

Деформация сжимаемого продольной силой стержня при жестких ограничениях на перемещения с различными граничными условиями

В. Ю. Андриюкова, В. Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар
veran@list.ru
vntarasov@dm.komisc.ru

Аннотация

В работе авторы рассматривают задачу определения упругой линии сжимаемого продольной силой стержня, расположенного между двумя жесткими стенками. Изучают зависимость упругой линии и величин критических нагрузок от различных граничных условий. Получены точные решения задачи в нелинейной постановке.

Ключевые слова:

устойчивость, стержень, вариационная задача, точки бифуркации, односторонние ограничения, критическая сила

Введение

Задачу о продольном изгибе стержня впервые рассмотрел Л. Эйлер (см. обзор Е. Л. Николаи "О работах Эйлера по теории продольного изгиба" [1]). Плоские линии сжимаемого продольной силой упругого стержня получили название эластички Эйлера. Задача об упругой линии сжатого и скрученного стержня рассматривалась многими авторами. Фундаментальное исследование этой проблемы можно найти в работе Е. Л. Николаи "К задаче об упругой линии двоякой кривизны."

Проблема стесненного изгиба стержня является сложной, ибо приводит к необходимости решения задач вариационного исчисления при ограничениях на перемещения в виде неравенств. В линейной постановке упругая линия сжимаемого продольной силой стержня, расположенного между двумя жесткими стенками в случае граничных условий шарнирного опирания, рассмотрел В. И. Феодосьев в [2]. Нелинейный изгиб — в работе авторов [3]. В предложенной статье показано влияние граничных условий на упругую линию стесненного изгиба.

1. Граничные условия шарнирного опирания

Рассмотрим плоский изгиб упругого стержня длины ℓ , сжимаемого продольной силой P , которая в процессе деформации сохраняет свои величину и направление.

Deformation of a rod compressed by a longitudinal force under rigid constraints on displacement with various boundary conditions

V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar
veran@list.ru
vntarasov@dm.komisc.ru

Abstract

The paper considers the problem of determining the elastic line of a rod compressed by a longitudinal force, located between two rigid walls. The dependence of the elastic line and the values of critical loads on various boundary conditions is studied. Exact solutions of the problem in a nonlinear formulation are obtained.

Keywords:

stability, rod, variational problem, bifurcation points, one-sided constraints, critical force

Стержень в первоначальном недеформированном состоянии расположен между двумя жесткими стенками на одинаковом расстоянии Δ от каждой из них. Пусть s — длина дуги стержня, $w(s)$, $z(s)$ — декартовы координаты деформированного стержня. Обозначим через $\gamma(s)$ угол между касательной к деформированной оси стержня и осью z . Тогда выполнены уравнения

$$w' = \sin \gamma, \quad z' = \cos \gamma. \quad (1)$$

Полная потенциальная энергия стержня имеет вид:

$$U = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EJ \gamma'^2 - P(1 - \cos \gamma) \right] ds.$$

Здесь $\gamma'(s)$ — кривизна упругой линии,

$$\int_0^\ell \frac{1}{2} EJ \gamma'^2 ds$$

— упругая энергия стержня,

$$\int_0^\ell P(1 - \cos \gamma) ds = \int_0^\ell P(ds - dz)$$

— работа внешних сил.

Предположим, что выполнены условия шарнирного опирания

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w''(0) = w''(\ell) = 0. \quad (2)$$

Определение перемещений сжатого продольной силой стержня при жестких ограничениях на перемещения сводится к экстремальной проблеме

$$U \rightarrow \min_{\gamma, w}$$

при ограничениях

$$|w(s)| \leq \Delta.$$

При этом функции $\gamma(s), w(s)$ удовлетворяют первому из уравнений (1) и выполнены граничные условия (2).

