УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2025-6-41-47

Дираковская частица с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью

В. В. Кисель[1], А. В. Бурый[2], П. О. Саченок[1], А. С. Мартыненко[1], Е. М. Овсиюк[1]

[1]Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина,
г. Мозырь, Беларусь
[2]Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

vasiliy.bspu@mail.ru
anton.buryy.97@mail.ru
polinasacenok@gmail.com
alisshhaaaa.aaa@gmail.com
e.ovsiyuk@mail.ru

Аннотация

В рамках общего формализма Гельфанда–Яглома, исходя из расширенного набора представлений группы Лоренца, строится релятивистское уравнение для частицы со спином 1/2 с двумя дополнительными характеристиками. В тензорной форме учтено наличие внешних электромагнитных полей. После исключения вспомогательных переменных полной волновой функции выведено обобщенное уравнение типа Дирака. Оно включает два дополнительных члена взаимодействия, которые интерпретируются как связанные с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью частицы.

Ключевые слова:

частица со спином 1/2, внешнее электромагнитное поле, аномальный магнитный момент, поляризуемость

Dirac particle with anomalous magnetic moment and polarizability

V. V. Kisel[1], A. V. Bury[2], P. O. Sachenok[1], A. S. Martynenko[1], E. M. Ovsiyuk[1]

[1]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin,
Mozyr, Belarus
[2]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

vasiliy.bspu@mail.ru
anton.buryy.97@mail.ru
polinasacenok@gmail.com
alisshhaaaa.aaa@gmail.com
e.ovsiyuk@mail.ru

Abstract

In the frames of general formalism by Gel'fand–Yaglom, starting with an extended set of representations of the Lorentz group, we have constructed relativistic equation for a spin 1/2 particle with two additional electromagnetic characteristics. We take into account the presence of external electromagnetic fields. After eliminating the supplementary variables of the complete wave function we have derived a generalized Dirac-like equation, which includes two additional interaction terms, they are related to anomalous magnetic moment and polarizability.

Keywords:

spin 1/2 particle, external electromagnetic field, anomalous magnetic moment, polarizability

Введение

В рамках метода Гельфанда-Яглома [1–3] рассмотрено релятивистское обобщенное уравнение для частицы со спином 1/2. Исходя из расширенного набора представлений группы Лоренца, строится уравнение для частицы со спином 1/2 и двумя дополнительными характеристиками: аномальным магнитным моментом [4–7] и поляризуемостью. В работе [8] изучался тот же набор неприводимых представлений группы Лоренца, но авторы ограничились только теорией свободной частицы. В настоящей работе учтено наличие внешних электромагнитных полей. Это приводит к появлению дополнительных членов взаимодействия.

1. Формализм Гельфанда–Яглома

Будем строить P-инвариантное релятивистское уравнение первого порядка для частицы с массой M и спином $S = 1/2$

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + M)\,\Psi = 0 \tag{1}$$

на основе использования набора представлений группы Лоренца со следующей схемой зацепления (тройки впереди означают кратность используемых представлений):

$$\begin{array}{ccc} 3(1/2,0) & \longleftrightarrow & 3(0,1/2) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (1,1/2) & \longleftrightarrow & (1/2,1). \end{array}$$

Соответствующая система спинорных уравнений имеет вид

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_1\psi_b + \lambda_2\varphi_b + \lambda_3\Phi_b) + \lambda_4\partial^b_{\dot{c}} f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M\psi^{\dot{a}} = 0, \tag{2}$$

$$\partial_{a\dot{b}}(\lambda_1\psi^{\dot{b}} + \lambda_2\varphi^{\dot{b}} + \lambda_3\Phi^{\dot{b}}) + \lambda_4\partial^c_{\dot{b}} f^{\dot{b}}_{(ac)} + M\psi_a = 0, \tag{3}$$

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_5\psi_b + \lambda_6\varphi_b + \lambda_7\Phi_b) + \lambda_8\partial^b_{\dot{c}} f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M\varphi^{\dot{a}} = 0, \tag{4}$$

$$\partial_{a\dot{b}}(\lambda_5\psi^{\dot{b}} + \lambda_6\varphi^{\dot{b}} + \lambda_7\Phi^{\dot{b}}) + \lambda_8\partial^c_{\dot{b}} f^{\dot{b}}_{(ac)} + M\varphi_a = 0, \tag{5}$$

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_9\psi_b + \lambda_{10}\varphi_b + \lambda_{11}\Phi_b) + \lambda_{12}\partial^b_{\dot{c}} f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M\Phi^{\dot{a}} = 0, \tag{6}$$

$$\partial_{a\dot{b}}(\lambda_9\psi^{\dot{b}}+\lambda_{10}\varphi^{\dot{b}}+\lambda_{11}\Phi^{\dot{b}})+\lambda_{12}\partial_b^c f^{\dot{b}}_{(ac)}+M\Phi_a=0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\left[\partial^{\dot{a}}_c(\lambda_{13}\psi^{\dot{b}}+\lambda_{14}\varphi^{\dot{b}}+\lambda_{15}\Phi^{\dot{b}})+ +\partial^{\dot{b}}_c(\lambda_{13}\psi^{\dot{a}}+\lambda_{14}\varphi^{\dot{a}}+\lambda_{15}\Phi^{\dot{a}})\right]+ +\frac{1}{2}\lambda_{16}\left[\partial^{k\dot{a}}f^{\dot{b}}_{(kc)}+\partial^{k\dot{b}}f^{\dot{a}}_{(kc)}\right]+Mf_c^{(\dot{a}\dot{b})}=0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\left[\partial^{\dot{c}}_a(\lambda_{13}\psi_b+\lambda_{14}\varphi_b+\lambda_{15}\Phi_b)+ +\partial^{\dot{c}}_b(\lambda_{13}\psi_a+\lambda_{14}\varphi_a+\lambda_{15}\Phi_a)\right]+ +\frac{1}{2}\lambda_{16}\left[\partial_{\dot{k}a}f_b^{(\dot{k}\dot{c})}+\partial_{\dot{k}b}f_a^{(\dot{k}\dot{c})}\right]+Mf^{\dot{c}}_{(ab)}=0. \tag{9}$$

