УДК 539.12
DOI 10.19110/1994-5655-2024-6-64-70

Нерелятивистское приближение для частицы со спином 3/2 в гравитационном поле

А. В. Ивашкевич

Институт физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь

ivashkevich.alina@yandex.by

Аннотация

В работе предлагается основанный на соображениях симметрии простой метод нахождения нерелятивистского уравнения для частицы со спином 3/2 с учетом внешних электромагнитных и гравитационных полей, основанный на исходном релятивистском уравнении и выделении больших и малых компонент волновой функции в нерелятивистком пределе с использованием метода проективных операторов. Сначала этот вопрос рассмотрен в пространстве Минковского, затем результат обобщен на случай искривленного пространства.

Ключевые слова:

частица со спином 3/2, нерелятивистское приближение, проективные операторы, внешние электромагнитные и гравитационные поля

The nonrelativistic approximation for a spin 3/2 particle in gravitation field

A. V. Ivashkevich

B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

ivashkevich.alina@yandex.by

Abstract

In the paper, a new and simple approach to derive the nonrelativistic equation for a spin 3/2 particle in presence of external electromagnetic and gravitational fields is proposed. It is based on the initial relativistic equation and the general method to determine the large and small components of the wave function in the non-relativistic limit with the use of projective operator method. First The problem is first solved in Minkowsly space, after that this approch is extended to curved space-time background.

Keywords:

spin 3/2 particle, non-relativistic approximation, projective operators, external electromagnetic and gravitational fields

Введение

После классических работ Паули–Фирца и Рариты–Швингера об описании частиц со спином 3/2 [1–3] в научной литературе сохраняется устойчивый интерес к различным аспектам теории этого поля [4–23]. В работе предлагается простой метод нахождения уравнения паулиевского типа для частицы со спином 3/2, сначала этот вопрос рассмотрен в пространстве Минковского, затем результат обобщен на случай пространства с кривизной.

Нерелятивистское приближение в релятивистских волновых уравнениях возможно (независимо от величины спина частицы) в классе пространств с метрикой

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

$$e_{(a)\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{(i)k}(x) \end{pmatrix} . \qquad (1)$$

При этом выражения для связности существенно упрощаются [1]:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} J^{ik} e^m_{(i)} (\nabla_0 e_{(k)m}),$$

$$\Gamma_l = \frac{1}{2} J^{ik} e^m_{(i)} (\nabla_l e_{(k)m}), \qquad (2)$$

вклад в связность от генераторов J^{0k} отсутствует; используется следующее обозначеие для трех генераторов $J^{ik} = \sigma^{ik} \otimes I + I \otimes j^{ik}$; релятивистская волновая функция является вектор-биспинором относительно группы Лоренца.

1. Нерелятивистское уравнение в пространстве Минковского

Вначале обратимся к трасформационным свойствам нерелятивистской волновой функции относительно группы вращений. При этом 2-мерные спиноры, входящие в биспинор, преобразуются относительно группы вращений одинаково:

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} \Phi_{1(0)} & \Phi_{1(1)} & \Phi_{1(2)} & \Phi_{1(3)} \\ \Phi_{2(0)} & \Phi_{2(1)} & \Phi_{2(2)} & \Phi_{2(3)} \\ \varphi_{1(0)} & F_{1(1)} & F_{1(2)} & F_{1(3)} \\ \varphi_{2(0)} & F_{2(1)} & F_{2(2)} & F_{2(3)} \end{pmatrix},$$

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} \Phi & \vec{\Phi} \\ \varphi & \vec{F} \end{pmatrix} . \qquad (3)$$

Законы преобразования относительно группы вращений (глобальной или локальной) такие:

$$\Phi' = B\Phi,\ \varphi' = B\varphi,\ \Phi' = (B \otimes O)\Phi,$$
$$F' = (B \otimes O)F, \tag{4}$$

где матрицы B и O описывают преобразования вращения для 2-спиноров и 3-векторов.