2. Решение в линейном приближении

Рассматриваемая задача решена В. И. Феодосьевым. Приведем его решение. Предположим, что Δ мал, прогиб w и угол γ также являются малыми величинами. Тогда можно положить

$$s = z, \quad \cos \gamma \approx 1 - \frac{1}{2}w'^2.$$

Оставляя в функционале $U(w)$ только квадратичные слагаемые, получаем задачу:

$$U_2(w) = \int_0^\ell \left(\frac{EJ}{2}w''^2 - \frac{P}{2}w'^2 \right) dz \rightarrow \min_{|w(z)| \leq \Delta}.$$

Предположим, что сила P больше первой критической силы Эйлера $P_*^{(1)}$, т. е.

$$P > P_*^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \quad \left(P_*^{(n)} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{\ell^2} \right),$$

и больше той силы, при которой происходит касание стержня со стенкой. Допустим при этом, что стержень полностью прилегает к стенке в некоторой своей средней части длины $\ell_2 = \ell - 2\ell_1$ (ℓ_1 – длина криволинейного участка стержня от конца до первой точки касания).

В этом случае определение прогиба сводится к решению вариационной задачи:

$$\int_0^{\ell_1} \left(\frac{EJ}{2}w''^2 - \frac{P}{2}w'^2 \right) dz \rightarrow \min_{w, \ell_1}. \quad (3)$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$w^{IV} + k^2 w'' = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}. \quad (4)$$

В точке ℓ_1 прогиб $w(z)$ и его первая производная $w'(z)$ должны быть непрерывны, т. е.

$$w(\ell_1) = 0, \quad w'(\ell_1) = 0. \quad (5)$$

Из условия минимума функционала (3) по ℓ_1 находим еще одно граничное условие:

$$w''(\ell_1) = 0. \quad (6)$$

Последнее равенство означает, что кривизна стержня в точке ℓ_1 является непрерывной. Интегрируя два раза уравнение (4) с учетом граничных условий, получаем

$$w'' + k^2 w = \frac{R}{EJ} z. \quad (7)$$

Данное соотношение является уравнением равновесия стержня на участке $z \in [0, \ell_1]$, R – сила реакции стенки в точке ℓ_1 .

Общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$w = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz + rz, \quad r = \frac{R}{EJ}. \quad (8)$$

Так как $w(0) = 0$, то $c_2 = 0$. Подставляя (8) в условия (5), (6), получаем для определения c_1, ℓ_1 систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 \sin k\ell_1 + r\ell_1 = \Delta, \\ kc_1 \cos k\ell_1 + r = 0, \\ \sin k\ell_1 = 0. \end{cases}$$

Из последней системы находим

$$k\ell_1 = \pi, \quad c_1 = \frac{\Delta}{\pi}, \quad r = \frac{k\Delta}{\pi},$$

откуда окончательно получаем выражение для прогиба на интервале $[0, \ell_1]$

$$w(z) = \frac{\Delta}{\pi} (\sin kz + kz)$$

и

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_1^2}. \quad (9)$$

Подставляя в последнюю формулу $\ell_1 = \ell/2$, находим, что минимальная сила, при которой может существовать участок полного прилегания стержня к стенке, равна

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}. \quad (10)$$

Это означает, что в случае

$$\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} < P < \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}$$

стержень либо не касается стенки, либо касается ее в единственной точке $z = \ell/2$. Если средний участок становится достаточно длинным, то он, в свою очередь, может потерять устойчивость. Критическая сила для этого участка равна первой критической силе для жестко заделанного стержня длины ℓ_2

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{\ell_2^2}. \quad (11)$$

Поскольку $\ell_2 = \ell - 2\ell_1$, то, приравняв силы (9), (11), находим

$$\ell_1 = \frac{\ell}{4}, \quad P = \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2}.$$

После того, как средний участок потеряет устойчивость, ℓ_1 скачком изменяет свое значение и становится равным $\ell/3$. Рассматривая теперь каждую треть стержня как новый самостоятельный стержень, для его описания в ранее полученных уравнениях необходимо заменить ℓ на $\ell/3$. Выражение (9) при этом даст

$$\ell_1 = \frac{\ell}{6}, \quad P = \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}.$$

Это означает, что при

$$P > \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$$

стержень снова начинает прилегать к стенкам. При

$$\frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} < P < \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$$

Интервалы изменения сил при нагрузке и разгрузке

Intervals of force changes during loading and unloading

№	При нагрузке	При разгрузке
1	$P \leq \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$P \leq \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2}$
2	$\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}$
3	$\frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2}$
4	$\frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$
5	$\frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{144\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{81\pi^2 EJ}{\ell^2}$
6	$\frac{144\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{324\pi^2 EJ}{\ell^2}$	$\frac{81\pi^2 EJ}{\ell^2} \leq P \leq \frac{324\pi^2 EJ}{\ell^2}$

3. Точное решение нелинейной задачи

стержень соприкасается со стенками только в трех точках.