Здесь λ_i — коэффициенты, ограничения на которые будут накладываться в соответствии с наличием у частицы единственного массового параметра и единственного спина $S=1/2$. Используем обозначения

$$\partial_{\dot{a}b}=\frac{1}{i}\partial_\mu(\sigma^1)_{\dot{a}b},\quad (\sigma^1)_{\dot{a}b}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$(\sigma^2)_{\dot{a}b}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad (\sigma^3)_{\dot{a}b}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$(\sigma^4)_{\dot{a}b}=\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}.$$

Операция P-отражения задается соотношениями

$$\psi^{\dot{a}}\leftrightarrow\psi_a,\ \varphi^{\dot{a}}\leftrightarrow\varphi_a,\ \Phi^{\dot{a}}\leftrightarrow\Phi_a,\ f_c^{(\dot{a}\dot{b})}\leftrightarrow f^{\dot{c}}_{ab}.$$

Система уравнений (2)–(9) может быть представлена в форме (1). Перечислим компоненты полной волновой функции

$$\Psi^{spinor}= =(\psi^{\dot{1}},\psi^{\dot{2}},\psi_1,\psi_2;\varphi^{\dot{1}},\varphi^{\dot{2}},\varphi_1,\varphi_2;\Phi^{\dot{1}},\Phi^{\dot{2}},\Phi_1,\Phi_2; f^{\dot{1}}_{(11)},f^{\dot{1}}_{(12)},f^{\dot{1}}_{(22)},f^{\dot{2}}_{(11)},f^{\dot{2}}_{(12)},f^{\dot{2}}_{(22)},f_1^{(\dot{1}\dot{1})},f_1^{(\dot{1}\dot{2})},f_1^{(\dot{2}\dot{2})}, f_2^{(\dot{1}\dot{1})},f_2^{(\dot{1}\dot{2})},f_2^{(\dot{2}\dot{2})})^t,$$

где t — знак транспонирования.

После выполнения необходимых вычислений с переходом сначала к каноническому базису

$$\Psi^{canon}=\Big(\psi^{(1/2,0)}_{(1/2,0)},\psi^{(1/2,0)}_{(-1/2,0)},\psi^{(0,1/2)}_{(0,1/2)},\psi^{(0,1/2)}_{(0,-1/2)}; \varphi^{(1/2,0)}_{(1/2,0)},\varphi^{(1/2,0)}_{(-1/2,0)},\varphi^{(0,1/2)}_{(0,1/2)},\varphi^{(0,1/2)}_{(0,-1/2)}; \Phi^{(1/2,0)}_{(1/2,0)},\Phi^{(1/2,0)}_{(-1/2,0)},\Phi^{(0,1/2)}_{(0,1/2)},\Phi^{(0,1/2)}_{(0,-1/2)}; f^{(1/2,1)}_{(1/2,1)},f^{(1/2,1)}_{(-1/2,1)},f^{(1/2,1)}_{(1/2,0)},f^{(1/2,1)}_{(-1/2,0)}, f^{(1/2,1)}_{(1/2,-1)},f^{(1/2,1)}_{(-1/2,-1)};f^{(1,1/2)}_{(1,1/2)},f^{(1,1/2)}_{(-1,1/2)}, f^{(1,1/2)}_{(0,1/2)},f^{(1,1/2)}_{(1,-1/2)},f^{(1,1/2)}_{(0,-1/2)},f^{(1,1/2)}_{(-1,-1/2)}\Big)^t,$$

а затем к модифицированному базису Гельфанда–Яглома

$$\Psi^{canon}=B\Psi^{spinor}.$$

Это преобразование задается общей формулой

$$\psi^{(l,l')}_{(l_3,l_{3'})}=\left[\frac{(2l)!}{(l+l_3)!(l-l_3)!}^{1/2}\right]\times \times\left[\frac{(2l')!}{(l'+l_3)!(l'-l_3)!}^{1/2}\right]\psi^{(\dot{1}\ldots\dot{1}\dot{2}\ldots\dot{2})}_{(1\ldots12\ldots2)}.$$

Здесь параметры $(l_3,l_{3'})$ определяют составляющие функции, преобразующейся по неприводимому представлению (l,l') собственной группы Лоренца. Число спинорных индексов $\dot{1}$ в правой части формулы равно $(l+l_3)$, число индексов типа $\dot{2}$ равно $(l-l_3)$, число индексов типа 1 равно $(l'+l_{3'})$, а типа 2 составляет $(l'-l_{3'})$.

