

О роли скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2

А. В. Бурый

Институт физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

anton.buryy.97@mail.ru

Аннотация

В работе изложена общая теория для поля со спином 2 на основе 30-компонентной системы уравнений первого порядка Федорова–Редже. В результате исключения дополнительных вектора и тензора третьего ранга выведены уравнения второго порядка Паули–Фирца для скаляра и симметричного тензора. Согласно анализу Паули–Фирца исследована имеющаяся калибровочная симметрия. Построены шесть независимых решений в виде плоских волн для безмассовой частицы. Показано, что четыре из них являются калибровочными и, следовательно, могут быть исключены как нефизические.

Ключевые слова:

поле спина 2, плоские волны, независимые решения, безмассовая частица, физические степени свободы

Введение

Начиная с работ В. Паули, М. Фирца и др. [1–4] теория массивного и безмассового полей со спином 2 всегда присутствовала в литературе. Подход Паули–Фирца основан на системе второго порядка для тензора второго ранга и скаляра. Большая часть исследований выполнена в рамках именно этого подхода. Однако известно, что в теории частиц с высшими спинами при использовании уравнений второго порядка возникает много сложностей из-за так называемой неоднозначности порядка написания производных. Такого рода трудностей не возникает, если с самого начала использовать формализм уравнений первого порядка [5–10]. Первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено Ф. И. Федоровым [5], см. также работу Т. Редже [6]. Оказалось, что в таком подходе частица со спином 2 требует для своего описания 30-компонентной полевой функции. При этом для описания поля используется набор из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга и тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. Появление рядом с тензором второго ранга трех дополнительных тензоров — скаляра, вектора и тензора третьего ранга с определенной симметрией — объясняется следующим обстоятельством: чтобы перейти от уравнений второго по-

On the role of scalar field in the theory of massless spin 2 particle

A. V. Bury

B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

anton.buryy.97@mail.ru

Abstract

The paper presents a general theory for spin 2 field, based on the 30-component first-order Fedorov–Regge equations. By eliminating the auxiliary vector and third-rank tensor, the second-order Pauli–Fierz equations for the scalar and symmetric tensor are derived. The gauge symmetry, as analyzed by Pauli and Fierz, is investigated. Six independent plane-wave solutions for a massless particle are constructed; four of them are shown to be pure gauge and can thus be excluded as nonphysical.

Keywords:

spin 2 field, plane waves, independent solutions, massless particle, physical degrees of freedom

рядка к уравнениям первого порядка, всегда приходится вводить вспомогательные компоненты. Кроме того, в формализме уравнений первого порядка обязательно присутствуют явная форма лагранжиана теории, а также теорема Нетер, связывающая симметрии с физически наблюдаемыми величинами (тензор энергии-импульса, тензор полного углового момента с учетом спина поля и др.).

Описания массивной и безмассовой частиц со спином 2 существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Калибровочные степени свободы не дают вклада в наблюдаемые величины, например, в тензор энергии-импульса поля. Это приводит к необходимости в безмассовом случае выделять калибровочные решения, оставляя только физически наблюдаемые.

В настоящей работе исследуется роль скалярного поля в описании калибровочной симметрии в теории Паули–Фирца для безмассовой частицы со спином 2. При этом используются решения типа плоских волн. Выполненный анализ показывает необходимость присутствия скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2. Оно обеспечивает корректное описание калибровочной симметрии в этой теории.

1. Безмассовая частица, калибровочная симметрия

Будем исходить из системы уравнений первого порядка для безмассовой частицы со спином 2 [11, 12] (она эквивалентна исходной теории Паули-Фирца с использованием уравнений второго порядка)

$$\partial^a \Phi_a = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \partial_a \Phi - \frac{1}{3} \partial^b \Phi_{ab} = \Phi_a, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left(\partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_{[kn]} \right) + \left(\partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_k \right) = 0, \quad (3)$$

$$\partial_k \Phi_{(ab)} - \partial_a \Phi_{(kb)} - \frac{1}{3} (g_{kb} \partial^n \Phi_{(an)} - g_{ba} \partial^n \Phi_{(kn)}) = \Phi_{[ka]b}. \quad (4)$$

Здесь имеем следующую ситуацию с дополнительными условиями. Так, сворачивая в уравнении (3) индексы a и b , приходим к тождеству $0 \equiv 0$, т. е. условия неприводимости симметричного тензора не возникает. Далее, сворачивая в уравнении (4) индексы a и b , получаем дополнительное условие в виде $\partial_k \Phi^n = \Phi_{[kn]}^n$. Следовательно, теория безмассового поля со спином 2 основана на функции с $(1 + 4 + 10 + 24 - 4) = 35$ компонентами.