При разгрузке стержень перейдет к трехволновой форме равновесия при

$$P = \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2}, \quad \left(\text{а не при } P = \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} \right).$$

В таблице 1 приведены соответствующие интервалы изменения сил при нагрузке и разгрузке.

Таблица 1

Table 1

где

$$a = \sqrt{k^4 + r^2}, \quad \cos \beta = k^2 / \sqrt{k^4 + r^2},$$

$$\sin \beta = -r / \sqrt{k^4 + r^2}, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}, \quad r = \frac{R}{EJ}.$$

Из граничного условия $\gamma'(0) = 0$ находим ($\gamma_0 = \gamma(0)$)

$$c = -a \cos(\gamma_0 + \beta),$$

тогда уравнение (13) можно записать так

$$\gamma'^2 = 2a \left[\sin^2 \frac{\gamma_0 + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma + \beta}{2} \right].$$

Из последнего уравнения, используя граничное условие $\gamma'(\ell_1) = 0$, получим, что

$$\beta = -\frac{\gamma_0}{2}.$$

Выполним далее подстановку

$$\sin \frac{\gamma + \beta}{2} = -\sin \frac{\gamma}{4} \sin \psi, \quad (14)$$

тогда

$$\gamma'^2 = 4a \sin^2 \frac{\gamma_0}{4} \cos^2 \psi. \quad (15)$$

Из (14) следует, что

$$\psi_0 = \psi(0) = -\frac{\pi}{2},$$

а из (15) находим

$$\psi_1 = \psi(\ell_1) = \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

Дифференцируя (14) и используя уравнение (15), получаем

$$\cos^2 \frac{\gamma + \beta}{2} a^2 \sin^2 \frac{\gamma_0}{4} \cos^2 \psi = \sin^2 \frac{\gamma}{4} \cos^2 \psi \psi'^2,$$

Применение линейного уравнения (4) нуждается в дополнительном обосновании, ибо обычно в расчетах на устойчивость упругих систем линейное приближение позволяет находить критические нагрузки, а для определения перемещений необходимо решать нелинейные уравнения равновесия. Анализ нелинейного уравнения позволяет найти дополнительные решения к тем решениям, которые следуют из рассмотрения задачи в линейном случае.

В нелинейном случае вместо (3) следует рассмотреть задачу

$$\int_0^{\ell_1} \left[\frac{1}{2} EJ \gamma'^2 - P(1 - \cos \gamma) \right] ds \rightarrow \min_{\gamma, \ell_1} \quad (12)$$

при ограничениях

$$\int_0^{\ell_1} \sin \gamma ds = \Delta,$$

$$\gamma'(0) = 0, \quad \gamma(\ell_1) = 0, \quad \gamma'(\ell_1) = 0.$$

Равенство $\gamma'(\ell_1) = 0$ следует из условия минимума функционала (12) по ℓ_1 и означает, что в точке ℓ_1 кривизна является непрерывной.

Выпишем функционал Лагранжа:

$$\int_0^{\ell_1} \left[\frac{1}{2} EJ \gamma'^2 - P(1 - \cos \gamma) + R \sin \gamma \right] ds.$$

Уравнение Эйлера для функционала имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2} \gamma'^2 + k^2 \cos \gamma - r \sin \gamma = \tilde{c} = \text{const}.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{1}{2} \gamma'^2 = a \cos(\gamma + \beta) + c, \quad (13)$$

или

$$\psi'^2 = a^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\gamma + \beta}{4} \right).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$kds = \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma_0}{4} \sin^2 \psi}}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$ks = \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} [F(m, \psi) + F(m, \frac{\pi}{2})], \quad (17)$$

где

$$F(m, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\tilde{\psi}}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \tilde{\psi}}} \quad \left(m^2 = \sin^2 \frac{\gamma_0}{4} \right)$$

– эллиптический интеграл первого рода.