В результате приходим к спинорной форме представления матрицы $\Gamma_4^{(G.-Y.)}$ (это выражение можно представить в компактном виде, что является преимуществом модифицированного базиса Гельфанда–Яглома):

$$\Gamma_4^{(G.-Y.)}=\begin{pmatrix}\beta^{(1/2)}\otimes\gamma_4&0\\0&\beta^{(3/2)}\otimes I_2\otimes\gamma_4\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где

$$\beta^{(1/2)}= =\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_4\\ \lambda_5&\lambda_6&\lambda_7&-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_8\\ \lambda_9&\lambda_{10}&\lambda_{11}&-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{12}\\ \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{13}&\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{14}&\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{15}&\frac{1}{2}\lambda_{16}\end{pmatrix},$$

$$\beta^{(3/2)}=\lambda_{16},\quad \gamma_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Убеждаемся в выполнении условия P-инвариантности уравнения, поскольку

$$\Gamma_4^{(G.-Y.)}P=P\Gamma_4^{(G.-Y.)},$$

$$P=\begin{pmatrix}P^{(1/2)}\otimes\gamma_4&0\\0&P^{(3/2)}\otimes I_2\otimes\gamma_4\end{pmatrix},$$

$$P^{(1/2)}=I_4,\quad P^{(3/2)}=-1.$$

В модифицированном базисе Гельфанда–Яглома матрица билинейной формы задается в виде

$$\eta=\begin{pmatrix}\eta^{(1/2)}\otimes\gamma_4&0\\0&\eta^{(3/2)}\otimes I_2\otimes\gamma_4\end{pmatrix},$$

$$\eta^{(1/2)}=\begin{pmatrix}k_1&0&0&0\\0&k_2&0&0\\0&0&k_3&0\\0&0&0&k_4\end{pmatrix},$$

$$\eta^{(3/2)}=-k_4,\quad k_i=\pm1.$$

Из стандартного соотношения $(\eta\Gamma_4)^\dagger=\eta\Gamma_4$ получаем

$$\lambda_1^*=\lambda_1,\ \lambda_6^*=\lambda_6,\ \lambda_{11}^*=\lambda_{11},\ \lambda_{16}^*=\lambda_{16},$$

$$\lambda_5^*=k_1k_2\lambda_2,\ \lambda_9^*=k_1k_3\lambda_3,\ \lambda_{10}^*=k_2k_3\lambda_7,$$

$$\lambda_{13}^{*} = -k_1 k_4 \lambda_4,\ \lambda_{14}^{*} = -k_2 k_4 \lambda_8,\ \lambda_{15}^{*} = -k_3 k_4 \lambda_{12}.$$

Например, если $k_1 = +1,\ k_2 = k_3 = k_4 = -1$, то

$$\lambda_5^{*} = -\lambda_2,\ \lambda_9^{*} = -\lambda_3,\ \lambda_{10}^{*} = \lambda_7,\ \lambda_{13}^{*} = \lambda_4,$$
$$\lambda_{14}^{*} = -\lambda_8,\ \lambda_{15}^{*} = -\lambda_{12}.$$

Найдем ограничения на параметры λ_i, обусловленные требованием, чтобы частица имела единственное массовое состояние M и единственное значение спина $S = 1/2$ (последнее означает, что состояния со спином $S = 3/2$ отсутствуют). Таким образом, структура спиновых блоков имеет вид (11) при $\lambda_{16} = 0$. Кроме того, поскольку матрица $\beta^{(1/2)}$ должна иметь одно собственное значение, равное $(+1)$, а остальные — нулевые (они могут быть и кратными), то должны выполняться ограничения

$$\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_{11} = 1, \tag{12}$$

$$\lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_9 + \lambda_7\lambda_{10} - \lambda_1\lambda_6 - \lambda_1\lambda_{11} - \lambda_6\lambda_{11} - -\frac{3}{2}(\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_8\lambda_{14} + \lambda_{12}\lambda_{15}), \tag{13}$$

$$(\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_{11}) - (\lambda_1\lambda_6\lambda_{11} + \lambda_1\lambda_2\lambda_5 + +\lambda_1\lambda_3\lambda_9 + \lambda_2\lambda_5\lambda_6 + \lambda_2\lambda_7\lambda_9 + \lambda_3\lambda_5\lambda_{10} + +\lambda_3\lambda_9\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_7\lambda_{10} + \lambda_7\lambda_{10}\lambda_{11}) + +\frac{3}{2}(\lambda_1\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_2\lambda_8\lambda_{13} + \lambda_3\lambda_{12}\lambda_{13} + \lambda_4\lambda_5\lambda_{14} + +\lambda_6\lambda_8\lambda_{14} + \lambda_7\lambda_{12}\lambda_{14} + \lambda_8\lambda_{10}\lambda_{15} + \lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{15}) = 0, \tag{14}$$

$$\lambda_{13}(\lambda_2\lambda_7\lambda_{12} + \lambda_4\lambda_6\lambda_{11} + \lambda_3\lambda_8\lambda_{10} - \lambda_4\lambda_7\lambda_{10} - -\lambda_3\lambda_6\lambda_{12} - \lambda_2\lambda_8\lambda_{11}) + \lambda_{14}(\lambda_4\lambda_7\lambda_9 + \lambda_3\lambda_5\lambda_{12} + +\lambda_1\lambda_8\lambda_{11} - \lambda_1\lambda_7\lambda_{12} - \lambda_4\lambda_5\lambda_{11} - \lambda_3\lambda_8\lambda_9) + +\lambda_{15}(\lambda_1\lambda_6\lambda_{12} + \lambda_4\lambda_5\lambda_{10} + \lambda_2\lambda_8\lambda_9 - \lambda_4\lambda_6\lambda_9 - -\lambda_2\lambda_5\lambda_{12} - \lambda_1\lambda_8\lambda_{10}) = 0. \tag{15}$$

В приведенных соотношениях отражается тот факт, что след матрицы $(\beta^{(1/2)})^n$ равен 1, а определитель $\beta^{(1/2)}$ равен 0.