С помощью (2) исключим из уравнения (1) дополнительное поле Φ_a , в результате получаем уравнение второго порядка для скаляра $\Phi(x)$ и тензора $\Phi_{(ab)}(x)$:

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \Phi_{(ab)} = 0. \quad (5)$$

Исключим из уравнения (3) дополнительные поля Φ_a и $\Phi_{[ka]b}$ (при этом будем учитывать равенство $\Phi_{[kn]}^n = \partial_k \Phi$), это дает

$$\left(\partial_a \partial_b + \frac{1}{2} g_{ab} \square \right) \Phi - \frac{1}{4} g_{ab} \square \Phi^n + \square \Phi_{(ab)} - \partial_a \partial^n \Phi_{(nb)} - \partial_b \partial^n \Phi_{(na)} = 0. \quad (6)$$

Уравнения (5),(6) описывают безмассовое поле со спином 2 в подходе Паули-Фирца.

Убедимся, что уравнения второго порядка (5),(6) (а следовательно, и уравнения первого порядка) имеют класс калибровочных решений [13]:

$$\bar{\Phi} = \partial^l \Lambda_l, \quad \bar{\Phi}_{(ab)} = \partial_a \Lambda_b + \partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^l \Lambda_l, \quad (7)$$

где $\Lambda_l(x)$ – произвольный 4-вектор. Для этого рассмотрим выражение

$$-\frac{1}{3} \partial^a \partial^b \bar{\Phi}_{(ab)} = -\frac{1}{2} \square \partial^l \Lambda_l = -\frac{1}{2} \square \bar{\Phi} \Rightarrow \Rightarrow \frac{1}{2} \square^2 \bar{\Phi} - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \bar{\Phi}_{(ab)} = 0. \quad (8)$$

Далее, учитывая равенства

$$\left(\partial_a \partial_b - \frac{1}{4} g_{ab} \square \right) \bar{\Phi} = \partial_a \partial_b \partial^l \Lambda_l, \quad \bar{\Phi}_a^a = 0,$$

$$\square \bar{\Phi}_{(ab)} = \square \partial_a \Lambda_b + \square \partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} \square \partial^l \Lambda_l,$$

$$-\partial_a \partial^l \Phi_{(bl)}^{(0)} = -\frac{1}{2} \partial_a \partial_b \partial^l \Lambda_l - \square \partial_a \Lambda_b,$$

$$-\partial_a \partial^l \Phi_{(al)}^{(0)} = -\frac{1}{2} \partial_b \partial_a \partial^l \Lambda_l - \square \partial_b \Lambda_a,$$

$$\frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \partial^l \Phi_{(kl)}^{(0)} = +\frac{3}{2} g_{ab} \square \partial^l \Lambda_l,$$

убеждаемся, что набор полей (7) удовлетворяет уравнению (6). Найдем выражения для тензоров $\bar{\Phi}_a$ и $\bar{\Phi}_{[ka]b}$, сопутствующих набору полей (7):

$$\bar{\Phi}_a = +\frac{1}{3} \partial_a \partial^l \Lambda_l - \frac{1}{3} \square \Lambda_a, \quad (9)$$

$$\bar{\Phi}_{[ab]c} = \partial_c (\partial_a \Lambda_b - \partial_b \Lambda_a) - \frac{1}{3} (g_{cb} \partial_a - g_{ca} \partial_b) \partial^l \Lambda_l + \frac{1}{3} (g_{cb} \square \Lambda_a - g_{ca} \square \Lambda_b). \quad (10)$$

Отмечаем справедливость равенства $\bar{\Phi}_{[ac]}^c = 0$. Последнее согласуется с соотношением $\bar{\Phi}_a^a = 0$ и дополнительным условием $\partial_a \bar{\Phi}_b^b = \bar{\Phi}_{[ac]}^c$.

Таким образом, безмассовое поле со спином 2 можно описывать либо системой уравнений первого порядка, либо системой уравнений второго порядка (формализм Паули-Фирца):

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^k \partial^l \Phi_{(kl)} = 0, \quad (11)$$

$$\left(\partial_a \partial_b + \frac{1}{2} g_{ab} \square \right) \Phi - \frac{1}{4} g_{ab} \square \Phi_c^c +$$

$$+ \square \Phi_{(ab)} - \partial_a \partial^l \Phi_{(bl)} - \partial_b \partial^l \Phi_{(al)} = 0. \quad (12)$$

При этом в уравнениях имеется калибровочная симметрия [13], связанная с существованием класса решений (7), определяемых произвольным 4-вектором $\Lambda_a(x)$.