Из более детального изложения в [2] следует, что если в полной 16-компонентной волновой функции оставить только большие компоненты, то первый столбец при этом зануляется (в нем содержатся только малые компоненты):

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} 0 & L_1 & L_3 & L_5 \\ 0 & L_2 & L_4 & L_6 \\ 0 & L_1 & L_3 & L_5 \\ 0 & L_2 & L_4 & L_6 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

и закон преобразования для оставшихся больших компонент такой:

$$\Psi^+ = \begin{pmatrix} \Phi_{1(1)} & \Phi_{1(2)} & \Phi_{1(3)} \\ \Phi_{2(1)} & \Phi_{2(2)} & \Phi_{2(3)} \\ F_{1(1)} & F_{1(2)} & F_{1(3)} \\ F_{2(1)} & F_{2(2)} & F_{2(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ F \end{pmatrix},$$
$$\Phi' = (B \otimes O)\Phi,\ F' = (B \otimes O)F; \tag{6}$$

достаточно следить за двумя первыми строками. Найдем соответствующие формулам (6) выражения для генераторов нерелятивистских преобразований

$$J_j = (i/2)\sigma_j \otimes I + I \otimes V_j,\ j = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для операторов $V_k, k = 1, 2, 3$ выполняются коммутационные соотношения $V_1V_2 - V_2V_1 = V_3$ и циклическая перестановка индексов.

Найдем сначала матричное представление для генераторов J_j:

$$J_1\Psi = \begin{pmatrix} \frac{i\Phi_{21}}{2} & \left(\frac{i\Phi_{22}}{2} - \Phi_{13}\right) & \left(\Phi_{12} + \frac{i\Phi_{23}}{2}\right) \\ \frac{i\Phi_{11}}{2} & \left(\frac{i\Phi_{12}}{2} - \Phi_{23}\right) & \left(\frac{i\Phi_{13}}{2} + \Phi_{22}\right) \end{pmatrix},$$
$$J_2\Psi = \begin{pmatrix} \left(\Phi_{13} + \frac{\Phi_{21}}{2}\right) & \frac{\Phi_{22}}{2} & \frac{1}{2}\left(\Phi_{23} - 2\Phi_{11}\right) \\ \left(\Phi_{23} - \frac{\Phi_{11}}{2}\right) & -\frac{\Phi_{12}}{2} & \left(-\frac{\Phi_{13}}{2} - \Phi_{21}\right) \end{pmatrix}, \tag{8}$$
$$J_3\Psi = \begin{pmatrix} \left(\frac{i\Phi_{11}}{2} - \Phi_{12}\right) & \left(\Phi_{11} + \frac{i\Phi_{12}}{2}\right) & \frac{i\Phi_{13}}{2} \\ \left(-\frac{i\Phi_{21}}{2} - \Phi_{22}\right) & \left(\Phi_{21} - \frac{i\Phi_{22}}{2}\right) & -\frac{i\Phi_{23}}{2} \end{pmatrix}.$$

В 6-мерном представлении имеем

$$\Phi^t = (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{21}, \Phi_{22),\Phi_{23}})^t =$$
$$= (L_1, L_3, L_5, L_2, L_4, L_6)^t,$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i/2 \\ i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} i/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i/2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $()^t$ обозначает транспонирование. Вычисляем коммутаторы

$$J_1J_2 - J_2J_1 = J_3 + \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = J_3 + K_3,$$

$$J_2J_3 - J_3J_2 = J_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_1 + K_1,$$

$$J_3J_1 - J_1J_3 = J_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2 + K_2.$$

Квадраты матриц K_i пропорциональны единичной матрице I

$$K_1^2 = K_2^2 = K_3^2 = -I, \tag{10}$$

а для матриц выполняются антикоммутационные соотношения

$$K_2K_3 + K_3K_2 = 0, \quad K_3K_1 + K_1K_3 = 0,$$
$$K_1K_2 + K_2K_1 = 0 \tag{11}$$

