frac{1}{2M} D^2L_2 + \mu F_{23}(-iL_1) + \\ &+ \mu F_{31}(+L_1) + \mu F_{12}(+iL_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iD_0L_4 &= -\frac{1}{2M} D^2L_4 + \mu F_{23}(-iL_3) + \\ &+ \mu F_{31}(+L_3) + \mu F_{12}(+iL_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iD_0L_6 &= -\frac{1}{2M} D^2L_6 + \mu F_{23}(-iL_5) + \\ &+ \mu F_{31}(+L_5) + \mu F_{12}(+iL_6). \end{aligned}$$

Учтем в них условия связи (см. в [2])

$$L_3 = (iL_1 - iL_6), \quad L_4 = (-iL_2 - iL_5);$$

вместо iD_0L_3 и iD_0L_4 это дает

$$\begin{aligned} iD_0(L_1 - L_6) &= -\frac{1}{2M} D^2(L_1 - L_6) + \mu F_{23}(iL_2 + iL_5) + \\ &+ \mu F_{31}(L_2 + L_5) + \mu F_{12}(-iL_1 + iL_6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iD_0(L_2 + L_5) &= -\frac{1}{2M} D^2(L_2 + L_5) + \\ &+ \mu F_{23}(iL_1 - iL_6) + \mu F_{31}(+iL_3) + \mu F_{12}(iL_2 + iL_5), \end{aligned}$$

Собираем полученные уравнения в две группы.

Первая группа включает iD_0L_1 , $iD_0(L_1 - L_6)$, iD_0L_6 . Комбинируем уравнения так, чтобы слева получить выражения для $L_1 + L_6$, $2L_1 - L_6$, $2L_6 - L_1$. Имеем

$$\begin{aligned} iD_0(L_1 + L_6) &= -\frac{1}{2M} D^2(L_1 + L_6) + \\ &+ \mu F_{23}(-iL_2 - iL_5) + \mu F_{31}(-L_2 + L_5) + \\ &+ \mu F_{12}(-iL_1 + iL_6), \\ iD_0(2L_1 - L_6) &= -\frac{1}{2M} D^2(2L_1 - L_6) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu F_{23}(-2iL_2 + iL_5) + \mu F_{31}(-2L_2 - L_5) + \\
& \quad +\mu F_{12}(-2iL_1 - iL_6), \\
& iD_0(2L_6 - L_1) = -\frac{1}{2M}D^2(2L_6 - L_1) + \\
& +\mu F_{23}(-2iL_5 + iL_2) + \mu F_{31}(2L_5 + L_2) + \\
& \quad +\mu F_{12}(2iL_6 + iL_1).
\end{aligned}$$

Убеждаемся, что третье уравнение — это разность между первым и вторым, следовательно, третье уравнение можно отбросить.

Вторая группа включает $iD_0L_2, iD_0(L_2 + L_5), iD_0L_5$. Комбинируем уравнения так, чтобы слева получить выражения $L_2 - L_5, 2L_2 + L_5, L_2 + 2L_5$. Тогда приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
& iD_0(L_2 - L_5) = -\frac{1}{2M}D^2(L_2 - L_5) + \\
& +\mu F_{23}(-iL_1 + iL_6) + \mu F_{31}(L_1 + L_6) + \mu F_{12}(iL_2 + iL_5), \\
& iD_0(2L_2 + L_5) = -\frac{1}{2M}D^2(2L_2 + L_5) + \\
& +\mu F_{23}(-2iL_1 - iL_6) + \mu F_{31}(2L_1 - L_6) + \mu F_{12}(2iL_2 - iL_5), \\
& iD_0(L_2 + 2L_5) = -\frac{1}{2M}D^2(L_2 + 2L_5) + \\
& +\mu F_{23}(-iL_1 - 2iL_6) + \mu F_{31}(L_1 - 2L_6) + \mu F_{12}(iL_2 - 2iL_5);
\end{aligned}$$

убеждаемся, что третье уравнение — это разность между вторым и первым; следовательно, третье уравнение можно отбросить. Таким образом, независимыми являются четыре уравнения для $iD_0(L_1 + L_6), iD_0(L_2 - L_5), iD_0(2L_1 - L_6), iD_0(2L_2 + L_5)$.

Введем новую 4-компонентную функцию

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_5 \\ L_6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{3}\Psi_1 + \frac{1}{3}\Psi_3, & L_2 &= \frac{1}{3}\Psi_2 + \frac{1}{3}\Psi_4, \\
L_5 &= \frac{1}{3}\Psi_4 - \frac{2}{3}\Psi_2, & L_6 &= \frac{2}{3}\Psi_1 - \frac{1}{3}\Psi_3.
\end{aligned} \quad (15)$$

В результате система четырех уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}
iD_0\Psi_1 &= -\frac{1}{2M}\Delta\Psi_1 + \frac{ie}{M} \left(\frac{1}{6}iF_{23}(\Psi_2 - 2\Psi_4) - \right. \\
& \quad \left. -\frac{1}{2}F_{31}\Psi_2 + \frac{1}{6}iF_{12}(\Psi_1 - 2\Psi_3) \right), \\
iD_0\Psi_2 &= -\frac{1}{2M}\Delta\Psi_2 + \frac{ie}{M} \left(\frac{1}{6}iF_{23}(\Psi_1 - 2\Psi_3) + \right. \\
& \quad \left. +\frac{1}{2}F_{31}\Psi_1 - \frac{1}{6}iF_{12}(\Psi_2 - 2\Psi_4) \right), \\
iD_0\Psi_3 &= -\frac{1}{2M}\Delta\Psi_3 + \frac{ie}{M} \left(\frac{1}{6}iF_{23}(\Psi_4 - 2\Psi_2) + \right.
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\left. +\frac{1}{6}F_{31}(\Psi_4 - 2\Psi_2) - \frac{1}{2}iF_{12}\Psi_3 \right),$$

$$\begin{aligned}
iD_0\Psi_4 &= -\frac{1}{2M}\Delta\Psi_4 + \frac{ie}{M} \left(-\frac{1}{6}iF_{23}(2\Psi_1 - \Psi_3) + \right. \\
& \quad \left. +\frac{1}{6}F_{31}(2\Psi_1 - \Psi_3) + \frac{1}{2}iF_{12}\Psi_4 \right).
\end{aligned}$$

Эту систему уравнений можно записать в матричном виде

$$\begin{aligned}
iD_0\Psi &= -\frac{1}{2M}\Delta\Psi = \\
&= \frac{ie}{3M} (F_{23}S_1 + F_{31}S_2 + F_{12}S_3) \Psi,
\end{aligned} \quad (17)$$

где $\Psi^t = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^t$, а матрицы

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
S_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
S_3 &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

удовлетворяют коммутаторам $S_1S_2 - S_2S_1 = S_3$ плюс циклическая перестановка индексов. Следовательно, они могут рассматриваться как составляющие оператора спина.

Найдем преобразование, которое приводит матрицу S_3 к диагональному виду:

$$\begin{aligned}
S_3\Psi &= \sigma\Psi, & \bar{\Psi} &= S\Psi, & S^{-1}\bar{\Psi} &= \Psi, \\
SS_3S^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \end{pmatrix} = \bar{S}_3.
\end{aligned}$$

После простых вычислений получаем

$$\begin{aligned}
S &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
S^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad (18)$$

Спиновые матрицы в новом базисе имеют вид

$$\bar{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 & 0 & 0 \\ 3i/2 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -3i/2 \\ 0 & 0 & i/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{S}_3 = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

2. Обобщение на случай римановой геометрии пространства

Можно легко обобщить полученное уравнение в декартовых координатах на общеквариантный случай. Структура нерелятивистского уравнения в любых криволинейных координатах должна записываться так (исходим из 6-мерного уравнения):

$$iD_0\Psi_6 = \frac{1}{2M} \left[K^j(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma_j(x) + ieA_j(x) \right) \right]^2 \Psi_6, \quad (18)$$

$$K^j(x) = K_i e_{(i)}^j(x),$$

$$\Gamma_j(x) = \frac{1}{2} J^{kl} e_{(k)}^n(x) \nabla_j e_{(l)n}(x), \quad (19)$$

где обобщенные производные задаются следующими формулами ($k = 1, 2, 3$):

$$D_0(x) = \partial_0 + ieA_0(x) + \frac{1}{2} (\sigma^{ps} \otimes I + I \otimes j^{ps}) \gamma_{[ps]0}(x). \quad (20)$$

$$D_k(x) = e_{(k)}^j(x) (\partial_j + ieA_j(x)) + \frac{1}{2} (\sigma^{ps} \otimes I + I \otimes j^{ps}) \gamma_{[ps]k}(x). \quad (21)$$

Связи между большими компонентами задаются прежними соотношениями. Также ничего не меняется в алгебраических преобразованиях, показывающих существование только четырех независимых уравнений. Отличие только в том, что во всех преобразованиях и конечном 4-мерном уравнении используются выражения для обобщенных операций дифференцирования. Соответственно, вместо представления (17) получаем более общее уравнение

$$iD_0(x)\Psi = -\frac{1}{2M} (D_1^2(x) + D_2^2(x) + D_3^2(x)) \Psi + \frac{1}{2M} (D_{[23]}S_1 + D_{[31]}S_2 + D_{[12]}S_3) \Psi_4, \quad (22)$$

где введены коммутаторы для обобщенных производных из (21): $D_{[kl]} = D_k(x)D_l(x) - D_l(x)D_k(x)$.

Заключение

Выведенное нерелятивистское уравнение (22) для частицы со спином 3/2 в значительной степени лишь фиксирует его общую математическую структуру. Понятно, что коммутаторы в уравнении (22) предполагают существование дополнительных геометрических членов взаимодействия, обусловленных искривленной структурой пространства (1); при этом следует ожидать появления тензора и скаляра Риччи: $R_{ab}(x), R(x)$. С учетом того, что предполагается вполне определенная структура метрики пространства (1), отличными от нуля будут только компоненты тензора Риччи с отличными от нуля индексами.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Pauli, W. Uber relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // *Phys. Rev.* – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64.
4. Гинзбург, В. Л. К теории частиц со спином 3/2 / В. Л. Гинзбург // *ЖЭТФ.* – 1942. – Т. 12. – С. 425–442.
5. Давыдов, А. С. Волновое уравнение для частицы со спином 3/2 в отсутствии внешних полей / А. С. Давыдов // *ЖЭТФ.* – 1943. – Т. 13. – С. 313–319.
6. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // *Reviews of Modern Physics.* – 1945. – Vol. 17. – № 2-3. – P. 200–216.
7. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с большими спинами / Е. С. Фрадкин // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* – 1950. – Т. 20, № 1. – С. 27–38.
8. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // *Доклады АН СССР.* – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.
9. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц высших спинов с электромагнитными и мезонными полями / В. Я. Файнберг // *Труды Физического института имени Лебедева АН СССР.* – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.
10. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // *Czechoslovak Journal of Physics.* – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
11. Богуш, А. А. Уравнение для частицы со спином 3/2 с аномальным магнитным моментом / А. А. Богуш, В. В. Кисель // *Известия вузов.* – 1984. – Т. 1. – С. 23–27.
12. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Известия Вузов.* – 1985. – Т. 28, № 1. – С. 91–95.

13. Плетюхов, В. А. О связи между различными формулировками теории частицы со спином $3/2$ / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вести АН БССР. Серия физ.-мат. – 1985. – № 5. – С. 90–95.
14. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin $3/2$ particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // *Ann. Phys. N.Y.* – 1961. – Vol. 13. – P. 121–145.
15. Hagen, C. R. Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field / C. R. Hagen, L. P. S. Singh // *Phys. Rev. D.* – 1982. – Vol. 26. – P. 393–398.
16. Loide, R. K. Equations for a vector-bispinor / R. K. Loide // *J. Phys. A.* – 1984. – Vol. 17. – P. 2535–2550.
17. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
18. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Белорусская наука, 2015. – 328 с.
19. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p., 404 p.
20. Kisel, V. V. Fradkin equation for a spin $3/2$ particle in presence of external electromagnetic and gravitational fields / V. V. Kisel [et al.] // *Ukr. J. Phys.* – 2019. – Vol. 64, № 12. – P. 1112–1117.
21. Ивашкевич, А. И. Безмассовое поле со спином $3/2$: решения волнового уравнения и оператор спиральности / А. И. Ивашкевич, Е. М. Овсюк, В. М. Редьков // *Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2019. – № 3. – С. 338–354.
22. Ивашкевич, А. В. Сферические решения уравнения для частицы со спином $3/2$ / А. В. Ивашкевич, Е. М. Овсюк, В. В. Кисель [и др.] // *Доклады НАН Беларуси.* – 2019. – Т. 63, № 3. – С. 282–290.
23. Ивашкевич, А. В. Частица со спином $3/2$: теория Паули-Фирца, нерелятивистский предел / А. В. Ивашкевич, Я. А. Войнова, Е. М. Овсюк [и др.] // *Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 335–349.
5. Davydov, A. S. Wave equation for a particle with spin $3/2$, in absence of external field / A. S. Davydov // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* – 1943. – Vol. 13. – P. 313–319.
6. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // *Reviews of Modern Physics.* – 1945. – Vol. 17. – № 2-3. – P. 200–216.
7. Fradkin E. S. To the theory of particles with higher spins / *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* – 1950. – Vol. 20, № 1. – P. 27–38 (in Russian).
8. Fedorov, F. I. Generalized relativistic wave equations / F. I. Fedorov // *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR.* – 1952. – Vol. 82, № 1. – P. 37–40 (in Russian).
9. Feinberg, V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields / V. Ya. Feinberg // *Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR.* – 1955. – Vol. 6. – P. 269–332 (in Russian).
10. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin $3/2$ / M. Petras // *Czechoslovak Journal of Physics.* – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
11. Bogush, A. A. Equation for a $3/2$ particle with anomalous magnetic moment / A. A. Bogush // *Russian Physics Journal.* – 1984. – Vol. 1. – P. 23–27 (in Russian).
12. Pletyukhov, V. A. To the theory of particles of spin $3/2$ / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // *Russian Physics Journal.* – 1985. – Vol. 28, № 1. – P. 91–95 (in Russian).
13. Pletyukhov, V. A. On the relationship between various formulations of particle theory with spin $3/2$ / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // *Proceedings of the Academy of Sciences of the BSSR. Physics and Mathematics series.* – 1985. – Vol. 5. – P. 90–95 (in Russian).
14. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin $3/2$ particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // *Ann. Phys. N.Y.* – 1961. – Vol. 13. – P. 121–145.
15. Hagen, C. R. Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field / C. R. Hagen, L. P. S. Singh L.P.S. // *Phys. Rev. D.* – 1982. – Vol. 26. – P. 393–398.
16. Loide, R. K. Equations for a vector-bispinor / R. K. Loide // *J. Phys. A.* – 1984. – Vol. 17. – P. 2535–2550.
17. Red'kov, V. M. Particle fields in the Riemann space and the Lorentz group / V. M. Red'kov – *Minsk: Belorussian science Publ.*, 2009. – 486 p.
18. Pletyukhov, V. A. Relativistic wave equations and internal degrees of freedom / V. A. Pletyukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – *Minsk: Belaruskayanavuka Publ.*, 2015. – 328 p. (in Russian).
19. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p., 404 p.
20. Kisel, V. V. Fradkin equation for a spin $3/2$ particle in presence of external electromagnetic and gravitational Fields / V. V. Kisel [et al.] // *Ukr. J. Phys.* – 2019. – Vol. 64, № 12. – P. 1112–1117.
21. Ivashkevich, A. V. Zero mass field with the spin $3/2$: solutions of the wave equation and the helicity operator / A. V. Ivashkevich, E. M. Ovsyuk, V. M. Red'kov // *Pro-*

References

1. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // *Phys. Rev.* – 1941. – Vol. 60. – № 1. – P. 61–64.
4. Ginzburg, V. L. To the theory of particles of spin $3/2$ / V. L. Ginzburg // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* – 1942. – Vol. 12. – P. 425–442.

- ceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. – 2019. – Vol. 55, № 3. – P. 338–354 (in Russian).
22. Ivashkevich, A. V. Spherical solutions of the wave equation for a spin $3/2$ particle / A. V. Ivashkevich, E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel [et al.] // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2019. – Vol. 63, № 3. – P. 282–290 (in Russian).
23. Ivashkevich, A. V. Spin $3/2$ particle: Pauli – Fierz theory, non-relativistic approximation / A. V. Ivashkevich, Ya. A. Voynova, E. M. Ovsyuk [et al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. – 2020. – Vol. 56, № 3. – P. 335–349.