Из (16), (17) вытекает, в частности, формула для длины криволинейного участка

$$k\ell_1(\gamma_0) = 2 \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} F(m, \frac{\pi}{2}).$$

$$kw(\psi) = \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} \sin \frac{\gamma_0}{2} \left[2E(m, \psi) - F(m, \psi) + 2E(m, \frac{\pi}{2}) - F(m, \frac{\pi}{2}) \right] + 2 \left(\cos \frac{\gamma_0}{2} \right)^{3/2} \sin \frac{\gamma_0}{4} \cos \psi, \quad (18)$$

где

$$E(m, \psi) = \int_0^\psi \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \tilde{\psi}} d\tilde{\psi}$$

– эллиптический интеграл второго рода.

$$k\Delta(\gamma_0) = 2 \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} \sin \frac{\gamma_0}{2} \left[2E(m, \frac{\pi}{2}) - F(m, \frac{\pi}{2}) \right].$$

$$kz(\psi) = \left(\cos \frac{\gamma_0}{2} \right)^{3/2} [2E(m, \psi) - F(m, \psi) + 2E(m, \frac{\pi}{2}) - F(m, \frac{\pi}{2})] - 2 \sqrt{\cos \frac{\gamma_0}{2}} \sin \frac{\gamma_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{4} \cos \psi.$$

Рассмотрим теперь графики функций $k\Delta(\gamma_0)$ и $k\ell_1(\gamma_0)$, изображенные на рис. 1. Из первого видно, что каждому значению критериального параметра $k\Delta = \sqrt{P/EI}$ отвечают две предполагаемые формы равновесия, пока

$$k\Delta < \max_{\gamma_0 \in [0, \pi]} k\Delta(\gamma_0) \approx 1.66.$$

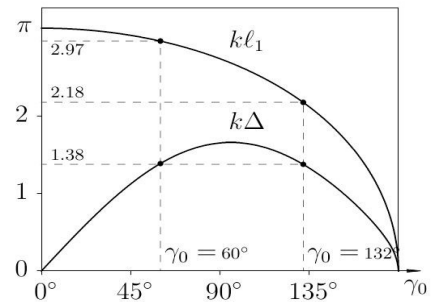


Рисунок 1. Графики функций $k\Delta(\gamma_0)$ и $k\ell_1(\gamma_0)$.

Figure 1. Graphs of functions $k\Delta(\gamma_0)$ and $k\ell_1(\gamma_0)$.

Например, пусть $\ell = 1$ м, $EI = 10^{-3}$ кН · м², $\Delta = 0.11$ м. Тогда для $P = P_*^{(4)} = 0.158$ кН имеем:

$$k\Delta = \Delta \sqrt{P/EI} = 1.38.$$

При указанных исходных данных возможны две формы равновесия для стержня (рис. 2), определяемые формулой (18) и значениями γ_0

$$\gamma_0^{(1)} = 60^\circ, \quad \gamma_0^{(2)} = 132^\circ.$$

Последним соответствуют величины

$$k\ell_1^{(1)} = 2.97, \quad k\ell_1^{(2)} = 2.18.$$

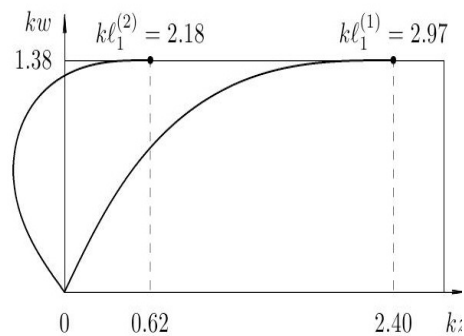


Рисунок 2. Две различные формы равновесия стержня.

Figure 2. Two different forms of rod equilibrium.

Таким образом, $\ell_1^{(1)} = 0.197$ м, $\ell_1^{(2)} = 0.236$ м – это длины криволинейных участков до первой точки касания, $\ell_2^{(1)} = 0.652$ м, $\ell_2^{(2)} = 0.528$ м – длины соответствующих участков выстилания.