равенства

$$K_2K_3 = K_1,\ K_3K_1 = K_2,\ K_1K_2 = K_3 \tag{12}$$

и коммутационные соотношения

$$K_2K_3 - K_3K_2 = 2K_1, \quad K_3K_1 - K_1K_3 = 2K_2,$$
$$K_1K_2 - K_2K_1 = 2K_3.$$

Изменением нормировки $S_i = \frac{1}{2}K_i$ они принимают вид перестановочных соотношений для группы вращений

$$S_2S_3 - S_3S_2 = S_1, \quad S_3S_1 - S_1S_3 = S_2;$$

$$S_1S_2 - S_2S_1 = S_3. \qquad (13)$$

Если учесть антикоммутаторы $K_2K_3 = -K_3K_2$, $K_3K_1 = -K_1K_3$, $K_1K_2 = -K_2K_1$, то легко получить тождество

$$(K_1D_1 + K_2D_2 + K_3D_3)^2 = -(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) +$$

$$+K_2K_3(D_2D_3 - D_3D_2) + K_3K_1(D_3D_1 - D_1D_3) +$$

$$+K_1K_2(D_1D_3 - D_2D_1),$$

т. е.

$$(K_1D_1 + K_2D_2 + K_3D_3)^2 =$$

$$= -(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) + ieF_{23}K_2K_3 +$$

$$+ieF_{31}K_3K_1 + ieF_{12}K_1K_2.$$

Разделив это равенство на $2M$, получим соотношение

$$\frac{1}{2M}\left(K_1D_1 + K_2D_2 + K_3D_3\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2M}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) +$$

$$+\frac{ie}{M}(F_{23}S_1 + F_{31}S_2 + F_{12}S_3), \qquad (14)$$

которое напоминает структуру гамильтониана для нерелятивистской частицы со спином $3/2$.

Убедимся, что в (14) действительно записано найденное в [2] нерелятивистское уравнение для частицы со спином $3/2$. Исходим из системы уравнений (14), записанной в матричном виде

$$iD_0 \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_5 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2M}D^2 \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_5 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_6 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{ie}{2M}\left\{F_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$+F_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\left. +F_{12}\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_5 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_6 \end{pmatrix}.$$

В явном виде имеем шесть уравнений

$$iD_0L_1 = -\frac{1}{2M}D^2L_1 + \mu F_{23}(-iL_2) +$$
$$+ \mu F_{31}(-L_2) + \mu F_{12}(-iL_1),$$

$$iD_0L_3 = -\frac{1}{2M}D^2L_3 + \mu F_{23}(-iL_4) +$$
$$+ \mu F_{31}(-L_4) + \mu F_{12}(-iL_3),$$

$$iD_0L_5 = -\frac{1}{2M}D^2L_5 + \mu F_{23}(-iL_6) +$$
$$+ \mu F_{31}(-L_6) + \mu F_{12}(-iL_5),$$

$$iD_0L_2 = -\frac{1}{2M}D^2L_2 + \mu F_{23}(-iL_1) +$$
$$+ \mu F_{31}(+L_1) + \mu F_{12}(+iL_2),$$

$$iD_0L_4 = -\frac{1}{2M}D^2L_4 + \mu F_{23}(-iL_3) +$$
$$+ \mu F_{31}(+L_3) + \mu F_{12}(+iL_4),$$

$$iD_0L_6 = -\frac{1}{2M}D^2L_6 + \mu F_{23}(-iL_5) +$$
$$+ \mu F_{31}(+L_5) + \mu F_{12}(+iL_6).$$

Учтем в них условия связи (см. в [2])

$$L_3 = (iL_1 - iL_6), \quad L_4 = (-iL_2 - iL_5);$$

вместо iD_0L_3 и iD_0L_4 это дает

$$iD_0(L_1 - L_6) = -\frac{1}{2M}D^2(L_1 - L_6) + \mu F_{23}(iL_2 + iL_5) +$$

$$+\mu F_{31}(L_2 + L_5) + \mu F_{12}(-iL_1 + iL_6),$$

$$iD_0(L_2 + L_5) = -\frac{1}{2M}D^2(L_2 + L_5) +$$

$$+\mu F_{23}(iL_1 - iL_6) + \mu F_{31}(+iL_3) + \mu F_{12}(iL_2 + iL_5),$$

Собираем полученные уравнения в две группы.