Для цитирования:

Ивашкевич, А.В. Нерелятивистское приближение для частицы со спином $3/2$ в гравитационном поле / А. В. Ивашкевич // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 64–70. DOI: 10.19110/1994-5655-2024-6-64-70

For citation:

Ivashkevich, A.V. The nonrelativistic approximation for a spin $3/2$ particle in gravitation field / A. V. Ivashkevich // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 64–70. DOI: 10.19110/1994-5655-2024-6-64-70

Дата поступления рукописи: 08.04.2025

Received: 08.04.2025

Картографирование рентгеновской Лауэ-дифракции от совершенных и клиновых многослойных структур

Д. В. Казаков, С. И. Колосов, В. И. Пунегов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

kazakov@ipm.komisc.ru,
kolos@ipm.komisc.ru,
vpunegov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Выполнено численное моделирование распределения интенсивности рентгеновской Лауэ-дифракции в обратном пространстве от совершенных и клиновых многослойных структур. Показано, что для пространственно ограниченных пучков необходимо учитывать дифракцию рентгеновских волн на краях коллиматоров или щелей дифракционной схемы. Проведено сравнение численного картографирования ограниченных рентгеновских пучков в рамках геометрической оптики и приближения Френеля.

Ключевые слова:

рентгеновская дифракция в геометрии Лауэ, многослойные структуры, карты рассеяния в обратном пространстве, приближение Френеля, геометрическая оптика, клиновые структуры, пространственно ограниченные пучки

Введение

Многослойные структуры (МС) широко применяются в установках синхротронного излучения для транспортировки рентгеновских пучков, фокусировки излучения, EUV-литографии и астрономии [1–4]. Преимущественно такие МС функционируют в геометрии скользящего падения Брэгга. Динамическая же Лауэ-дифракция рентгеновских лучей в МС обладает рядом особенностей. Одной из ключевых является возникновение маятникового эффекта, в результате которого интенсивность рентгеновского пучка проходящей волны периодически перекачивается в дифракционный пучок и обратно по мере движения сквозь объем МС [5]. Эта важная особенность Лауэ-дифракции в МС принципиально меняет распределение энергии рентгеновского пучка по глубине МС и требует строгого учета [6].

Новая волна интереса к изучению Лауэ-дифракции в многослойных структурах возникла совместно с идеей создания многослойных Лауэ-линз (МЛЛ) для фокусировки жесткого синхротронного излучения [7]. Однако в работе [8] показано, что МЛЛ не являются фокусирующими рентгенооптическими элементами в полном смысле этого слова. Тем не менее научные группы продолжают разработку и изго-

Reciprocal space mapping of X-ray Laue diffraction in perfect and wedge multilayers

D. V. Kazakov, S. I. Kolosov, V. I. Punegov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

kazakov@ipm.komisc.ru,
kolos@ipm.komisc.ru,
vpunegov@ipm.komisc.ru

Abstract

Numerical simulation of the X-ray Laue diffraction intensity distribution in reciprocal space from perfect and wedge multilayers was performed. It is shown that for spatially bounded X-ray beams, diffraction at the edges of collimators or slits in the diffraction scheme should be taken into account. A comparison of numerical reciprocal space mapping simulations using the geometrical optics approximation and the Fresnel approximation was conducted.

Keywords:

X-ray Laue diffraction, multilayer structures, reciprocal space mapping, Fresnel approximation, geometrical optics, wedged structures, spatially bounded beams

товление МЛЛ методом магнетронного напыления — процессом, сопряженным со значительными технологическими сложностями. Важно, что при разработке МЛЛ исследователи отдают предпочтение их клиновым модификациям, где период структуры изменяется как по толщине, так и по глубине секционированной (sectioned) системы [9, 10].

В связи с этим первым этапом в исследовании МЛЛ является детальное изучение дифракции Лауэ в МС как с постоянным периодом, так и в клиновых (градиентных) многослойных структурах. Для клиновых структур с градиентом периода по глубине применяются рекуррентные соотношения, где система разбивается на элементарные вертикальные полосы с локально постоянным периодом [11]. При этом важно отметить, что в случае пространственно ограниченных рентгеновских пучков, используемых в экспериментах, необходимо учитывать дифракционные эффекты на краях коллиматоров и щелей, что выходит за рамки простой модели неограниченных плоских волн [12]. Для моделирования таких экспериментов требуется применение двумерных уравнений Такаги-Топена или методов, учитывающих распространение волн в приближении Френеля.

Особую актуальность это исследование приобретает для структур типа W/Si и Mo/Si, где при энергиях 9.5-19.5 кэВ наблюдаются выраженные эффекты фотоэлектрического поглощения и интерференции [13]. При этом традиционный подход к определению глубины МС по периоду интерференционных полос ($L_x = 2\pi/\eta_0$), широко используемый в экспериментах [13], может приводить к существенным ошибкам при низком угловом разрешении, что показано в численных расчётах [11].

В данной работе представлен сравнительный анализ дифракции в совершенных и клиновых МС с учетом волновой природы рентгеновского излучения и пространственных ограничений пучка.

1. Динамическая Лауэ-дифракция ограниченных рентгеновских пучков в плоскопараллельной МС

Используя уравнения дифракции рентгеновских лучей в периодических структурах с учетом граничных условий Лауэ-дифракции, получаем решение для амплитуды дифракционного пучка в обратном пространстве (reciprocal space mapping, RSM):

$$E_1(q_x, q_z) = i \frac{a_1}{2\pi} f e^{i\psi L_x} \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \frac{\sin(\hat{\xi} L_x / 2)}{\hat{\xi} / 2} \hat{Y}_{in}(\kappa) \hat{Y}_{ex}(\kappa - q_z), \quad (1)$$

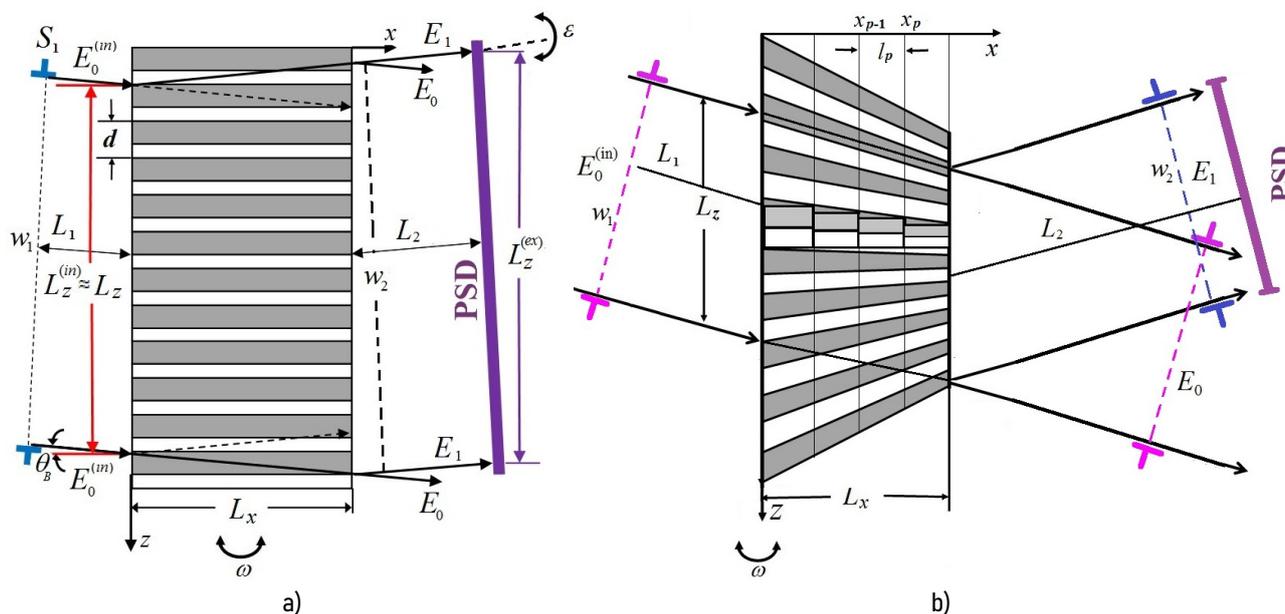


Рисунок 1. Схема Лауэ-дифракции в: а) совершенной и б) клиновой многослойных структурах.

Обозначения: L_x – глубина структуры; L_z – толщина засветки; S_1 – коллимирующая щель; w_1 – размер падающего пучка; $L_z^{(in)}$ – проекция падающего пучка на входную грань мультислоя; L_1 – расстояние от щели S_1 до входной грани мультислоя; L_2 – расстояние от выходной грани до позиционно-чувствительного детектора (PSD); w_2 – поперечная ширина выходящего пучка; $L_z^{(ex)}$ – проекция выходящего пучка на ось z .

Figure 1. Laue diffraction scheme in: a) perfect and b) wedged multilayer structures. Symbols: L_x – structure depth; L_z – exposure thickness; S_1 – collimating slit; w_1 – incident beam size; $L_z^{(in)}$ – projection of the incident beam onto the multilayer input facet; L_1 – distance from slit S_1 to the multilayer input facet; L_2 – distance from the output facet to the position-sensitive detector (PSD); w_2 – output beam width; $L_z^{(ex)}$ – projection of the output beam onto the z -axis.

где $\hat{\xi} = \sqrt{(q_x - (q_z - 2\kappa) \tan \theta_B)^2 + 4a_1 a_{-1}}$, $a_0 = \pi \chi_0 / (\lambda \cos \theta_B)$, $a_1 = C \pi \chi_1 / (\lambda \cos \theta_B)$, $a_{-1} = a_1$, θ_B – угол Брэгга, χ_0 и χ_1 – коэффициенты Фурье рентгеновской поляризуемости в направлении прохождения и дифракции соответственно, λ – длина волны рентгеновского излучения в вакууме, C – поляризационный фактор, f – фактор затухания, величина которого зависит от совершенства МС.

Трехосевая регистрация рентгеновских волн в обратном пространстве зависит от углового положения образца ω и анализатора ε (или от положения канала позиционно-чувствительного детектора). В симметричной геометрии Лауэ эти углы связаны с проекциями отклонения вектора дифракции в горизонтальном и вертикальном направлениях соотношениями $q_x = k \sin \theta_B (2\omega - \varepsilon)$ и $q_z = -k \cos \theta_B \varepsilon$.

Множитель

$$\hat{Y}_{in}(\kappa) = P(\kappa, L_1) \frac{\sin(\kappa L_z^{(in)} / 2)}{\kappa / 2}$$

в (1) является граничной функцией падающей рентгеновской волны в пространстве Фурье, где $L_z^{(in)}$ – $w_1 / \cos \theta_B$, w_1 – ширина падающего рентгеновского микроручка (рис. 1).

Коэффициент

$$P(\kappa, L_1) = \exp\left(-i\lambda \frac{L_1 \kappa^2}{4\pi(\cos\theta_B)^2}\right)$$

представляет собой пропагатор излучения в пространстве Фурье в приближении Френеля, где L_1 – расстояние от пространственного ограничителя S_1 (коллиматора или щели) до входной поверхности МС. В случае геометрической оптики пропагатор $P(\kappa, L_1) = 1$.

Второй множитель \hat{Y}_{ex} в (1)

$$\hat{Y}_{ex}(\kappa - q_z) = P(\kappa - q_z, L_2) \frac{\sin\left(L_z^{(ex)}(\kappa - q_z)/2\right)}{(\kappa - q_z)/2}$$

является коэффициентом пропускания дифрагированной волны в пространстве Фурье, где $L_z^{(ex)}$ – ширина дифрагированного рентгеновского пучка. Распространение отраженной рентгеновской волны от МС до PSD-детектора (анализатора) описывается пропагатором

$$P(\kappa - q_z, L_2) = \exp\left(-i\lambda \frac{L_2}{4\pi(\cos\theta_B)^2}(\kappa - q_z)^2\right),$$

где L_2 – расстояние от выходной поверхности МС до PSD-детектора.

2. Динамическая Лауэ-дифракция ограниченных рентгеновских пучков в клиновой МС

В клиновой МС период изменяется в латеральном направлении (рис. 1 б). Следовательно, рентгеновская Лауэ-дифракция на такой структуре не может быть рассчитана с использованием решения (1). Процедура расчета основана на рекуррентных соотношениях [11]. В этом случае МС разбивается на элементарные ячейки (вертикальные полосы) (рис. 1 б). Период в отдельной элементарной вертикальной полосе толщиной $l_p = x_p - x_{p-1}$, где $p = 1, 2, \dots, P$ определяет номер полосы. Если для первой полосы период МС равен d , то для полосы с номером p с рассогласованием Δd_p период записывается как $d_p = d - \Delta d_p$.

Угловая переменная выражается как $\eta^p = \eta - h\varepsilon_p^x$, где параметр $\varepsilon_p^x = \Delta d_p \tan\theta_B/d$ определяет рассогласование периода МС с номером p , $h = 2\pi/d$ – величина периода системы в обратном пространстве. Для пространственно ограниченных рентгеновских пучков рекуррентные соотношения Лауэ-дифракции имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{E}_0^{p+1}(\kappa, \eta^p; x_{p+1}) &= \left(B_1^0 \exp(i\hat{\xi}_1^p l_p) \right. \\ &\quad \left. - B_2^0 \exp(i\hat{\xi}_2^p l_p) \right) \hat{Y}_{in}(\kappa, L_z^{(in)}, L_1), \\ \hat{E}_1^{p+1}(\kappa, \eta^p; x_{p+1}) &= \left(B_1^1 \exp(i\hat{\xi}_1^p l_p) \right. \\ &\quad \left. - B_2^1 \exp(i\hat{\xi}_2^p l_p) \right) \hat{Y}_{in}(\kappa, L_z^{(in)}, L_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$B_{1,2}^0 = \varphi_{1,2}^0 \hat{E}_1^p(\kappa, \eta^p; x_p) + a_1 \hat{E}_0^p(\kappa, \eta^p; x_p) / \hat{\xi}^p,$$

$$B_{1,2}^1 = \varphi_{1,2}^1 \hat{E}_1^p(\kappa, \eta^p; x_p) + a_1 \hat{E}_0^p(\kappa, \eta^p; x_p) / \hat{\xi}^p,$$

$$\varphi_{1,2}^0 = \left(a_0 - \kappa \tan\theta - \hat{\xi}_{2,1}^p \right) / \hat{\xi}^p,$$

$$\varphi_{1,2}^1 = \left(a_0 + \eta^p + \kappa \tan\theta_B - \hat{\xi}_{2,1}^p \right) / \hat{\xi}^p,$$

$$\hat{\xi}^p = \sqrt{(\eta^p + 2\kappa \tan\theta_B)^2 + 4a_1^2},$$

$$\hat{\xi}_{1,2}^p = \left(2a_0 + \eta^p \pm \hat{\xi}^p \right) / 2.$$

В терминах трехосевой рентгеновской дифрактометрии решение для численного моделирования записывается как:

$$\begin{aligned} E_1(q_x, q_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \hat{E}_1^P(\kappa, q_x - q_z \tan\theta_B - h\varepsilon, x_P) \times \\ &\quad \times \hat{Y}_{in}(\kappa, L_z^{(in)}, L_1) \hat{Y}_{ex}(\kappa - q_z, L_z^{(ex)}, L_2). \end{aligned} \quad (3)$$

В полученном интегральном уравнении амплитуда

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{ex}(\kappa - q_z, L_z^{(ex)}, L_2) &= P(\kappa - q_z, L_2) \times \\ &\quad \times \frac{\sin\left([\kappa - q_z]L_z^{(ex)}/2\right)}{[\kappa - q_z]/2} \end{aligned}$$

определяет граничные условия на выходящей грани для дифракционного пучка в геометрии Лауэ.

3. Численное моделирование

Численное моделирование углового распределения интенсивности рассеяния рентгеновских лучей выполнено для МС W/Si . Длина волны падающего синхротронного излучения составляла $\lambda = 0,062$ нм. Период системы W/Si равен $d = d_W + d_{Si} = 6$ нм, где $d_W = d_{Si} = 3$ нм, угол Брэгга $\theta_B = 5,17$ мрад. Оптические константы для МС равны $\chi_0 = (-9,35 + i0,68) \times 10^{-6}$ и $\chi_1 = (-4,6 + i0,43) \times 10^{-6}$.