Соотношения (12)–(15) выглядят громоздко. Их можно упростить, если учесть, что зацепления между используемыми кратными представлениями группы Лоренца можно разорвать [1]. При этом физическое содержание результатов не меняется. Разрыв указанных зацеплений фактически означает зануление соответствующих постоянных λ_i. В рассматриваемом случае имеем $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_7 = = \lambda_9 = \lambda_{10} = 0$. Соответственно, получаем

$$\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_{11} = 1, \tag{16}$$

$$\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_{11} + +\frac{3}{2}(\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_8\lambda_{14} + \lambda_{12}\lambda_{15}) = 0, \tag{17}$$

$$(\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_{11}) - \lambda_1\lambda_6\lambda_{11} + +\frac{3}{2}(\lambda_1\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_6\lambda_8\lambda_{14} + \lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{15}) = 0, \tag{18}$$

$$\lambda_4\lambda_6\lambda_{11}\lambda_{13} + \lambda_1\lambda_8\lambda_{11}\lambda_{14} + \lambda_1\lambda_6\lambda_{12}\lambda_{15} = 0. \tag{19}$$

С учетом ограничений на параметры λ_i минимальный полином для матрицы $\beta^{(1/2)}$ (11) при $\lambda_{16} = 0$ принимает вид

$$(\beta^{(1/2)})^3[\beta^{(1/2)} - 1] = 0,$$

а минимальный полином для матрицы Γ_4 следующий:

$$\Gamma_4^3(\Gamma_4^2 - 1) = 0.$$

2. Спин-тензорная форма уравнений

Для дальнейшего анализа перейдем к спин-тензорной форме записи системы уравнений (2)–(9) (при этом используем условия (16)–(19)). Будем учитывать соотношения

$$f_m^{(\dot{k}\dot{n})} = \delta_{(\dot{r}\dot{s})}^{(\dot{k}\dot{n})}(\sigma^\mu)_m^{\dot{r}} f_\mu^{\dot{s}}, \quad f_{(kn)}^{\dot{m}} = \delta_{(kn)}^{(rs)}(\sigma^\mu)_r^{\dot{m}} f_{s\mu}, \tag{20}$$

где $\delta_{(\dot{r}\dot{s})}^{(\dot{k}\dot{n})}$, $\delta_{(kn)}^{(rs)}$— обобщенные спинорные символы Кронекера

$$\delta_{(\dot{r}\dot{s})}^{(\dot{k}\dot{n})} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\dot{r}}^{\dot{k}})\delta_{\dot{s}}^{\dot{n}} + \delta_{\dot{s}}^{\dot{k}})\delta_{\dot{r}}^{\dot{n}}\right),$$
$$\delta_{(kn)}^{(rs)} = \frac{1}{2}\left(\delta_k^r\delta_n^s + \delta_n^r\delta_k^s\right).$$

Два первых спинорных уравнения представимы в форме

$$\lambda_1\partial^{\dot{a}b}\psi_b + \frac{\lambda_4}{2}\left[\partial_{\dot{b}}^{c}(\sigma^\mu)_c^{\dot{a}} f_\mu^{\dot{b}} + \partial_{\dot{b}}^{c}(\sigma^\mu)_c^{\dot{b}} f_\mu^{\dot{a}}\right] + M\psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\lambda_1\partial_{a\dot{b}}\psi^{\dot{b}} + \frac{\lambda_4}{2}\left[\partial_{\dot{c}}^{b}(\sigma^\mu)_a^{\dot{c}} f_{b\mu} + \partial_{\dot{c}}^{b}(\sigma^\mu)_b^{\dot{c}} f_{a\mu}\right] + M\psi_a = 0$$

или

$$\frac{\lambda_1}{i}\partial_\mu(\sigma^\mu)^{\dot{a}b}\psi_b - \frac{\lambda_4}{2i}\partial_\nu\left[(\sigma^\mu)^{\dot{a}c}(\sigma^\nu)_{c\dot{b}} f_\mu^{\dot{b}} + +(\sigma^\nu)^{\dot{b}c}(\sigma^\mu)_{c\dot{b}} f_\mu^{\dot{a}}\right] + M\psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\frac{\lambda_1}{i}\partial_\mu(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\psi^{\dot{b}} - \frac{\lambda_4}{2i}\partial_\nu\left[(\sigma^\mu)_{a\dot{c}}(\sigma^\nu)^{\dot{c}b} f_{b\mu} + +(\sigma^\nu)_{b\dot{c}}(\sigma^\mu)^{\dot{c}b} f_{a\mu}\right] + M\psi_a = 0.$$

С учетом тождества $(\sigma^\mu)^{\dot{a}b}(\sigma^\nu)_{b\dot{a}} = (\sigma^\mu)_{a\dot{b}}(\sigma^\nu)^{\dot{b}a} = = -2\delta_{\mu\nu}$ получаем

$$\frac{\lambda_1}{i}\partial_\mu(\sigma^\mu)^{\dot{a}b}\psi_b + \frac{\lambda_4}{2i}\partial_\nu\left[-(\sigma^\mu)^{\dot{a}c}(\sigma^\nu)_{c\dot{b}} f_\mu^{\dot{b}} + +2f_\mu^{\dot{a}}\right] + M\psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\frac{\lambda_1}{i}\partial_\mu(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\psi^{\dot{b}} + \frac{\lambda_4}{2i}\partial_\nu\left[-(\sigma^\mu)_{a\dot{c}}(\sigma^\nu)^{\dot{c}b} f_{b\mu} + +2f_{a\mu}\right] + M\psi_a = 0.$$