4. Равновесие стержня при граничных условиях жесткой заделки

Предположим, что вместо (2) на концах стержня заданы граничные условия жесткой заделки

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w'(0) = w'(\ell) = 0. \quad (19)$$

Определим силу, при которой существует участок прилегания к стенке длины ℓ_2 . Пусть ℓ_1 – первая точка касания стержнем стенки. В силу симметрии $\ell_2 = \ell_1 - 2\ell_1$. Решение уравнения (4) имеет вид:

$$w(x) = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz + c_3 z + c_4.$$

Учитывая условия (19), (5), (6), получаем систему:

$$\begin{cases} c_2 + c_4 = 0, \\ c_1 k + c_3 = 0, \\ c_1 \sin k \ell_1 + c_2 \cos k \ell_1 + c_3 \ell_1 + c_4 = \Delta, \\ k c_1 \cos k \ell_1 - k c_2 \sin k \ell_1 + c_3 = 0, \\ c_1 \sin k \ell_1 + c_2 \cos k \ell_1 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из второго и четвертого уравнений следует равенство $c_1(\cos k \ell_1 - 1) = c_2 \sin k \ell_1$, откуда с учетом последнего уравнения:

$$\sin^2 k \ell_1 = -(\cos k \ell_1 - 1) \cos k \ell_1, \text{ или } \cos k \ell_1 = 1.$$

В качестве решения возьмем первый, не равный нулю корень $k \ell_1 = 2\pi$. Подставляя $k \ell_1$ в систему (20), находим значения коэффициентов:

$$c_1 = -\frac{\Delta}{2\pi}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{\Delta}{\ell_1} = \frac{k\Delta}{2\pi}, \quad c_4 = 0,$$

$$\ell_1 = \frac{2\pi}{k}.$$

Следовательно, уравнение изгиба стержня на интервале $[0, \ell_1]$ имеет вид:

$$w(x) = \frac{\Delta}{2\pi}(kx - \sin kx).$$

Очевидно

$$\ell_2 = \ell - \frac{4\pi}{k}. \quad (21)$$

Участок полного прилегания к стенке существует, если $\ell_2 > 0$, т. е. $k\ell > 4\pi$, а значит в случае

$$\frac{4\pi EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{16EJ\pi}{\ell^2}$$

стержень либо не касается стенки, либо касается ее в единственной точке.

Средняя часть стержня длины ℓ_2 , став достаточно большой, тоже может потерять устойчивость. Это произойдет при силе $P > \frac{4\pi^2 EJ}{\ell_2^2}$, $k\ell_2 > 2\pi$, или $k\ell > 6\pi$ (из формулы (21)).

Таким образом, существование участка полного прилегания к стенке возможно при

$$\frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}.$$

5. Равновесие стержня при смешанных граничных условиях

При силе $P > \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2}$ стержень примет трехволновую форму равновесия, изображенную на рис. 3. При этом стержень точками $z = \ell_3$, $z = \tilde{\ell}_3 = \ell - \ell_3$ разделяется на три части, каждую из которых можно рассматривать как самостоятельный стержень.

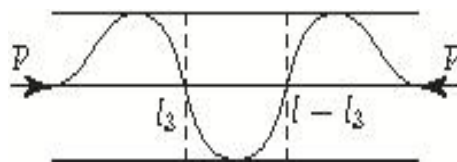


Рисунок 3. Трехволновая форма равновесия стержня.
Figure 3. Three-wave equilibrium form of the rod.

В точках $z = \ell_3$, $z = \tilde{\ell}_3$ выполняются граничные условия шарнирного опирания, поэтому возникает необходимость рассмотреть задачу равновесия стержня при смешанных граничных условиях:

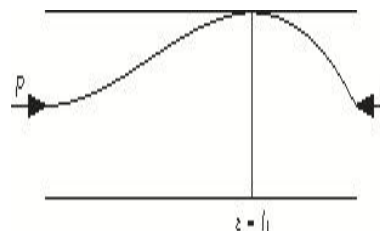


Рисунок 4. Форма равновесия стержня при смешанных граничных условиях.
Figure 4. Equilibrium form of a rod under mixed boundary conditions.

Критическая сила в случае смешанных граничных условий известна: $P = \frac{2.046\pi^2 EJ}{\ell^2}$. Ниже будет показано, что при силе $P > \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2}$ будет происходить прилегание стержня к одной из стенок.