2. Плоские волны, калибровочная симметрия

Получим решения уравнений для тензора и скаляра в виде плоских волн:

$$\Phi(x) = e^{-ik_a x^a} f, \quad \Phi_{ab}(x) = e^{-ik_a x^a} f_{ab},$$

$$f_{ab} = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{03} & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_{01} & f_1 & c_1 & c_2 \\ d_2 & c_1 & f_2 & c_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 & f_3 \end{pmatrix}.$$

Позднее мы сменим обозначения (чтобы они совпадали с использованными в массивном случае):

$$c_1, c_2, c_3 \Leftrightarrow c_3, c_2, c_1. \quad (13)$$

С учетом $k_0^2 = \vec{k}^2$ имеем тождество $\square^2 \Phi = 0$ и уравнение (11) дает

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \Phi_{(ab)} = 0 \Rightarrow k^a k^b f_{ab} = 0; \quad (14)$$

в свою очередь, уравнение (12) приводит к соотношению

$$-k_a k_b f + k_a k^l f_{bl} + k_b k^l f_{al} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, имеем алгебраическую систему уравнений

$$k_a k_b f_{ab} = 0, \quad -k_a k_b f + k_a k^l f_{bl} + k_b k^l f_{al} = 0. \quad (16)$$

Калибровочные решения определяются вектором $\Lambda_l = e^{-ik_a x^a \lambda_l}$:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \bar{f} e^{-ik_a x^a}, \quad \bar{f} = -ik^l \lambda_l; \\ \bar{\Phi}_{(ab)} &= \bar{f}_{ab} e^{-ik_a x^a}, \\ \bar{f}_{ab} &= -i \left[k_a \lambda_b + k_b \lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} k^l \lambda_l \right], \quad \bar{f}_a^a \equiv 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Убеждаемся, что эти калибровочные решения удовлетворяют уравнениям (16)

$$\begin{aligned} k^a k^b \bar{f}_{ab} &= (-i) k^a k^b \left[k_a \lambda_b + k_b \lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} k^l \lambda_l \right] = \\ &= (-i) \left[0 + 0 - \frac{1}{2} k^a k^b g_{ab} k^l \lambda_l \right] \equiv 0; \\ -k_a k_b \bar{f} + k_a k^l \bar{f}_{bl} + k_b k^l \bar{f}_{al} &= -i \{ -k_a k_b \cdot k^n \lambda_n + \\ &+ k_a k^l \left[k_b \lambda_l + k_l \lambda_b - \frac{1}{2} g_{bl} k^n \lambda_n \right] + \\ &+ k_b k^l \left[k_a \lambda_l + k_l \lambda_a - \frac{1}{2} g_{al} k^n \lambda_n \right] \} \equiv 0. \end{aligned}$$

Детализируем уравнения (16). Первое уравнение дает

$$\begin{aligned} &k^0(f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) + \\ &+ k^1(d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) + \\ &+ k^2(d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) + \\ &+ k^3(d_3 k^0 + c_2 k^1 + c_3 k^2 + f_3 k^3) = 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение приводит к 16 соотношениям. С учетом совпадающих имеем только 10 уравнений. Таким образом, уравнения (16) дают систему

$$\begin{aligned} &k_0(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) - \\ &- k_1(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) - \\ &- k_2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) - \\ &- k_3(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) = 0, \quad (18) \\ &2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = k_0 f, \\ &2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = k_1 f, \\ &2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) = k_2 f, \\ &2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) = k_3 f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2k_0(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) + \\ &+ 2k_1(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k_0 k_1 f, \\ &2k_0(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ &+ 2k_2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k_0 k_2 f, \\ &2k_0(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ &+ 2k_3(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k_0 k_3 f, \quad (19) \\ &2k_1(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ &+ 2k_2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = 2k_1 k_2 f, \\ &2k_1(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ &+ 2k_3(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = 2k_1 k_3 f, \\ &2k_2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ &+ 2k_3(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) = 2k_2 k_3 f. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (19). С помощью второго, третьего и четвертого уравнений

$$\begin{aligned} k_1 f &= 2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3), \\ k_2 f &= 2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3), \\ k_3 f &= 2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) \end{aligned}$$

преобразуем остальные шесть к виду.

$$\begin{aligned} k_0 k_1 f + 2k_1(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= -2k_0 k_1 f, \\ k_0 k_2 f + 2k_2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= -2k_0 k_2 f, \\ k_0 k_3 f + 2k_3(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= -2k_0 k_3 f, \\ 2k_1(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + k_2 k_1 f &= 2k_1 k_2 f, \\ 2k_1(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + k_3 k_1 f &= 2k_1 k_3 f, \\ 2k_2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + k_3 k_2 f &= 2k_2 k_3 f. \end{aligned}$$

Учитывая совпадающие уравнения и тождества, получаем систему

$$\begin{aligned} 2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= k_0 f, \\ 2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) &= k_1 f, \\ 2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) &= k_2 f, \\ 2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) &= k_3 f, \\ 2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) &= -k_0 f. \end{aligned}$$

С учетом первого и последнего уравнений данной системы находим $f = 0$, при этом остаются лишь четыре независимых уравнения

$$\begin{aligned} f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3 &= 0 \\ d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3 &= 0 \\ d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3 &= 0, \quad (20) \\ d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3 &= 0. \end{aligned}$$