Период МС изменяется по глубине от 6,00 до 5,95 нм, т. е. на 0,05 нм. Карты RSM рассчитаны для МС W/Si с секционной глубиной $L_x = 7$ мкм как для совершенной структуры, так и для клиновой системы. Ширина падающего рентгеновского пучка равна $w_1 \approx L_z = 14$ мкм. Для совершенных и клиновых МС вычисления выполнены в рамках геометрической оптики, когда искажениями рентгеновской волны от щели или коллиматора можно пренебречь, а также в приближении Френеля с $L_1 = L_2 = 0,3$ м, $w_1 \approx L_z^{(in)} = 14$ мкм и $w_2 \approx L_z^{(ex)} = 7$ мкм (см. рис. 1).

На рис. 2 показаны расчетные карты RSM от совершенной и клиновой многослойных структур W/Si в приближении геометрической оптики. На рис. 3 представлены результаты вычислений карт RSM от совершенной и клиновой МС W/Si в приближении Френеля. Контурные интенсивности рассеяния с учетом искажений при прохождении рентгеновской волны для геометрической оптики и приближения Френеля в деталях отличаются. Это отличие в основном проявляется в вертикальном направлении.

Таким образом, мы теоретически исследовали Лауэ-дифракцию рентгеновских пучков в секционированных многослойных структурах. Как и в геометрии Брэгга, в слу-

чае Лауэ-дифракции для ограниченных пучков в процессе расчетов карт RSM необходимо выбирать граничные условия в приближении Френеля.

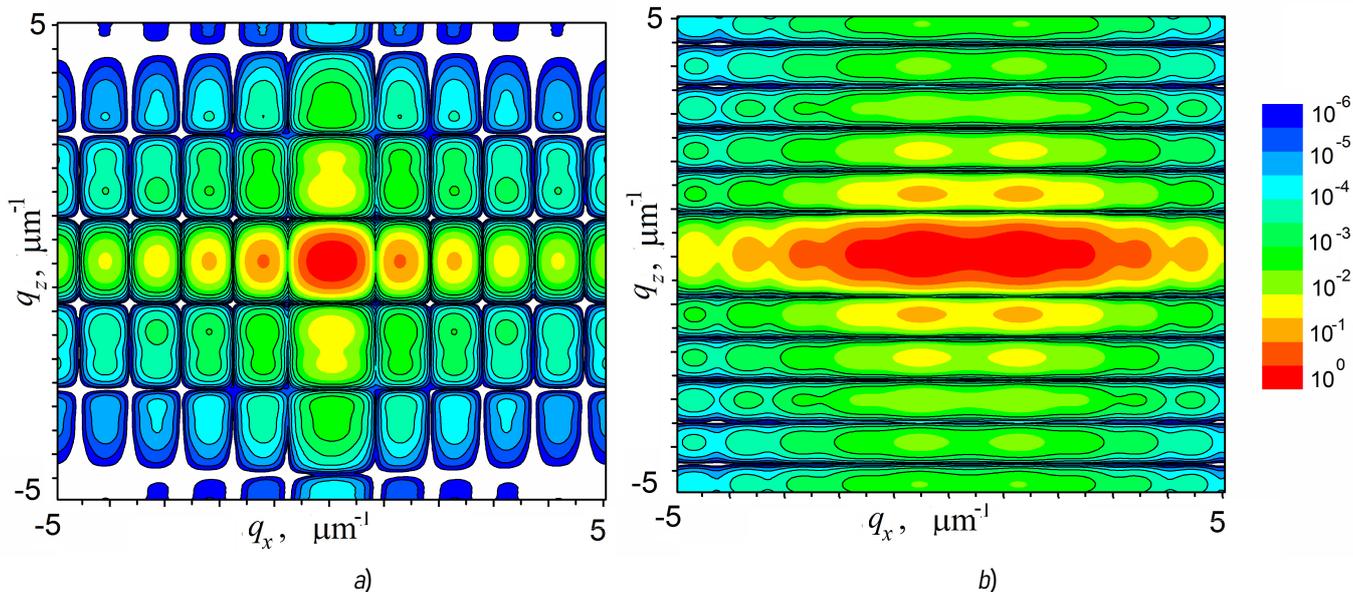


Рисунок 2. Численное моделирование RSM в приближении геометрической оптики для MC W/Si : а) совершенная структура; б) клиновидная структура. Параметры модели: $L_z^{(in)} = 14$ мкм, $L_z^{(ex)} = 7$ мкм.
Figure 2. Numerical simulation of RSM in geometric optics approximation for W/Si multilayer structures: a) perfect structure; b) wedged structure. Model parameters: $L_z^{(in)} = 14 \mu\text{m}$, $L_z^{(ex)} = 7 \mu\text{m}$.

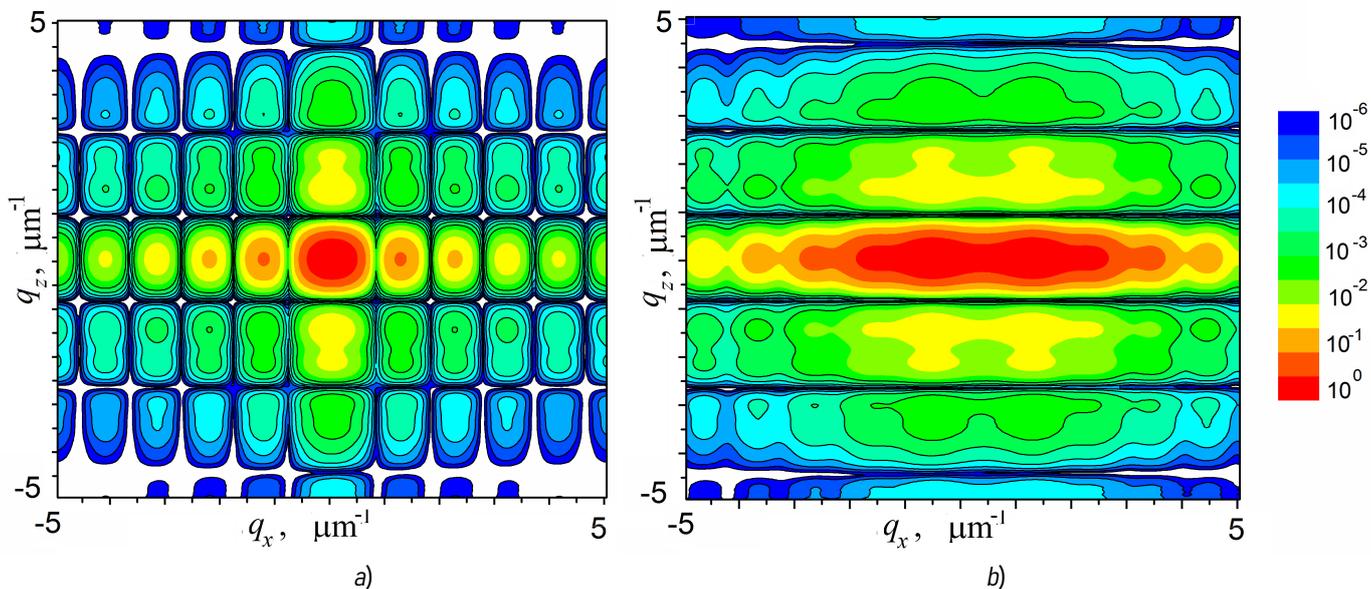


Рисунок 3. Численное моделирование RSM в приближении Френеля для MC W/Si : а) совершенная структура; б) клиновидная структура. Параметры модели: $L_z^{(in)} = 14$ мкм, $L_z^{(ex)} = 7$ мкм, $L_1 = L_2 = 0.3$ м.
Figure 3. Numerical simulation of RSM in Fresnel approximation for W/Si multilayer structures: a) perfect structure; b) wedged structure. Model parameters: $L_z^{(in)} = 14 \mu\text{m}$, $L_z^{(ex)} = 7 \mu\text{m}$, $L_1 = L_2 = 0.3 \text{ m}$.

Заключение

Настоящее исследование демонстрирует важность учета волновой природы рентгеновского излучения при моделировании дифракции Лауэ в многослойных структурах. Численное моделирование распределения интен-

сивности в обратном пространстве показало, что для пространственно ограниченных пучков приближение геометрической оптики оказывается недостаточным — необходимо учитывать дифракционные эффекты на краях щелей и коллиматоров, что успешно реализуется в рамках

приближения Френеля. Полученные в работе результаты могут быть использованы для развития точных методик анализа данных рентгеновской дифрактометрии и методов неразрушающего контроля при разработке клиновых многослойных структур фокусирующей оптики.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Rack, A. Transporting X-ray beams: refractive X-ray optics / A. Rack, T. Weitkamp, M. Riotte [et al.] // *J. Synchrotron Rad.* – 2010. – Vol. 17. – P. 496–510.
2. Lyatun, I. Impact of beryllium microstructure on the imaging and optical properties of X-ray refractive lenses / I. Lyatun, P. Ershov, I. Snigireva [et al.] // *J. Synchrotron Rad.* – 2020. – Vol. 27. – P. 44–50.
3. Chkhalo, N. I. High-reflectance multilayer mirrors for a vacuum-ultraviolet interval of 35–50 nm / N. I. Chkhalo, S. A. Gusev, A. N. Nechay [et al.] // *Optics Letters.* – 2017. – Vol. 42. – P. 5070–5073.
4. Tamura, K. Development of soft X-ray mirrors with multilayer coatings for the X-ray Astronomy Satellite “Hitomi” / K. Tamura, H. Kunieda, Y. Miyata [et al.] // *J. Astron. Telesc. Instrum. Syst.* – 2018. – Vol. 4. – Art. 011209.
5. Authier, A. Dynamical theory of X-ray diffraction / A. Authier. – Oxford: Oxford University Press, 2001. – 417 p.
6. Пунегов, В. И. Влияние дефектов структуры на угловое распределение рентгеновской Лауэ-дифракции в тонком кристалле / В. И. Пунегов, К. М. Павлов // *Письма в ЖТФ.* – 1992. – Т. 18, вып. 12. – С. 60–64.
7. Maser, J. Multilayer Laue lenses as high-resolution X-ray optics / J. Maser, G. B. Stephenson, S. Vogt [et al.] // *Proc. SPIE.* – 2004. – Vol. 5539. – P. 185–194.
8. Пунегов, В. И. Влияние рассогласования толщин слоев на фокусировку рентгеновских лучей многослойными Лауэ линзами / В. И. Пунегов // *Письма в ЖЭТФ.* – 2020. – Т. 111, вып. 7. – С. 448–454.
9. Yan, H. F. Phase zone plate for hard X-rays fabricated by lithographic techniques / H. F. Yan, J. Maser, A. Macrander [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 76. – Art. 115438.
10. Conley, R. Wedged multilayer Laue lens / R. Conley, C. Liu, J. Qian [et al.] // *Rev. Sci. Instrum.* – 2008. – Vol. 79. – Art. 053104.
11. Punegov, V. I. X-ray Laue diffraction by sectioned multilayers. I. Pendellösung effect and rocking curves / V. I. Punegov // *J. Synchrotron Rad.* – 2021. – Vol. 28. – P. 1466–1475.
12. Punegov, V. I. Two-dimensional recurrence relations for X-ray diffraction in a sectioned crystal / V. I. Punegov, K. M. Pavlov, A. V. Karpov [et al.] // *J. Appl. Cryst.* – 2017. – Vol. 50. – P. 1256–1266.

Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 125020501562-1.

Acknowledgements (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the topic № 125020501562-1.

13. Kang, H. C. Sectioning of multilayers to make a multilayer Laue lens / H. C. Kang, G. B. Stephenson, C. Liu [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 86. – Art. 151109.

References

1. Rack, A. Transporting X-ray beams: refractive X-ray optics / A. Rack, T. Weitkamp, M. Riotte [et al.] // *J. Synchrotron Rad.* – 2010. – Vol. 17. – P. 496–510.
2. Lyatun, I. Impact of beryllium microstructure on the imaging and optical properties of X-ray refractive lenses / I. Lyatun, P. Ershov, I. Snigireva [et al.] // *J. Synchrotron Rad.* – 2020. – Vol. 27. – P. 44–50.
3. Chkhalo, N. I. High-reflectance multilayer mirrors for a vacuum-ultraviolet interval of 35–50 nm / N. I. Chkhalo, S. A. Gusev, A. N. Nechay [et al.] // *Optics Letters.* – 2017. – Vol. 42. – P. 5070–5073.
4. Tamura, K. Development of soft X-ray mirrors with multilayer coatings for the X-ray Astronomy Satellite “Hitomi” / K. Tamura, H. Kunieda, Y. Miyata [et al.] // *J. Astron. Telesc. Instrum. Syst.* – 2018. – Vol. 4. – Art. 011209.
5. Authier, A. Dynamical Theory of X-Ray Diffraction / A. Authier. – Oxford: Oxford University Press, 2001. – 417 p.
6. Punegov, V. I. Effect of structural defects on the angular distribution of X-ray Laue diffraction in a thin crystal / V. I. Punegov, K. M. Pavlov // *Sov. Tech. Phys. Lett.* – 1992. – Vol. 18. – N. 12 – P. 390–391.
7. Maser, J. Multilayer Laue lenses as high-resolution X-ray optics / J. Maser, G. B. Stephenson, S. Vogt [et al.] // *Proc. SPIE.* – 2004. – Vol. 5539. – P. 185–194.
8. Punegov, V. I. Effect of the mismatch of layer thicknesses on the focusing of X-rays by multilayer Laue lens / V. I. Punegov // *JETP Letters.* – 2020. – Vol. 111, № 7. – P. 376–382.
9. Yan, H. F. Phase zone plate for hard X-rays fabricated by lithographic techniques / H. F. Yan, J. Maser, A. Macrander [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 76. – Art. 115438.
10. Conley, R. Wedged multilayer Laue lens / R. Conley, C. Liu, J. Qian [et al.] // *Rev. Sci. Instrum.* – 2008. – Vol. 79. – Art. 053104.
11. Punegov, V. I. X-ray Laue diffraction by sectioned multilayers. I. Pendellösung effect and rocking curves / V. I. Punegov // *J. Synchrotron Rad.* – 2021. – Vol. 28. – P. 1466–1475.
12. Punegov, V. I. Two-dimensional recurrence relations for X-ray diffraction in a sectioned crystal / V. I. Punegov, K. M. Pavlov, A. V. Karpov [et al.] // *J. Appl. Cryst.* – 2017. – Vol. 50. – P. 1256–1266.
13. Kang, H. C. Sectioning of multilayers to make a multilayer Laue lens / H. C. Kang, G. B. Stephenson, C. Liu [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 86. – Art. 151109.

Для цитирования:

Казаков, Д. В. Картографирование рентгеновской Лауэ-дифракции от совершенных и клиновых многослойных структур / Д. В. Казаков, С. И. Колосов, В. И. Пунегов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 71–76.

For citation:

Kazakov, D. V. Reciprocal space mapping of X-ray Laue diffraction in perfect and wedge multilayers / D. V. Kazakov, S. I. Kolosov, V. I. Punegov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 71–76.

Дата поступления статьи: 19.06.2025

Received: 19.06.2025

Научный семинар лаборатории математики и телекоммуникаций Физико-математического института ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

Д. Б. Ефимов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
defimov@ipm.komisc.ru

Аннотация

В апреле 2022 г. в Физико-математическом институте ФИЦ Коми НЦ УрО РАН (ФМИ) возобновил работу научный семинар. Мы даем краткую характеристику семинара, приводим полный список докладов, а также расширенные аннотации отдельных докладов.

Ключевые слова:

научный семинар, физико-математический институт

Введение

Одной из важных форм взаимодействия ученых являются научные семинары. В отличие от различного рода конференций семинары допускают расширенную свободу в выборе тематики и формы представления материала, дают возможность обратить больше внимания на детали и технические моменты и позволяют обсудить результаты, что называется, с пылу с жару.

Традиция выступления сотрудников с научными докладами существовала в ФМИ (до 2017 г. Отделе математики) с самого момента его основания в 1993 г. Данную форму научной работы всячески поддерживал и поощрял основатель и многолетний директор ФМИ д.ф.-м.н. профессор Н. А. Громов. Помимо непосредственно сотрудников института с докладами регулярно выступали и приглашенные специалисты. Так, в период с 2014 г. по 2019 г. на площадке ФМИ своими знаниями и результатами работ делились к.ф.-м.н. А. А. Карабанов (г. Ноттингем, Великобритания), д.ф.-м.н. А. Б. Певный (СГУ им. П. Сорокина, г. Сыктывкар), Р. Р. Пименов (сын известного ученого и правозащитника Р. И. Пименова, г. Санкт-Петербург), д.г.-м.н. В. И. Ракин (Институт геологии Коми НЦ УрО РАН им. академика Н. П. Юшкина, г. Сыктывкар), д.ф.-м.н. А. М. Райгородский (МФТИ, г. Москва). В определенный момент в Институте наступил «период затишья» семинарской деятельности, вызванный пандемией ковида и различными структурными и кадровыми изменениями. В апреле 2022 г. после достаточного долгого перерыва научный семинар ФМИ возобновил свою работу. В дальнейшем, говоря о семинаре ФМИ, мы будем иметь в виду именно его «новейшую историю».