Пусть $z = \ell_1$ – точка касания. Решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$w(z) = \begin{cases} w_1(z) = a_1 \sin kz + a_2 \cos kz + a_3 z + a_4, & z \in [0, \ell_1], \\ w_2(z) = c_1 \sin k(\ell - z) + c_2 \cos k(\ell - z) + c_3(\ell - z) + c_4, & z \in [\ell_1, \ell]. \end{cases} \quad (22)$$

Решение (22) должно удовлетворять условиям:

$$w_1(0) = 0, \quad w'_1(0) = 0, \quad w_1(\ell_1) = \Delta, \quad w'_1(\ell_1) = 0,$$

$$w_2(\ell_1) = \Delta, \quad w'_2(\ell_1) = 0, \quad w_2(\ell) = 0, \quad w'_2(\ell) = 0,$$

кроме того, в точке ℓ_1 вторая производная $w(z)$ при $z = \ell_1$ должна быть непрерывной: $w''_1(\ell_1) = w''_2(\ell_1)$. Следовательно, получим систему:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 k + a_3 = 0, \\ a_1 \sin k \ell_1 + a_2 \cos k \ell_1 + a_3 \ell_1 + a_4 = \Delta, \\ k a_1 \cos k \ell_1 - k a_2 \sin k \ell_1 + a_3 = 0, \\ c_2 + c_4 = 0, \\ c_2 k^2 = 0, \\ c_1 \sin k(\ell - \ell_1) + c_2 \cos k(\ell - \ell_1) + c_3(\ell - \ell_1) + c_4 = \Delta, \\ -k c_1 \cos k(\ell - \ell_1) + k c_2 \sin k(\ell - \ell_1) - c_3 = 0, \\ a_1 \sin k \ell_1 + a_2 \cos k \ell_1 = c_1 \sin k(\ell - \ell_1) + c_2 \cos k(\ell - \ell_1). \end{cases} \quad (23)$$

Используя первые восемь уравнений, находим:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Delta \sin k \ell_1}{2 - 2 \cos k \ell_1 - k \ell_1 \sin k \ell_1}, \\ a_2 &= \frac{\Delta (\cos k \ell_1 - 1)}{2 - 2 \cos k \ell_1 - k \ell_1 \sin k \ell_1}, \\ a_3 &= -\frac{k \Delta \sin k \ell_1}{2 - 2 \cos k \ell_1 - k \ell_1 \sin k \ell_1}, \\ a_4 &= -\frac{\Delta (\cos k \ell_1 - 1)}{2 - 2 \cos k \ell_1 - k \ell_1 \sin k \ell_1}, \\ c_1 &= \frac{\Delta}{\sin k(\ell - \ell_1) - k(\ell - \ell_1) \cos k(\ell - \ell_1)}, \quad c_2 = 0, \\ c_3 &= -\frac{k \Delta \cos k(\ell - \ell_1)}{\sin k(\ell - \ell_1) - k(\ell - \ell_1) \cos k(\ell - \ell_1)}, \quad c_4 = 0. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в последнее уравнение системы (23), получим:

$$\begin{aligned} &\frac{(1 - \cos k \ell_1)}{2 - 2 \cos k \ell_1 - k \ell_1 \sin k \ell_1} = \\ &= \frac{\sin k(\ell - \ell_1)}{\sin k(\ell - \ell_1) - k(\ell - \ell_1) \cos k(\ell - \ell_1)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Неизвестной величиной в уравнении (24) является $k \ell_1$, которая, разумеется, зависит от $k \ell$. Форма равновесия, показанная на рис. 5, возможна при

$$\frac{2.046 \pi^2 E J}{\ell^2} < P \leq \frac{9 \pi^2 E J}{\ell^2}, \text{ или } 1.43 \pi < k \ell \leq 3 \pi.$$

Можно предположить, что $\ell_1 > \ell/2$. Выберем решения уравнения (24), удовлетворяющее этому условию. Получим, что при изменении $k \ell$ в указанных пределах, будут выполнены неравенства: $2.782397 \leq k \ell_1 \leq 6.283073$. Это соответствует изменению ℓ_1 в пределах $0.6027 \ell \leq \ell_1 \leq 0.66677 \ell$.