Объединим два последних уравнения в одно

$$\frac{\lambda_1}{i}\partial_\mu\begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} \\ (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi^{\dot{b}} \\ \psi_b \end{pmatrix} + +\frac{\lambda_4}{2i}\partial_\nu\Bigg(\begin{matrix} -(\sigma^\mu)^{\dot{a}c}(\sigma^\nu)_{c\dot{b}} + 2\delta_{\dot{b}}^{\dot{a}}\delta_{\nu\mu} \\ 0 \end{matrix}$$

$$
\begin{matrix} 0 \\ -(\sigma^\mu)_{\dot a c}(\sigma^\nu)^{c\dot b} + 2\delta_b^a\delta_{\nu\mu} \end{matrix} \Bigg) \begin{pmatrix} f_\mu^{\dot b} \\ f_{b\mu} \end{pmatrix} +
$$

$$
+M \begin{pmatrix} \psi^{\dot b} \\ \psi_b \end{pmatrix} = 0.
$$

Поскольку выполняются два тождества

$$
\begin{aligned}
(\sigma^\mu)^{\dot a b}(\sigma^\nu)_{b\dot c} + (\sigma^\nu)^{\dot a b}(\sigma^\mu)_{bc\dot a} &= -2\delta_{\mu\nu}\delta_{\dot c}^{\dot a}, \\
(\sigma^\mu)_{\dot a b}(\sigma^\nu)^{b\dot c} + (\sigma^\nu)_{\dot a b}(\sigma^\mu)^{bc\dot a} &= -2\delta_{\mu\nu}\delta_a^c,
\end{aligned} \qquad (21)
$$

то конструкция

$$
\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^{\dot a b} \\ (\sigma^\mu)_{\dot a b} & 0 \end{pmatrix}
$$

совпадает с видом матрицы Дирака γ_μ . Следовательно, уравнение записывается так

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\hat\partial\psi + \tfrac{\lambda_4}{2i}\partial_\nu\left(\gamma_\mu\gamma_\nu + 2\delta_{\nu\mu}\right) f_\mu + M\psi = 0, \\
&\lambda_1\hat\partial\psi - 2i\lambda_4\left(\partial_\mu - \tfrac{1}{4}\hat\partial\gamma_\mu\right) f_\mu + M\psi = 0,
\end{aligned} \qquad (22)
$$

где ψ – биспинор, f_μ – вектор-биспинор. Аналогичным образом получаем

$$
\begin{aligned}
&\lambda_6\hat\partial\varphi - 2i\lambda_8\left(\partial_\mu - \tfrac{1}{4}\hat\partial\gamma_\mu\right) f_\mu + M\varphi = 0, \\
&\lambda_{11}\hat\partial\Phi - 2i\lambda_{12}\left(\partial_\mu - \tfrac{1}{4}\hat\partial\gamma_\mu\right) f_\mu + M\Phi = 0.
\end{aligned} \qquad (23)
$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$
\frac{1}{2}\Big[\partial_c^{\dot a}\left(\lambda_{13}\psi^{\dot b} + \lambda_{14}\varphi^{\dot b} + \lambda_{15}\Phi^{\dot b}\right) +
$$

$$
+\partial_c^{\dot b}\left(\lambda_{13}\psi^{\dot a} + \lambda_{14}\varphi^{\dot a} + \lambda_{15}\Phi^{\dot a}\right)\Big] + Mf_c^{(\dot a \dot b)} = 0.
$$

С учетом (20) имеем

$$
\frac{1}{2}\Big[\partial_c^{\dot a}\left(\lambda_{13}\psi^{\dot b} + \lambda_{14}\varphi^{\dot b} + \lambda_{15}\Phi^{\dot b}\right) +
$$

$$
+\partial_c^{\dot b}\left(\lambda_{13}\psi^{\dot a} + \lambda_{14}\varphi^{\dot a} + \lambda_{15}\Phi^{\dot a}\right)\Big] +
$$

$$
+\frac{1}{2}M\left[(\sigma^\mu)_c^{\dot a} f_\mu^{\dot b} + (\sigma^\mu)_c^{\dot b} f_\mu^{\dot a}\right] = 0.
$$

Свернем приведенное уравнение с $(\sigma^\lambda)_{\dot a}^{c}$ по спинорным индексам

$$
\frac{1}{2}\lambda_{13}\left[-(\sigma^\lambda)^{\dot a c}\partial_{c\dot a}\psi^{\dot b} - \partial^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\psi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+\frac{1}{2}\lambda_{14}\left[-(\sigma^\lambda)^{\dot a c}\partial_{c\dot a}\varphi^{\dot b} - \partial^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\varphi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+\frac{1}{2}\lambda_{15}\left[-(\sigma^\lambda)^{\dot a c}\partial_{c\dot a}\Phi^{\dot b} - \partial^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\Phi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+\frac{1}{2}M\left[-(\sigma^\lambda)^{\dot a c}(\sigma^\mu)_{c\dot a} f_\mu^{\dot b} - (\sigma^\mu)^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a} f_\mu^{\dot a}\right] = 0.
$$

С учетом приведенных выше соотношений имеем

$$
\lambda_{13}\left[\frac{2}{i}\delta_{\lambda\nu}\partial_\nu\psi^{\dot b} - \partial^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\psi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+\lambda_{14}\left[\frac{2}{i}\delta_{\lambda\nu}\partial_\nu\varphi^{\dot b} - \partial^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\varphi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+\lambda_{15}\left[\frac{2}{i}\delta_{\lambda\nu}\partial_\nu\Phi^{\dot b} - \partial^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\Phi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+M\left[2\delta_{\lambda\nu} f_\mu^{\dot b} - (\sigma^\mu)^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a} f_\mu^{\dot a}\right] = 0
$$