Scientific Seminar of the Laboratory of Mathematics and Telecommunications of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS

D. B. Efimov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar
defimov@ipm.komisc.ru

Abstract

In April 2022, the scientific seminar resumed its work at the Institute of Physics and Mathematics of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (PMI). We give a brief description of the seminar, a full list of reports, as well as extended abstracts of individual reports.

Keywords:

scientific seminar, Institute of Physics and Mathematics

Идейным вдохновителем и организатором нового периода работы семинара стал главный научный сотрудник лаборатории математики и телекоммуникаций (ЛМиТ) д.ф.-м.н. профессор А. Н. Тихомиров. Обязанности секретаря семинара были возложены на старшего научного сотрудника ЛМиТ к.ф.-м.н. Д. Б. Ефимова. Семинар проходит со средней периодичностью один раз в две недели по средам с 15.00 в здании ФМИ по адресу ул. Оплеснина, 4. Объявление об очередном заседании рассылается постоянным участникам семинара по электронной почте. На данный момент (май 2025 г.) состоялось уже более 60 заседаний семинара. На доклад отводится один час с возможностью продолжения на следующем заседании. Сложилась негласная традиция: докладчик приносит торт и после выступления за чашкой чая в неформальной обстановке участники общаются и обсуждают доклад.

Семинар открыт для всех интересующихся проблемами и приложениями математики и физики. Единственным ограничением является размер помещения, в котором проходят заседания семинара. Это самый большой кабинет в ФМИ (конференц-зал), но разместиться в нем могут не более 25 чел. В распоряжении участников семинара маркерная доска, компьютер и подключенный к нему современный проектор с экраном.

С докладами, как правило, выступают сотрудники ФМИ. Но с большим удовольствием в качестве докладчиков приглашаются и сотрудники других организаций. Например, несколько раз на семинаре выступали преподаватели СГУ им. П. Сорокина: к.ф.-м.н. И. И. Баженов, д.ф.-м.н. Н. А. Бе-

ляева, к.ф.-м.н. А. В. Ермоленко, к.ф.-м.н. А. А. Холопов. Будучи на конференции в Сыктывкаре, выступил на семинаре бывший сотрудник СГУ им. П. Сорокина, а ныне доцент НГУ им. Н. И. Лобачевского к.ф.-м.н. В. И. Звонилев.

Общепризнанно, что математика является языком современной науки. Математические методы и модели используются не только в естественных, но и сугубо гуманитарных науках. Поэтому неудивительно, что на семинаре ЛМиТ ФМИ выступают также с докладами по математическим вопросам сотрудники организаций не физико-математического профиля. Так, особый интерес вызвали доклады д.м.н. В. П. Нужного (Институт физиологии ФИЦ Коми НЦ УрО РАН) и О. А. Мальцевой (Банк России).

За время ковида все привыкли к онлайн-формату выступлений, были отработаны соответствующие технологии. Такие доклады, конечно, не заменяют выступления «вживую», но позволяют значительно расширить географию участников. Так, на семинаре ЛМиТ ФМИ в дистанционном режиме выступали с докладами следующие исследователи из научных и образовательных организаций других регионов: д.ф.-м.н. В. В. Ульянов, к.ф.-м.н. С. В. Самсонов

(ВШЭ, г. Москва), д.ф.-м.н. А. Н. Реттеева (КарНЦ, г. Петро- заводск), д.ф.-м.н. Н. Е. Ратанов (ЧелГУ, г. Челябинск).

Одной из целей проведения семинара является вовлечение в научную работу аспирантов. Практически на каждом заседании присутствуют в качестве слушателей аспиранты ФМИ, несколько раз они сами выступали в качестве докладчиков. Иногда «площадка» семинара рассматривается докладчиками как возможность подготовиться к какому-нибудь ответственному выступлению на конференции, как возможность «обкатать» доклад.

В качестве любопытного факта отметим, что рекордсменом по числу сделанных на семинаре докладов является д.ф.-м.н. А. В. Жубр (14 докладов). Алексей Викторович — человек широкого научного кругозора, сейчас уже находится на заслуженном отдыхе, но всегда с удовольствием откликается на просьбу бывших коллег выступить на семинаре и поделиться своими опытом и знаниями.

Далее мы приведем аннотации некоторых докладов, а также полный список всех сделанных на семинаре докладов начиная с 2014 г. Более ранняя информация по докладкам, к сожалению, не сохранилась.



Рисунок 1. Участники заседания семинара 03.04.2024. Слева направо: стоят – канд. физ.-мат. наук, доцент СГУ им. П. Сорокина И. И. Баженов, канд. физ.-мат. наук, ст. н. с. В. Н. Тарасов, канд. физ.-мат. наук, ст. н. с. Д. Б. Ефимов, асп. А. В. Надуткина, канд. физ.-мат. наук, н. с. В. Ю. Андриюкова, канд. физ.-мат. наук, ст. н. с. С. И. Колосов, канд. физ.-мат. наук, ст. н. с. Д. А. Тимушев, канд. физ.-мат. наук, ст. н. с. В. В. Куратов, н. с. А. В. Карпов; сидят – асп. С. Т. Гуляева, д-р. физ.-мат. наук, проф., гл. н. с. Н. А. Громов, д-р. физ.-мат. наук, проф., гл. н. с. А. Н. Тихомиров, д-р. физ.-мат. наук, проф., вед. н. с. В. Ф. Соколов.

Figure 1. Participants of the seminar meeting on 03.04.2024 From left to right: standing – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Syktyvkar State University named after P. Sorokin I. I. Bazhenov, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Researcher V. N. Tarasov, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Researcher D. B. Efimov, Undergraduate Student A. V. Nadutkina, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Researcher V. Yu. Andryukova, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Researcher S. I. Kolosov, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Researcher D. A. Timushev, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Researcher V. V. Kuratov, Researcher A. V. Karpov; sitting – Postgraduate student S. T. Gulyaeva, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Prof., Chief Researcher N. A. Gromov, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Prof., Chief Researcher A. N. Tikhomirov, Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Prof., Leading Researcher V. F. Sokolov.

1. Аннотации некоторых докладов

• Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) Обобщенные случайные графы и полукруговой закон. *Даты выступления 06.04.2022, 13.04.2022.*

В докладе обсуждались минимальные достаточные

условия сходимости спектральной функции распределения матрицы смежности обобщенного взвешенного случайного графа Эрдеша – Реньи. Предполагалось, что вероятности каждого ребра могут быть различны. Задача эквивалентна сходимости эмпирической спектральной функции распределения разреженной симметричной (эрмито-

вой) случайной матрицы, где вероятность разреживания зависит от номера элемента матрицы.

• Куратов В. В. (к.ф.-м.н., ФМИ) Реляционный подход к пространству и времени. *Дата выступления 11.05.2022.*

Идея вывода классических пространственно-временных представлений из более элементарных закономерностей физики микромира. Теория физических структур Ю. А. Кулакова и бинарная геометрофизика Ю. С. Владимиров. Примеры построения различных геометрий, исходя из отношений между точками (расстояний) и феноменологическими симметриями для этих отношений. Описание физических взаимодействий в рамках бинарных систем комплексных отношений.

• Казаков Д. В. (к.ф.-м.н., ФМИ) От перцептрона к глубокому обучению. *Дата выступления 22.06.2022.*

Доклад представляет собой введение в ключевые аспекты машинного обучения (ML). Рассматриваются фундаментальные задачи ML, такие как регрессия, классификация (в том числе с неполными данными), транскрипция, машинный перевод и обнаружение аномалий, а также базовые компоненты процесса обучения: типы опыта (с учителем/без), алгоритмы и меры качества. Рассказываются преимущества нейронных сетей при решении этих задач. Прослеживается историческая эволюция нейросетей: от ранних моделей нейрона и работ Мак-Каллока-Питтса и Хебба, через изобретение перцептрона Розенблатта и кризис, вызванный ограничениями однослойных сетей (включая проблему XOR), к возрождению интереса с появлением многослойных перцептронов (MLP) и формулировкой универсальной теоремы аппроксимации. Наглядно демонстрируется разница в возможностях однослойных и многослойных сетей на практических примерах. Обсуждается тема ёмкости модели. Подробно разбираются проблемы недообучения и переобучения, вводится понятие оптимальной ёмкости и разрыва между ошибками на обучении и тесте, подчеркивается необходимость достижения баланса для успешного обобщения моделей.

• Андрюкова В. Ю. (к.ф.-м.н., ФМИ), Тарасов В. Н. (к.ф.-м.н., ФМИ) Контактная задача для кольца, подкрепленного упругими тонкими стержнями, находящегося под действием весовой нагрузки. *Дата выступления 26.10.2022.*

Рассмотрено упругое кольцо, подкрепленное тонкими стержнями (спицами), соединенными в центре и нагруженное силой P . Предполагая, что число спиц настолько велико, что их можно считать упругой средой, получено дифференциальное уравнение $w^V + 2w''' + a^2w' = 0$, где a^2 - константа. Данная задача в такой постановке впервые была рассмотрена Н. Е. Жуковским. Недостатком его подхода является то, что центр кольца считается неподвижным. На НДС кольца существенно влияет возможная потеря устойчивости спиц при продольной нагрузке.

• Громов Н. А. (д.ф.-м.н., ФМИ) Гипотеза о контракции калибровочной группы Стандартной модели не противоречит экспериментальным данным БАК. *Дата выступления 30.11.2022.*

В докладе анализируется поведение амплитуды доминантного процесса рождения бозона Хиггса в четырехлептонном распаде при увеличении температуры T в рам-

ках гипотезы о контракции калибровочной группы Стандартной модели. Показано, что модифицированный процесс распадается на ряд каналов, зависящих от вклада цветовых компонент в петле виртуальных кварков, приводящих к образованию бозона Хиггса. Найдена зависимость от T сечения каждого канала. Сравнение с данными БАК по сечениям рождения бозона Хиггса при энергиях (температурах) 7, 8, 13 и 14 ТэВ показало, что гипотеза о контракции калибровочной группы Стандартной модели не противоречит имеющимся экспериментальным данным.

• Пунегов В. И. (д.ф.-м.н., ФМИ) Рентгеновские многослойные Лауэ линзы: миф или реальность? *Дата выступления 14.12.2022.*

В 2004 г. группа американских физиков предложила создать многослойные Лауэ линзы [1], которые, по их мнению, являются «новым направлением» в физике и имеют большие перспективы в рентгеновской оптике. На основе разработанной ошибочной теории [2] было предсказано, что многослойные Лауэ линзы способны создавать фокусное пятно размерами до 5 нм. С другой стороны, швейцарскими учеными [3] было показано, что никакая рентгеновская оптика не может преодолеть фокусирующий барьер в 10 нм. Между тем, базируясь на неправильных теоретических подходах, в престижных изданиях, включая журналы издательства «Nature», были представлены сообщения о многослойных Лауэ линзах с размерами фокуса 5, 8, 10 и 11 нм. В работе [4] было показано, что результаты, опубликованные в более чем 200 статьях, являются фейком и должны быть отправлены в «корзину». После публикации статьи [4], работы, связанные с многослойными Лауэ линзами прекратились. Таким образом, закрыто «новое перспективное направление» в области физических исследований.

• Куратов В. В. (к.ф.-м.н., ФМИ) Динамические системы и контракции алгебр Ли. *Дата выступления 18.01.2023.*

Описание диссипации и декогеренции открытых квантовых систем на языке контракций алгебр Ли. Связь с преобразованиями Крауса. Примеры предельных переходов алгебры наблюдаемых $su(2)$ кубита при взаимодействии с окружением. Автоморфные алгебры для данной динамической системы. Симметрии, связанные с законами сохранения и системами корней. Предельные переходы в алгебрах Ли и обобщение контракций Иненю-Вигнера. Связь с уравнениями Лакса. Пример для $sl(2)$.

• Макаров П. А. (к.ф.-м.н., ФМИ) О некоторых понятиях и формулировках классической механики. *Даты выступления 25.01.2023, 01.02.2023.*

В докладе рассматривались некоторые философские, мировоззренческие и принципиальные вопросы классической (т. е. нерелятивистской и неквантовой) механики. В частности, озвучивался вопрос о взаимном отношении механики, математики и физики. Имела место дискуссия относительно авторской точки зрения, согласно которой механику можно считать запутанным состоянием вида

$$|\text{mechanics}\rangle \sim |00\rangle + |11\rangle,$$

если использовать дираковскую нотацию $|\text{math, physics}\rangle$. Также подвергались некоторому переосмыслению такие

основополагающие понятия, как материальная точка, скорость и действие. Кроме того, обсуждались некоторые формулировки механики, включая и «экзотические», встречающиеся в современной литературе. Так, были отмечены идея М. Г. Иванова о выделении шести законов Ньютона вместо трех и соображения Р. В. Ли на тему обобщения понятия действия путем его определения на фазовом пространстве механической системы.

• Ратанов Н. Е. (д.ф.-м.н., ЧелГУ, г. Челябинск) Телеграфные процессы и их приложения. Дата выступления (дистанционно) 17.05.2023.

Пусть $c_0, c_1 \in (-\infty, \infty)$ суть константы, а $\varepsilon = \varepsilon(t) \in \{0, 1\}$ – марковский процесс с двумя состояниями. Мы предлагаем кусочно-линейный процесс

$$X(t) = \int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds.$$

Детально обсуждаются свойства такого случайного процесса вместе с его приложениями к моделям нейронов и финансовому моделированию.

• Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) О спектре блочных случайных матриц и случайных графов. Дата выступления 24.01.2024, 31.01.2024, 14.02.2024.

В докладе обсуждались предельные спектральные распределения случайных матриц блочного типа и их связь с многодольными случайными графами. Предельное распределение матриц блочного типа описывалось с помощью системы уравнений, которым удовлетворяют вспомогательные функции, определяющие преобразование Стильтеса предельного распределения.

• Ефимов Д. Б. (к.ф.-м.н., ФМИ) Квантовая комбинаторика. Дата выступления 20.11.2024.

Многие математические понятия допускают естественные обобщения, зависящие от параметра q и совпадающие с исходным понятием при $q = 1$. Такие обобщения называются q -аналогами. Одним из разделов математики, где q -аналоги находят свое приложение, является комбинаторика. Здесь они выступают в роли производящих функций числа различных объектов и по сравнению с исходными (не q -) вариантами позволяют проводить более детальный комбинаторный анализ. Так, если обычный факториал $n!$ равен числу всех перестановок n -го порядка, то его q -аналог $[n]_q!$ перечисляет все перестановки n -го порядка с учетом числа инверсий. В докладе рассмотрены q -аналоги различных понятий (факториал, двойной факториал, биномиальные коэффициенты, определитель (перманент), пфаффиан (гафниан)) и их приложение к задачам перечислительной комбинаторики, связанных с перестановками, диаграммами Юнга, дуговыми и хордовыми диаграммами.

• Андрюкова В. Ю. (к.ф.-м.н., ФМИ), Тарасов В. Н. (к.ф.-м.н., ФМИ) Пространственная устойчивость колец, подкрепленных нитями одностороннего действия. Дата выступления 11.12.2024.

В докладе рассматривается задача устойчивости кольца, подкрепленного нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Решение проблемы сводится к нахождению точек бифуркации решения некоторой задачи вариационного исчисления при наличии ограниче-

ний в виде неравенств. В отличие от классического случая отыскания точек бифуркации гладких функций наличие нежестких ограничений приводит к задаче идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. Последняя сводится к исследованию решения некоторой невыпуклой задачи математического программирования.

• Громов Н. А. (д.ф.-м.н., ФМИ) Эволюция Стандартной модели в процессе расширения Вселенной. Дата выступления 27.11.2024, 04.12.2024.