Переходя к другим обозначениям (13) $c_1 \Leftrightarrow c_3$, из (20) приходим к системе

$$\begin{aligned} d_1 k_1 + d_2 k_2 &= f_0 k_0 - d_3 k_3, \\ d_1 k_0 - c_3 k_2 - c_2 k_3 &= f_1 k_1, \\ d_2 k_0 - c_3 k_1 &= f_2 k_2 + c_1 k_3, \\ c_2 k_1 &= d_3 k_0 - c_1 k_2 - f_3 k_3. \end{aligned} \quad (21)$$

В матричной форме она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 & k_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 k_0 - d_3 k_3 \\ f_1 k_1 \\ c_1 k_3 + f_2 k_2 \\ -c_1 k_2 + d_3 k_0 - f_3 k_3 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

В правую часть входит шесть свободных переменных. Убеждаемся, что определитель отличен от нуля: $\det A = -2k_0 k_1^2 k_2 \equiv D^{-1}$. Общее решение системы (22) имеет вид

$$\begin{aligned} c_2 &= D[k_0 k_1 k_2 (2c_1 k_2 - 2d_3 k_0 + 2f_3 k_3)], \\ c_3 &= D[k_0 k_1 (2d_3 k_3 k_0 - f_0 k_0^2 + f_1 k_1^2 + f_2 k_2^2 - f_3 k_3^2)], \\ d_1 &= D[k_1 k_2 (2c_1 k_2 k_3 - f_0 k_0^2 - f_1 k_1^2 + f_2 k_2^2 + f_3 k_3^2)], \\ d_2 &= D[k_1^2 (-2c_1 k_2 k_3 + 2d_3 k_3 k_0 - f_0 k_0^2 + f_1 k_1^2 - \\ &\quad - f_2 k_2^2 - f_3 k_3^2)]. \end{aligned}$$

Его можно представить в матричной форме и затем разложить в линейную комбинацию шести независимых решений (здесь учтен явный вид величины D)

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = f_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_0^2}{2k_1 k_2} \\ \frac{k_0}{2k_1} \\ \frac{k_0}{2k_2} \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_1}{2k_2} \\ \frac{k_1}{2k_0} \\ -\frac{k_1^2}{2k_0 k_2} \end{pmatrix} + \\ + f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{2k_1} \\ \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} \\ \frac{k_2}{k_0} \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} -\frac{k_3}{k_1} \\ \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} \\ -\frac{k_3^2}{2k_0 k_1} \\ \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} \end{pmatrix} + \\ + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{k_1} \\ 0 \\ -\frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} \\ \frac{k_3}{k_0} \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} \frac{k_0}{k_1} \\ -\frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} \\ 0 \\ -\frac{k_3}{k_2} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Это решение можно представить в виде симметричной матрицы (записываем ее по столбцам):

$$\bar{f}_{(ab)} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_0 & \left(\frac{k_0}{2k_1} f_0 + \frac{k_1}{2k_0} f_1 - \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} f_2 - \frac{k_3^2}{2k_0 k_1} f_3 - \frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} c_1 \right) \\ \cdot & f_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \left(\frac{k_0}{2k_2} f_0 - \frac{k_1^2}{2k_0 k_2} f_1 + \frac{k_2}{2k_0} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} f_3 + \frac{k_3}{k_0} c_1 - \frac{k_3}{k_2} d_3 \right) \\ \left(\frac{k_0^2}{2k_1 k_2} f_0 - \frac{k_1}{2k_2} f_1 - \frac{k_2}{2k_1} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} f_3 - \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} d_3 \right) \\ f_2 \\ \cdot \\ d_3 \\ \left(-\frac{k_3}{k_1} f_3 - \frac{k_2}{k_1} c_1 + \frac{k_0}{k_1} d_3 \right) \\ c_1 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу также можно разложить в линейную суперпозицию

$$\begin{aligned} f_{(ab)} &= \\ &= f_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{k_0}{2k_1} & \frac{k_0}{2k_2} & 0 \\ \cdot & 0 & \frac{k_0^2}{2k_1 k_2} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ f_1 \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_1}{2k_0} & -\frac{k_1^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \cdot & 1 & -\frac{k_1}{2k_2} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ f_2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2^2}{2k_0 k_1} & \frac{k_2}{2k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_2}{2k_1} & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ f_3 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_3^2}{2k_0 k_1} & \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \cdot & 0 & \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} & -\frac{k_3}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ c_1 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ d_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или коротко так:

$$f_{(ab)} = f_0 F_0 + f_1 F_1 + f_2 F_2 c_1 C_1 + d_3 D_3. \quad (24)$$

Учтем существование калибровочных решений. Они задаются соотношениями

$$\bar{f} = -ik^l \lambda_l,$$

$$\bar{f}_{ab} = -1 \left[k_a \lambda_b + k_b \lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} k^l \lambda_l \right] \quad (25)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -i(k_0 \lambda_0 - k_1 \lambda_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3), \\ \bar{f}_{ab} &= -i \begin{pmatrix} 2k_0 \lambda_0 - \frac{1}{2} k^l \lambda_l & k_0 \lambda_1 + k_1 \lambda_0 \\ k_0 \lambda_1 + k_1 \lambda_0 & 2k_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} k^l \lambda_l \\ k_0 \lambda_2 + k_2 \lambda_0 & k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1 \\ k_0 \lambda_3 + k_3 \lambda_0 & k_1 \lambda_3 + k_3 \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} k_0 \lambda_2 + k_2 \lambda_0 & k_0 \lambda_3 + k_3 \lambda_0 \\ k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1 & k_1 \lambda_3 + k_3 \lambda_1 \\ 2k_2 \lambda_2 + \frac{1}{2} k_l \lambda_l & k_2 \lambda_3 + k_3 \lambda_2 \\ k_2 \lambda_3 + k_3 \lambda_2 & 2k_3 \lambda_3 + \frac{1}{2} k_l \lambda_l \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

Убеждаемся, что выполняется тождество $\bar{f}_a^a = \bar{f}_{00} - \bar{f}_{11} - \bar{f}_{22} - \bar{f}_{33} \equiv 0$. Результат (26) можно переписать иначе

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -i(k_0 \lambda_0 - k_1 \lambda_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3), \\ \bar{f}_0 &= -i \left(\frac{3}{2} k_0 \lambda_0 + \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 + \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_1 &= -i \left(\frac{1}{2} k_0 \lambda_0 + \frac{3}{2} k_1 \lambda_1 - \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 - \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_2 &= -i \left(\frac{1}{2} k_0 \lambda_0 - \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 + \frac{3}{2} k_2 \lambda_2 - \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_3 &= -i \left(\frac{1}{2} k_0 \lambda_0 - \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 - \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 + \frac{3}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{d}_1 &= -i(k_0 \lambda_1 + k_1 \lambda_0), \bar{d}_2 = -i(k_0 \lambda_2 + k_2 \lambda_0), \\ \bar{d}_3 &= -i(k_0 \lambda_3 + k_3 \lambda_0), \\ \bar{c}_1 &= -i(k_2 \lambda_3 + k_3 \lambda_2), \bar{c}_2 = -i(k_1 \lambda_3 + k_3 \lambda_1), \\ \bar{c}_3 &= -i(k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1). \end{aligned}$$

Если потребовать, чтобы калибровочные преобразования не нарушали равенства нулю скалярной компоненты $f = 0$, то следует наложить ограничение

$$k_0 \lambda_0 = k_1 \lambda_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3. \quad (27)$$

Тогда общее калибровочное решение примет вид

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2ik_1 \lambda_1 - 2i\lambda_2 k_2 - 2i\lambda_3 k_3, \\ \bar{f}_1 &= -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_2 = -2ik_2 \lambda_2, \quad \bar{f}_3 = -2ik_3 \lambda_3, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{d}_2 &= -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{d}_3 &= -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{c}_1 &= -ik_2 \lambda_3 - ik_3 \lambda_2, \quad \bar{c}_2 = -ik_1 \lambda_3 - ik_3 \lambda_1, \\ \bar{c}_3 &= -ik_1 \lambda_2 - ik_2 \lambda_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Его можно разложить в три независимых решения.

При $\lambda_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_2 = 0, \quad \bar{f}_3 = 0, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1, \\ \bar{c}_1 &= 0, \quad \bar{c}_2 = -ik_3 \lambda_1, \quad \bar{c}_3 = -ik_1 \lambda_1 \end{aligned} \quad (29)$$

или

$$\begin{aligned} f_{(ab)}^{(1)} &= \\ &= \begin{pmatrix} -2ik_1 \lambda_1 & -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1 & -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1 & -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 \\ \cdot & -2ik_1 \lambda_1 & -ik_2 \lambda_1 & -ik_3 \lambda_1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

При $\lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2i\lambda_2 k_2, \quad \bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = -2ik_2 \lambda_2, \quad \bar{f}_3 = 0, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2, \\ \bar{c}_1 &= -ik_3 \lambda_2, \quad \bar{c}_2 = 0, \quad \bar{c}_3 = -ik_1 \lambda_2 \end{aligned} \quad (31)$$

или

$$\begin{aligned} f_{(ab)}^{(2)} &= \\ &= \begin{pmatrix} -2i\lambda_2 k_2 & -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2 & -i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2 & -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2 \\ \cdot & 0 & -ik_1 \lambda_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & -2ik_2 \lambda_2 & -ik_3 \lambda_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (32)$$

При $\lambda_3 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2i\lambda_3 k_3, \quad \bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = 0, \quad \bar{f}_3 = -2ik_3 \lambda_3, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{c}_1 &= -ik_2 \lambda_3, \quad \bar{c}_2 = -ik_1 \lambda_3, \quad \bar{c}_3 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

или

$$\begin{aligned} f_{(ab)}^{(3)} &= \\ &= \begin{pmatrix} -2i\lambda_3 k_3 & -i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3 & -i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3 & -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3 \\ \cdot & 0 & 0 & -ik_1 \lambda_3 \\ \cdot & \cdot & 0 & -ik_2 \lambda_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2ik_3 \lambda_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Эти простейшие калибровочные решения должны раскладываться в линейные комбинации по найденным шести независимым решениям.