Первая группа включает $iD_0L_1, iD_0(L_1 - L_6), iD_0L_6$. Комбинируем уравнения так, чтобы слева получить выражения для $L_1 + L_6,\ 2L_1 - L_6,\ 2L_6 - L_1$. Имеем

$$iD_0(L_1 + L_6) = -\frac{1}{2M}D^2(L_1 + L_6) +$$

$$+\mu F_{23}(-iL_2 - iL_5) + \mu F_{31}(-L_2 + L_5) +$$

$$+\mu F_{12}(-iL_1 + iL_6),$$

$$iD_0(2L_1 - L_6) = -\frac{1}{2M}D^2(2L_1 - L_6) +$$

$$+\mu F_{23}(-2iL_2+iL_5)+\mu F_{31}(-2L_2-L_5)+$$
$$+\mu F_{12}(-2iL_1-iL_6),$$
$$iD_0(2L_6-L_1)=-\frac{1}{2M}D^2(2L_6-L_1)+$$
$$+\mu F_{23}(-2iL_5+iL_2)+\mu F_{31}(2L_5+L_2)+$$
$$+\mu F_{12}(2iL_6+iL_1).$$

Убеждаемся, что третье уравнение — это разность между первым и вторым, следовательно, третье уравнение можно отбросить.

Вторая группа включает $iD_0L_2, iD_0(L_2+L_5), iD_0L_5$. Комбинируем уравнения так, чтобы слева получить выражения $L_2-L_5,\ 2L_2+L_5,\ L_2+2L_5$. Тогда приходим к уравнениям

$$iD_0(L_2-L_5)=-\frac{1}{2M}D^2(L_2-L_5)+$$
$$+\mu F_{23}(-iL_1+iL_6)+\mu F_{31}(L_1+L_6)+\mu F_{12}(iL_2+iL_5),$$
$$iD_0(2L_2+L_5)=-\frac{1}{2M}D^2(2L_2+L_5)+$$
$$+\mu F_{23}(-2iL_1-iL_6)+\mu F_{31}(2L_1-L_6)+\mu F_{12}(2iL_2-iL_5),$$
$$iD_0(L_2+2L_5)=-\frac{1}{2M}D^2(L_2+2L_5)+$$
$$+\mu F_{23}(-iL_1-2iL_6)+\mu F_{31}(L_1-2L_6)+\mu F_{12}(iL_2-2iL_5);$$

убеждаемся, что третье уравнение – это разность между вторым и первым; следовательно, третье уравнение можно отбросить. Таким образом, независимыми являются четыре уравнения для $iD_0(L_1+L_6)$, $iD_0(L_2-L_5)$, $iD_0(2L_1-L_6), iD_0(2L_2+L_5)$.

Введем новую 4-компонентную функцию

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\\2&0&0&-1\\0&2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_5\\ L_6\end{pmatrix},$$

$$L_1=\frac{1}{3}\Psi_1+\frac{1}{3}\Psi_3,\quad L_2=\frac{1}{3}\Psi_2+\frac{1}{3}\Psi_4,$$
$$L_5=\frac{1}{3}\Psi_4-\frac{2}{3}\Psi_2,\quad L_6=\frac{2}{3}\Psi_1-\frac{1}{3}\Psi_3. \tag{15}$$