В докладе представлена новая реализация гипотезы об упрощении калибровочной группы Стандартной модели при повышении температуры Вселенной, т. е. при возвращении во времени к моменту ее возникновения. Предполагается, что такое упрощение достигается за счет контракции калибровочной группы с параметром, уменьшающимся с ростом температуры. Лагранжиан Стандартной модели раскладывается на слагаемые, различающиеся степенями параметра контракции, что позволяет упорядочить во времени этапы ее развития по мере остывания Вселенной и проследить эволюцию свойств частиц и их взаимодействий на основе явного вида промежуточных лагранжианов. Развитие теории происходит в естественном порядке от более простых структур к более сложным начиная с планковского масштаба 10^{19} ГэВ. Гипотеза о контракции калибровочной группы Стандартной модели не противоречит экспериментальным данным БАК по сечениям рождения бозона Хиггса. Модифицированная Стандартная модель предсказывает температурный рубеж $T \sim 10^7$ ГэВ, выше которого происходят кардинальные изменения в составе и свойствах частиц, определяющих процессы во Вселенной.

• Ульянов В. В. (д.ф.-м.н., ВШЭ, г. Москва) Улучшение асимптотических свойств критериев путем рандомизации их статистик. Дата выступления (дистанционно) 12.03.2025.

Пусть имеются наблюдения $Y = (Y_1, \dots, Y_r)$, представляющие из себя реализацию r -мерного случайного вектора с мультиномиальным распределением $\text{Mult}(n, p_Y)$. Одной из фундаментальных задач математической статистики является проверка простой гипотезы $H_0 : p_Y = p$, где $p = (p_1, \dots, p_r)$ – некоторый фиксированный вектор с положительными компонентами, дающими в сумме 1. Предложен новый способ построения тестовой статистики, основанный на введении дополнительной рандомизации. Рандомизированная статистика обладает лучшими асимптотическими свойствами по сравнению, например, с широко известными статистиками Пирсона и Кресси-Рида.

• Громов Н. А. (д.ф.-м.н., ФМИ) Р.И. Пименов и его ранние математические работы (по его воспоминаниям). Дата выступления 26.03.2025.

Доклад посвящен первому циклу работ Р. И. Пименова (1956–1964), содержащему единое аксиоматическое построение системы неевклидовых геометрий. На основе воспоминаний Р. И. Пименова освещается его вхождение в науку через геометрический семинар академика А. Д. Александрова (1950). «Все основные идеи своей последующей тридцатилетней математической деятельно-

сти почерпнул я – как воздух – в этом семинаре», – писал он впоследствии. Описываются обстоятельства спонтанного возникновения идеи о едином описании девяти геометрий на плоскости (1955) и о применении шести из них в качестве моделей пространства-времени, а также развития идеи до «Космометрии». Доклад на семинаре А. Д. Александрова прошел блестяще и, по словам Р. И. Пименова, он «прочно занял место среди "великих" этого семинара».

• Пунегов В. И. (д.ф.-м.н., ФМИ) Развитие дифракционной рентгеновской оптики в Республике Коми. *Даты выступления 16.04.2025, 23.04.2025.*

Обсуждается историческая последовательность зарождения и развития дифракционной рентгеновской оптики в Республике Коми. Основателем рентгеновской оптики в Республике Коми был Феликс Александрович Бабушкин, который вначале работал в Коми государственном педагогическом институте, с 1972 г. в Сыктывкарском государственном университете. Его исследования в области рентгеновской физики продолжили его ученики, а затем ученики учеников. Сыктывкарская школа по рентгеновской оптике стала известна во всем мире, выпускники СГУ работали и работают в известных университетах Германии, Австралии и Новой Зеландии.

• Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) О предельном распределении спектра случайных матриц блочного типа. *Дата выступления 22.05.2025.*

В докладе обсуждались результаты статьи «On the Limiting Distribution of the Spectrum of Random Block Matrices», принятой к печати в 2025 г. в журнале *Mathematics*. При условии Линдберга доказана универсальность предельного распределения спектра случайных матриц блочного типа с растущей размерностью матричных блоков. В докладе обсуждалась также оценка скорости сходимости к нормальному закону ожидаемой спектральной функции распределения палиндромной теплицевой случайной матрицы.

2. Полный список докладов

Период 2014–2019 гг.

1. Лапина Л. Э. (к.ф.-м.н., ФМИ) О переформировании узла слияния рек Сысола и Вычегда. *08.04.2014.*
2. Соколов В. Ф. (д.ф.-м.н., ФМИ) Стабилизация динамической системы с неизвестной липшицевой неопределенностью. *22.04.2014.*
3. Соколов В. Ф. (д.ф.-м.н., ФМИ) Управление динамической системой с липшицевой неопределенностью. *29.04.2014.*
4. Костяков И. В. (ФМИ), Куратов В. В. (к.ф.-м.н., ФМИ) О квантовании, уравнениях Шредингера, контракциях (доклад посвящен 21-летию Отдела математики). *13.05.2014.*
5. Котелина Н. О. (к.ф.-м.н., СГУ им. П. Сорокина), Певный А. Б. (д.ф.-м.н., СГУ им. П. Сорокина) Неотрицательная определенность полиномов Чебышёва и ее приложение. *10.06.2014.*
6. Карпов А. В. (ФМИ) Анализ экспериментальных данных трёхосевой высокоразрешающей дифрак-

тометрии многослойной дифракционной решетки. *19.06.201.*

7. Лапина Л. Э. (к.ф.-м.н., ФМИ) Суточная динамика концентраций углекислого газа, метана, водяного пара и температуры воздуха на мезоолиготрофном болоте. *30.09.2014.*
8. Ракин В. И. (д.г.-м.н., Институт геологии Коми НЦ УрО РАН им. академика Н. П. Юшкина) Морфологические типы плоскогранных природных кристаллов. *28.10.2014.*
9. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) О поездке в г. Тель-Авив (Израиль) на международную конференцию «Неэрмитовы случайные матрицы: 50 лет после Женибра». *11.11.2014.*
10. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) Неравенства для моментов квадратичных форм от независимых случайных величин. *20.01.2015, 27.01.2015.*
11. Ракин В. И. (д.г.-м.н., Институт геологии Коми НЦ УрО РАН им. академика Н. П. Юшкина) Морфотипы кварца. Анализ условий кристаллизации. *03.02.2015.*
12. Пименов Р. Р. (г. Санкт-Петербург) Переосмысление симметрии между окружностями и развитие этого метода в геометрии и эстетике. *17.02.2015.*
13. Певный А. Б. (д.ф.-м.н., СГУ им. П. Сорокина), Ситник С. М. (г. Воронеж) Неравенства для положительно определенных функций. *03.03.2015.*
14. Жубр А. В. (д.ф.-м.н., ФМИ) Геометрия Лобачевского. *17.03.2015.*
15. Сивков Д. В. (ФМИ) Диффузное рассеяние рентгеновских лучей в кристаллах с квантовыми точками (результаты диссертационной работы). *19.05.2015.*
16. Колосов С. И. (ФМИ) Теория дифракции рентгеновских лучей на латеральных кристаллах (результаты диссертационной работы). *19.05.2015.*
17. Ефимов Д. Б. (к.ф.-м.н., ФМИ) О верхней оценке перманентов. *29.09.2015.*
18. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) Об асимптотическом поведении спектра вигнеровских случайных матриц. *10.11.2015.*
19. Кутов А. Я. (ФМИ) Измерение топологических сечений в рр-взаимодействиях в области большой множественности заряженных частиц при 50 ГэВ на установке СВД-2 (по материалам предполагаемой диссертации). *01.12.2015.*
20. Лапина Л. Э. (к.ф.-м.н., ФМИ) Кривые роста и их приложения. *15.12.2015.*
21. Тарасов В. Н. (к.ф.-м.н., ФМИ) Группа симметрий одного равноугольного жесткого фрейма (первый семинар в новом конференц-зале, Первомайская, 50). *07.06.2016.*
22. Райгородский А. М. (д.ф.-м.н., МФТИ, г. Москва) От классических задач комбинаторики к случайным графам. *30.09.2016.*
23. Ракин В. И. (д.г.-м.н., Институт геологии Коми НЦ УрО РАН им. академика Н. П. Юшкина) Ромбододекаэдр. Природные формы роста и растворения. *30.05.2017.*
24. Петрова О. В. (ФМИ) Распределение сил осцилляторов в ультрамягких рентгеновских спектрах нано-

- структурированных материалов и биополимерах (результаты, выносимые на защиту диссертации) (первый семинар на Оплеснина, 4). 30.01.2018.
25. Соколов В. Ф. (д.ф.-м.н., ФМИ) Рассказ о визите в Academy of Mathematics and Systems Science of Chinese Academy of Sciences в «Китайской силиконовой долине», г. Пекин. 06.02.2018.
 26. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) Рассказ о научной поездке в Сингапур. 10.04.2018.
 27. Костяков И. В. (ФМИ), Куратов В. В. (к.ф.-м.н., ФМИ) Квантовая механика, измерения, контракции. 08.05.2018.
 28. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) Рассказ о научной поездке в Лиссабон. 27.11.2018.
 29. Карабанов А. А. (к.ф.-м.н.) Доклад о научной, и не только, жизни г. Ноттингем (Великобритания). 18.06.2019.
- Период 2022–2025 гг.**
1. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) Обобщенные случайные графы и полукруговой закон. 06.04.2022, 13.04.2022.
 2. Ефимов Д. Б. (к.ф.-м.н., ФМИ) Гафниан матрицы. Проблемы, свойства, приложения. 27.04.2022.
 3. Куратов В. В. (к.ф.-м.н., ФМИ) Реляционный подход к пространству и времени. 11.05.2022.
 4. Соколов В. Ф. (д.ф.-м.н., ФМИ) Некоторые нерешенные проблемы в теориях идентификации систем и адаптивного управления. 25.05.2022.
 5. Жубр А. В. (д.ф.-м.н.) Теорема Абеля. 15.06.2022, 29.06.2022, 06.07.2022.
 6. Казаков Д. В. (к.ф.-м.н., ФМИ) От перцептрона к глубокому обучению. 22.06.2022.
 7. Андрюкова В. Ю. (к.ф.-м.н., ФМИ), Тарасов В. Н. (к.ф.-м.н., ФМИ) Контактная задача для кольца, подкрепленного упругими тонкими стержнями, находящегося под действием весовой нагрузки. 26.10.2022.
 8. Тимушев Д. А. (к.ф.-м.н., ФМИ) Случайные матрицы и их приложения. 16.11.2022.
 9. Громов Н. А. (д.ф.-м.н., ФМИ) Гипотеза о контракции калибровочной группы Стандартной модели не противоречит экспериментальным данным БАК. 30.11.2022.
 10. Гуляева С. Т. (аспирант ФМИ) Выборочные ковариационные матрицы. Теорема Марченко-Пастура. 07.12.2022.
 11. Пунегов В. И. (д.ф.-м.н., ФМИ) Рентгеновские многослойные Лауэ линзы: миф или реальность? 14.12.2022.
 12. Колосов С. И. (к.ф.-м.н., ФМИ) Пути Дика. 21.12.2022.
 13. Куратов В. В. (к.ф.-м.н., ФМИ) Динамические системы и контракции алгебр Ли. 18.01.2023.
 14. Макаров П. А. (к.ф.-м.н., ФМИ) О некоторых понятиях и формулировках классической механики. 25.01.2023, 01.02.2023.
 15. Жубр А. В. (д.ф.-м.н.) Пространства Тайхмюллера. 08.02.2023, 15.02.2023, 22.02.2023.
 16. Беляева Н. А. (д.ф.-м.н., СГУ им. П. Сорокина) Математическое моделирование течений вязких и вязкоупругих сред. 15.03.2023.
 17. Холопов А. А. (к.ф.-м.н., СГУ им. П. Сорокина) Предельная пропускная способность прямоугольной случайной сети. 22.03.2023.
 18. Карпов А. В. (ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН) Брэгговские отражения многослойной дифракционной решетки. 29.03.2023.
 19. Ермоленко А. В. (к.ф.-м.н., СГУ им. П. Сорокина) Теория пластин типа Кармана-Тимошенко-Нагди относительно отсчетной поверхности. 05.04.2023.
 20. Костяков И. В. (ФМИ) Введение в космологию. Закон Хаббла. Решение Фридмана. 12.04.2023, 19.04.2023.
 21. Реттиева А. Н. (д.ф.-м.н., КарНЦ, г. Петрозаводск) Динамические многокритериальные игры. 26.04.2023 (дистанционно).
 22. Мальков Д. М. (аспирант ФМИ) Построение двумерных областей по нерегулярным данным: case study. 10.05.2023.
 23. Ратанов Н. Е. (д.ф.-м.н., ЧелГУ, г. Челябинск) Телеграфные процессы и их приложения. 17.05.2023 (дистанционно).
 24. Карпов А. В. (ФМИ) Теория некомпланарной дифракции плоских волн для многослойной дифракционной решетки. 31.05.2023.
 25. Жубр А. В. (д.ф.-м.н.) Пространства прямых и окружностей, отражения и инверсии, группа Мёбиуса. 8.11.2023, 15.11.2023, 22.11.2023.
 26. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) О спектре блочных случайных матриц и случайных графов. 24.01.2024, 31.01.2024, 14.02.2024.
 27. Ефимов Д. Б. (к.ф.-м.н., ФМИ) Ещё раз о перманенте. Обзор и новые результаты. 21.02.2024, 28.02.2024.
 28. Жубр А. В. (д.ф.-м.н.) Цепные дроби, диофантовы аппроксимации и др. 06.03.2024.
 29. Холопов А. А. (к.ф.-м.н., СГУ им. П. Сорокина) О пропускной способности k -слойных случайных сетей при малом параметре p . 13.03.2024.
 30. Баженов И. И. (к.ф.-м.н., СГУ им. П. Сорокина) Некоторые обобщения теоремы Ляпунова о множестве значений векторных мер. 03.04.2024.
 31. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) Метод Стейна и характеристические функции. 10.04.2024.
 32. Гуляева С. Т. (аспирант ФМИ) Предельные теоремы для спектра циркулянтных матриц. 11.09.2024, 18.09.2024.
 33. Звонилов В. И. (к.ф.-м.н., НГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород) Графы тригональных кривых. 25.09.2024.
 34. Нужный В. П. (д.м.н., Институт физиологии ФИЦ Коми НЦ УрО РАН) Функциональная деятельность сердца при максимально достижимой частоте сердечных сокращений, инвариативность или вариативность системы, взгляд через эволюцию сердца. 02.10.2024.
 35. Надуткина А. В. (аспирант ФМИ) Спектр матрицы смежности случайного двудольного графа. 09.10.2024.

36. Жубр А. В. (д.ф.-м.н.) Основная теорема алгебры. 16.10.2024.
37. Самсонов С. В. (к.ф.-м.н., ВШЭ, г. Москва) Генеративные потоковые сети и их приложения. 13.11.2024.
38. Ефимов Д. Б. (к.ф.-м.н., ФМИ) Квантовая комбинаторика. 20.11.2024.
39. Громов Н. А. (д.ф.-м.н., ФМИ) Эволюция Стандартной модели в процессе расширения Вселенной. 27.11.2024, 04.12.2024.
40. Андриюкова В. Ю. (к.ф.-м.н., ФМИ), Тарасов В. Н. (к.ф.-м.н., ФМИ) Пространственная устойчивость колец, подкрепленных нитями одностороннего действия. 11.12.2024.
41. Мальцева О. А. (Банк России, г. Сыктывкар) Нелинейная кривая Филлипса. 25.12.2024.
42. Жубр А. В. (д.ф.-м.н.) Теорема де Рама. 12.02.2025, 19.02.2025, 26.02.2025.
43. Ульянов В. В. (д.ф.-м.н., ВШЭ, г. Москва) Улучшение асимптотических свойств критериев путем рандомизации их статистик. 12.03.2025.
44. Громов Н. А. (д.ф.-м.н., ФМИ) Р. И. Пименов и его ранние математические работы (по его воспоминаниям). 26.03.2025.
45. Соколов В. Ф. (д.ф.-м.н., ФМИ) Верификация модели, квантификация возмущений и оптимальное управление дискретными динамическими объектами с неопределенностью в l_1 постановке с элементами искусственного интеллекта. 09.04.2025.
46. Пунегов В. И. (д.ф.-м.н., ФМИ) Развитие дифракционной рентгеновской оптики в Республике Коми. 16.04.2025, 23.04.2025.
47. Тихомиров А. Н. (д.ф.-м.н., ФМИ) О предельном спектральном распределении случайных матриц с блочной структурой. 22.05.2025.