Сначала рассмотрим случай $\lambda_1 \neq 0$ ($c_1 = 0$).

Из $f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(1)}$ имеем

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_0}{2k_1} f_0 + \frac{k_1}{2k_0} f_1 - \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} f_2 - \frac{k_3^2}{2k_0 k_1} f_3 - \frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} c_1 \\ f_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{k_0}{2k_2}f_0 - \frac{k_1^2}{2k_0k_2}f_1 + \frac{k_2}{2k_0}f_2 + \frac{k_3^2}{2k_0k_2}f_3 + \frac{k_3}{k_0}c_1 - \frac{k_3}{k_2}d_3 \\ \left(\frac{k_0^2}{2k_1k_2}f_0 - \frac{k_1}{2k_2}f_1 - \frac{k_2}{2k_1}f_2 + \frac{k_3^2}{2k_1k_2}f_3 - \frac{k_0k_3}{k_1k_2}d_3 \right) \\ f_2 \\ \cdot \\ \begin{pmatrix} d_3 \\ -\frac{k_3}{k_1}f_3 - \frac{k_2}{k_1}c_1 + \frac{k_0}{k_1}d_3 \\ c_1 \\ f_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2ik_1\lambda_1 & -i\frac{k_0^2+k_1^2}{k_0}\lambda_1 & -i\frac{k_1k_2}{k_0}\lambda_1 & -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1 \\ \cdot & -2ik_1\lambda_1 & -ik_2\lambda_1 & -ik_3\lambda_1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует система из 10и уравнений, которая эквивалентна следующей:

$$f_0 = -2ik_1\lambda_1, \quad f_1 = -2ik_1\lambda_1, \quad f_2 = 0,$$

$$f_3 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_3 = -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1,$$

$$\frac{k_0}{2k_1}(-2ik_1\lambda_1) + \frac{k_1}{2k_0}(-2ik_1\lambda_1) = -i\frac{k_0^2+k_1^2}{k_0}\lambda_1,$$

$$\frac{k_0}{2k_2}(-2ik_1\lambda_1) - \frac{k_1^2}{2k_0k_2}(-2ik_1\lambda_1) - \frac{k_3}{k_2} \left(-i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1 \right) = -i\frac{k_1k_2}{k_0}\lambda_1,$$

$$\frac{k_0^2}{2k_1k_2}(-2ik_1\lambda_1) - \frac{k_1}{2k_2}(-2ik_1\lambda_1) - \frac{k_0k_3}{k_1k_2} \left(-i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1 \right) = -ik_2\lambda_1.$$

В результате приходим к соотношениям

$$f_0 = -2ik_1\lambda_1, \quad f_1 = -2ik_1\lambda_1, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

$$c_1 = 0, \quad d_3 = -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1, \quad k_0^2 + k_1^2 \equiv k_0^2 + k_1^2,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0.$$

Таким образом, это калибровочное решение задается так:

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(1)}, \quad f_0 = -2ik_1\lambda_1, \quad f_1 = -2ik_1\lambda_1,$$

$$f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_3 = -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1. \quad (35)$$

Приведем конечные результаты для двух оставшихся калибровочных решений.

Случай $\lambda_2 \neq 0$ ($c_2 = 0$)

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^2, \quad f_0 = -2i\lambda_2k_2, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = -2ik_2\lambda_2,$$

$$f_3 = 0, \quad c_1 = -ik_3\lambda_2, \quad d_3 = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2. \quad (36)$$

Случай $\lambda_3 \neq 0$ ($c_3 = 0$)

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^3, \quad f_0 = -2i\lambda_3k_3, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

$$f_3 = -2ik_3\lambda_3, \quad c_1 = -ik_2\lambda_3,$$

$$d_3 = -i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3. \quad (37)$$

Среди общего решения исходной системы уравнений существуют три, которые могут быть отождествлены с калибровочными:

$$f_0^1 = -2ik_1\lambda_1, \quad f_1^1 = -2ik_1\lambda_1, \quad f_2^1 = 0,$$

$$f_3^1 = 0, \quad c_1^1 = 0, \quad d_3^1 = -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1;$$

$$f_0^2 = -2ik_2\lambda_2, \quad f_1^2 = 0, \quad f_2^2 = -2ik_2\lambda_2,$$

$$f_3^2 = 0, \quad c_1^2 = -ik_3\lambda_2, \quad d_3^2 = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2;$$

$$f_0^3 = -2ik_3\lambda_3, \quad f_1^3 = 0, \quad f_2^3 = 0, \quad f_3^3 = -2ik_3\lambda_3,$$

$$c_1^3 = -ik_2\lambda_3, \quad d_3^3 = -i\frac{k_0^2+k_3^2}{k_0}\lambda_3. \quad (38)$$