В результате система четырех уравнений принимает вид

$$iD_0\Psi_1=-\frac{1}{2M}\Delta\Psi_1+\frac{ie}{M}\left(\frac{1}{6}iF_{23}(\Psi_2-2\Psi_4)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}F_{31}\Psi_2+\frac{1}{6}iF_{12}(\Psi_1-2\Psi_3)\right),$$
$$iD_0\Psi_2=-\frac{1}{2M}\Delta\Psi_2+\frac{ie}{M}\left(\frac{1}{6}iF_{23}(\Psi_1-2\Psi_3)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}F_{31}\Psi_1-\frac{1}{6}iF_{12}(\Psi_2-2\Psi_4)\right), \tag{16}$$
$$iD_0\Psi_3=-\frac{1}{2M}\Delta\Psi_3+\frac{ie}{M}\left(\frac{1}{6}iF_{23}(\Psi_4-2\Psi_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}F_{31}(\Psi_4-2\Psi_2)-\frac{1}{2}iF_{12}\Psi_3\right),$$
$$iD_0\Psi_4=-\frac{1}{2M}\Delta\Psi_4+\frac{ie}{M}\left(-\frac{1}{6}iF_{23}(2\Psi_1-\Psi_3)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}F_{31}(2\Psi_1-\Psi_3)+\frac{1}{2}iF_{12}\Psi_4\right).$$

Эту систему уравнений можно записать в матричном виде

$$iD_0\Psi=-\frac{1}{2M}\Delta\Psi=$$
$$=\frac{ie}{3M}\left(F_{23}S_1+F_{31}S_2+F_{12}S_3\right)\Psi, \tag{17}$$

где $\Psi^t=(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,\Psi_4,)^t$, а матрицы

$$S_1=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&1&0&-2\\1&0&-2&0\\0&-2&0&1\\-2&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$S_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-3&0&0\\3&0&0&0\\0&-2&0&1\\2&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$S_3=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&-1&0&2\\0&0&-3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

удовлетворяют коммутаторам $S_1S_2-S_2S_1=S_3$ плюс циклическая перестановка индексов. Следовательно, они могут рассматриваться как составляющие оператора спина.

Найдем преобразование, которое приводит матрицу S_3 к диагональному виду:

$$S_3\Psi=\sigma\Psi,\quad \bar\Psi=S\Psi,\quad S^{-1}\bar\Psi=\Psi,$$

$$SS_3S^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma_1&0&0&0\\0&\sigma_2&0&0\\0&0&\sigma_3&0\\0&0&0&\sigma_4\end{pmatrix}=\bar S_3.$$

После простых вычислений получаем

$$S=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\-2&0&1&0\\0&-2&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1/2&0&1/2\\1/2&0&-1/2&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Спиновые матрицы в новом базисе имеют вид

$$\bar S_1=\begin{pmatrix}0&-1/2&0&0\\-3/2&0&-1&0\\0&-1&0&-3/2\\0&0&-1/2&0\end{pmatrix},$$

$$\bar{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 & 0 & 0 \\ 3i/2 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -3i/2 \\ 0 & 0 & i/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{S}_3 = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

2. Обобщение на случай римановой геометрии пространства

Можно легко обобщить полученное уравнение в декартовых координатах на общековариантный случай. Структура нерелятивистского уравнения в любых криволинейных координатах должна записываться так (исходим из 6-мерного уравнения):

$$iD_0\Psi_6 = \frac{1}{2M}\left[K^j(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma_j(x) + ieA_j(x)\right)\right]^2 \Psi_6,$$

$$K^j(x) = K_i e^j_{(i)}(x),$$

$$\Gamma_j(x) = \frac{1}{2} J^{kl} e^n_{(k)}(x) \nabla_j e_{(l)n}(x), \quad (19)$$

где обобщенные производные задаются следующими формулами $(k = 1, 2, 3)$:

$$D_0(x) = \partial_0 + ieA_0(x) +$$

$$+\frac{1}{2}(\sigma^{ps} \otimes I + I \otimes j^{ps})\gamma_{[ps]0}(x). \quad (20)$$

$$D_k(x) = e^j_{(k)}(x)(\partial_j + ieA_j(x)) +$$

$$+\frac{1}{2}(\sigma^{ps} \otimes I + I \otimes j^{ps})\gamma_{[ps]k}(x). \quad (21)$$