3. Заключение

Представленный в данной статье список докладов семинара можно в какой-то степени рассматривать как сконцентрированную историю института, по крайней мере, некоторую ее часть. По нему можно судить о кадровом составе, научных интересах сотрудников в разные периоды работы, защитах диссертаций, научных контактах, об

Для цитирования:

Ефимов, Д. Б. Научный семинар лаборатории математики и телекоммуникаций Физико-математического института ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Д. Б. Ефимов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 77–83. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-77-83

For citation:

Efimov, D. B. Scientific Seminar of the Laboratory of Mathematics and Telecommunications of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS / D. B. Efimov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 77–83. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-77-83

Дата поступления статьи: 01.06.2025

Received: 01.06.2025

аспирантах института. Это, образно говоря, срез дерева, по периодическим кольцам которого можно многое узнать. В качестве заключения пожелаем семинару продолжения истории: дальнейшей плодотворной работы и новых интересных докладов.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Maser, J. Multilayer Laue lenses as high-resolution X-ray optics / J. Maser, G. B. Stephenson, S. Vogt [et al.] // Proceedings of SPIE. – 2004. – Vol. 5539. – P. 185–194.
2. Yan, H. Takagi-Taupin description of X-ray dynamical diffraction from diffractive optics with large numerical aperture / H. Yan, J. Maser, A. Macrander [et al.] // Physical Review B. – 2007. – Vol. 76. – Article 115438.
3. Bergemann, C. Focusing X-ray beams to nanometer dimensions / C. Bergemann, H. Keymeulen, J.F. van der Veen // Physical Review Letters. – 2003. – Vol. 91. – Article 204801.
4. Пунегов, В. И. Влияние рассогласования толщин слоев на фокусировку рентгеновских лучей многослойными Лауэ линзами / В. И. Пунегов // Письма в ЖЭТФ. – 2020. – Т. 111, № 7. – С. 448–454.

References

1. Maser, J. Multilayer Laue lenses as high-resolution X-ray optics / J. Maser, G. B. Stephenson, S. Vogt [et al.] // Proceedings of SPIE. – 2004. – Vol. 5539. – P. 185–194.
2. Yan, H. Takagi-Taupin description of X-ray dynamical diffraction from diffractive optics with large numerical aperture / H. Yan, J. Maser, A. Macrander [et al.] // Physical Review B. – 2007. – Vol. 76. – Article 115438.
3. Bergemann, C. Focusing X-ray beams to nanometer dimensions / C. Bergemann, H. Keymeulen, J.F. van der Veen // Physical Review Letters. – 2003. – Vol. 91. – Article 204801.
4. Punegov, V. I. Effect of the mismatch of layer thicknesses on the focusing of X-rays by multilayer Laue lens / V. I. Punegov // JETP Letters. – 2020. – Vol. 111, № 7. – P. 376–382.

Введение в научно-исследовательскую работу

В. Н. Лаженцев

Институт социально-экономических и энергетических проблем
Севера ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
vnl1940@gmail.com

Аннотация

В связи с юбилейной датой автор к благодарности редакции журнала за поздравление добавляет свои суждения о научно-исследовательской работе, где в общих чертах излагается специфика ее организации и методологии. Акцент сделан на совмещении двух сторон такой работы – профессиональной специализации и общей научно-методологической подготовки. На фоне характеристики науки как составной части общества определены структурно-функциональные особенности исследовательского процесса применительно к теории фундаментальных и прикладных исследований, к схеме перехода от теории к практике.

Ключевые слова:

наука, общество, научный работник, специфика профессии, технология исследования, междисциплинарность, проблемный подход

Введение

В начале научной работы происходит выбор направления исследования, сбор материалов, экспедиционные наблюдения, написание отчетов, научно-аналитических записок, статей и книг. Далее – раз пришел в науку, надо защищать кандидатскую и докторскую, не видя в этом ничего особенного (так надо!). Лишь с годами возникает потребность определить свою позицию относительно научно-исследовательской профессии, высказать суждение о ее специфике. То есть сделать то, о чем никто тебя не просит и не входит в круг твоих служебных обязанностей. Здесь решающую роль играют не заслуги, звания и степени, а критическое отношение как к окружающей действительности в сфере науки, так и к самому себе. Появляется запоздалое желание найти рациональное зерно в исследовательском процессе, как бы задним числом сформулировать его нормы и правила. Невольно попадаешь в компанию, где также идет осмысление методологии научного труда. У каждого своя линия обобщения, но в итоге получается что-то схожее.

Изложенные ниже положения не носят отвлеченный характер, а базируются на мнении научного сообщества, конкретном опыте автора в изучении проблем экономиче-

Introduction to research work

V. N. Lazhentsev

Institute of Socio-Economic and Energy Problems of the North,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar
vnl1940@gmail.com

Abstract

In connection with his anniversary date, the author thanks the editors of the journal for congratulations and adds his opinions on the research work, outlining the specifics of its organization and methodology in general terms. The emphasis is on combining two aspects of such work – professional specialization and general scientific and methodological training. Viewing the science as an integral part of society, the structural and functional features of the research process are defined in relation to the theory of fundamental and applied research, to the scheme of transition from theory to practice.

Keywords:

science, society, research worker, specifics of the profession, research technology, interdisciplinarity, problem-based approach

ской географии и региональной экономики. Они могут в какой-то мере служить «руководством к действию» в определении содержания связки «наука – практика».

1. Наука и общество

Научно-исследовательская работа – процесс получения новых и генерация ранее полученных знаний ради решения проблем развития природы, общества и самой науки. Обязательным условием вхождения молодого специалиста в научно-исследовательскую деятельность является понимание науки как составной части общества, как источника прогресса и развития, как одного из институтов формирования мировоззрения людей.

Наука в результате своего исторического развития приобрела в большинстве стран статус важнейшей и полнокровной отрасли народного хозяйства. Она имеет свою учетную и статистическую кодификацию, все необходимые для организации деятельности элементы: основные средства, квалифицированный персонал, финансовые ресурсы, собственность, стоимость реализуемого продукта и другие атрибуты.

Наука глубоко погружена в систему общественных отношений, выступая в роли непосредственной производительной силы. В этом она сходна со всеми другими видами трудовой деятельности, а потому научный работник имеет равные права материального обеспечения и социальной защиты.

Из большого перечня общественных аспектов науки отметим ее значение как **социального института**, когда сообщество научных работников функционирует в виде большой коалиции людей со своими интересами и потребностями, позиционирующих себя относительно других сообществ, например, госслужащих, учителей, врачей, работников учреждений культуры, военнослужащих, служителей церкви, предпринимателей и наемных работников. Кроме бытовых (житейских) отношений между людьми разных коалиций, развиваются отношения ответственности и солидарности, что и способствует формированию общей социальной кооперации.

Экономический аспект науки заключен в потенциальной возможности реализации полученного в ходе исследования результата в качестве товара. Заметим, рынок научной продукции развивается более быстрыми темпами, чем другие рынки, что проявляется в ускоренном росте капитализации тех фирм, которые способны на базе новых знаний производить инновационный продукт. Однако нельзя не отметить, что экономический эффект науки измеряется не только «сиюминутной» выгодой, но и в рамках длинной цепочки переходов от теоретического знания к практике. В конечном итоге значение науки выражается в благоприятном отношении к ней всего общества. Страны с высокой культурой государственного управления специально формируют общественное мнение о науке, как создающей экономический фундамент будущего.

Наука включена в систему **технологических отношений** в качестве базового звена производительных сил. Сама исследовательская технология все в большей мере приобретает форму индустриального процесса в силу его насыщения техникой, приборами наблюдения и контроля, электронными средствами анализа. Опытнo-экспериментальные технологии становятся прообразами технологий производственных, медицинских, образовательных, экологических и др. Такая организация научно-исследовательского процесса непосредственно предопределяет общественные формы хозяйственной и гуманитарной деятельности. На этой основе совершенствуются взаимодействие науки и практики: от консультаций и творческого сотрудничества к научно-производственной кооперации. Идеальной считается система НИОКР, в которой обе ее составляющие (научно-исследовательская и опытно-конструкторская) полностью соответствуют друг другу, развиваются синхронно и своевременно удовлетворяют потребности в новых технологиях всех отраслей народного хозяйства.

2. Научный работник и общество

Не только научная коалиция, но и отдельно взятый научный работник занимает определенное общественное положение, требующее осознания и правового толкования. Особо отметим две позиции:

1) научный работник должен обладать специфической квалификацией, что предполагает наличие у него как профессиональной специализации, так и знание общей технологии исследовательского труда. Первоначально специалист должен решить, есть ли у него желание приобретать вторую профессию – научно-исследовательскую. Если да, то ему необходимо пройти курс обучения по тематике «методология и методы научного исследования». Во многих университетах в рамках магистратуры и аспирантуры лекции по такому курсу читаются и проводятся семинары с целью обучить пошаговому решению заданных преподавателем «условных проблем» (определение проблемы, сбор информации, генерация возможных решений, оценка и выбор лучшего варианта, составление плана действий, реализация и контроль полученного результата, написание диссертации).

Сложность приобретения профессиональных навыков в части исследовательской работы заключается в том, что в университетах нашей страны, где обучается примерно 90% аспирантов, это происходит отвлеченно от конкретного плана научно-исследовательских работ; в аспирантурах же академических и отраслевых институтов (исследовательских, проектно-исследовательских и научно-производственных) проблематика является реальной, но там, как правило, курсы по методологии исследовательской работы отсутствуют. Аспирант или штатный научный сотрудник, работая в НИИ, в основном самостоятельно приобретает навыки исследования, наблюдая, как это делают его коллеги;

2) научный работник имеет возможность свободно проводить исследования и распространять их результаты, то есть иметь свободу творчества без политических, административных и других внешних влияний. Это возвышает значение этики научно-исследовательского труда и формирует повышенное чувство ответственности перед обществом. Свобода в таком случае является составной частью общей гражданской позиции, чести и совести, а также самоконтроля по поводу соблюдения общественных норм и правил.

Обе указанных позиции создают **видимость привилегированного положения научного работника**, что может порождать чувство исключительности, закрепленное учеными степенями и званиями. В связи с таким обстоятельством отметим следующее. Ученые степень и звания (конечно, если они получены заслуженно) означают не более как класс исследовательского опыта, уровень способности генерировать научные знания. Их можно сравнить с квалификационными разрядами рабочих, менеджеров, врачей, учителей, государственных служащих, деятелей искусства. Здесь общим является мастерство, которое подразумевает творческий подход к делу и результативность труда. Быть мастером своего дела престижно и выгодно не только экономически, но и морально.

Вместе с тем, общество заинтересовано в том, чтобы в науку шли специалисты любознательные и ответственные. Любознательность становится чертой характера. Ответственность – понимание науки как зоны повышенного финансового риска, согласиться с которым может только государство и (или) крупные корпорации.

Общественное положение научного работника определяется также позиционированием отдельных научных дисциплин в общей научно-исследовательской коалиции. Одна из распространенных ошибок заключается в делении наук по уровню их сложности и востребованности. Например, физика, химия, биология, ... – это науки первого сорта, а вот – экономика, социология, география, ... – второго. На самом же деле в теоретическом и методологическом плане различные науки, примерно, равны; они различаются лишь по степени технической оснащенности экспериментальной базы. Познавательная (мыслительная) деятельность во всех отраслях науки организована, по сути, в одинаковых процедурах и однотипных «рамочных» технологических схемах. Место, например, филолога в науке ничуть не ниже, чем физика-ядерщика.

3. Исходные позиции научно-исследовательского процесса

Каждая наука фиксирует свое **ключевое понятие**. Скажем, математика – число, физика – материю, биология – клетку, геология – Землю, география – район, экономика – хозяйство, история – исторический факт, философия – отношение мышления к бытию. Во взглядах на ключевое понятие имеются расхождения, иногда очень существенные, но, тем не менее, желательно выбрать одно из них как «точку отсчета» исследовательского процесса. Если, допустим, экономист-исследователь выбирает «хозяйство», а не «товар» или «стоимость», то от этого зависит вся последующая логика рассуждений в рамках конкретной темы. По нашему мнению, в данном случае «хозяйство» является более предпочтительным, поскольку оно вбирает в себя всю совокупность природных, социальных и технических элементов и всю систему общественных отношений по поводу организации данных элементов как единого целого. С такого рода рассуждений по поводу ключевого понятия начинаются систематизация, классификация и типология.

Научный работник любой специализации проходит одинаковые **стадии использования знаний**: обращение, ознакомление, непосредственное использование, его воспроизводство и, наконец, производство нового знания. То же можно сказать и о **стадиях изучения**: наблюдение, научное объяснение и конструирование (моделирование). Чтобы убедиться, что наблюдение – не простое созерцание, а сложная, целеустремленная и специально организованная работа, желательно к собственному пониманию данной научной категории добавить изложенное в методических рекомендациях. Но там зачастую отсутствует один важный момент – наблюдение должно вызвать удивление и сомнение. Иногда именно этот факт определяет логику научного объяснения наблюдаемого и идею, вокруг которой формируется «проблемное поле». Конструирование – создание способа решения проблемы через достраивание недостающих звеньев существующего или построение чего-то совершенно нового.

В качестве исходной следует зафиксировать также позицию **междисциплинарности**. Одно дело, когда научный работник воспринимает междисциплинарность как нечто

особенное, другое – когда он считает, что иначе и быть не может.

Чтобы подтвердить правоту второго, сначала отметим повсеместное использование в любой научной дисциплине философских, общенаучных и методологических знаний. Философия помогает уяснить сущностные характеристики организации изучаемого объекта, вытекающие из естественно-исторических процессов его развития. Нельзя не обратить внимания на то, что философские основания научно-исследовательской деятельности в нашей стране и за рубежом разработаны основательно. Сама философия в значительной мере стала учением о познавательной деятельности. Поэтому философию следует держать в поле зрения не только в рамках кандидатского минимума, но и во всех ее аспектах, особенно в части теории познания сложного, синергетики и логических объяснений. Общенаучный подход к изучению «своего» объекта как раз и предполагает интеграцию знаний и методик разных наук. Обращение к частным наукам оказывается особенно полезным, если они являются смежными, например, с экономикой – социально-экономическая география, экономическая социология, демография и др. Важно также найти рациональное звено в разнообразных методах измерений и оценок на основе математики, статистики, эконометрики, картографии и т. д.

И все же... Поскольку междисциплинарность в настоящее время широко обсуждается, пропагандируется и демонстрируется яркими примерами, постольку позиция «иначе быть не может» нуждается в некоторых разъяснениях. Отметим два момента:

1) **междисциплинарность заложена в предметной сущности изучаемых объектов и процессов**. Сам объект изучения подводит к мысли о необходимости, с одной стороны, генерации данных основополагающих наук (физики, химии, биологии, социологии с использованием методологий философии и методов математики), с другой, – разработки собственных представлений о данном объекте. Таких примеров много, когда синтез знаний, обусловленный предметной сущностью конкретной научной дисциплины, автоматически включается в технологию исследовательской работы и реализуется в меру профессиональной подготовки и опыта самого исследователя;

2) **при ориентации исследования на решение конкретной проблемы необходимость междисциплинарности фиксируется не автоматически, а как целевая установка в рамках научно-исследовательской программы**. Руководитель программы дает установку на взаимодействие, согласование и синтез ключевых понятий и положений различных наук ради формирования общего направления исследований в рамках «проблема – программа».

4. Структурно-функциональная организация исследовательской работы

Автору представляется, что желательно различать теоретические фундаментальные и теоретические прикладные исследования. Фундаментальными считаются науки, изучающие объективные законы развития природы и об-

щества без изначального приложения к каким-либо практическим задачам. Прикладными – те же науки, но в аспекте строгой нацеленности на решение конкретной научно-технической или социально-экономической проблемы. Вопрос о таком разделении не прост. При его рассмотрении возможны различные точки зрения. Но в любом случае желательно иметь представление о том, как теоретическое знание становится прикладным, а затем – составной частью самой практики.

Теоретическое фундаментальное исследование включает:

- *объективизацию* – научное объяснение содержания объекта исследования;
- *систематизацию* – расположение свойств, качеств и отношений изучаемого объекта в определенном порядке;
- *структуризацию* – аналитическое разделение объекта на части и последующая их группировка по существенным основаниям.

Теоретическое прикладное исследование включает:

- *трансформацию* – приспособление теории к практическим нуждам;
- *актуализацию* – выбор наиболее значимых для практики результатов НИР;
- *выявление структур-аттракторов* – наиболее значимых факторов развития изучаемого объекта.