Приведем также явный вид общего решения уравнения

$$f_{(ab)} =$$

$$= f_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{k_0}{2k_1} & \frac{k_0}{2k_2} & 0 \\ \cdot & 0 & \frac{k_0^2}{2k_1k_2} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_1}{2k_0} & -\frac{k_1^2}{2k_0k_2} & 0 \\ \cdot & 1 & -\frac{k_1}{2k_2} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ f_2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2^2}{2k_0k_1} & \frac{k_2}{2k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_2}{2k_1} & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ f_3 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_3^2}{2k_0k_1} & \frac{k_3^2}{2k_0k_2} & 0 \\ \cdot & 0 & \frac{k_3^2}{2k_1k_2} & -\frac{k_3}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ c_1 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2k_3}{k_0k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_0k_3}{k_1k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

или коротко

$$(f_{(ab)}) = f_0F_0 + f_1F_1 + f_2F_2 + c_1C_1 + d_3D_3. \quad (39)$$

Для трех случаев из (38) соотношение (39) принимает соответственный вид

$$f_{(ab)}^{(1)} = f_0^{(1)}F_0 + f_1^{(1)}F_1 + d_3^{(1)}D_3,$$

$$f_{(ab)}^{(2)} = f_0^{(2)}F_0 + f_2^{(2)}F_2 + c_1^{(2)}C_1 + d_3^{(2)}D_3, \quad (40)$$

$$f_{(ab)}^{(3)} = f_0^{(3)}F_0 + f_3^{(3)}F_2 + c_1^{(3)}C_1 + d_3^{(3)}D_3.$$

Характер присутствия отдельных калибровочных решений внутри общего решения можно пояснить так:

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & c_1 & d_3 \\ (1): & f_0^{(1)} & f_1^{(1)} & 0 & 0 & d_3^{(1)} \\ (2): & f_0^{(2)} & 0 & f_2^{(2)} & 0 & c_1^{(2)} & d_3^{(2)} \\ (3): & f_0^{(3)} & 0 & 0 & f_3^{(3)} & c_1^{(3)} & d_3^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Решения F_1, F_2, F_3 являются калибровочными и поэтому могут быть отброшены как нефизические. Проследим за этим детальнее. Фактически нужно исследовать следующую величину

$$f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3)}, \quad (42)$$

учитывая при этом три равенства

$$\begin{aligned} f_1 = f_1^{(1)} &= -2ik_1\lambda_1, & f_2 = f_2^{(3)} &= -2ik_2\lambda_2, \\ f_3 = f_3^{(3)} &= -2ik_3\lambda_3. \end{aligned} \quad (43)$$

В явном виде соотношение (41) записывается так:

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3)} = \\ &= f_0 \cdot F_0 + f_1 \cdot F_1 + f_2 \cdot F_2 + f_3 \cdot F_3 + c_1 \cdot C_1 + \\ &+ d_3 \cdot D_3 + 2k_1\lambda_1 \cdot F_0 + 2ik_1\lambda_1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + \\ &+ 0 \cdot F_3 + 0 \cdot C_1 + \frac{ik_3k_1}{k_0}\lambda_1 D_3 + \\ &+ 2ik_2\lambda_2 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 2ik_2\lambda_2 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + \\ &+ ik_3\lambda_2 \cdot C_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0}\lambda_2 D_3 + \\ &+ 2ik_3\lambda_3 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 2ik_3\lambda_3 \cdot F_3 + \\ &+ ik_2\lambda_3 \cdot C_1 + i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 \cdot D_3, \end{aligned}$$

что после приведения подобных дает

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= (f_0 - \bar{f}_0)^{\equiv 0} \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + \\ &+ 0 \cdot F_3 + (c_1 + ik_3\lambda_2 + ik_2\lambda_3) \cdot C_1 + \\ &+ \left(d_3 + \frac{ik_3k_1}{k_0}\lambda_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0}\lambda_2 + i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 \right) \cdot D_3. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение исходной системы уравнений, не содержащее калибровочных компонент, выглядит так:

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= (c_1 + ik_3\lambda_2 + ik_2\lambda_3)C_1 + \\ &+ \left(d_3 + \frac{ik_3k_1}{k_0}\lambda_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0}\lambda_2 + i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3 \right) D_3 = \\ &= \mu_1 C_1 + \mu_2 D_3 = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2k_3}{k_0k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ \cdot & 0 & -\frac{k_0k_3}{k_1k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Этот симметричный тензор содержит два произвольных числовых параметра μ_1 и μ_2 , следовательно, он описывает два линейно независимых решения уравнения для безмассовой частицы со спином 2.