Связи между большими компонентами задаются прежними соотношениями. Также ничего не меняется в алгебраических преобразованиях, показывающих существование только четырех независимых уравнений. Отличие только в том, что во всех преобразованиях и конечном 4-мерном уравнении используются выражения для обобщенных операций дифференцирования. Соответственно, вместо представления (17) получаем более общее уравнение

$$iD_0(x)\Psi = -\frac{1}{2M}\left(D_1^2(x) + D_2^2(x) + D_3^2(x)\right)\Psi +$$

$$+\frac{1}{2M}(D_{[23]}S_1 + D_{[31]}S_2 + D_{[12]}S_3)\Psi_4, \quad (22)$$

где введены коммутаторы для обобщенных производных из (21): $D_{[kl]} = D_k(x)D_l(x) - D_l(x)D_k(x)$.

Заключение

Выведенное нерелятивистское уравнение (22) для частицы со спином 3/2 в значительной степени лишь фиксирует его общую математическую структуру. Понятно, что коммутаторы в уравнении (22) предполагают существование дополнительных геометрических членов взаимодействия, обусловленных искривленной структурой пространства (1); при этом следует ожидать появления тензора и скаляра Риччи: $R_{ab}(x), R(x)$. С учетом того, что предполагается вполне определенная структура метрики пространства (1), отличными от нуля будут только компоненты тензора Риччи с отличными от нуля индексами.

Автор заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Pauli, W. Uber relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P 211–232.
3. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64.
4. Гинзбург, В. Л. К теории частиц со спином 3/2 / В. Л. Гинзбург // ЖЭТФ. – 1942. – Т. 12. – С. 425–442.
5. Давыдов, А. С. Волновое уравнение для частицы со спином 3/2 в отсутствии внешних полей / А. С. Давыдов // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13. – С. 313–319.
6. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Reviews of Modern Physics. – 1945. – Vol. 17. – № 2-3. – P. 200–216.
7. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с большими спинами / Е. С Фрадкин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1950. – Т. 20, № 1. – С. 27–38.
8. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.
9. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц высших спинов с электромагнитными и мезонными полями / В. Я. Файнберг // Труды Физического института имени Лебедева АН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.
10. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czechoslovak Journal of Physics. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
11. Богуш, А. А. Уравнение для частицы со спином 3/2 с аномальным магнитным моментом / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Известия вузов. – 1984. – Т. 1. – С. 23–27.
12. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Известия Вузов. – 1985. – Т. 28, № 1. – С. 91–95.

13. Плетюхов, В. А. О связи между различными формулировками терии частицы со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вести АН БССР. Серия физ.-мат. – 1985. – № 5. – С. 90–95.
14. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. N.Y. – 1961. – Vol. 13. – P. 121–145.
15. Hagen, C. R. Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field / C. R. Hagen, L. P. S. Singh // Phys. Rev. D. – 1982. – Vol. 26. – P. 393–398.
16. Loide, R. K. Equations for a vector-bispinor / R. K. Loide // J. Phys. A. – 1984. – Vol. 17. – P. 2535–2550.
17. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
18. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Белорусская наука, 2015. – 328 с..
19. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p., 404 p.
20. Kisel, V. V. Fradkin equation for a spin 3/2 particle in presence of external electromagnetic and gravitational fields / V. V. Kisel [et al.] // Ukr. J. Phys. – 2019.— Vol. 64, № 12. – P. 1112–1117.
21. Ивашкевич, А. И. Безмассовое поле со спином 3/2: решения волнового уравнения и оператор спиральности / А. И. Ивашкевич, Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – № 3. – С. 338–354.
22. Ивашкевич, А. В. Сферические решения уравнения для частицы со спином 3/2 / А. В. Ивашкевич, Е. М. Овсиюк, В. В. Кисель [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 3. – С. 282–290.
23. Ивашкевич, А. В. Частица со спином 3/2: теория Паули-Фирца, нерелятивистский предел / А. В. Ивашкевич, Я. А. Войнова, Е. М. Овсиюк [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 335–349.