Переход от теоретического прикладного исследования к практике осуществляется в последовательности:

- *субъективизация* – формулировка отношения лица, принимающего решение, ко вновь полученным знаниям;
- *организация* – ранжирование и последовательность практических действий в направлении достижения поставленных целей;
- *формирование оргструктур* – управление процессом освоения нового знания.

Из сказанного следует необходимость учитывать опасность утрированной простоты в понимании взаимосвязи между наукой и практикой. Наука обращается к практике на основе теории, практика к науке – на основе опыта. На стыке возникает особого рода методология получения рецептурного знания о том, как переходить от науки к научно-технической и инновационной деятельности.

Нельзя сказать, что предложенная схема «работает» постоянно и научный работник ей полностью подчинен. Она нужна лишь как «рамка» конкретной исследовательской программы, временами играющая роль контрольной функции. Многие зависит от насыщения ее содержательными, творческими элементами, используемыми в зависимости от мировоззрения научного работника, его теоретического кредо, сопричастности к определенной научной школе и т. п. Такого рода зависимость можно заметить уже в том, как происходит **выбор ценности и цели**. Ценностные ориентиры желательно зафиксировать в явном виде. Необходимо также четко сформулировать:

- *целеполагание* – намерения исследователя;
- *целеопределение* – корректировка намерений под влиянием конкретных обстоятельств;

- *целереализацию* – выбор специфических средств решения ключевых проблем.

Обратим также внимание на распространенную упрощенность понимания категории «проблема». Чаще всего «проблема» и не освещается как категория, а употребляется в виде ничего незначащей приставки к названиям статей, глав и параграфов диссертации. Вместе с тем хорошо известно, что правильно выявленная проблема предопределяет успех исследовательской работы. В этой связи заметим: проблема возникает лишь на грани знания и незнания и формулируется как существенный вопрос, не имеющий пока однозначного ответа; проблема решается только через расширение круга знания. Если следовать приведенной выше схеме исследовательского процесса (от теории к практике), то можно установить *три вида* проблем: научно-поисковые, научно-прикладные и организационно-экономические. Не обязательно «проблемное поле» формировать в рамках всех трех видов, но научным работникам часто приходится это делать, чтобы выйти на практическое решение изучаемых проблем.

Результативность научной работы во многом зависит от правильного построения системы показателей тех или иных процессов. Первоначально надо понять, является ли конкретный факт показателем того, что изучается. Нередко в диссертациях и других научных работах встречается набор таблиц с различными сведениями, не имеющими прямого отношения к изучаемому объекту (процессу). Это только засоряет работу. Требуется целенаправленная мыслительная деятельность по преобразованию доступных информационных материалов в показатели как индикаторы. Общенаучное движение в сторону совершенствования показателей можно обозначить так: от состава к структуре, от состояния к функционированию, от роста к развитию.

Предварительное обдумывание показателей делает сбор информации творческим процессом. Ясно, что информация должна соответствовать генеральной идее исследования, поэтому первичные данные, справочные и литературные источники должны пройти проверку на достоверность. Нельзя приписывать показателю того, чего он не показывает.

В заключении скажу, что о науке и методологии научно-исследовательской работы написаны сотни книг и статей. Я начинал познание этого предмета с книги Приходько П. Т. Тропой науки [1].

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Приходько, П. Т. Тропой науки / П. Т. Приходько. – Новосибирск: СО АН СССР, 1966. – 120 с.

References

1. Prikhodko, P. T. Troпой nauki [On the Path of Science] / P. T. Prikhodko. – Novosibirsk: Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1966. – 120 p.

Для цитирования:

Лаженцев, В. Н. Введение в научно-исследовательскую работу / В. Н. Лаженцев // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 84–88. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-84-88

For citation:

Lazhentsev, V. N. Introduction to research work / V. N. Lazhentsev // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2025. – № 6 (82). – P. 84–88. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-84-88

Дата поступления статьи: 26.08.2025

Received: 26.08.2025

Юбилей

Виталию Николаевичу Лаженцеву – 85 лет



Виталий Николаевич ЛАЖЕНЦЕВ родился 17 июля 1940 г. на станции Свеча Кировской области. В 1957 г. после окончания Загорской средней школы поступил на кредитно-экономический факультет Московского финансового института. Свой трудовой и научный путь Виталий Николаевич начал в 1961 г. в г. Чите в Забайкальском комплексном научно-исследовательском институте Сибирского отделения Академии наук СССР. Был старшим лаборантом, младшим научным сотрудником, занимался исследованиями развития производительных сил Забайкалья в контексте общих народнохозяйственных проблем Восточной Сибири и Дальнего Востока. После окончания аспирантуры Института географии Сибири и Дальнего Востока СО АН СССР в 1968 г. В. Н. Лаженцев успешно защитил кандидатскую диссертацию по теме «Специализация и межрайонные экономические связи Читинской области». Интерес к развитию восточных регионов нашей страны Виталий Николаевич сохраняет на протяжении всего своего творческого пути. Он всегда с особой теплотой вспоминает годы, проведенные в Забайкалье, особенно экспедиции в суровых забайкальских степях.

В 1976 г. вместе с семьей В. Н. Лаженцев переезжает на родину супруги, и с тех пор его жизнь и научная биография неразрывно связаны с Республикой Коми и Сыктывкарком. Здесь Виталий Николаевич становится старшим научным сотрудником Отдела экономики Коми филиала АН СССР. В 1986 г. он возглавляет сектор региональной экономики. С созданием в 1988 г. на базе Отдела экономики Института экономических и социальных проблем Севера Виталий Николаевич становится руководителем отдела прогнозирования регионального развития этого Института. В 1994 г. в Ленинградском государственном университете он блестяще защищает докторскую диссертацию по теме «Территориальное развитие: методология и опыт регулирования».

Anniversaries

Vitaly Nikolaevich Lazhentsev is 85 years old

С 1995 по 2010 год В. Н. Лаженцев возглавлял Институт социально-экономических и энергетических проблем Севера Коми НЦ УрО РАН. Под его руководством Институт стал признанным научным центром комплексного изучения Севера как специфического объекта науки и государственной региональной политики, имеющего особые режимы функционирования хозяйственных систем, повышенные удельные затраты на производство и транспортировку товаров, оказание социальных услуг и охрану окружающей среды. Благодаря Виталию Николаевичу в Институте сформировалась творческая атмосфера, присущая настоящим академическим коллективам. С 2005 по 2011 год параллельно с должностью директора Института В. Н. Лаженцев выполнял обязанности заместителя Председателя Коми НЦ УрО РАН по научно-организационным вопросам.

В. Н. Лаженцев – автор и соавтор более 300 научных трудов. В их числе статьи в ведущих российских научных журналах и 15 монографий. Их содержание и рекомендации учтены при разработке «Стратегии социально-экономического развития Республики Коми до 2035 года». При его активном участии составлены Схема территориального планирования Республики Коми и ее корректировка, Атлас Республики Коми, проведены экспертизы проекта Федерального закона «Об Арктической зоне Российской Федерации», проекта строительства железной дороги «Белкомур», обоснованы рекомендации по усилению межрегиональной интеграции Урала и Европейского Севера и формированию Двино-Печорского экономико-географического района. Под руководством В. Н. Лаженцева выполнены методические разработки по развитию сельских территорий и территориальной организации промышленности Республики Коми.

В. Н. Лаженцев – крупный специалист в области социально-экономической географии и региональной экономики, внесший значительный вклад в изучение производительных сил Севера и Арктики России. Им разработаны новые теоретические и методологические подходы к обоснованию комплексного развития регионов, раскрыто содержание категорий «территориальное хозяйствование», «региональная собственность», «хозяйственный механизм территориального развития», которые существенно дополняют методы регулирования экономики и используются в системе государственного управления и местного самоуправления. В. Н. Лаженцев провел типологию северо-арктических территориально-хозяйственных систем и предложил достаточно стройную схему планирования их развития. Арктические и другие северные регионы он рассмотрел в составе широтных и меридиональных мегаструктур национальной экономики с обоснованием направлений укрепления интеграции рыночного пространства России. Показал содержание северо-европейского типа хо-

зяйства с высоким природно-ресурсным потенциалом, инновационными гео- и биотехнологиями, телекоммуникационными системами и формами организации территориальных сообществ людей, приспособленных к сложным климатическим условиям. Социально-географический аспект развития данного типа хозяйства представлен в сопряжении с интересами укорененного населения, необходимостью сохранения и совершенствования исторически приобретенного пространства жизнедеятельности.

В. Н. Лаженцев – экономист и географ, владеющий методологией региональной экономики и экономической географии. В век «узкой» специализации он способен выполнить комплексное исследование, представить энциклопедическую характеристику территории разного масштаба, вникнуть в проблемы и процессы ее развития. Отличительная (и примечательная!) черта Виталия Николаевича – исполнительская дисциплина: он никогда не задерживает представление публикаций, разделов отчетов, оперативно готовит рецензии и отзывы на работы коллег. Виталий Николаевич инициировал проведение на базе Института социально-экономических и энергетических проблем Севера Всероссийской научно-практической конференции (с международным участием) «Актуальные проблемы, направления и механизмы развития производительных сил Севера», на которую регулярно съезжаются ученые из Москвы, Санкт-Петербурга, Екатеринбургa, Новосибирска, Иркутска, Якутска, Магадана, Петрозаводска, Апатит, Архангельска, Воркуты, Ухты, чтобы обсудить современные подходы к стратегии развития Севера России, особенности социально-экономического развития северных регионов, состояние и перспективы освоения минерально-сырьевых ресурсов, количественные и качественные аспекты демографического развития, вопросы воспроизводства трудового потенциала, природно-климатические и управленческие факторы устойчивого развития социальных систем Севера и др.

В настоящее время В. Н. Лаженцев является заместителем председателя Объединенного ученого совета по экономическим наукам УрО РАН, заместителем председателя Объединенного ученого совета ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, руководителем научного направления Федерального исследовательского центра. В. Н. Лаженцев член редакционных советов научных журналов: *AlterEconomics*, "Экономика региона" "Экономические и социальные перемены: факторы, тенденции, прогноз" "Проблемы развития территорий" "Пространственная экономика, Север и рынок: формирование экономического порядка"; почетный председатель Коми отделения Русского географического общества.

В. Н. Лаженцев – заслуженный деятель науки Российской Федерации, заслуженный работник Республики Коми, кавалер орденов Дружбы и Почета. Он является лауреатом Государственной премии Республики Коми в об-

ласти экономики, премии Правительства Республики Коми в области научных исследований, премии имени чл.-корр. РАН М. А. Сергеева за цикл исследований по теме «Север в экономике и региональной политике России». Виталий Николаевич награжден дипломами Русского географического общества «За выдающиеся научные работы в области географии», Северо-Западной секции содействия развитию экономической науки Отделения общественных наук РАН «За активное содействие и большую работу в развитии экономической науки», медалью УрО РАН им Н. Н. Колосовского, многочисленными почетными грамотами Российской академии наук и министерств и ведомств.

Финансист по институтскому диплому Виталий Николаевич опирает свои выводы и обоснования на экономические оценки и расчеты. Есть в его научной практике уникальный опыт географической интерпретации банковской статистики. Вспоминается и знаменитая логарифмическая линейка Лаженцева – инструмент первых лет работы в Институте (Отделе экономики). Методом анализа и визуальным результатом его исследований являются картосхемы. Большой багаж у В. Н. Лаженцева экспедиционной работы в Забайкалье в годы работы в Комплексном научно-исследовательском институте СО АН СССР в Чите. «Поле», коллеги, интересные случаи вспоминаются до сих пор.

В. Н. Лаженцев знает и любит поэзию и по традиции российской науки, не разделявшей «физиков» и «лириков», легко может написать поздравление коллеге, остроумно обрисовать текущую ситуацию в родном коллективе, что подтверждают его «датские» (по выражению писателя А. Алексина) стихи в юбилейном рукописном сборнике «Строки по поводу» (2010).

Виталий Николаевич, смешлив, чутко реагирует на юмор, ценит хороший анекдот. Подвластен ему и жанр эпиграммы, вот примеры:

На многих из нас

«Валовку он на численность делил...

И Маркса вспомнил, и решение съезда,

Но результат не получил,

Зато цитат какая бездна!»

На самого себя любимого

«Читал он в старину Гельвеция, Гольбаха...

И мог сравнить Прудона с Фейербахом

По их концепциям: кого и как любить...

Вот результат:

Хоть голову на плаху,

Хоть рви на нем последнюю рубаху,

Но только дай поговорить!»

От всей души поздравляем выдающегося ученого, блестящего организатора, талантливого и успешного человека Виталия Николаевича Лаженцева с юбилеем и желаем ему долгой и счастливой творческой жизни!

Коллектив Института социально-экономических и энергетических проблем Севера ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

Потери

Памяти Андрея Вячеславовича Карпова (1980–2025)



10 февраля 2025 г. после продолжительной болезни на 45-м году ушел из жизни Андрей Вячеславович КАРПОВ, научный сотрудник Физико-математического института ФИЦ Коми НЦ УрО РАН.

Андрей Карпов родился 11 июля 1980 г. в г. Сыктывкаре. По природе своей он был независимым, ответственным и очень общительным человеком, что с самых ранних лет помогало ему быстро находить общий язык с людьми и заводить крепкую дружбу. Интересы маленького Андрея выходили далеко за рамки обычной школьной программы: он читал много доступной ему научной и технической литературы, занимался саморазвитием. Самостоятельно освоил игру на гармонии и гитаре. Уже в младших классах у него сформировался устойчивый интерес к изучению физики, математики и программированию. По мере сил и ресурсов он самостоятельно решал физические и математические задачи, переводя самые интересные из них в программный код, а полученные в результате знания Андрей успешно применял для нестандартного решения обычных бытовых задач.

После завершения девятого класса общеобразовательной школы № 4 Андрей Вячеславович продолжил обучение в профессиональном училище № 6. В период обучения в училище успешно сочетал академические достижения (окончил учебное заведение с отличием) с активной общественной деятельностью, исполняя обязанности старосты класса, где также проявил себя честным и принципиальным человеком. Приобретенные в училище практические навыки впоследствии сыграли немалую роль на следующем этапе его обучения.

Losses

To the memory of Andrey Vyacheslavovich Karpov (1980–2025)

Этим этапом в 1998 г. стало поступление на физический факультет Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина. По его словам, практический опыт и навыки, полученные ранее в училище, наполнились новым смыслом при освоении сложных, преимущественно теоретических, физических дисциплин. Ключевым моментом в формировании его научной карьеры стало обязательное распределение по кафедрам. Изначально определенный на кафедру радиоэлектроники, Андрей Вячеславович принял осознанное решение о смене направления, подав заявление о переводе на кафедру физики твердого тела. На тот момент кафедрой руководил ведущий специалист в области рентгеновской дифракции, профессор, доктор физико-математических наук Василий Ильич Пунегов. Успешно окончив университет в 2003 г., Андрей Вячеславович получил приглашение профессора В. И. Пунегова поступить в аспирантуру под его научное руководство. В 2006 г. он принял предложение о работе в Отделе математики (ныне Физико-математический институт) Коми НЦ УрО РАН, где и трудился до конца своих дней.

А. В. Карпов внес большой вклад в развитие динамической теории дифракции рентгеновских лучей в кристаллах, многослойных дифракционных решетках, наноразмерных структурах с латеральной модуляцией. Он обобщил идеи динамической теории дифракции для описания дифракции пространственно-ограниченных и частично-когерентных рентгеновских пучков, в том числе и микропучков, а полученные им решения были применены в методе рентгеновской диагностики функциональных материалов. Его публикации в соавторстве с другими учеными в высокорейтинговых международных журналах были высоко оценены мировым научным сообществом. Научные интересы А. В. Карпова были связаны также с высокопроизводительными параллельными вычислениями. На протяжении нескольких лет он совместно с д.ф.-м.н. К. Г. Поповым обеспечивал эксплуатацию и доступ научных сотрудников Коми НЦ по корпоративной сети к двум вычислительным кластерам МВС-1000/16 Коми 1 и МВС-1000/16 Коми 2. В рамках своих научных работ Андрей Вячеславович использовал данные вычислительные мощности для решения задач рентгеновской дифракции. Кроме этого, совместно с научным сотрудником Физико-математического института А. Я. Кутовым, специалистом в области физики высоких энергий, А. В. Карпов проводил расчеты в рамках крупного проекта по изучению множественности рождения частиц в области, близкой к пороговому рождению, на установке СВД-2 (Протвино, Россия).