Заключение

Выполненный анализ показывает необходимость присутствия скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2. Оно обеспечивает корректное описание калибровочной симметрии в этой теории. Возможности расширения описания калибровочной симметрии в теории поля со спином 2 на фоне псевдориманова пространства-времени обсуждались в работе [14].

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
2. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.
3. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
4. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1950. – Вып. 20, № 1. – С. 27–38.
5. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Ученые записки Беларускаго государственнаго университета имени В. И. Ленина. Серия физика и математика. – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.
6. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325–326.
7. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Annals of Physics. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145.
8. Федоров, Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф. И. Федоров // Доклады Академии наук СССР. – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 802–805.
9. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Physical Review. – 1969. – Vol. 188, № 5. – P. 2218–2222.
10. Кисель, В. В. К релятивистским волновым уравнениям для частицы со спином 2 / В. В. Кисель // Весці НАН

Беларусі. Серія. фіз.-мат. навук. – 1986. – Т. 5. – С. 94–99.

11. Ред'ков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Ред'ков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
12. Ovsyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2014. – 486 p.
13. Кисель, В. В. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 / В. В. Кисель, Е. М. Овсийук, О. В. Веко [и др.] // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 58–63.
14. Dudko, I. G. Spin 2 particle with anomalous magnetic moment in Riemann space-time, restriction to massless case, gauge symmetry / I. G. Dudko, O. A. Semenyuk, V. V. Kisel [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 2. – P. 286–296.

References

1. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
2. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.
3. Gel'fand, I. M. Obshchie relyativistski invariantnye uravneniya i beskonechnomernye predstavleniya gruppy Lorentsa [General relativistically invariant equations and infinite dimensional representations of the Lorentz group] / I. M. Gel'fand, A. M. Yaglom // Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. – 1948. – Vol. 18, № 8. – P. 703–733.
4. Fradkin, E. S. K teorii chastits s vysshimi spinami [To the theory of the higher spin particles] / E. S. Fradkin // Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. – 1950. – Vol. 20, № 1. – P. 27–38.
5. Fedorov, F. I. K teorii chastitsy so spinom 2 [Towards a theory of a particle with spin 2] / F. I. Fedorov // Uchenye zapiski Belarusskogo gosudarstvennogo uni-

versiteta imeni V. I. Lenina. Seriya fizika i matematika [Scientific notes of the Belarusian State University named after V. I. Lenin. Series physics and mathematics]. – 1951. – Vol. 12. – P. 156–173.

6. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325–326.
7. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Annals of Physics. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145.
8. Fedorov, F. I. Uravneniya pervogo poryadka dlya gravitacionnogo polya [First order equation for a gravitational field] / F. I. Fedorov // Doklady Akademii Nauk SSSR [Reports of the National Academy of Sciences of the USSR]. – 1968. – Vol. 179, № 4. – P. 802–805.
9. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Physical Review. – 1969. – Vol. 188, № 5. – P. 2218–2222.
10. Kisel, V. V. K relyativistskim volnovym uravneniyam dlya chastitsy so spinom 2 [To the relativistic wave equations for the spin 2 particle] / V. V. Kisel // Vesci NAN Belarusi. Seriya fiz.-mat. navuk [Vesti AN of Belarus. Ser. Phys-math.]. – 1986. – Т. 5. – С. 94–99.
11. Red'kov, V. M. Particle fields in Riemannian space and Lorentz group / V. M. Red'kov. – Minsk: Belorusskaja nauka [Belarusian Science], 2009. – 486 p.
12. Ovsyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2014. – 486 p.
13. Kisel, V. V. Analiz vklada kalibrovocnykh stepenej svobody v strukturu tenzora energii-impul'sa bezmassovogo polya so spinom 2 [Analysis of the contribution of gauge degrees of freedom to the structure of the energy-momentum tensor of a massless field with spin 2] / V. V. Kisel, E. M. Ovsyuk, O. V. Veko [et al.] // Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 2015. – № 2. – P. 58–63.
14. Dudko, I. G. Spin 2 particle with anomalous magnetic moment in Riemann space-time, restriction to massless case, gauge symmetry / I. G. Dudko, O. A. Semenyuk, V. V. Kisel [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 2. – P. 286–296.

Для цитирования:

Бурый, А. В. О роли скалярного поля в теории безмассовой частицы со спином 2 / А. В. Бурый // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 48–55. DOI: 10.19110/1994-5655-2024-6-48-55

For citation:

Bury, A. V. On the role of scalar field in the theory of massless spin 2 particle / A. V. Bury // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 48–55. DOI: 10.19110/1994-5655-2024-6-48-55

Дата поступления рукописи: 08.07.2025

Received: 08.07.2025