Рассмотрим случай прилегания средней части стержня при смешанных граничных условиях (рис. 5). Пусть в точке $z = \ell_1$ стержень касается стенки, ℓ_2 – длина участка "выстилаяния," $\tilde{\ell} = \ell_1 + \ell_2$. Используя введенные обозначения, решение уравнения (4) запишем в виде

$$w(z) = \begin{cases} w_1(z) = a_1 \sin kz + a_2 \cos kz + a_3 z + a_4, & z \in [0, \ell_1], \\ \Delta, & z \in [\ell_1, \tilde{\ell}], \\ w_2(z) = c_1 \sin k(\ell - z) + c_2 \cos k(\ell - z) + c_3(\ell - z) + c_4, & z \in [\tilde{\ell}, \ell]. \end{cases} \quad (25)$$

Потребовав выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= 0, \quad w_1'(0) = 0, \quad w_1(\ell_1) = \Delta, \\ w_1'(\ell_1) &= 0, \quad w_1''(\ell_1) = 0, \\ w_2(\tilde{\ell}) &= \Delta, \quad w_2'(\tilde{\ell}) = 0, \quad w_2''(\tilde{\ell}) = 0, \\ w_2(\ell) &= 0, \quad w_2''(\ell) = 0, \end{aligned}$$

получим систему:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 k + a_3 = 0, \\ a_1 \sin k \ell_1 + a_2 \cos k \ell_1 + a_3 \ell_1 + a_4 = \Delta, \\ k a_1 \cos k \ell_1 - k a_2 \sin k \ell_1 + a_3 = 0, \\ a_1 \sin k \ell_1 + a_2 \cos k \ell_1 = 0, \\ c_2 + c_4 = 0, \\ c_2 k^2 = 0, \\ c_1 \sin k(\ell - \tilde{\ell}) + c_2 \cos k(\ell - \tilde{\ell}) + c_3(\ell - \tilde{\ell}) + c_4 = \Delta, \\ -k c_1 \cos k(\ell - \tilde{\ell}) + k c_2 \sin k(\ell - \tilde{\ell}) - c_3 = 0, \\ c_1 \sin k(\ell - \tilde{\ell}) + c_2 \cos k(\ell - \tilde{\ell}) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Как и при решении системы (20), можно получить равенства:

$$k \ell_1 = 2 \pi, \quad k(\ell - \tilde{\ell}) = \pi. \quad (27)$$

Из (27) и (26) находим коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\Delta}{2 \pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{k \Delta}{2 \pi}, \quad a_4 = 0, \\ c_1 &= \frac{\Delta}{\pi}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{k \Delta}{\pi}, \quad c_4 = 0. \end{aligned}$$

Выражение для прогиба примет вид:

$$w(z) = \begin{cases} -\frac{\Delta}{2 \pi} (\sin kz - kz), & z \in [0, \ell_1], \\ \Delta, & z \in [\ell_1, \tilde{\ell}], \\ \frac{\Delta}{\pi} (\sin k(\ell - z) + k(\ell - z)), & z \in [\tilde{\ell}, \ell]. \end{cases} \quad (28)$$

Найдем длину участка полного прилегания стержня к стенке. Введем обозначение $\ell_3 = \ell - \tilde{\ell}$. Из (27)

$$\frac{2 \pi}{\ell_1} = \frac{\pi}{\ell_3}, \text{ следовательно, } 2 \ell_3 = \ell_1.$$

В то же время $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \ell$, откуда

$$\ell_2 = \ell - 3 \ell_3 = \ell - 3 \frac{\pi}{k}.$$

Найдем значение силы, при которой возможно существование участка прилегания стержня к стенке, т. е. при которой выполняется неравенство $\ell_2 > 0$. Из этого неравенства следует, что

$$\ell - 3 \frac{\pi}{k} > 0, \text{ или } k \ell > 3 \pi, \text{ откуда } P > \frac{9 \pi^2 E J}{\ell^2}.$$

Средняя часть стержня длины ℓ_2 , став достаточно длинной, тоже может потерять устойчивость. Это произойдет при силе

$$P > \frac{4 \pi^2 E J}{\ell_2^2}, \text{ или } k \ell_2 > 2 \pi,$$

отсюда $k(\ell - 3 \frac{\pi}{k}) > 2 \pi$, окончательно $k \ell > 5 \pi$.