или

$$
\lambda_{13}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\psi^{\dot b} - (\sigma^\nu)^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\psi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+\lambda_{14}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\varphi^{\dot b} - (\sigma^\nu)^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\varphi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+\lambda_{15}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\Phi^{\dot b} - (\sigma^\nu)^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a}\Phi^{\dot a}\right] +
$$

$$
+M\left[2\delta_{\lambda\nu} f_\mu^{\dot b} - (\sigma^\mu)^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a} f_\mu^{\dot a}\right] = 0. \qquad (24)
$$

Аналогично можно показать, что уравнение

$$
\frac{1}{2}\left[\partial_a^{\dot c}\left(\lambda_{13}\psi_b + \lambda_{14}\varphi_b + \lambda_{15}\Phi_b\right) +\right.
$$

$$
\left.+\partial_b^{\dot c}\left(\lambda_{13}\psi_a + \lambda_{14}\varphi_a + \lambda_{15}\Phi_a\right)\right] + Mf_{(ab)}^{\dot c} = 0
$$

сводится к виду

$$
\lambda_{13}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\psi_b - (\sigma^\nu)_{b\dot c}(\sigma^\lambda)^{\dot c a}\psi_a\right] +
$$

$$
+\lambda_{14}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\varphi_b - (\sigma^\nu)_{b\dot c}(\sigma^\lambda)^{\dot c a}\varphi_a\right] +
$$

$$
+\lambda_{15}\frac{1}{i}\partial_\nu\left[2\delta_{\lambda\nu}\Phi_b - (\sigma^\nu)_{\dot b c}(\sigma^\lambda)^{c\dot a}\Phi_a\right] +
$$

$$
+M\left[2\delta_{\lambda\nu} f_{b\mu} - (\sigma^\nu)_{b\dot c}(\sigma^\lambda)^{\dot c a} f_{a\mu}\right] = 0. \qquad (25)
$$

Уравнения (24), (25) объединяем в одно

$$
\frac{1}{i}\partial_\nu\begin{pmatrix} 2\delta_{\lambda\nu}\delta_{\dot a}^{\dot b} - (\sigma^\nu)^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a} & 0 \\ 0 & 2\delta_{\lambda\nu}\delta_b^a - (\sigma^\nu)_{b\dot c}(\sigma^\lambda)^{\dot c a} \end{pmatrix}\left[\lambda_{13}\begin{pmatrix} \psi^{\dot a} \\ \psi_a \end{pmatrix} + \lambda_{14}\begin{pmatrix} \varphi^{\dot a} \\ \varphi_a \end{pmatrix} + \lambda_{15}\begin{pmatrix} \Phi^{\dot a} \\ \Phi_a \end{pmatrix}\right] +
$$

$$
+M\begin{pmatrix} 2\delta_{\lambda\mu}\delta_{\dot a}^{\dot b} - (\sigma^\mu)^{\dot b c}(\sigma^\lambda)_{c\dot a} & 0 \\ 0 & 2\delta_{\lambda\mu}\delta_b^a - (\sigma^\mu)_{b\dot c}(\sigma^\lambda)^{\dot c a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_\mu^{\dot a} \\ \Phi_{a\mu} \end{pmatrix} = 0
$$

или

$$M\left(2\delta_{\lambda\mu}-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\right)-i\left(\partial_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}\right)\Psi=0, \quad (26)$$

где $\Psi=\lambda_{13}\psi+\lambda_{14}\varphi+\lambda_{15}\Phi$. Таким образом, система спин-тензорных уравнений имеет вид (22), (23), (26). При этом нужно учитывать ограничения на постоянные λ_i .

3. Минимальная система в свободном случае

Выразим из уравнения (26) величину $\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\right)f_\mu$

$$\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\right)f_\mu=\frac{i}{M}\left(\partial_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{\partial}\right)\Psi.$$

Отсюда получаем

$$\left(\partial_\lambda-\frac{1}{4}\hat{\partial}\gamma_\mu\right)f_\mu=\frac{3i}{4M}\Box\Psi. \quad (27)$$

Учтем соотношение (27) в уравнениях (22), (23):

$$\left(M+\lambda_1\hat{\partial}\right)\Psi+\frac{3}{2M}\lambda_4\Box\Psi=0, \quad (28)$$

$$\left(M+\lambda_6\hat{\partial}\right)\varphi+\frac{3}{2M}\lambda_8\Box\Psi=0, \quad (29)$$

$$\left(M+\lambda_{11}\hat{\partial}\right)\Phi+\frac{3}{2M}\lambda_{12}\Box\Psi=0. \quad (30)$$

Подействуем на уравнения (28)–(30) соответственно следующими операторами

$$\lambda_{13}(M+\lambda_6\hat{\partial})(M+\lambda_{11}\hat{\partial}),$$
$$\lambda_{14}(M+\lambda_1\hat{\partial})(M+\lambda_{11}\hat{\partial}),$$
$$\lambda_{15}(M+\lambda_1\hat{\partial})(M+\lambda_6\hat{\partial})$$

и просуммируем результаты. В результате приходим к уравнению

$$\Big\{M^3+M^2\hat{\partial}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})\Box+\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}\Box\hat{\partial}\Big\}\Psi+$$
$$+\frac{3}{2M}\Big\{(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})M^2+M[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)]\hat{\partial}+$$
$$+(\lambda_4\lambda_6\lambda_{11}\lambda_{13}+(\lambda_1\lambda_8\lambda_{11}\lambda_{14}+\lambda_1\lambda_6\lambda_{12}\lambda_{15})\Box\Big\}\Box\Psi=0.$$