References

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60. – № 1. – P. 61–64.
4. Ginzburg, V. L. To the theory of particles of spin 3/2 / V. L. Ginzburg // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1942. – Vol. 12. – P. 425–442.
5. Davydov, A. S. Wave equation for a particle with spin 3/2, in absence of external field / A. S. Davydov // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1943. – Vol. 13.– P. 313–319.
6. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Reviews of Modern Physics. – 1945. – Vol. 17. – № 2-3. – P. 200–216.
7. Fradkin E. S. To the theory of particles with higher spins / Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1950. – Vol. 20, № 1. – P. 27–38 (in Russian).
8. Fedorov, F. I. Generalized relativistic wave equations / F. I. Fedorov // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. – 1952. – Vol. 82, № 1. – P. 37–40 (in Russian).
9. Feinberg, V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields / V. Ya. Feinberg // Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR. – 1955. – Vol. 6. – P. 269–332 (in Russian).
10. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czechoslovak Journal of Physics. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
11. Bogush, A. A. Equation for a 3/2 particle with anomalous magnetic moment / A. A. Bogush // Russian Physics Journal. – 1984. – Vol. 1. – P. 23–27 (in Russian).
12. Pletyukhov, V. A. To the theory of particles of spin 3/2 / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // Russian Physics Journal. – 1985. – Vol. 28, № 1. – P. 91—95 (in Russian).
13. Pletyukhov, V. A. On the relationship between various formulations of particle theory with spin 3/2 / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // Proceedings of the Academy of Sciences of the BSSR. Physics and Mathematics series. – 1985. – Vol. 5. – P. 90–95 (in Russian).
14. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. N.Y. – 1961. – Vol. 13.– P. 121–145.
15. Hagen, C. R. Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field / C. R. Hagen, L. P. S. Singh L.P.S. // Phys. Rev. D. – 1982. – Vol. 26. – P. 393–398.
16. Loide, R. K. Equations for a vector-bispinor / R. K. Loide // J. Phys. A. – 1984. – Vol. 17. – P. 2535–2550.
17. Red'kov, V. M. Particle fields in the Riemann space and the Lorentz group / V. M. Red'kov – Minsk: Belorusian science Publ., 2009. – 486 p.
18. Pletyukhov, V. A. Relativistic wave equations and internal degrees of freedom / V. A. Pletyukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk: Belaruskayanavuka Publ., 2015. – 328 p. (in Russian).
19. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems / V. V. Kisel [et al.]. - New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. - 402 p., 404 p.
20. Kisel, V. V. Fradkin equation for a spin 3/2 particle in presence of external electromagnetic and gravitational Fields / V. V. Kisel [et al.] // Ukr. J. Phys. – 2019. – Vol. 64, № 12. – P. 1112–1117.
21. Ivashkevich, A. V. Zero mass field with the spin 3/2: solutions of the wave equation and the helicity operator / A. V. Ivashkevich, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Pro-

ceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. – 2019. – Vol. 55, № 3. – P. 338–354 (in Russian).
22. Ivashkevich, A. V. Spherical solutions of the wave equation for a spin 3/2 particle / A. V. Ivashkevich, E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel [et al.] // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2019. – Vol. 63, № 3. – P. 282–290 (in Russian).
23. Ivashkevich, A. V. Spin 3/2 particle: Pauli – Fierz theory, non-relativistic approximation / A. V. Ivashkevich, Ya. A. Voynova, E. M. Ovsiyuk [ey al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. – 2020. – Vol. 56, № 3. – P. 335–349.

Для цитирования:
Ивашкевич, А.В.Нерелятивистское приближение для частицы со спином 3/2 в гравитационном поле / А. В. Ивашкевич // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – № 6 (82). – С. 64–70. DOI: 10.19110/1994-5655-2024-6-64-70

For citation:
Ivashkevich, A.V. The nonrelativistic approximation for a spin 3/2 particle in gravitation field / A. V. Ivashkevich // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2025. – № 6 (82). – P. 64–70. DOI: 10.19110/1994-5655-2024-6-64-70

Дата поступления рукописи: 08.04.2025
Received: 08.04.2025