Таким образом, условием существования участка прилегания является выполнение неравенств

$$\frac{9 \pi^2 E J}{\ell^2} < P \leq \frac{25 \pi^2 E J}{\ell^2}.$$

6. Сравнение результатов

Стержень касается стенки в единственной точке ℓ_1 :

а) в случае граничных условий шарнирного опирания:

$$\ell_1 = \frac{l}{2}, \quad \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2};$$

б) в случае граничных условий жесткой заделки:

$$\ell_1 = \frac{\ell}{2}, \quad \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2};$$

с) на левом конце – граничные условия жесткой заделки, на правом – граничные условия шарнирного опирания:

$$0.6027 \leq \frac{\ell_1}{\ell} \leq 0.6667, \quad \frac{2.04\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2}.$$

При увеличении силы P будет происходить прилегание средней части стержня к стенке: а) в случае граничных условий шарнирного опирания:

$$\ell_2 = \ell - \frac{2\pi}{k}, \quad \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2}; \quad (29)$$

б) в случае граничных условий жесткой заделки:

$$\ell_2 = \ell - \frac{4\pi}{k}, \quad \frac{16\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{36\pi^2 EJ}{\ell^2};$$

с) на левом конце – граничные условия жесткой заделки, на правом – граничные условия шарнирного опирания:

$$\ell_2 = \ell - \frac{3\pi}{k}, \quad \frac{9\pi^2 EJ}{\ell^2} < P \leq \frac{25\pi^2 EJ}{\ell^2}. \quad (30)$$

Найдем минимальное значение силы P , при которой возможна форма равновесия, представленная на рис. 5. Если сила минимальна, то длины участков полного прилегания к стенке равны нулю, т. е. $\ell_2 - \ell_1 = 0$, $\ell_3 = \frac{\ell}{2}$. При $z = 0$ выполнены граничные условия жесткой заделки; при $z = \ell_3$: $w(\ell_3) = 0$, $w''(\ell_3) = 0$. Рассматривая часть стержня на участке от 0 до ℓ_3 как самостоятельный стержень со смешанными граничными условиями, используя формулу (30), получаем равенство $k\ell_3 = 9\pi$, для участка от ℓ_3 до $\ell - \ell_3$ из (29) находим $k(\ell - 2\ell_3) = 4\pi$, откуда $k\ell - 18\pi = 4\pi$, или

$$k = \frac{22\pi}{\ell}, \quad P = \frac{484\pi^2 EJ}{\ell^2},$$

т. е. при $P > \frac{484\pi^2 EJ}{\ell^2}$ может реализоваться форма равновесия, представленная на рис. 5.

Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 125031203621-2.

Acknowledgements (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the topic № 125031203621-2.

Для цитирования:

Андрюкова, В. Ю. Деформация сжимаемого продольной силой стержня при жестких ограничениях на перемещения

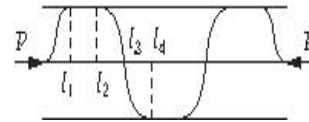


Рисунок 5. Возможная форма равновесия стержня.

Figure 5. Possible form of equilibrium of the rod.

Точно так же, как и в случае граничных условий шарнирного опирания, можно получить точное решение нелинейной задачи для случая граничных условий жесткой заделки.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Николаи, Е. Л. Труды по механике / Е. Л. Николаи. – М: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 584 с.
2. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – М: Наука, 1967. – 376 с.
3. Andryukova, V. Yu. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov // Abstracts of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – 268 p. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.

References

1. Nikolai, Ye. L. Trudy po mekhanike / Ye. L. Nikolai. – Moskva: Izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury. 1955. – 584 s.
2. Feodosiev, V. I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials] / V. I. Feodosiev. – Moskva: Nauka, 1967. – 376 p.
3. Andryukova, V. Yu. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov // Abstracts of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – 268 p. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.

с различными граничными условиями / В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 12–19. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-12-19

For citation:

Andryukova, V. Yu. Deformation of a rod compressed by a longitudinal force under rigid constraints on displacement with various boundary conditions / V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 12–19. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-12-19

Дата поступления статьи: 11.08.2025

Received: 11.08.2025