Далее с учетом ограничений (16)–(19) получаем

$$M^2\big\{M+\hat{\partial}\big\}\Psi=0,$$

т. е. приходим к уравнению Дирака для свободной частицы, описываемой функцией Ψ

$$(\hat{\partial}+M)\Psi=0, \quad \Psi=\lambda_{13}\psi+\lambda_{14}\varphi+\lambda_{15}\Phi.$$

4. Взаимодействие с внешним полем

Исходим из системы уравнений

$$\left(M+\lambda_1\hat{D}\right)\psi-2i\lambda_4\left(D_\mu-\frac{1}{4}\hat{D}\gamma_\mu\right)f_\mu=0, \quad (31)$$

$$\left(M+\lambda_6\hat{D}\right)\varphi-2i\lambda_8\left(D_\mu-\frac{1}{4}\hat{D}\gamma_\mu\right)f_\mu=0, \quad (32)$$

$$\left(M+\lambda_{11}\hat{D}\right)\Phi-2i\lambda_{12}\left(D_\mu-\frac{1}{4}\hat{D}\gamma_\mu\right)f_\mu=0, \quad (33)$$

$$M\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\right)f_\mu-i\left(D_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{D}\right)\Psi=0, \quad (34)$$

где $D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu$, A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля. Определим из последнего уравнения системы (31)–(34) величину

$$\left(\delta_{\lambda\mu}-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\gamma_\mu\right)f_\mu=\frac{i}{M}\left(D_\lambda-\frac{1}{4}\gamma_\lambda\hat{D}\right)\Psi.$$

Подействуем на последнее уравнение оператором D_λ

$$\left(D_\mu-\frac{1}{4}\hat{D}\gamma_\mu\right)f_\mu=\frac{i}{M}\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi, \quad (35)$$

где $D^2=D_\mu D_\mu$. С учетом (35) уравнения (31)–(33) представляем в виде

$$\left(M+\lambda_1\hat{D}\right)\psi+\frac{2}{M}\lambda_4\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi=0, \quad (36)$$

$$\left(M+\lambda_6\hat{D}\right)\varphi+\frac{2}{M}\lambda_8\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi=0, \quad (37)$$

$$\left(M+\lambda_{11}\hat{D}\right)\Phi+\frac{2}{M}\lambda_{12}\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi=0. \quad (38)$$

На уравнения системы (36)–(38) соответственно подействуем операторами

$$\lambda_{13}\left(M+\lambda_6\hat{D}\right)\left(M+\lambda_{11}\hat{D}\right),$$
$$\lambda_{14}\left(M+\lambda_1\hat{D}\right)\left(M+\lambda_{11}\hat{D}\right),$$
$$\lambda_{15}\left(M+\lambda_1\hat{D}\right)\left(M+\lambda_6\hat{D}\right)$$

в результате получаем

$$\lambda_{13}\hat{M}\psi+\frac{2}{M}\lambda_4\lambda_{13}\Big\{M^2+M(\lambda_6+\lambda_{11})\hat{D}+$$
$$+\lambda_6\lambda_{11}\hat{D}\hat{D}\Big\}\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi=0,$$

$$\lambda_{14}\hat{M}\phi+\frac{2}{M}\lambda_8\lambda_{14}\Big\{M^2+M(\lambda_1+\lambda_{11})\hat{D}+$$
$$+\lambda_1\lambda_{11}\hat{D}\hat{D}\Big\}\left(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\right)\Psi=0,$$

$$\lambda_{15}\hat{M}\Phi+\frac{2}{M}\lambda_{12}\lambda_{15}\Big\{M^2+M(\lambda_1+\lambda_6)\hat{D}+$$

$$+\lambda_1\lambda_6\hat{D}\hat{D}\Big\}\Big(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\Big)\Psi=0,$$

где

$$\hat{M}=M^3+M^2\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+$$
$$+\lambda_6\lambda_{11})\hat{D}\hat{D}++\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}\hat{D}\hat{D}\hat{D}.$$

Суммируем эти три уравнения

$$\Big\{M^3+M^2\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})\hat{D}\hat{D}+$$
$$+\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}\hat{D}\hat{D}\hat{D}\Big\}\Psi+\frac{2}{M}\Big\{M^2(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})+$$
$$+M\big[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\big]\hat{D}+\big[\lambda_4\lambda_6\lambda_{11}\lambda_{13}+\lambda_1\lambda_8\lambda_{11}\lambda_{14}+$$
$$+\lambda_1\lambda_6\lambda_{12}\lambda_{15}\big]\hat{D}\hat{D}\Big\}\Big(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\Big)\Psi=0. \qquad (39)$$

Отметим, что последнее слагаемое в уравнении (39) в силу ограничения (19) обращается в нуль. Следовательно, получаем

$$\Big\{M^3+M^2\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})\hat{D}\hat{D}+$$
$$+\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}\hat{D}\hat{D}\hat{D}+2M(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})+$$
$$+2\big[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\big]\Big\}\hat{D}\Big(D^2-\frac{1}{4}\hat{D}\hat{D}\Big)\Psi=0.$$

Воспользуемся соотношениями (матрицы $J_{[\mu\nu]}$ представляют генераторы биспинорного поля)

$$\hat{D}\hat{D}=D^2-ieF_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]},\quad F_{[\mu\nu]}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,$$
$$J_{[\mu\nu]}=\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu)-\gamma_\nu\gamma_\mu),$$

тогда уравнение принимает вид

$$\Big\{M^3+M^2\hat{D}+M(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})D^2+$$
$$+\frac{3}{2}M(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})D^2-$$
$$-ieM(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+$$
$$+\frac{ie}{2}M(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+$$
$$+\Big[\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}+\frac{3}{2}\Big(\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\Big)\Big]\hat{D}D^2+ie\Big[-\lambda_1\lambda_6\lambda_{11}+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\Big)\Big]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\Big\}\Psi=0$$