А. В. Карпов (слева) со своим другом и коллегой к.ф.-м.н. Д. В. Казаковым за обсуждением результатов исследований.
A. V. Karpov (on the left) with his friend and colleague Cand. Sci. (Phis.-Math.) D. V. Kazakov discussing the research results.

Андрей Вячеславович под руководством д.ф.-м.н., профессора В. И. Пунегова подготовил кандидатскую диссертацию. Приведем здесь выписку из протокола № 6 от 8 декабря 2023 г. заседания Ученого совета Физико-математического института ФИЦ Коми НЦ УрО РАН.

ПОСТАНОВИЛИ:

1. Учитывая актуальность темы исследования, практическую значимость и высокий уровень диссертационной работы научного сотрудника Карпова А. В. «Теория дифракции пространственно-ограниченных рентгеновских пучков от периодических структур и поверхностных решеток», признать ее отвечающим всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям.

2. Рекомендовать кандидатскую диссертацию Карпова А. В. «Теория дифракции пространственно-ограниченных рентгеновских пучков от периодических структур и поверхностных решеток» к защите в Диссертационном совете МГУ.013.3 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по специальности 1.3.8. «Физика конденсированного состояния».

К сожалению, защитить диссертацию Андрей Вячеславович не успел. В связи с кончиной А. В. Карпова свои соболезнования в адрес В. И. Пунегова прислали ведущие специалисты в области рентгеновской спектроскопии: профессор МГУ В. А. Бушуев, д.ф.-м.н. Л. И. Горай, д.ф.-м.н., г.н.с. Курчатовского института В. Г. Кон, д.ф.-м.н. В. Е. Асад-

чиков, д.ф.-м.н. А. А. Ломов, д.ф.-м.н. В. А. Ткаль, к.ф.-м.н. Я. И. Нестерец (Австралия), к.ф.-м.н. К. М. Павлов (новая Зеландия) и др.

За свою трудовую деятельность Андрей Вячеславович Карпов был отмечен: Почетной грамотой Коми НЦ (2013), благодарностью Коми НЦ (2015), благодарностью УрО РАН (2019), Почетной грамотой УрО РАН (2020), благодарностью Минобрнауки России (2024).

Если коснуться внеаучной деятельности, то Андрей Вячеславович был, что называется, мастером на все руки. Если в Институте что-то ломалось, будь то компьютер, мебель и т. д., то все в первую очередь обращались к Андрею Вячеславовичу, а зачастую он сам проявлял инициативу и устранял неполадки, на которые другие не обращали внимания. У него всегда были под рукой необходимые инструменты, детали и т. д. Иногда он даже приходил на работу в выходные, чтобы что-то починить. Хочется привести два характерных случая.

После переезда в новое помещение по адресу ул. Оплеснина, 4 Физико-математический институт довольно продолжительное время оставался «засекреченной» организацией, в том смысле, что у входа не было никаких информационных табличек. Физически такие таблички существовали, но все как-то руки не доходили их установить. Но в одно прекрасное утро сотрудники пришли на работу и обнаружили на стене у главного входа

красивые таблички с названием организации. Это Андрей Вячеславович накануне вечером остался после работы и навел порядок.

Второй случай связан с оргтехникой. Один из приятелей А. В. Карпова приобрел 3d-принтер. Принтер оказался не очень хорошим и работал с перебоями. За помощью он обратился к Андрею Вячеславовичу, который договорился с руководством Института и за внебюджетные средства



выкупил этот принтер. Наладил его работу, освоил 3d-печатать, спроектировал и напечатал много интересных вещей. В частности, в 2019 г. Коми научный центр заложил традицию — передачу символа мудрости, знания и опыта человечества — сову от выпускников аспирантуры первокурсникам. Автор этого произведения — Андрей Вячеславович Карпов. Он придумал образ и изготовил модель с помощью 3d-печати в стенах Физико-математического института.



3d-модели, созданные А. В. Карповым.
3d-models prepared by A. V. Karpov.

Андрей Вячеславович был прекрасным семьянином: любящим мужем, заботливым отцом. У него осталось двое сыновей младшего школьного возраста. Уверены, что они всегда с теплотой будут вспоминать своего отца и гордиться им.

На протяжении всей своей жизни Андрея Вячеславовича отличали общительность, дружелюбие и щедрость — он очень любил делать и дарить подарки. Также ему были присущи отзывчивость, готовность всегда прийти на помощь, огромная эмоциональная устойчивость и невероятная стойкость перед жизненными трудностями. Память об Андрее Вячеславовиче Карпове всегда будет жить в наших сердцах.

Публикации А. В. Карпова

Публикации в журналах

1. Пунегов, В. И. Влияние азимутальной ориентации многослойной дифракционной решетки на когерентное и диффузное рассеяние рентгеновского излучения / В. И. Пунегов, А. В. Карпов, С. В. Мытниченко [и др.] // Известия РАН. Серия физическая. – 2004. – Т. 68, № 4. – С. 540–544.
2. Пунегов, В. И. Статистическая динамическая теория рассеяния на многослойной дифракционной решетке / В. И. Пунегов, А. В. Карпов // Известия РАН. Серия физическая. – 2005. – Т. 69, № 2. – С. 216–219.

3. Kokoulina, E. New results of the extreme multiplicity studies E. Kokoulina, V. Nikitin,..., A. Karpov [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 514–518.
4. Kokoulina, E. S. Search for collective phenomena in hadron interactions / E. S. Kokoulina, V. A. Nikitin,..., A. V. Karpov [et al.] // Ядерная физика. – 2010. – Т. 73, № 12. – С. 2172–2181.
5. Рядовилов, В. Н. Топологические сечения в pp-взаимодействиях при 50 ГэВ // Ядерная физика. – 2012 – Т. 75 (3). – С. 343–348 (Здесь А. В. Карпов формально не является автором, но упоминается среди участников проекта).
6. Рядовилов, В. Н. Флуктуации числа нейтральных пионов при большой множественности в pp-взаимодействиях при 50 ГэВ // Ядерная физика. – 2012 – Т. 75 (8). – С. 1050–1059 (Здесь А. В. Карпов формально не является автором, но упоминается среди участников проекта).
7. Punegov, V. I. Applications of dynamical theory of X-ray diffraction by perfect crystals to reciprocal space mapping / V. I. Punegov, K. M. Pavlov, A. V. Karpov [et al.] // J. Appl. Cryst. – 2017. – Vol. 50. – P. 1256–1266.
8. Карпов, А. В. Теория рентгеновской дифракции на кристалле с поверхностным рельефом / А. В. Карпов, Д. В. Казаков, К. М. Павлов [и др.] // Известия Коми НЦ УрО РАН. Серия «Физико-математические науки». – 2018. – № 1 (33). – С. 5–12.

9. Карпов, А. В. Отражение рентгеновского пучка от ограниченной многослойной дифракционной решетки / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Известия Коми НЦ УрО РАН. Серия «Физико-математические науки». – 2019. – № 3 (39). – С. 5–7.
 10. Punegov, V. I. X-ray microbeam diffraction in a crystal / V. I. Punegov, A. V. Karpov // Acta Cryst. A. – 2021. – Vol. 77. – P. 117–125.
 11. Karpov, A. V. Dynamical theory of X-Ray diffraction by crystals with different surface relief profiles / A. V. Karpov, D. V. Kazakov, V. I. Punegov // Acta Cryst. A. – 2023. – Vol. 79. – P. 171–179.
 12. Карпов, А. В. Брэгговские отражения многослойной дифракционной решетки / А. В. Карпов // Известия Коми НЦ УрО РАН. Серия «Физико-математические науки». – 2023. – № 4 (62). – С. 91–95.
 13. Казаков, Д. В. К теории рентгеновской Лауэ дифракции в термомиграционном кристаллическом канале с легирующей примесью / Д. В. Казаков, А. В. Карпов, С. И. Колосов [и др.] // Известия Коми НЦ УрО РАН. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 64–67.
- Публикации в сборниках статей**
1. Карпов, А. В. Вычисления с инструментальной функцией в трехосевой дифрактометрии для синхротронного излучения / А. В. Карпов // Проблемы математики и теоретической физики (Труды Коми НЦ УрО РАН, № 186). – Сыктывкар, 2011. – С. 130–139.
- Публикации в сборниках трудов конференций**
1. Пунегов, В. И. Влияние азимутальной ориентации многослойной дифракционной решетки на когерентное и диффузное рассеяние рентгеновского излучения / В. И. Пунегов, А. В. Карпов, С. В. Мытниченко [и др.] // Рентгеновская оптика - 2003: материалы совещания. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2003. – С. 95–101.
 2. Карпов, А. В. Уравнения статистической динамической теории рассеяния на многослойной дифракционной решетке / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Рентгеновская оптика - 2004: материалы совещания. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2004. – С. 212–215.
 3. Пунегов, В. И. Влияние различных факторов на рассеяние синхротронного излучения от многослойной дифракционной решетки / В. И. Пунегов, А. В. Карпов, С. В. Мытниченко [и др.] // Современные методы анализа дифракционных данных (топография, дифрактометрия, электронная микроскопия): материалы второго научного семинара с международным участием. – Великий Новгород: НовГУ, 2004. – С. 109–111.
 4. Пунегов, В. И. Вычислительная диагностика многослойных дифракционных решеток: влияние формы штриха на угловое распределение отраженной интенсивности / В. И. Пунегов, А. В. Карпов, С. И. Колосов: материалы Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника», Т. 2. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2005. – С. 275–276.
 5. Пунегов, В. И. Теория дифракции рентгеновского излучения от многослойного зеркала с синусоидальным поверхностным рельефом / В. И. Пунегов, А. В. Карпов, С. И. Колосов: материалы Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника», Т. 2. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2006. – С. 392–393.
 6. Пунегов, В. И. Теория рассеяния рентгеновских лучей на многослойной дифракционной решетке со случайным расположением штриха в периоде / В. И. Пунегов, А. В. Карпов, С. И. Колосов: материалы Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника», Т. 2. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2006. – С. 394–395.
 7. Карпов, А. В. Теория дифракции рентгеновских лучей на многослойной структуре с поверхностным рельефом / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Современные методы анализа дифракционных данных (топография, дифрактометрия, электронная микроскопия): материалы Международного научного семинара. – Великий Новгород: НовГУ, 2006. – С. 164–166.
 8. Карпов, А. В. Теория рассеяния рентгеновских лучей на поверхностной многослойной решетке с линейным изменением периода и ширины штриха / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Современные методы анализа дифракционных данных (топография, дифрактометрия, электронная микроскопия): материалы Международного научного семинара. – Великий Новгород: НовГУ, 2008. – С. 108–110.
 9. Карпов, А. В. Описание кинематического подхода к дифракции рентгеновских лучей на многослойной решётке с помощью функции дифракционной решётки / А. В. Карпов // Современные методы анализа дифракционных данных (топография, дифрактометрия, электронная микроскопия): материалы IV Международного научного семинара. – Великий Новгород: НовГУ, 2008. – С. 108–110.
 10. Карпов, А. В. Влияние преломления и поглощения в условиях рассеяния рентгеновских лучей на многослойной дифракционной решетке / А. В. Карпов // Сборник материалов V Международного научного семинара «Современные методы анализа дифракционных данных (топография, дифрактометрия, электронная микроскопия)». – Великий Новгород: НовГУ, 2011. – С. 83–85.
 11. Карпов, А. В. Решение задачи дифракции СИ на МДР с учетом функции пространственной когерентности / А. В. Карпов: материалы VI Международного научного семинара «Современные методы дифракционных данных и актуальные проблемы оптики». – Великий Новгород: НФСПбГУСЭ, 2013. – С. 171–173.
 12. Карпов, А. В. Отражение жесткого рентгеновского излучения многослойной дифракционной решеткой / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Труды XIX Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника», т. 1. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2015. – С. 363–365.
 13. Карпов, А. В. О влиянии формы штриха на рассеяние рентгеновских лучей от многослойной дифракционной решетки / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Современ-

- ные методы анализа дифракционных данных и актуальные проблемы рентгеновской оптики: материалы седьмого международного научного семинара. – Великий Новгород: НФС СПбГУСЭ, 2015. – С. 100–103.
14. Карпов, А. В. Рентгеновское отражение от латерально ограниченной многослойной дифракционной решетки / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Труды XX Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника», т. 1. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2016. – С. 379–381.
 15. Карпов, А. В. Рентгеновская дифракция на кристаллическом рельефе / А. В. Карпов, В. И. Пунегов, Д. В. Казаков // «Рентгеновская оптика – 2016»: сборник материалов. – Черногoловка, ФГБУН «ИПТМ», 2016. – С. 31–33.
 16. Карпов, А. В. Динамическая дифракция рентгеновских микропучков в периодических средах / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Труды XXI Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника», т. 1. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2017. – С. 401–402.
 17. Карпов, А. В. Теория компланарной рентгеновской дифракции на кристалле с поверхностным рельефом / А. В. Карпов // Вестник Коми научного центра УрО РАН. Вып. 33. Труды Международного семинара «Теоретико-групповые методы исследования физических систем». – Сыктывкар, 2018. – С. 63–70.
 18. Карпов, А. В. Дифракция рентгеновских лучей на кристалле с периодическим поверхностным рельефом / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Труды XXII Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника», т. 1. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2018. – С. 444–445.
 19. Карпов, А. В. Влияние пространственных размеров рентгеновских пучков на рассеяние многослойными дифракционными решетками / А. В. Карпов, В. И. Пунегов // Труды XXIII Международного симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника», т. 1. – Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2019. – С. 479–480.
- Тезисы докладов**
1. Карпов, А. В. Математический инструмент gridMathematica для научных исследований на кластере Коми научного центра УрО РАН // Материалы докладов I Всероссийской молодежной научной конференции «Молодежь и наука на севере», т. 1. – Сыктывкар: КНЦ УрО РАН, 2008. – С. 10.
 2. Karpov, A. V. The Statistical Theory of Scattering Hard X-rays on a Multilayer Grating Taking Into Account Effects of Refraction and Absorption // XTOP-2012. Book of Abstracts, Saint-Petersburg, September 15–20, 2012, P. 357.
 3. Карпов, А. В. Динамическая теория рассеяния жесткого рентгеновского излучения многослойной дифракционной решетке // доклады конференции «Рентгеновская оптика – 2014». – Черногoловка, 2014. – С. 46–47.
 4. Карпов, А. В. Теория компланарной рентгеновской дифракции на кристалле с поверхностным рельефом // Тезисы докладов международного семинара «Теоретико-групповые методы исследования физических систем». – Сыктывкар: Коми НЦ УрО РАН, 2017. – С. 32–33.
 5. Карпов, А. В. Рассеяние рентгеновских лучей многослойной дифракционной решёткой Ni/C. Обратная задача дифракции // Доклады конференции «Рентгеновская оптика – 2018». – Черногoловка, 2018. – С. 52.
 6. Карпов, А. В. Теория трёхосевой дифрактометрии кристаллов для пространственно-ограниченных пучков / А. В. Карпов, Д. В. Казаков // Объединённая конференция «Электронно-лучевые технологии и рентгеновская оптика в микроэлектронике»: тезисы докладов. – Черногoловка: КЭЛТ, 2023. – С. 206–208.

*Коллектив Физико-математического института
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН*



Научный журнал

ИЗВЕСТИЯ

Коми научного центра
Уральского отделения Российской академии наук

**Серия «Физико-математические науки»
№ 6 (82)**

Номер подготовили:

Ответственный редактор серии – д.ф.-м.н. Н. А. Громов
Ответственный секретарь серии – к.ф.-м.н. Д. А. Тимушев
Выпускающий редактор – И. В. Курляк
Редактор – О. А. Гросу
Переводчики – Е. С. Кузьмина, С. Ф. Камалова
Компьютерное макетирование – Л. В. Михайлова
Дизайн обложки – Я. С. Куликова

Лицензия № 0047 от 10.01.1999.

Подписано в печать 19.09.2025. Дата выхода в свет 23.09.2025.

Уч.-изд.л. 11,5. Усл.-печ.л. 11,0. Тираж 300. Заказ № 32.

Формат 60x84¹/₈. Свободная цена.

Подготовлено к изданию и отпечатано в редакционно-издательском центре ФИЦ Коми НЦ УрО РАН
167982, Российская Федерация, Республика Коми, ГСП-2, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24.

Адрес учредителя, издателя: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр «Коми научный центр УрО РАН».
167982, Российская Федерация, Республика Коми, ГСП-2, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, 24.