или

$$\Big\{M^3+M^2\hat{D}+2ieM(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15})F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+$$
$$+\Big[(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})+\frac{3}{2}\Big(\lambda_1\lambda_4\lambda_{13}+$$
$$+\lambda_6\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{15}\Big)+\frac{3}{2}\Big(\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\Big)\Big]\hat{D}D^2+$$
$$+ie\Big[-(\lambda_1\lambda_6+\lambda_1\lambda_{11}+\lambda_6\lambda_{11})-\frac{3}{2}\Big(\lambda_1\lambda_4\lambda_{13}+$$
$$+\lambda_6\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{15}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\Big)\Big]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\Big\}\Psi=0.$$

Таким образом, получаем следующее уравнение:

$$\Big\{M^3+M^2\hat{D}+2ieM\Big(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15}\Big)F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+$$
$$+2ie\Big[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\Big]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\Big\}\Psi=0.$$

Следовательно, при наличии взаимодействия с внешним электромагнитным полем приходим к обобщенному уравнению Дирака

$$\Big\{\hat{D}+M+2\frac{ie}{M}\Big(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15}\Big)F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+$$
$$+2\frac{ie}{M^2}\Big[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\Big]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\Big\}\Psi=0 \qquad (40)$$

относительно функции $\Psi=\lambda_{13}\psi+\lambda_{14}\varphi+\lambda_{15}\Phi$. Уравнение (40) содержит два дополнительных слагаемых. Слагаемое

$$2\frac{ie}{M}\Big(\lambda_4\lambda_{13}+\lambda_8\lambda_{14}+\lambda_{12}\lambda_{15}\Big)F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}$$

описывает аномальный магнитный момент частицы. Второе слагаемое

$$2\frac{ie}{M^2}\Big[\lambda_4\lambda_{13}(\lambda_6+\lambda_{11})+\lambda_8\lambda_{14}(\lambda_1+\lambda_{11})+$$
$$+\lambda_{12}\lambda_{15}(\lambda_1+\lambda_6)\Big]\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\Psi=ie\sigma\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}$$

будем связывать с дополнительной электромагнитной характеристикой частицы σ – поляризуемостью. Итоговое уравнение может быть кратко представлено так:

$$\Big\{\hat{D}+M+ie\mu F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}+ie\sigma\hat{D}F_{[\mu\nu]}J_{[\mu\nu]}\Big\}\Psi=0.$$

5. Заключение

Построено обобщенное релятивистское уравнение для частицы со спином 1/2 с двумя дополнительными характеристиками в присутствии внешних электромагнитных полей. Оно включает два дополнительных члена взаимодействия, интерпретируемых как связанные с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью частицы. Это уравнение может служить основой для экспериментальной проверки внутренней структуры частицы со спином 1/2.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
2. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Белорусская наука, 2015. – 327 с.
3. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, V. Balan, [et al.] – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 418, 414 pp.
4. Petraš, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin / M. Petraš // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
5. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, Ya. A. Voynova, [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.
6. Ovsiyuk, E. M. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in presence of external magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // Chapter in the book: Relativity, Gravitation, Cosmology: Beyond Foundations / Ed. V. V. Dvoeglazov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2019. – P. 65–80.
7. On P-noninvariant wave equation for a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment / V. V. Kisel, V. A. Pletyukhov, E. M. Ovsiyuk, [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, № 1. – P. 18–40.
8. Santhaman, T. S. Bhabha equations for unique mass and spin / T. S. Santhaman, A. R. Tekumalla // Fortsch. Phys. – 1974. – Vol. 22, № 8. – P. 431–452.

References

1. Gelfand, I. M. Obshchiye relyativistski invariantnyye uravneniya i beskonechnomernyye predstavleniya gruppy Lorentsa [General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group] / I. M. Gelfand, A. M. Yaglom // Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. – 1948. – Vol. 18, № 8. – P. 703–733.
2. Pletukhov, V. A. Relyativistskie volnovye uravneniya i vnutrennie stepeni svobody [Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom] / V. A. Pletukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk: Belorusskaya nauka [Belarusian Science], 2015. – 327 p.
3. Elementary particles with internal structure in external fields. Vol. I, II / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, V. Balan, [et al.] – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 418, 414 pp.
4. Petraš, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin / M. Petraš // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
5. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, Ya. A. Voynova, [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.
6. Ovsiyuk, E. M. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in presence of external magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // Chapter in the book: Relativity, Gravitation, Cosmology: Beyond Foundations / Ed. V. V. Dvoeglazov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2019. – P. 65–80.
7. On P-noninvariant wave equation for a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment / V. V. Kisel, V. A. Pletyukhov, E. M. Ovsiyuk, [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, № 1. – P. 18–40.
8. Santhaman, T. S. Bhabha equations for unique mass and spin / T. S. Santhaman, A. R. Tekumalla // Fortsch. Phys. – 1974. – Vol. 22, № 8. – P. 431–452.

Для цитирования:

Кисель, В. В. Дираковская частица с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью / В. В. Кисель, А. В. Бурый, П. О. Саченок [и др.] // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 41–47. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-41-47

For citation:

Kisel, V. V. Dirac particle with anomalous magnetic moment and polarizability / V. V. Kisel, A. V. Bury, P. O. Sachenok [et al.] // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 41–47. DOI: 10.19110/1994-5655-2025-6-41-47

Дата поступления рукописи: 28.07.2025
Received: 28.07.2024